# HALLIDAY RESNICK • WALKER

PODSTAWY FIZYKI

**&** PWN

# WYBRANE WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNE (WARTOŚCI ZAOKRĄGLONE)

<b>Powietrze</b> (suche, w temp. 20°C i pod ciśn. 1 atm)	
gestość	$1.21 \text{ kg/m}^3$
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	$1010 J/(kg \cdot K)$
stosunek ciepeł właściwych $c_{\rm p}/c_{\rm p}$	1.40
predkość dźwieku	343 m/s
nateżenie pola elektrycznego przebicia	$3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$
efektywna masa molowa	0,0289 kg/mol
Woda	
gestość	$1000 \text{ kg/m}^3$
predkość dźwięku	1460 m/s
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	4190 J/(kg · K)
ciepło topnienia (w temp. $0^{\circ}$ C)	333 kJ/kg
ciepło parowania (w temp. 100°C)	2260 kJ/kg
współczynnik załamania ( $\lambda = 589$ nm)	1,33
masa molowa	0,0180 kg/mol
Ziemia	
masa	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
średni promień	$6,37 \cdot 10^{6} \text{ m}^{-1}$
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi	9,8 m/s <sup>2</sup>
standardowe ciśnienie atmosferyczne	$1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
okres ruchu satelity na orbicie odległej od Ziemi o 100 km	86,3 min
promień orbity geostacjonarnej	42 200 km
prędkość ucieczki	11,2 km/s
dipolowy moment magnetyczny	$8,0 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$
średnie pole elektryczne na powierzchni Ziemi	150 V/m, skierowane w dół
Odległości od Ziemi	
do Księżyca	$3,82 \cdot 10^8 \text{ m}$
do Słońca	$1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$
do najbliższej gwiazdy	$4,04 \cdot 10^{16} \text{ m}$
do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20} \text{ m}$
do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22} \text{ m}$
do granicy obserwowalnego Wszechświata	$\sim 10^{26} { m m}$

# WZORY MATEMATYCZNE — PATRZ DODATEK E

# **ALFABET GRECKI**

alfa	А	α	iota	Ι	ι	ro	Р	ρ
beta	В	$\beta$	kappa	Κ	κ	sigma	Σ	σ
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	Т	τ
delta	$\Delta$	δ	mi	Μ	$\mu$	ypsilon	Υ	υ
epsilon	Е	$\epsilon$	ni	Ν	ν	fi	Φ	$\phi, \varphi$
dzeta	Ζ	ζ	ksi	Ξ	ξ	chi	Х	χ
eta	Η	η	omikron	0	0	psi	Ψ	$\psi$
theta	Θ	$\theta$	pi	П	$\pi$	omega	Ω	ω

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 20449803A3134636



Przekład z języka angielskiego wydanie 1: **Zygmunt Ajduk, Marek Jaworski** wydanie 2: **Adam Babiński, Krzysztof Turzyński** 



PODSTAWY

FIZYKI

1

WYDANIE 2



Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 20449803A3134636

Dane oryginału

*Fundamentals of Physics Extended*, 10th edition, by Jearl Walker, David Halliday, Robert Resnick

Copyright © 2014, 2011, 2008, 2005 John Wiley & Sons, Inc.

All rights reserved. This translation under licence with the original publisher John Wiley & Sons, Inc.

Projekt okładki i stron tytułowych **Przemysław Spiechowski** Ilustracja na okładce **jabiru/Depositphotos** 

Przekład z języka angielskiego: wydanie 1: Zygmunt Ajduk (rozdz. 22–28) Marek Jaworski (rozdz. 29–33) wydanie 2: Adam Babiński (rozdz. 21–27) Krzysztof Turzyński (rozdz. 28–32)

Wydawca **Izabela Ewa Mika** Redaktor prowadzący **Irena Puchalska** Redaktor merytoryczny **Agnieszka Grabarczyk** Produkcja **Mariola Grzywacka** Łamanie **FixPoint, Warszawa** 

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo. Więcej na www.legalnakultura.pl Polska Izba Książki

Copyright © for the Polish edition by Wydawnictwo Naukowe PWN SA Warszawa 2003, 2015

ISBN 978-83-01-18124-6 tom 3 ISBN 978-83-01-18123-9 tomy 1–5

Wydanie drugie

Wydawnictwo Naukowe PWN SA 02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2 infolinia 801 33 33 88 tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288 e-mail: pwn@pwn.com.pl, www.pwn.pl

Druk i oprawa: Drukarnia Art-Druk, Kobyłka

# SPIS TREŚCI

#### **TOM 1**

- 1. Pomiar
- 2. Ruch prostoliniowy
- 3. Wektory
- 4. Ruch w dwóch i trzech wymiarach
- 5. Siła i ruch I
- 6. Siła i ruch II
- 7. Energia kinetyczna i praca
- 8. Energia potencjalna i zachowanie energii
- 9. Środek masy i pęd
- 10. Obroty
- 11. Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

#### **TOM 2**

- 12. Równowaga i sprężystość
- 13. Grawitacja
- 14. Płyny
- **15**. Drgania
- 16. Fale I
- 17. Fale II
- 18. Temperatura, ciepło i pierwsza zasada termodynamiki
- 19. Kinetyczna teoria gazów
- 20. Entropia i druga zasada termodynamiki

#### TOM 3

- 21. Prawo Coulomba
- 22. Pole elektryczne

- 23. Prawo Gaussa
- 24. Potencjał elektryczny
- 25. Pojemność elektryczna
- 26. Prąd elektryczny i opór elektryczny
- 27. Obwody elektryczne
- 28. Pole magnetyczne
- 29. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu
- 30. Zjawisko indukcji i indukcyjność
- 31. Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny
- 32. Równani Maxwella: magnetyzm materii

#### **TOM 4**

- **33.** Fale elektromagnetyczne
- 34. Obrazy
- 35. Interferencja
- 36. Dyfrakcja
- 37. Teoria względności

#### **TOM 5**

- **38.** Fotony i fale materii
- 39. Jeszcze o falach materii
- 40. Wszystko o atomach
- 41. Przewodnictwo elektryczne ciał stałych
- 42. Fizyka jądrowa
- 43. Energia jądrowa
- 44. Kwarki, leptony i Wielki Wybuch

#### Dodatki

#### Od Wydawcy do drugiego wydania polskiego xi

Przedmowa xIII

#### Podziękowania xxi

- 21. Prawo Coulomba 1
- 21.1. Prawo Coulomba 1 O fizyce 2 Ładunek elektryczny 3 Przewodniki i izolatory 4 Prawo Coulomba 7 Przewodniki kuliste 9
- 21.2. Ładunek jest skwantowany 15 Ładunek jest skwantowany 15
- 21.3. Ładunek jest zachowany 17 Ładunek jest zachowany 17 Podsumowanie 18 Pytania 19 Zadania 21

#### 22. Pole elektryczne 29

- 22.1. Pole elektryczne 29 O fizyce 29 Pole elektryczne 30 Linie pola elektrycznego 31
- 22.2. Pole elektryczne ładunku punktowego 33 Pole elektryczne ładunku punktowego 33
- 22.3. Pole elektryczne dipola elektrycznego 36 Pole elektryczne dipola elektrycznego 36
- 22.4. Pole elektryczne naładowanej linii 39 Pole elektryczne naładowanej linii 39
- 22.5. Pole elektryczne naładowanej tarczy 46 Pole elektryczne naładowanej tarczy 46

- 22.6. Ładunek punktowy w polu elektrycznym 48 Ładunek punktowy w polu elektrycznym 48
- 22.7. Dipol w polu elektrycznym 51 Dipol w polu elektrycznym 51 Podsumowanie 55 Pytania 56 Zadania 58
- 23. Prawo Gaussa 67
- 23.1. Strumień pola elektrycznego 67 O fizyce 67 Strumień pola elektrycznego 69
- 23.2. Prawo Gaussa 74 Prawo Gaussa 74 Prawo Gaussa a prawo Coulomba 76
- 23.3. Izolowany przewodnik naładowany 79 Izolowany przewodnik naładowany 79
- 23.4. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa 83 Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa 83
- 23.5. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria płaszczyznowa 85 Zastosowanie prawa Gaussa: symetria płaszczyznowa 86
- 23.6. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna 89 Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna 89 Podsumowanie 91 Pytania 92 Zadania 93

#### 24. Potencjał elektryczny 102

#### 24.1. Potencjał elektryczny 102

O fizyce 103 Potencjał elektryczny i elektryczna energia potencjalna 103 Ruch w polu elektrycznym 105

24.2. Powierzchnie ekwipotencjalne a pole elektryczne 108 Powierzchnie ekwipotencialne 109

Obliczanie potencjału na podstawie natężenia pola 110

#### VIII SPIS TREŚCI

24.3. Potencjał pola naładowanej cząstki 113

Potencjał pola naładowanej cząstki 114 Potencjał pola układu naładowanych cząstek 115

24.4. Potencjał pola dipola elektrycznego 117

Potencjał pola dipola elektrycznego 117 Indukowany moment dipolowy 118

24.5. Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie 119 Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie 119

Naładowana linia 120 Naładowana tarcza 121

- 24.6. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału 122 Obliczanie nateżenia pola na podstawie potencjału 122
- 24.7. Elektryczna energia potencjalna układu naładowanych cząstek 124

Elektryczna energia potencjalna układu naładowanych cząstek 124

24.8. Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika 128

> Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika 128 Wyładowanie iskrowe z naładowanego przewodnika 129 Izolowany przewodnik w zewnętrznym polu elektrycznym 129 Podsumowanie 130 Pytania 131 Zadania 133

#### 25. Pojemność elektryczna 143

25.1. Pojemność elektryczna 143

O fizyce 143 Pojemność elektryczna 144 Ładowanie kondensatora 145

- 25.2. Obliczanie pojemności elektrycznej 146 Obliczanie pojemności elektrycznej 146
- 25.3. Kondensatory połączone równolegie i szeregowo 151 Kondensatory połączone równolegie i szeregowo 151
- 25.4. Energia zmagazynowana w polu elektrycznym 157 Energia zmagazynowana w polu elektrycznym 157
- 25.5. Kondensator z dielektrykiem 160 Kondensator z dielektrykiem 161 Dielektryki: obraz mikroskopowy 163

25.6. Dielektryki i prawo Gaussa 165 Dielektryki i prawo Gaussa 165 Podsumowanie 168 Pytania 169 Zadania 170

#### 26. Prąd elektryczny i opór elektryczny 178

- 26.1. Prąd elektryczny 178 O fizyce 178 Prąd elektryczny 179
- 26.2. Gęstość prądu elektrycznego 182 Gęstość prądu 182
- 26.3. Opór elektryczny i opór elektryczny właściwy 187 Opór elektryczny i opór elektryczny właściwy 187
- 26.4. Prawo Ohma 191 Prawo Ohma 192 Prawo Ohma — obraz mikroskopowy 193
- 26.5. Moc w obwodach elektrycznych, półprzewodniki, nadprzewodniki 196
   Moc w obwodach elektrycznych 196
   Półprzewodniki 198
   Nadprzewodniki 200
   Podsumowanie 200
   Pytania 201
   Zadania 203

#### 27. Obwody elektryczne 210

- 27.1. Obwody elektryczne o jednym oczku 210
  O fizyce 211 "Pompowanie" ładunków 211
  Praca, energia i SEM 212
  Obliczanie natężenia prądu w obwodzie o jednym oczku 214 Inne obwody o jednym oczku 216 Różnica potencjałów pomiędzy dwoma punktami 218
- 27.2. Obwody elektryczne o wielu oczkach 222 Obwody o wielu oczkach 223
- 27.3. Amperomierz i woltomierz 230 Amperomierz i woltomierz 230
- 27.4. Obwody RC 231 Obwody RC 232 Podsumowanie 237 Pytania 237 Zadania 239
- 28. Pole magnetyczne 251
- 28.1. POLE MAGNETYCZNE I DEFINICJA WEKTORA  $\overrightarrow{B}$  251

0 fizyce 251 Co wytwarza pole magnetyczne? 252 Definicja wektora  $\overrightarrow{B}$  253

- 28.2. Pola skrzyżowane: odkrycie elektronu 258 Pola skrzyżowane: odkrycie elektronu 258
- 28.3. Pola skrzyżowane: zjawisko Halla 260 Pola skrzyżowane: zjawisko Halla 261
- 28.4. Ruch cząstek naładowanych po okręgu w polu magnetycznym 265

Ruch cząstek naładowanych po okręgu w polu magnetycznym 265 Tory śrubowe 267

- 28.5. Cyklotrony i synchrotrony 269 Cyklotrony i synchrotrony 269 Synchrotron protonów 271
- 28.6. Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem 272 Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem 272
- 28.7. Moment siły działający na ramkę z prądem 275 Moment siły działający na ramkę z prądem 275
- 28.8. Dipolowy moment magnetyczny 277 Dipolowy moment magnetyczny 278 Podsumowanie 281 Pytania 281 Zadania 283
- 29. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu 293
- 29.1. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu 293

0 fizyce 293

Obliczanie indukcji magnetycznej pola wywołanego przepływem prądu 294

- 29.2. Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem 301 Siły działające między dwoma równoległymi przewodami
- 29.3. PRAWO AMPÈRE'A 303 Prawo Ampère'a 303

z pradem 301

- 29.4. Solenoidy i toroidy 309 Solenoidy i toroidy 309
- 29.5. Cewka z prądem jako dipol magnetyczny 312

Cewka z prądem jako dipol magnetyczny 313 Podsumowanie 315 Pytania 316 Zadania 318

#### 30. Zjawisko indukcji i indukcyjność 329

30.1. Prawo Faradaya i reguła Lenza 329

O fizyce 330 Dwa doświadczenia 330 Prawo indukcji Faradaya 331 Reguła Lenza 334

- **30.2.** Zjawisko indukcji i przekazywanie energii 338 Zjawisko indukcji i przekazywanie energii 339
- 30.3. Indukowane pola elektryczne 342 Indukowane pola elektryczne 343
- 30.4. Cewki i indukcyjność 348 Cewki i indukcyjność 348
- 30.5. Samoindukcja 350 Samoindukcja 350
- 30.6. Obwody *RL* 352 Obwody *RL* 352
- 30.7. Energia zmagazynowana w polu magnetycznym 357 Energia zmagazynowana w polu magnetycznym 357
- **30.8. Gęstość energii pola magnetycznego** 359 Gęstość energii pola magnetycznego 360
- 30.9. Indukcja wzajemna 361 Indukcja wzajemna 361 Podsumowanie 364 Pytania 365 Zadania 367

#### 31. Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny 378

- 31.1. Drgania elektromagnetyczne w obwodach LC 378 O fizyce 379 Drgania obwodu LC: opis jakościowy 379 Analogiczne układy drgające: elektryczny i mechaniczny 382 Drgania obwodu LC: opis ilościowy 383
- 31.2. Drgania tłumione w obwodzie *RLC* 387 Drgania tłumione w obwodzie *RLC* 387
- 31.3. Drgania wymuszone: trzy proste obwody 389 Prąd zmienny 390 Drgania wymuszone 391 Trzy proste obwody 392
- 31.4. Obwód szeregowy RLC 400 Obwód szeregowy RLC 400

#### X SPIS TREŚCI

- **31.5. Moc w obwodach prądu zmiennego** 407 Moc w obwodach prądu zmiennego 407
- **31.6. Transformatory 411** Transformatory 411 Podsumowanie 416 Pytania 417 Zadania 418

#### 32. Równania Maxwella: magnetyzm materii 426

- 32.1. Prawo Gaussa dla pól magnetycznych 426 O fizyce 426 Prawo Gaussa dla pól magnetycznych 427
- 32.2. Indukowane pole magnetyczne 428 Indukowane pole magnetyczne 429 Uogólnione prawo Ampère'a 430
- 32.3. Prąd przesunięcia 432 Prąd przesunięcia 433 Równania Maxwella 436
- 32.4. Magnesy 437 Magnesy 437
- 32.5. Magnetyzm i elektrony 439 Magnetyzm i elektrony 440 Materiały magnetyczne 445
- 32.6. Diamagnetyzm 446 Diamagnetyzm 446

- 32.7. Paramagnetyzm 448 Paramagnetyzm 449
- 32.8. Ferromagnetyzm 451 Ferromagnetyzm 452 Podsumowanie 455 Pytania 457 Zadania 458

#### Dodatki 466

- A. Międzynarodowy Układ Jednostek (SI) 466
- B. Niektóre podstawowe stałe fizyczne 468
- C. Niektóre dane astronomiczne 470
- D. Współczynniki zamiany jednostek 472
- E. Wzory matematyczne 476
- F. Właściwości pierwiastków 479
- G. Układ okresowy pierwiastków 482

Autorzy zdjęć 483

Odpowiedzi 484

Skorowidz 488

## OD WYDAWCY DO DRUGIEGO WYDANIA POLSKIEGO

Od czasu gdy do rąk polskich Czytelników trafiło I wydanie *Podstaw fizyki*, będące tłumaczeniem VI wydania oryginalnego, na rynku amerykańskim ukazały się trzy kolejne wydania tego znakomitego podręcznika. Obecne, II wydanie polskie jest tłumaczeniem **X wydania oryginalnego**.

W książce poczyniono pewne zmiany. Podzielono na nowo rozdziały, tak by podrozdziały dotyczyły jednego podstawowego pojęcia. Na początku każdego z nich dodano listę celów nauczania, a po nich informację o podstawowych faktach, które należy przyswoić. Dodatkowo znacznie zmodyfikowano rozdziały o prawie Gaussa i potencjale elektrycznym, które sprawiały studentom najwięcej trudności. W rozdziałach dotyczących fizyki kwantowej rozszerzono natomiast omówienie równania Schrödingera. Oddzielono również opis modelu atomu Bohra od rozwiązania równania Schrödingera dla atomu wodoru. Dodano także podrozdział o promieniowaniu ciała doskonale czarnego i prawie Plancka.

Cenne uzupełnienie stanowi 16 nowych przykładów napisanych z myślą o dokładniejszym wyjaśnieniu fragmentów wykładu oraz 250 nowych zadań domowych i 50 pytań.

Dodatkowo wydawca oryginału na swojej platformie WileyPLUS udostępnia czytelnikom dynamiczne centrum kształcenia (strony https://www. wileyplus.com/WileyCDA/ oraz http://www.webassign.net/index.html). Opis jego zawartości znajduje się w Przedmowie. Studenci uczelni w USA otrzymują dostęp do materiałów po wykonaniu trzech kroków: zalogowaniu się, podaniu kodu (który otrzymali wraz zakupionym podręcznikiem lub który zakupili osobno) i podaniu URL, który uzyskali od wykładowcy.

Polscy czytelnicy mogą uzyskać dostęp do części tych udogodnień ze strony<sup>\*</sup>:

http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-1118230728.html

Natomiast strona

http://bcs.wiley.com/he-bcs/

Books?action=index&bcsId=1074&itemId=0471320005

zawiera podobne zasoby dla szóstego wydania amerykańskiego.

<sup>\*</sup>Stan na 27 lutego 2015 r. Po kliknęciu Visit Companion Site (w polu Students Resources) otwiera się strona Students Companion Site. Po wybraniu Browse by Resource jest wyświetlana lista obejmująca: symulacje (Concept Simulations), eseje Jearla Walkera (Jearl Walker Essays), instrukcje użycia kalkulatorów (Programmable Calculator Instructions) oraz interaktywne rozwiązania zadań (Interactive Learning Ware).

# DLACZEGO NAPISAŁEM TĘ KSIĄŻKĘ

Fizyka to wielkie wyzwanie, ale również świetna zabawa. Uprzytomniłem to sobie w pełni w dniu, gdy Sharon, jedna w moich studentek, zapytała mnie nagle: "A czy cokolwiek z tego wszystkiego ma jakiś związek z moim codziennym życiem?". Oczywiście natychmiast odpowiedziałem: "Sharon, to wszystko ma związek z twoim codziennym życiem — taka już jest fizyka".

Poprosiła, bym wyjaśnił jej to na jakimś przykładzie. Myślałem i myślałem, i żaden dobry przykład nie przychodził mi do głowy. Wieczorem tego dnia zacząłem pisać książkę *The Flying Circus of Physics (Latający cyrk fizyki*, John Wiley & Sons Inc., 1975), głównie dla Sharon, ale i dla siebie, gdyż zdałem sobie sprawę, że czuję to samo, co ona. Przez sześć lat szukałem najbardziej mi odpowiadającego podręcznika fizyki. Testowałem ich dziesiątki, były dobrze napisane i oparte na najlepszych koncepcjach dydaktycznych, lecz czegoś mi w nich brakowało. Fizyka to najciekawszy na świecie przedmiot, gdyż mówi o tym, jak świat naprawdę działa. Tymczasem większość podręczników fizyki jest niemal całkiem pozbawiona informacji o związkach fizyki z otaczającym nas światem. Cała przyjemność studiowania fizyki gdzieś więc umyka.

W Podstawach fizyki zawarłem wiele fizyki związanej ze światem wokół nas, a także powiązałem ten podręcznik z nowym wydaniem *Latającego cyrku fizyki*. Materiał czerpałem w większości z treści moich zajęć z podstaw fizyki, podczas których mogę najlepiej poznać po wyrazie twarzy i szczerych uwagach studentów, które tematy i sposoby ich przedstawienia trafiają do słuchaczy, a które nie. Zapisywałem przypadki, w których odniosłem sukcesy, i te, w których poniosłem porażki, co mi potem pomogło zdecydować, co umieścić w tej książce. Od dość już odległego czasu, gdy spotkałem Sharon, mówię wszystkim studentom wciąż to samo: "Tak, wychodząc od podstawowych pojęć fizyki, możesz naprawdę dojść na drodze rozumowania aż do wniosków dotyczących świata, z którym stykasz się na co dzień, a dopiero zrozumienie, jak działa świat wokół nas, to prawdziwa przyjemność, jakiej dostarcza nam fizyka".

Pisząc tę książkę, miałem wiele celów, a najważniejszym z nich było danie wykładowcom narzędzi do nauczenia studentów, jak skutecznie czytać tekst podręcznika, identyfikować podstawowe pojęcia, rozumować, zadając istotne pytania, i wreszcie rozwiązywać zagadnienia ilościowe. To nie jest proces łatwy ani dla studentów, ani dla wykładowców. Zajęcia, których podstawą będzie ta książka, mogą się okazać najtrudniejsze z odbywanych przez studenta. Mogą być też jednak najbardziej pożyteczne, gdyż dotyczą podstawowych metod poznania, jak działa świat, z których korzystają wszystkie inne nauki przyrodnicze i dziedziny techniki.



Wielu użytkowników wydania dziewiątego (zarówno wykładowców, jak i studentów) przysłało mi uwagi dotyczące podręcznika i sugestie jego ulepszenia. Te uwagi i sugestie zostały uwzględnione w tekście i zadaniach obecnego wydania. Wydawca — John Wiley & Sons — i ja traktujemy tę książkę jako projekt otwarty i zachęcamy wszystkich jej użytkowników do pisania do nas. Sugestie, poprawki oraz uwagi, pozytywne i negatywne, prosimy przysyłać na adres wydawnictwa John Wiley & Sons lub mój, Jearla Walkera: Physics Department, Cleveland State University, Cleveland, OH 44115, USA (można również skorzystać z bloga na stronie www.flyingcircusofphysics.com). Możemy nie dać rady odpowiedzieć na wszystkie listy, lecz zapoznamy się z każdym z nich.

# CO JEST W KSIĄŻCE NOWEGO

**Nowe podrozdziały i cele nauczania** "Czego powinienem się nauczyć z tego podrozdziału?", pytali mnie zawsze studenci — nie tylko najsłabsi, najlepsi także. Rzecz w tym, że nawet dobry, myślący student może nie być pewien, czy w trakcie lektury fragmentu książki wychwycił najważniejsze zawarte tam fakty i stwierdzenia. I ja tak się czułem dawno temu, gdy na pierwszym roku studiów, ucząc się fizyki, korzystałem z pierwszego wydania podręcznika Hallidaya i Resnicka.

Aby pomóc w tym względzie studentom, podzieliłem na nowo rozdziały, tak by podrozdziały dotyczyły jednego podstawowego pojęcia, a na początku każdego podrozdziału dodałem listę celów nauczania. Taka lista to spis podstawowych treści nauczania i umiejętności, jakie student powinien opanować podczas lektury danego podrozdziału. Po spisie celów nauczania jest krótka informacja o podstawowych faktach, które trzeba sobie przyswoić — na przykład pierwszy podrozdział rozdziału 16, w którym student musi poznać wyjątkowo wiele nowych pojęć i terminów. Nie będzie jednak musiał sam dokonywać identyfikacji podstawowych faktów, ponieważ dostaje od autora książki spis, w istocie rzeczy podobny do listy czynności, jakie musi wykonać pilot samolotu przed skierowaniem pojazdu na pas startowy i samym startem.



**Powiązanie zadań domowych z celami nauczania** Pytania i zadania zamieszczone na końcu każdego rozdziału są przypisane — na platformie *Wiley-PLUS* — do jednego z celów nauczania, tak by od razu odpowiedzieć na pytanie (zwykle niewypowiedziane): "W jakim celu rozwiązuję to zadanie? Czego ma mnie ono nauczyć?". Jestem przekonany, że znając cel zadania, student lepiej się nauczy wykorzystywać ten cel nauczania w zadaniach o innej treści, lecz dotyczących tych samych podstawowych faktów. Powinno się w ten sposób pokonać problem wielu studentów, którzy po rozwiązaniu konkretnego zadania nie potrafią skorzystać z tych samych podstawowych faktów w zadaniach dotyczących nieco odmiennych sytuacji.

**Rozdziały napisane na nowo** Rok po roku moi studenci oceniali pewne ważne rozdziały oraz niektóre fragmenty innych jako szczególnie trudne. Postanowiłem więc w obecnym wydaniu dokonać w tych miejscach wielu zmian. Na przykład, znacznie zmodyfikowałem rozdziały o prawie Gaussa i potencjale elektrycznym, które sprawiały moim studentom wiele trudności. Tok wykładu jest tam teraz bardziej płynny i skupiony na podstawo-

wych faktach. W rozdziałach dotyczących fizyki kwantowej rozszerzyłem omówienie równania Schrödingera, dodając zagadnienie odbicia fal materii od stopnia potencjału. Na prośbę wielu wykładowców oddzieliłem opis modelu atomu Bohra od rozwiązania równania Schrödingera dla atomu wodoru, tak by fragment o pracach Bohra, mających już dziś tylko historyczne znaczenie, można było opuścić. Dodałem również podrozdział o promieniowaniu ciała doskonale czarnego i prawie Plancka.

**Nowe przykłady oraz pytania i zadania domowe** Podręcznik zawiera teraz szesnaście nowych przykładów napisanych z myślą o dodatkowym wyjaśnieniu fragmentów wykładu, które moi studenci uważali za szczególnie trudne. Do zebranych w końcowych częściach rozdziałów pytań i zadań domowych dodano łącznie 250 zadań i 50 pytań. Niektóre z nich przywrócono z poprzednich wydań książki, o co prosiło wielu wykładowców.

**llustracje wideo** W wersji elektronicznej podręcznika, dostępnej na platformie *WileyPLUS*, można znaleźć około 30 rysunków i fotografii z książki, przygotowanych w wersji wideo przez Davida Maiullo z Rutgers University. Fizyka dotyczy bardzo często ruchu różnych obiektów — film pokazuje w takich przypadkach znacznie więcej niż statyczny rysunek lub fotografia.

**Pomoc online** Platforma *WileyPLUS* zawiera nie tylko program do oceniania studentów online. Jest to dynamiczne centrum kształcenia, gdzie można znaleźć między innymi szczegółowe omówienie rozwiązań wielu zadań, quizy sprawdzające zrozumienie studiowanego materiału, animacje, setki przykładów, wiele symulacji i pokazów oraz ponad 1500 filmów, których tematy obejmują przegląd niezbędnych zagadnień matematycznych po miniwykłady dotyczące przykładów z podręcznika. Wiele nowych elementów tej pomocy online pojawia się na platformie *WileyPLUS* co semestr. W ramach przygotowania niniejszego 10. wydania podręcznika wiele fotografii dotyczących ruchu ciał zastąpiono filmami, dzięki czemu ruch można spowolnić, by analizować go szczegółowo.

Tysiące takich elementów pomocy online jest dostępnych w trybie 24/7, a korzystać z nich można powielokroć — tyle razy, ile tylko potrzeba. Jeśli więc na przykład student popadnie w kłopoty przy rozwiązaniu zadania domowego o godzinie 2 w nocy (co jest chyba typową godziną odrabiania przez studentów pracy domowej), to za pomocą jednego kliknięcia myszą będzie mógł skorzystać z przyjaznej pomocy online.

#### NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

Gdy sam studiowałem fizykę, korzystając z pierwszego wydania podręcznika Hallidaya i Resnicka, musiałem ten sam rozdział czytać wiele razy, by go dobrze zrozumieć. Dziś lepiej zdajemy sobie sprawę z tego, że różni studenci uczą się wydajnie w bardzo różny sposób. Przygotowałem więc dla nich różnego rodzaju narzędzia dydaktyczne zawarte teraz w nowym wydaniu podręcznika oraz na platformie *WileyPLUS*. Są to:



PIUS

PIUS

Animacje kluczowych ilustracji z każdego rozdziału. W tekście książki są one oznaczone ikonką wiru. W wersji elektronicznej rozdziału, na platformie *WileyPLUS*, kliknięcie myszką uruchamia animację. Wybrałem ilustracje, które zawierają wiele informacji, tak by student zyskiwał możliwie











dużo, obserwując przez minutę lub dwie fizykę w działaniu, a nie tylko rysunek w podręczniku. Student poznaje w ten sposób dynamikę zjawisk fizycznych, przy czym oczywiście animację może sobie powtarzać, ile razy chce.

**Filmy** Nagrałem już ponad 1500 krótkich filmów (a co semestr powstają nowe). Odtwarzając taki film, student widzi, co rysuję lub piszę, słysząc jednocześnie, jak omawiam jakieś zagadnienie, tak jakby siedział przy mnie w gabinecie, a ja — mówiąc do niego — pisałbym lub rysował coś na kartce papieru. Oczywiście bezpośredni kontakt z wykładowcą (na wykładzie, ćwiczeniach czy konsultacjach) pozostanie zawsze najlepszą z metod dydaktycznych, ale moje filmy wideo też mają swoje zalety — są dostępne 24 godziny na dobę przez 7 dni w tygodniu i można je oglądać dowolnie wiele razy. Oto różne rodzaje tych filmów:

• **Ponowne omówienie treści niektórych rozdziałów** (jak na konsultacjach). Skupiłem się na tematach, które sprawiają studentom najwięcej trudności, czyli na tych, przy których moi studenci najczęściej drapali się w głowę.

• **Przypomnienie matematyki ze szkoły średniej**, między innymi podstawowe operacje algebraiczne, funkcje trygonometryczne oraz układy równań.

• Nowe zagadnienia matematyczne, na przykład mnożenie wektorów.

• Omówienie każdego przykładu z podręcznika. Podobnie jak w tekście książki, nie rozglądam się po prostu za wzorem, z którego dałoby się skorzystać, lecz badam fizyczną treść zagadnienia, wychodząc od podstawowych faktów dotyczących zadania. Staram się też pokazać, jak wykorzystać przykłady z książki do poznania typowych metod rozwiązywania zadań, które będzie można później zastosować w innych — być może całkiem odmiennych — zadaniach.

• Rozwiązania 20% zadań domowych zamieszczonych na końcu rozdziałów. Dostępność tych rozwiązań zależy od decyzji wykładowcy. Może on na przykład postanowić, by były one widoczne dla studentów dopiero po oddaniu pracy domowej lub rozwiązaniu quizu. Rozwiązania nie mają postaci prostych, rutynowych recept. Jak przy przykładach, wychodzimy od podstawowych faktów i na drodze logicznego rozumowania docieramy do końcowej odpowiedzi. Student poznaje nie tylko rozwiązanie konkretnego zadania, lecz także metody radzenia sobie z dowolnymi zadaniami, nawet całkiem niestandardowymi.

• **Przykłady, jak mądrze korzystać z wykresów** (a nie tylko odczytywać z nich liczby bez zrozumienia fizyki zagadnienia).

**Pomoc do zadań** Na platformie *WileyPLUS* można znaleźć wiele narzędzi, które opracowałem w celu ułatwienia studentom nabycia umiejętności rozwiązywania zadań. Oto one:

• Każdy przykład z podręcznika jest dostępny online zarówno w formacie tekstu z książki, jak i w formacie wideo.

• Setki dodatkowych przykładów. Są one dostępne jako osobne pozycje, lecz wykładowcy mają możliwość umieszczenia linków do nich przy zadaniach domowych. Jeśli na przykład zadanie domowe dotyczy klocka na równi pochyłej, to link kieruje studenta do przykładu związanego z tym zagadnieniem. Przykład nie jest jednak po prostu kopią zadania, a zatem jego rozwiązanie nie nadaje się do wykorzystania bez zrozumienia (czyli nie można go skopiować i przedstawić jako rozwiązanie zadania domowego).

• Tutoriale GO do 15% zadań zamieszczonych na końcu rozdziałów podręcznika. Są to interaktywne rozwiązania zadań, w których pomagam studentowi przebyć w kilku krokach drogę od podstawowych faktów do końcowej odpowiedzi. W każdym kroku student odpowiada na pytanie. Jeśli odpowiedź jest prawidłowa, przechodzi do następnego kroku, a jeśli nie, dostaje dodatkową wskazówkę. Dopiero w ostatnim kroku (prowadzącym do końcowej odpowiedzi) student nie dostaje żadnej podpowiedzi. Zrobiłem to celowo, by na końcu zadania student ponosił całkowitą odpowiedzialność za swoje decyzje. Czasami zadania interaktywne wyprowadzają rozwiązującego w pole, gdy udziela niepoprawnych odpowiedzi, co bywa źródłem frustracji studenta. Moje tutoriale GO to nie pułapki, gdyż w każdej chwili student może wrócić do początku zadania.

• Wskazówki do wszystkich zadań domowych są dostępne, lecz ich ujawnienie studentom zależy od decyzji wykładowcy. Są to prawdziwe wskazówki, które dotyczą podstawowych faktów i ogólnej metody rozwiązania, a nie przepisy, jak udzielić prawidłowej odpowiedzi bez zrozumienia, dlaczego jest właśnie taka.

#### Ocena postępów studenta

PLUS

• **Pytania dotyczące zawartości rozdziału**. Gdy student otwiera rozdział wersji elektronicznej, na końcu tego rozdziału pojawia się pytanie dotyczące jego zawartości, wybrane losowo z zestawu przygotowanych uprzednio pytań. Sformułowałem je tak, by do podania odpowiedzi nie była potrzebna żadna analiza ani nawet głębsze zrozumienie treści — chodzi tylko o to, by sprawdzić, czy student istotnie przeczytał dany rozdział. Wykładowcy pozostawiono decyzję o tym, czy odpowiedź studenta będzie elementem jego oceny, czy tylko informacją dla czytającego.

• Większość rozdziałów zawiera sprawdziany. Są one tak pomyślane, by wymagały pewnej analizy i decyzji studenta co do treści fizycznej rozdziału. *Na końcu książki można znaleźć odpowiedzi do wszystkich sprawdzianów*.

#### Sprawdzian 1

• Na platformie *WileyPLUS* są wszystkie zadania domowe z podręcznika (a nawet wiele więcej). Wykładowca może wybrać dla studentów zadania domowe, polecić, by zostały przesłane przez sieć, i oceniać je w *WileyPLUS*. Może na przykład ustalić termin złożenia rozwiązań i pozwolić składać je ograniczoną liczbę razy. Wykładowca może też zdecydować, jakie narzędzia dydaktyczne związane z danym zadaniem domowym zostaną ujawnione studentom — wskazówki, przykłady, omówienie treści rozdziału, rozwiązania interaktywne, powtórzenia podstaw matematycznych, a nawet rozwiązania w postaci wideo. Te ostatnie może udostępnić studentom na przykład po terminie oddania pracy domowej.

		10	556
This GO Tutorial will pro When you are finished, question while you work consists of 4 steps).	vide you with a step-by-ste go back and try the proble , you can just drag this scr	ep guide on how to approach this proble m again on your own. To view the origi een to the side. (This GO Tutorial	em. nal
Step 1 : Solution Step	o 1 of GO Tutorial 10-30		
KEY IDEAS: (1) When an object rotat acceleration equations of (1) $\omega = \omega_0 + \alpha t$	es at constant angular acco f Table 10-1 modified for an	sleration, we can use the constant- ngular motion:	
$(2)\theta - \theta_0 = \omega_0 t +$	$\frac{1}{2}\alpha t^{2}$		
$(3)\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha$	$(\theta - \theta_0)$		
$(4)\theta-\theta_0=\frac{1}{2}(\omega_0$	$+\omega t(\omega +$		
$(5)\theta-\theta_0=\omega t-$	$\frac{1}{2}\alpha t^2$		
Counterclockwise is the (2) If a particle moves a (centripetal) acceleration along the circular path) is $a_r = \frac{V^2}{2} = \omega^2 r$	positive direction of rotation round a rotation axis at rac n ar at any moment is relat and its angular speed at the	n, and clockwise is the negative directi fius r, the magnitude of its radial ed to its tangential speed v (the speed t moment by	on.
- /			
(3) If a particle moves a acceleration at (the acce acceleration a at that mo at a that mo at a rox	round a rotation axis at rac leration along the circular p ment by	sus r, the magnitude of its tangential both) at any moment is related to angu	lar
(4) If a particle moves a which it rotates is related $s = r\Delta\theta$	round a rotation axis at rac d to the distance s it moves	Sius r, the angular displacement throug along its circular path by	h
GETTING STARTED: Whi flywheel?	at is the radius of rotation (	in meters) of a point on the rim of the	
Number	Unit	•	
exact number, no tolera	nce		
		Check Your Inp	ut.
Step 2 : Solution Step	o 2 of GO Tutorial 10-30	Check Your Inp	ut,
Step 2 : Solution Step	p 2 of GO Tutorial 10-30 speed in radians per secor	Check Your Inp	ut
Step 2 : Solution Step What is the final angular	o 2 of GO Tutorial 10-30 speed in radians per secon	Check Your Inp	ut.
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number	o 2 of GO Tutorial 10-30 speed in radians per secon Unit	Check Your Inp	ut
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number the tolerance is +/-2%	o 2 of GO Tutorial 10-30 speed in radians per secon Unit	Check Your Inp	ut.
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number the tolerance is +/-2%	o 2 of GO Tutorial 10-30 speed in radians per secon Unit	Check Your Inp	ut.
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number the tolerance is +/-2% Step 2 : Solution Step	o 2 of GO Tutorial 10-30 speed in radians per secon Unit o 3 of GO Tutorial 10-30	Check Your Inp	ut;
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number the tolerance is +/-2% Step 2 : Solution Step What was the initial angu	o 2 of GO Tutorial 10-30 speed in radians per secon Unit o 3 of GO Tutorial 10-30 ilar speed?	Check Your Ing	ut.
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number the tolerance is +/-2% Step 3 : Solution Step What was the initial angu Number	b 2 of GO Tutorial 10-30 speed in radians per secon Unit b 3 of GO Tutorial 10-30 Jar speed? Unit	Check Your Inp	ut.
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number Step 3 : Solution Step What was the initial angu Number	o 2 of GO Tutorial 10-30 speed in radians per secon Unit o 3 of GO Tutorial 10-30 Jar speed?	Check Your Inp	ut.
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number the tolerance is +/-2% Step 2 : Solution Step 2 : Solution Step What was the initial angu Number exact number, no tolere	<ul> <li>2 of GO Tutorial 10-30</li> <li>speed in refians per secondure</li> <li>unit</li> <li>b 3 of GO Tutorial 10-30</li> <li>dar speed?</li> <li>Unit</li> <li>Unit</li> </ul>	Check Your Inp	ut.
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number Number Step 2 : Solution Step 3 : Solution Step Number exact number, no tolere Step 4 : Solution Step	2 of GO Tutorial 10-30     3 of GO Tutorial 10-30     0 of GO Tutorial 10-30     inde     inde     inde     inde     inde     inde     inde     inde	Check Your Inp	ut.
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number be tolerance is +/-2% Step 2 : Solution Step Number exact number, no toleran Step <u>4</u> : Solution Step	9 2 of GO Tutorial 10-30 speed in radians per secon Unit 9 3 of GO Tutorial 10-30 far speed? Unit Unit Not	Check Your Inp	ut.
Step 2 i Solution Step what is the final angular Number Step 2 i Solution Step what was the initial angu- Number exact number, no toleres Step <u>4</u> i Solution Step Through shatt angular di	2 of GC Tutorial 10-30 speed in radians per secon Unit 3 of GC Tutorial 10-30 har speed? Unit unit of GC Tutorial 10-30 of GC Tutorial 10-30	Check Your Inp	ut.
Step 2 : Solution Step 2 : Solution Step 2 : Solution Step 3 : Solution Step 3 : Solution Step 3 : Solution Step 5 : Sol	<ul> <li>2 of GO Tutorial 10-30</li> <li>speed in radians per secon</li> <li>unit</li> <li>b 3 of GO Tutorial 10-30</li> <li>dar speed?</li> <li>Unit</li> <li>o 4 of GO Tutorial 10-30</li> <li>stance does the flywheel re</li> <li>Unit</li> </ul>	Check Your Inp	ut.
Step 2 : Solution Step What is the final angular Number [ the tolerance is +/-2% Step 2 : Solution Step Number [ search number, no tolera step ± : Solution Step Through what angular di Number [ the tolerance is +/-2%	<ul> <li>2 of GO Tutorial 10-30</li> <li>a peed in radiana per secon</li> <li>Unit</li> <li>D of GO Tutorial 10-30</li> <li>der speed?</li> <li>Unit</li> <li>der of GO Tutorial 10-30</li> <li>stance does the flywheel rc</li> <li>Unit</li> <li>Unit</li> </ul>	Check Your Inp	ut.

• **Rozwiązania symboliczne**. Każdy rozdział zawiera też zadania, w których odpowiedź nie jest liczbowa, lecz ma postać wyrażenia algebraicznego.

• Na platformie *WileyPLUS* są również dostępne wszystkie pytania z końcowych części rozdziałów. Mają one postać pytań wielokrotnego wyboru i służą do oceny zrozumienia przez studenta pojęciowej zawartości rozdziału.

**Ikony pomocy dodatkowej** Do niektórych zadań o numerach nieparzystych są dostępne szczegółowe rozwiązania w postaci drukowanej lub elektronicznej. Przy numerze takiego zadania jest umieszczona ikonka (SSM lub WWW) informująca o tym studenta i wykładowcę. Inne ikonki informują o istnieniu dla danego zadania tutoriala GO, rozwiązania interaktywnego w programie Interactive LearningWare oraz powiązania z książką *Latający cyrk fizyki*. Na początku listy zadań w każdym rozdziale jest umieszczona legenda wyjaśniająca znaczenie wszystkich ikonek przy numerach zadań.

 Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się

 na stronach WileyPLUS (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

•-••• Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w Student Solutions Manual

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce The Flying Circus of Physics i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

#### WERSJE PODRĘCZNIKA\*

W celu zaspokojenia indywidualnych potrzeb wykładowców i studentów, dziesiąte wydane *Podstaw fizyki* jest dostępne w kilku wersjach.

Wydanie podstawowe zawiera rozdziały 1-37 (ISBN 9781118230718).

**Wydanie rozszerzone** zawiera ponadto siedem dodatkowych rozdziałów o fizyce kwantowej i kosmologii, czyli łącznie rozdziały 1–44 (ISBN 9781118230725).

**Wydanie dwutomowe**: tom 1 — rozdziały 1–20 (mechanika i termodynamika), oprawa twarda, ISBN 9781118233764; tom 2 — rozdziały 21– 44 (elektryczność i magnetyzm, optyka oraz fizyka kwantowa), oprawa twarda, ISBN 9781118230732.

#### MATERIAŁY DODATKOWE DLA WYKŁADOWCÓW

**Instructor's Solutions Manual** (Zbiór rozwiązań dla wykładowcy), autor: Sen-Ben Liao, Lawrence Livermore National Laboratory. W zbiorze tym podano szczegółowe rozwiązania wszystkich zadań zebranych na końcu poszczególnych rozdziałów. Są one dostępne w formacie MSWord i PDF.

**Strona wykładowcy** http://www.wiley.com/college/halliday

<sup>\*</sup>Polskie wydanie jest tłumaczeniem wydania rozszerzonego (przyp. red.).

• **Instructor's Manual** (Poradnik wykładowcy). Zawiera wyjaśnienia najważniejszych zagadnień z każdego rozdziału, pokazy doświadczeń, projekty doświadczalne i komputerowe, opis filmów i narzędzi, odpowiedzi do wszystkich pytań, zadań i sprawdzianów, przewodnik do zadań z poprzednich wydań podręcznika oraz spis wszystkich zadań, których rozwiązania są dostępne dla studentów (SSM, WWW i ILW).

• **Prezentacje w formacie PowerPoint**. Użyteczna pomoc dla nowych wykładowców — zawiera spis głównych pojęć oraz rysunki i wzory z każdego rozdziału.

• **System badania reakcji sali ("clicker")**, autor pytań: David Marx, Illinois State University. Zawiera on: quiz z prostymi pytaniami do sprawdzenia, czy studenci przeczytali wyznaczony fragment podręcznika, oraz zbiór pytań przeznaczonych na zajęcia prowadzone w trybie wykładu interaktywnego.

• Wiley Physics Simulations, autorzy: Andrew Duffy, Boston University, oraz John Gastineau, Vernier Software. Jest to zbiór 50 symulacji interaktywnych (appletów Javy) do wykorzystania w ramach pokazów wykładowych.

• Wiley Physics Demonstrations, autor: David Maiullo, Rutgers University. Zbiór cyfrowych filmów, na których przedstawiono 80 standardowych pokazów fizycznych. Można je pokazać na wykładzie, są też udostępnione na platformie *WileyPLUS*. Towarzyszy mu instrukcja dla wykładowcy, zawierająca też pytania typu "clicker".

• Test Bank (bank testów) do 10. wydania książki, gruntownie przebudowany przez Suzanne Willis, Northern Illinois University. Zawiera ponad 2200 pytań testowych wielokrotnego wyboru. Są one także dostępne w komputerowym banku testów, umożliwiającym wykładowcy tworzenie własnych zestawów pytań testowych (w wersjach dla komputerów IBM oraz Macintosh).

• Wszystkie ilustracje z podręcznika przygotowane do wyświetlenia na wykładzie oraz wydrukowania.

**Ocena online prac domowych i quizów** Dziesiąte wydanie *Podstaw fizyki* może być używane nie tylko przy wykorzystaniu platformy *WileyPLUS*, lecz również platform WebAssignPLUS oraz LON-CAPA, które także umożliwiają wykładowcy zadawanie i ocenianie online prac domowych i quizów. Na platformie WebAssignPLUS studenci mają także dostęp do elektronicznej wersji podręcznika.

### MATERIAŁY DODATKOWE DLA STUDENTÓW

**Strona studenta**, http://www.wiley.com/college/halliday, została opracowana specjalnie dla użytkowników 10. wydania *Podstaw fizyki*, aby zapewnić studentom dodatkową pomoc w studiowaniu fizyki. Zawiera rozwiązania wybranych zadań z końcowych części rozdziałów (oznaczonych ikonką WWW), ćwiczenia symulacyjne, porady dla użytkowników kalkulatorów programowalnych, a także rozwiązania interaktywne z wykorzystaniem programu Interactive LearningWare (patrz niżej). **Student Study Guide** (*Poradnik studenta*), autor: Thomas Barrett, Ohio State University, ISBN 9781118230787. Zawiera przegląd najważniejszych pojęć z poszczególnych rozdziałów, opis metod rozwiązywania zadań oraz szczegółowe przykłady.

**Student Solutions Manual** (*Zbiór rozwiązań dla studenta*), autor: Sen-Ben Liao, Lawrence Livermore National Laboratory, ISBN 9781118230664. Zawiera szczegółowe rozwiązania 15% zadań zebranych w końcowych częściach rozdziałów podręcznika. Został on napisany dla 10. wydania HRW z wykorzystaniem nowatorskiej metody TEAL (Think, Express, Analyze, and Learn — Myśl, Wyrażaj, Analizuj, Poznawaj). Powstała ona i została rozwinięta na uczelni Massachusetts Institute of Technology, gdzie sprawdziła się jako wydajna metoda kształcenia studentów. Zadania rozwiązane z wykorzystaniem tej metody są oznaczone w podręczniku ikonką SSM.

**Interactive Learning Ware** to oprogramowanie umożliwiające studentowi rozwiązanie 200 zadań z podręcznika. Odbywa się to interaktywnie, tzn. w kolejnych krokach student udziela odpowiedzi, a w przypadku odpowiedzi niepoprawnych uzyskuje pomoc w postaci informacji o typowych błędach. Zadania, które można rozwiązać w ten sposób, są oznaczone ikonką ILW.

**Introductory Physics with Calculus as a Second Language** Mastering Problem Solving (Wstęp do fizyki dla studentów poznających również rachunek różniczkowy i całkowy: Mistrzowskie rozwiązywanie zadań), autor: Thomas Barrett, Ohio State University, ISBN 9780471739104. Celem tej małej książeczki jest nauczenie studentów, jak wydajnie i skutecznie rozwiązywać zadania. Student nauczy się z niej rozpoznawania typowej struktury zadań z fizyki, dzielenia ich na dające się opanować etapy i stosowania odpowiednich metod. Książka zawiera również wiele zadań rozwiązanych krok po kroku.

# P O D Z I Ę K O W A N I A

Na końcowy kształt podręcznika miało wpływ bardzo wiele osób. Sen-Ben Liao z Lawrence Livermore National Laboratory, James Whitenton z Southern Polytechnic State University i Jerry Shi z Pasadena City College podjęli i wykonali herkulesowe zadanie przygotowania rozwiązań wszystkich zadań z podręcznika. W wydawnictwie John Wiley głównymi redaktorami podręcznika byli Stuart Johnson, Geraldine Osnato i Aly Rentrop, którzy nadzorowali cały projekt od początku do końca. Dziękujemy Elizabeth Swain, redaktorowi do spraw produkcji, za koordynację różnych elementów złożonego procesu produkcji książki. Dziękujemy Maddy Lesure za projekt graficzny książki i okładki, Lee Goldstein za projekt układu strony, Helen Walden za redakcję tekstu, a Lilian Brady za korektę składu. Jennifer Atkins z zapałem wyszukiwała ciekawe i niezwykłe zdjęcia. Wydawnictwo John Wiley & Sons, Inc. oraz Jearl Walker są wdzięczni wielu osobom za uwagi i propozycje dotyczące poprzednich wydań podręcznika. Oto te osoby:

Jonathan Abramson, Portland State University; Omar Adawi, Parkland College; Edward Adelson, The Ohio State University; Steven R. Baker, Naval Postgraduate School; George Caplan, Wellesley College; Richard Kass, The Ohio State University; M.R. Khoshbin-e-Khoshnazar, Research Institution for Curriculum Development & Educational Innovations (Tehran); Craig Kletzing, University of Iowa; Stuart Loucks, American River College; Laurence Lurio, Northern Illinois University; Ponn Maheswaranathan, Winthrop University; Joe McCullough, Cabrillo College; Carl E. Mungan, U.S. Naval Academy; Don N. Page, University of Alberta; Elie Riachi, Fort Scott Community College; Andrew G. Rinzler, University of Florida; Dubravka Rupnik, Louisiana State University; Robert Schabinger, Rutgers University; Ruth Schwartz, Milwaukee School of Engineering; Carol Strong, University of Alabama at Huntsville; Nora Thornber, Raritan Valley Community College; Frank Wang, LaGuardia Community College; Graham W. Wilson, University of Kansas; Roland Winkler, Northern Illinois University; William Zacharias, Cleveland State University; Ulrich Zurcher, Cleveland State University.

Na zakończenie chcemy podkreślić, że dysponowaliśmy znakomitym zespołem opiniodawców, i pragniemy wyrazić wdzięczność i podziękowanie każdemu z nich. Oto oni:

Maris A. Abolins, Michigan State University	Roger Clapp, University of South Florida	
Edward Adelson, Ohio State University	W. R. Conkie, Queen's University	
Nural Akchurin, Texas Tech	Renate Crawford, University of Massachusetts-Dartmouth	
Yildirim Aktas, University of North Carolina-Charlotte Mike Crivello, San Diego State University		
Barbara Andereck, Ohio Wesleyan University	Robert N. Davie, Jr., St. Petersburg Junior College	
Tetyana Antimirova, Ryerson University	Cheryl K. Dellai, Glendale Community College	
Mark Arnett, Kirkwood Community College	Eric R. Dietz, California State University at Chico	
Arun Bansil, Northeastern University	N. John DiNardo, Drexel University	
Richard Barber, Santa Clara University	Eugene Dunnam, University of Florida	
Neil Basecu, Westchester Community College	Robert Endorf, University of Cincinnati	
Anand Batra, Howard University	F. Paul Esposito, University of Cincinnati	
Kenneth Bolland, The Ohio State University	Jerry Finkelstein, San Jose State University	
Richard Bone, Florida International University	Robert H. Good, California State University-Hayward	
Michael E. Browne, University of Idaho	Michael Gorman, University of Houston	
Timothy J. Burns, Leeward Community College	Benjamin Grinstein, University of California, San Diego	
Joseph Buschi, Manhattan College	John B. Gruber, San Jose State University	
Philip A. Casabella, Rensselaer Polytechnic Institute	Ann Hanks, American River College	
Randall Caton, Christopher Newport College	Randy Harris, University of California–Davis	

#### XXII PODZIĘKOWANIA

Samuel Harris, Purdue University Harold B. Hart, Western Illinois University Rebecca Hartzler, Seattle Central Community College John Hubisz, North Carolina State University Joey Huston, Michigan State University David Ingram, Ohio University Shawn Jackson, University of Tulsa Hector Jimenez, University of Puerto Rico Sudhakar B. Joshi, York University Leonard M. Kahn, University of Rhode Island **Physics** Sudipa Kirtley, Rose-Hulman Institute Leonard Kleinman, University of Texas at Austin Craig Kletzing, University of Iowa Peter F. Koehler, University of Pittsburgh Arthur Z. Kovacs, Rochester Institute of Technology Kenneth Krane, Oregon State University Hadley Lawler, Vanderbilt University Priscilla Laws, Dickinson College Edbertho Leal, Polytechnic University of Puerto Rico Vern Lindberg, Rochester Institute of Technology broke Peter Loly, University of Manitoba James MacLaren, Tulane University Andreas Mandelis, University of Toronto Robert R. Marchini, Memphis State University Andrea Markelz, University at Buffalo, SUNY

Paul Marquard, Caspar College David Marx, Illinois State University Dan Mazilu, Washington and Lee University James H. McGuire, Tulane University David M. McKinstry, Eastern Washington University Jordon Morelli, *Oueen's University* Eugene Mosca, United States Naval Academy Eric R. Murray, Georgia Institute of Technology, School of James Napolitano, Rensselaer Polytechnic Institute Blaine Norum, University of Virginia Michael O'Shea, Kansas State University Patrick Papin, San Diego State University Kiumars Parvin, San Jose State University Robert Pelcovits, Brown University Oren P. Quist, South Dakota State University Joe Redish, University of Maryland Timothy M. Ritter, University of North Carolina at Pem-Dan Styer, Oberlin College Frank Wang, LaGuardia Community College Robert Webb, Texas A&M University Suzanne Willis, Northern Illinois University Shannon Willoughby, Montana State University

# Prawo Coulomba

Ζ

Α

Ł

D

21

# **21.1.** PRAWO COULOMBA

#### Czego się nauczysz?

R

0

Ζ

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **21.01** rozróżnić cząstki elektrycznie obojętne, naładowane ujemnie i naładowane dodatnio, a także identyfikować niezrównoważony ładunek wypadkowy;
- 21.02 rozróżnić przewodniki, izolatory, półprzewodniki i nadprzewodniki;
- 21.03 opisać właściwości elektryczne cząstek w atomie;
- 21.04 zidentyfikować elektrony przewodnictwa i wyjaśniać ich rolę w ładowaniu przewodzącego przedmiotu dodatnio lub ujemnie;
- 21.05 określić, co znaczą terminy "izolacja elektryczna" i "uziemienie";
- 21.06 wyjaśnić, w jaki sposób naładowane ciało może indukować ładunek elektryczny w drugim ciele;
- **21.07** stwierdzić, że ładunki tego samego znaku odpychają się, a ładunki przeciwnych znaków przyciągają się;
- 21.08 dla każdej z dwóch naładowanych cząstek narysować diagram pokazujący siłę elektrostatyczną (siłę Coulomba) w postaci wektora zaczepionego w punkcie, w którym znajduje się ta cząstka;
- 21.09 zastosować prawo Coulomba dla każdej z dwóch naładowanych cząstek w celu powiązania wielkości działającej na nią siły elektrostatycznej z wielkościami ładunków tych cząstek i odległością między nimi;
- **21.10** zauważyć, że prawo Coulomba ma zastosowanie tylko do cząstek (ładunków punktowych) lub ciał, które można traktować jak cząstki;

#### Podstawowe fakty \_

 Wielkość oddziaływania elektrycznego cząstki z otaczającymi ją obiektami zależy od jej ładunku elektrycznego (zwykle oznaczanego jako q). Ładunek elektryczny może być dodatni albo ujemny. Cząstki mające ładunki o takich samych znakach odpychają się, cząstki z ładunkami o przeciwnych znakach przyciągają się.

- 21.11 znaleźć siłę wypadkową jako sumę wektorową, a nie algebraiczną sił składowych, jeśli na cząstkę działa więcej niż jedna siła;
- **21.12** zauważyć, że jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha inne naładowane ciała tak, jakby cały jej ładunek był skupiony w jej środku;
- 21.13 zauważyć, że jeśli wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej znajduje się naładowana cząstka, to wypadkowa siła elektrostatyczna oddziaływania powłoki na tę cząstkę jest równa zeru;
- 21.14 zauważyć, że nadmiarowy ładunek elektryczny umieszczony na kulistym przewodniku rozprzestrzenia się równomiernie na jego zewnętrznej powierzchni;
- 21.15 zauważyć, że jeśli dwa jednakowe przewodzące kuliste przewodniki zetkną się lub zostaną połączone przewodzącym przewodem, to ich ładunek nadmiarowy rozdzieli się równo pomiędzy nie;
- 21.16 zauważyć, że w izolatorze może powstać dowolny rozkład ładunku elektrycznego i ładunek elektryczny może się także pojawić na jego powierzchniach wewnętrznych;
- 21.17 zauważyć, że natężenie prądu elektrycznego jest stosunkiem ilości ładunku przepływającego przez pewną powierzchnię w pewnym czasie do tego czasu;
- **21.18** zastosować związek pomiędzy natężeniem prądu, przedziałem czasu i ilością przepływającego ładunku.

• Ciało z jednakową ilością ładunku dodatniego i ujemnego jest obojętne elektrycznie. Ciało, w którym wielkości tych ładunków nie są równe, jest naładowane elektrycznie i ma ładunek nadmiarowy.

• Przewodniki to materiały, w których znaczna liczba elektronów może poruszać się swobodnie. Naładowane cząstki w izolatorach nie mogą się swobodnie poruszać.  Natężenie prądu elektrycznego I to stosunek ładunku elektrycznego dq przepływającego przez daną powierzchnię w przedziale czasu dt do tego czasu

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

• Prawo Coulomba określa siłę elektrostatyczną (elektryczną) działającą między naładowanymi cząstkami. Jeśli spoczywające (lub wolno poruszające się) cząstki o ładunkach  $q_1$  i  $q_2$  odległe są o r, to wartość siły działającej na każdą z nich ze strony drugiej cząstki jest następująca:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \qquad \text{(prawo Coulomba)},$$

gdzie  $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$  jest przenikalnością elektryczną próżni (stałą elektryczną). Wielkość  $1/4\pi\varepsilon_0$  jest często zastępowana stałą  $k = 8.99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ .

 Wektor siły elektrostatycznej działającej na jedną cząstkę naładowaną ze strony drugiej cząstki naładowanej jest skierowany w stronę tej drugiej cząstki (gdy ładunki cząstek są przeciwne) lub odwrotnie (gdy ładunki są tego samego znaku).

 Jeśli na cząstkę działa wiele sił elektrostatycznych, to siła wypadkowa jest sumą wektorową (a nie algebraiczną) sił składowych.

 Twierdzenie o powłoce 1. Jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały ładunek tej powłoki był skupiony w jej środku.

• Twierdzenie o powłoce 2. Jeśli cząstka naładowana znajduje się wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej, to wypadkowa siła elektrostatyczna oddziaływania powłoki na cząstkę jest równa zeru.

• Ładunek nadmiarowy rozprzestrzenia się równomiernie na (zewnętrznej) powierzchni przewodzącej powłoki kulistej.

#### 0 fizyce

Jesteśmy otoczeni urządzeniami, których działanie zależy od zjawisk elektromagnetycznych, czyli kombinacji zjawisk elektrycznych i magnetycznych. Na zjawiskach tych oparte jest działanie komputerów, telewizji, radia, łączności czy oświetlenia. Nawet elektrostatyczna folia do owijania żywności zawdzięcza swe właściwości tej dziedzinie fizyki. Fizyka zjawisk elektromagnetycznych jest także podstawą świata przyrody. Zawdzięczamy jej nie tylko istnienie wszystkich atomów i cząsteczek, ale także powstawanie wyładowań atmosferycznych, zórz polarnych i tęczy.

Pierwszymi badaczami zjawisk elektromagnetycznych byli starożytni filozofowie greccy, którzy odkryli, że potarty kawałek bursztynu przyciąga kawałeczki słomy. Dziś wiemy, że przyciąganie bursztynu i słomy wywołane jest siłą elektrostatyczną. Również Grecy zaobserwowali, że niektóre kamienie (naturalnie występujące w przyrodzie magnesy) przyciągają żelazo. Dziś wiadomo, że przyciąganie magnesu i żelaza jest wynikiem działania siły magnetycznej.

Z tych skromnych doświadczeń greckich filozofów powstała nauka o elektryczności i magnetyzmie. Obie dziedziny przez wieki rozwijały się niezależnie. Dopiero w 1820 roku Hans Christian Oersted znalazł między nimi związek: przepływ prądu elektrycznego w przewodniku powoduje odchylenie igły magnetycznej kompasu. Warto dodać, że Oersted dokonał tego niespodziewanego odkrycia, przygotowując pokaz do wykładu dla studentów fizyki.

Nowa nauka o elektromagnetyzmie rozwinęła się dzięki pracy uczonych z wielu krajów. Wśród nich należy wymienić przede wszystkim Michaela Faradaya, utalentowanego eksperymentatora, obdarzonego intuicją fizyczną i wyobraźnią. O jego zdolnościach świadczy fakt, że jego notatki laboratoryjne nie zawierają ani jednego równania. Koncepcje Faradaya zostały w połowie XIX wieku zapisane w postaci matematycznej przez Jamesa Clerka Maxwella. Maxwell wprowadził dodatkowo wiele nowych pomysłów i stworzył solidne podstawy teoretyczne elektromagnetyzmu. Zjawiska elektromagnetyczne omówimy w kolejnych 16 rozdziałach. Zaczniemy od zjawisk elektrycznych, a pierwszym krokiem do ich poznania będą rozważania o naturze ładunku elektrycznego i siły elektrycznej.

#### Ładunek elektryczny

Rozpoczniemy od dwóch pokazów, które mogą wyglądać na magię — naszym zadaniem będzie nadanie im sensu. Weźmy szklany pręt, który wcześniej (w suchy dzień) potarliśmy kawałkiem jedwabiu. Zawieśmy ten pręt na cienkiej nici zawiązanej na jego środku (rys. 21.1a). Zbliżmy do niego drugi szklany pręt, który także został wcześniej potarty jedwabną tkaniną. Zawieszony pręt w magiczny sposób odsuwa się od pręta, który zbliżamy. Widzimy, że odpycha go siła związana z trzymanym przez nas prętem, ale jak to się dzieje? Pręty nie dotykają się, nie czuje się wiatru, który mógłby poruszyć zawieszony pręt, ani nie słychać dźwięku, który mógłby zaburzyć jego równowagę.

W drugim pokazie trzymamy plastikowy pręt potarty wcześniej kawałkiem futra. Tym razem do zwieszonego szklanego pręta zbliżamy pręt plastikowy (rys. 21.1b). Tak jak uprzednio odpychanie, tak teraz przyciąganie zachodzi bez żadnego kontaktu czy też jakiejś zauważalnej łączności pomiędzy prętami.

W następnym rozdziale zastanowimy się, skąd zawieszony pręt "wie" o obecności drugiego pręta. Teraz jednak skupimy się na siłach, które wywołują obserwowane zjawiska. W pierwszym pokazie siła działająca na zawieszony pręt była *odpychająca*, a w drugim *przyciągająca*. Po wielu badaniach naukowcy stwierdzili, że źródłem sił pojawiających się w tego typu pokazach jest *ładunek elektryczny*, który wytwarzany jest na prętach podczas ich kontaktu z jedwabiem lub futrem. Ładunek elektryczny jest nieodłączną właściwością cząstek elementarnych, z których zbudowane są takie obiekty, jak pręty, jedwab czy futro. Ładunek jest zatem właściwością, którą cząstki mają zawsze i wszędzie.

*Dwa rodzaje.* Istnieją dwa rodzaje ładunków elektrycznych, nazwane przez amerykańskiego uczonego i męża stanu Benjamina Franklina ładunkiem dodatnim i ładunkiem ujemnym. Mógł on oczywiście nazwać je dowolnie (na przykład wiśniowym i orzechowym), jednak użycie znaków algebraicznych jest pomocne, gdy dodaje się ładunki, aby znaleźć ładunek wypadkowy. W większości przedmiotów codziennego użytku, takich jak na przykład kubek, istnieje w przybliżeniu równa liczba cząstek naładowanych ujemnie i dodatnio; ładunek wypadkowy jest równy zeru. W przypadku zerowego ładunku wypadkowego mówimy o *zrównoważeniu* ładunku. Ciało o zrównoważonym ładunku jest nazywane ciałem *elektrycznie obojętnym* lub krócej *obojętnym*.

*Ladunek niezrównoważony.* Twoje ciało jest zwykle w przybliżeniu elektrycznie obojętne. Jeśli jednak mieszkasz w rejonie o małej wilgotności powietrza, wiesz, że gdy chodzisz po pewnego rodzaju dywanach, ładunek elektryczny zgromadzony na twoim ciele może stać się odrobinę niezrównoważony. Albo zbierasz ładunek ujemny z dywanu (w miejscach kontaktu twoich butów z dywanem) i stajesz się naładowany ujemnie, albo tracisz ładunek ujemny i stajesz się naładowany dodatnio. W obu przypadkach ten dodatkowy ładunek nazywany jest *ładunkiem niezrównoważonym*.



**Rys. 21.1.** a) Dwa szklane pręty zostały potarte jedwabną tkaniną, po czym jeden z nich został zawieszony na nici. Gdy pręty są blisko siebie, odpychają się wzajemnie. b) Pręt plastikowy został potarty futrem. Gdy taki pręt zbliża się do pręta szklanego, oba pręty się przyciągają



**Rys. 21.2.** a) Dwa pręty naładowane ładunkami tego samego znaku się odpychają. b) Dwa pręty naładowane ładunkami o przeciwnych znakach się przyciągają. Znaki plus oznaczają wypadkowy ładunek dodatni, a znaki minus — wypadkowy ładunek ujemny

Prawdopodobnie nie zauważysz go, aż do chwili, gdy dotkniesz klamki lub innej osoby. Wtedy, jeśli twój ładunek niezrównoważony jest wystarczająco duży, pomiędzy tobą a tym innym obiektem przeskoczy iskra, likwidując tym samym twój niezrównoważony ładunek. Takie iskrzenie może być irytujące, a niekiedy nawet nieco bolesne. *Ładowanie* i *rozładowanie* nie zachodzi w warunkach dużej wilgotności, ponieważ woda w powietrzu *neutralizuje* twój niezrównoważony ładunek prawie tak szybko, jak się on na tobie gromadzi.

Dwiema z wielkich tajemnic fizyki są pytania: (1) *dlaczego* cząstki we Wszechświecie mają ładunek elektryczny (czym jest on w istocie?) i (2) *dlaczego* istnieją dwa (a nie powiedzmy jeden albo trzy) rodzaje ładunku elektrycznego. Tego po prostu nie wiemy. Mimo to naukowcy przeprowadzając mnóstwo doświadczeń podobnych do naszych pokazów, stwierdzili, że:

Cząstki z ładunkami elektrycznymi o takich samych znakach odpychają się, a cząstki z ładunkami o przeciwnych znakach się przyciągają.

Za chwilę zapiszemy tę regułę w postaci ilościowego prawa Coulomba dla *siły elektrostatycznej (elektrycznej*), działającej między naładowanymi cząstkami. Określenia *elektrostatyczna* używa się w celu podkreślenia faktu, że ładunki, o których mowa, albo spoczywają, albo poruszają się bardzo wolno.

*Pokazy.* Wróćmy teraz do naszych pokazów, aby zobaczyć w nich coś więcej niż magię i zrozumieć przyczyny ruchu prętów. Gdy pocieramy szklany pręt jedwabną szmatką, niewielka ilość ładunku ujemnego przenosi się z pręta na jedwab (podobnie jak z twojego ciała na dywan), pozostawiając na pręcie niewielką ilość nadmiarowego ładunku dodatniego. (Wyjaśnienie, w którą stronę przepływa ładunek nie jest oczywiste i wymaga mnóstwa doświadczeń). *Pocieramy* pręt jedwabiem, aby zwiększyć liczbę punktów styczności, a zatem i (ciągle niewielką) ilość przekazywanego ładunku. Zawieszamy naładowany pręt na nici, aby go *odizolować elektrycznie* od otoczenia (tak żeby pręt nie mógł zostać zobojętniony elektrycznie poprzez napłynięcie ładunku wystarczającego do neutralizacji jego ładunku). Gdy pocieramy jedwabną szmatką drugi pręt, on także ładuje się dodatnio. Kiedy zbliżamy go do zawieszonego pręta, obydwa pręty odpychają się (rys. 21.2a).

Gdy pocieramy futrem pręt plastikowy, przejmuje on z futra niezrównoważony ładunek ujemny. (Tu także znajomość kierunku przepływu ładunku wymagała mnóstwa doświadczeń). Jeśli pręt plastikowy (naładowany ujemnie) zbliżymy do zawieszonego pręta szklanego (naładowanego dodatnio), to dwa pręty będą wzajemnie się przyciągać (rys. 21.2b). Wszystkie te efekty są subtelne. Nie można zobaczyć ani ładunku, ani jego przepływu, a tylko efekty tych zmian.

#### Przewodniki i izolatory

Różne materiały można ogólnie klasyfikować zgodnie z możliwością przepływu w nich ładunku elektrycznego. **Przewodniki** są materiałami, w których ładunek elektryczny może się poruszać dość swobodnie. Są to na przykład metale (takie jak miedź w przewodzie elektrycznym zasilającym zwykłą lampę), ciało ludzkie czy woda z kranu. **Izolatory** są materiałami, w których ładunek nie może swobodnie przepływać. Przykładami izolatorów są guma (taka jak izolacja przewodu elektrycznego zasilającego lampę), plastik, szkło i chemicznie czysta woda. **Półprzewodniki** to materiały o właściwościach pośrednich między przewodnikami i izolatorami. Półprzewodnikami są na przykład krzem i german używane w układach scalonych. **Nadprzewodniki** są materiałami, które są *doskonałymi* przewodnikami. Ładunek elektryczny w nadprzewodnikach przepływa bez napotykania *jakiegokolwiek* oporu. W kolejnych rozdziałach będziemy mówić tylko o przewodnikach i izolatorach.

Ścieżka przewodzenia. Pokażemy teraz, w jaki sposób przewodnictwo pomaga usunąć ładunek nadmiarowy z dowolnego ciała. Pocieranie metalowego pręta wełną powoduje przeniesienie z wełny na pręt nadmiarowego ładunku elektrycznego. Jednak mimo tego przepływu nie będziesz w stanie naładować pręta, jeśli trzymając go w ręku, będziesz dotykał jednocześnie kranu. Dzieje się tak dlatego, że ty, pręt i kran jesteście przewodnikami połączonymi za pomocą instalacji hydraulicznej z powierzchnią Ziemi, która sama jest ogromnym przewodnikiem. Ponieważ nadmiarowe ładunki przeniesione z wełny na pręt odpychają się, więc wzajemnie oddalają się od siebie. Poruszają się najpierw wzdłuż pręta, następnie przez twoje ciało i wreszcie przez kran i instalację hydrauliczną, aby dotrzeć do powierzchni Ziemi, po której mogą się rozpłynąć. Proces ten powoduje elektryczne zobojętnienie pręta.

Stworzenie przewodzącego połączenia między ciałem i powierzchnią Ziemi nazywamy *uziemieniem* ciała, a zobojętnienie ciała (zachodzące przez pozbycie się przez nie niezrównoważonego ładunku dodatniego lub ujemnego) nazywamy *rozładowaniem* ciała. Jeśli natomiast pręt miedziany trzymamy za pomocą izolowanej rączki, to eliminujemy ścieżkę przewodzenia do Ziemi. Pręt można wtedy naładować przez pocieranie, jeśli tylko nie dotkniemy go bezpośrednio ręką.

*Cząstki naładowane.* Właściwości przewodników i izolatorów wynikają z budowy atomów i właściwości elektrycznych ich składników. Atomy zbudowane są z dodatnio naładowanych *protonów*, ujemnie naładowanych *elektronów* i elektrycznie obojętnych *neutronów*. Protony i neutrony są upakowane ściśle w *jądrze* znajdującym się w samym środku atomu.

Ładunek pojedynczego elektronu i ładunek pojedynczego protonu są sobie równe co do wartości bezwzględnej, ale mają przeciwny znak. Elektrycznie obojętny atom składa się więc z takiej samej liczby elektronów i protonów. Elektrony utrzymują się w pobliżu jądra, gdyż mają przeciwny znak ładunku niż protony w jądrze i dlatego są przez jądro przyciągane. Gdyby tak nie było, nie byłoby atomów i nie byłoby nas.

Gdy atomy przewodnika, np. miedzi, znajdują się blisko siebie tworząc ciało stałe, niektóre z ich zewnętrznych (czyli najluźniej związanych) elektronów przestają być związane z konkretnymi atomami i mogą swobodnie wędrować w całym ciele, pozostawiając dodatnio naładowane atomy (czyli *dodatnie jony*). Elektrony swobodne nazywamy *elektronami przewodnictwa*. W izolatorze jest ich bardzo mało lub nie ma ich wcale.

*Ładunki indukowane.* Z doświadczenia przedstawionego na rysunku 21.3 wynika, że w przewodniku istnieją ładunki swobodne. Ujemnie



**Rys. 21.3.** Obojętny pręt miedziany jest odizolowany elektrycznie od otoczenia, gdyż jest zawieszony na nieprzewodzącej nici. Każdy z końców miedzianego pręta jest przyciągany przez naładowany pręt plastikowy. Elektrony przewodnictwa w pręcie miedzianym są wtedy odpychane do dalszego końca tego pręta przez ujemny ładunek na pręcie plastikowym. Ten ujemny ładunek przyciąga ładunki dodatnie pozostałe na bliższym końcu pręta miedzianego i obraca pręt miedziany tak, aby jego bliższy koniec zbliżył się do pręta plastikowego naładowany pręt plastikowy przyciąga którykolwiek koniec izolowanego obojętnego pręta miedzianego, gdyż elektrony przewodnictwa w bliższym końcu pręta miedzianego są odpychane przez ujemny ładunek pręta plastikowego. Przesuwają się one do dalszego końca pręta miedzianego, pozostawiając bliższy koniec bez elektronów, czyli z niezrównoważonym ładunkiem dodatnim. Ładunek dodatni przyciąga ładunek ujemny znajdujący się w pręcie plastikowym. Chociaż pręt miedziany jako całość jest nadal obojętny, to ma *ładunki indukowane*. Oznacza to, że dodatnie i ujemne ładunki pręta ulegają rozdzieleniu wskutek obecności naładowanego pręta plastikowego znajdującego się w pobliżu.

Podobnie, jeśli do jednego z końców obojętnego pręta miedzianego zbliżymy dodatnio naładowany pręt szklany, to elektrony przewodnictwa w pręcie miedzianym zostaną przyciągnięte do końca bliższego szklanego pręta. Ten koniec pręta staje się ujemnie naładowany, a drugi — naładowany dodatnio.

Warto podkreślić, że tylko elektrony przewodnictwa mające ujemne ładunki elektryczne mogą się poruszać swobodnie. Dodatnie jony pozostają nieruchome. Ciało staje się więc naładowane dodatnio tylko w wyniku *odpływu ładunków ujemnych*.

#### Błękitna poświata emitowana z cukierka wintergrinowego

Pośrednim dowodem na przyciąganie ładunków o przeciwnych znakach są właściwości cukierka wintergrinowego. Jeśli po 15-minutowej adaptacji oczu do ciemności spojrzysz na kolegę jedzącego cukierka wintergrinowego, to po każdym ugryzieniu cukierka dostrzeżesz w jego ustach słaby błysk błękitnego światła. Gdy w cukierku kruszone są kryształki cukru, w każdej jego części pozostaje prawdopodobnie inna liczba elektronów. Przypuśćmy, że kryształek przełamuje się na dwie części *A* i *B*, w których na powierzchni części *A* znajduje się więcej elektronów niż na powierzchni części *B* (rys. 21.4). Oznacza to, że na powierzchni *B* znajduje się nadmiar jonów dodatnich (atomów, które utraciły elektrony na rzecz części *A*). Ponieważ elektrony z części *A* są silnie przyciągane przez jony na powierzchni części *B*, niektóre z nich przeskakują przez szczelinę pęknięcia.

Gdy części kryształka A i B oddalają się od siebie, powietrze (składające się głównie z azotu N<sub>2</sub>) napływa do szczeliny i wiele z przeskakujących elektronów zderza się z cząsteczkami azotu w powietrzu. Cząsteczki te emitują promieniowanie ultrafioletowe, którego nie widać. Jednak promieniowanie to pochłaniane przez cząsteczki na powierzchni cukierka wywołuje charakterystyczną błękitną poświatę, którą *możesz* zobaczyć. Tę poświatę zobaczysz w ustach kolegi gryzącego cukierek.



#### Sprawdzian 1

Na rysunku przedstawiono pięć par płytek. Płytki A, B i D są naładowanymi płytkami plastikowymi, a C jest obojętną elektrycznie płytką miedzianą. Dla trzech par zaznaczono siły elektrostatyczne, działające między nimi. Czy w pozostałych dwóch parach płytki przyciągają się, czy odpychają?





**Rys. 21.4.** Dwa kawałki cukierka wintergrinowego przedstawione w chwili, gdy się od siebie oddalają. Elektrony przeskakujące z naładowanej ujemnie powierzchni *A* na naładowaną dodatnio powierzchnię *B* zderzają się z cząsteczkami azotu (N<sub>2</sub>) obecnymi w powietrzu

#### **Prawo Coulomba**

Przejdziemy teraz do wzoru opisującego prawo Coulomba, ale najpierw uwaga. Wzór ten stosuje się tylko do naładowanych cząstek (i kilku innych obiektów, które można traktować jak cząstki). W przypadku ciał rozciągłych, na których ładunek zlokalizowany jest w różnych miejscach, musimy zastosować metody bardziej skomplikowane. Tak więc teraz zajmiemy się naładowanymi cząstkami, a nie na przykład dwoma naładowanymi kotami.

Jeśli zbliża się do siebie dwie naładowane cząstki, każda z nich działa na drugą **siłą elektrostatyczną**. Kierunek wektorów siły zależy od znaków ładunków. Jeśli cząstki mają ładunki o jednakowych znakach, odpychają się. Oznacza to, że wektor siły działającej na każdą cząstkę jest skierowany przeciwnie do wektora wskazującego drugą cząstkę (rys. 21.5a i b). Gdy uwolnimy te cząstki, zaczną one przyspieszać oddalając się od siebie. Natomiast jeśli ładunki tych cząstek mają przeciwne znaki, cząstki przyciągają się. Oznacza to, że wektor siły działającej na każdą z cząstek jest skierowany ku drugiej cząstce (rys. 21.5c). Gdy uwolnimy takie cząstki, zaczną przyspieszać zbliżając się do siebie.

Równanie opisujące siły elektrostatyczne działające na naładowane cząstki nosi nazwę **prawa Coulomba**, od nazwiska Charlesa Augustina Coulomba, który w 1785 roku doświadczalnie doszedł do tego wzoru. Zapiszmy to równanie w postaci wektorowej, używając w opisie cząstek pokazanych na rysunku 21.6, na którym cząstka 1 ma ładunek  $q_1$ , a cząstka 2 ma ładunek  $q_2$ . (Symbole te mogą reprezentować zarówno ładunek dodatni, jak i ujemny.) Skupmy się także na cząstce 1 i wyraźmy siłę działającą na nią w funkcji wektora jednostkowego  $\hat{r}$  skierowanego od cząstki 2 wzdłuż prostej łączącej obie cząstki. (Tak jak w przypadku innych wektorów jednostkowych, wektor  $\hat{r}$  ma długość równą 1 i jest bezwymiarowy. Ma on wskazywać kierunek i zwrot, tak jak strzałka na znaku drogowym.) Biorąc pod uwagę te założenia, możemy wyrazić siłę elektrostatyczną działającą na cząstkę 1 w postaci

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$
 (prawo Coulomba), (21.1)

gdzie r jest odległością pomiędzy cząstkami, a k jest dodatnią stałą zwaną stałą elektrostatyczną lub stałą Coulomba. Stałą k omówimy poniżej.

Sprawdźmy najpierw kierunek siły działającej na cząstkę 1 zgodnie ze wzorem (21.1). Jeśli  $q_1$  i  $q_2$  mają jednakowe znaki, to iloczyn  $q_1q_2$  jest dodatni. Tak więc wzór (21.1) mówi nam, że siła działająca na cząstkę 1 ma kierunek wektora  $\hat{r}$ , a więc cząstka 1 jest odpychana od cząstki 2. Dalej, jeśli  $q_1$  i  $q_2$  mają przeciwne znaki, to iloczyn  $q_1q_2$  jest ujemny. W takim przypadku wzór (21.1) mówi, że siła działająca na cząstkę 1 ma przeciwny zwrot niż wektor  $\hat{r}$ , co się zgadza, gdyż cząstka 1 jest przyciągana w stronę cząstki 2.

*Dygresja.* Zwróćmy uwagę na pewien ciekawy fakt. Postać wzoru (21.1) jest taka sama, jak postać wzoru Newtona<sup>\*</sup> (13.3) dla siły grawitacyj-



**Rys. 21.5.** Dwie naładowane cząstki odpychają się, jeśli mają ładunki tego samego znaku: a) oba są dodatnie, b) oba są ujemne. c) Cząstki przyciągają się, jeśli ich ładunki mają przeciwne znaki



**Rys. 21.6.** Siłę elektrostatyczną działającą na cząstkę 1 można zapisać, używając wektora jednostkowego î leżącego na osi łączącej oba ładunki i skierowanego radialnie od cząstki 2

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup>Należy jedynie pamiętać, że wektor jednostkowy zdefiniowany w rozdziale 13 był skierowany przeciwnie do wektora jednostkowego zdefiniowanego teraz. Stąd siła grawitacyjna jest zawsze przyciągająca (przyp. tłum.).

nej, działającej między dwiema cząstkami o masach  $m_1$  i  $m_2$ , znajdującymi się w odległości r

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$
 (prawo Newtona), (21.2)

gdzie G jest stałą grawitacyjną.

Chociaż oba rodzaje sił znacznie się różnią, to w obu wzorach pojawia się charakterystyczna zależność od odwrotności kwadratu odległości ( $\sim 1/r^2$ ), a także iloczyn wielkości charakteryzujących oddziałujące cząstki — mas w jednym przypadku, a ładunków w drugim. Różnica ta między nimi polega na tym, że siły grawitacyjne są zawsze siłami przyciągania, a siły elektrostatyczne, zależnie od znaków dwóch ładunków, mogą być siłami przyciągania lub odpychania. Różnica ta wynika stąd, że istnieje tylko jeden rodzaj masy, ale dwa rodzaje ładunków.

*Jednostka*. Jednostką ładunku w układzie SI jest **kulomb**. Ze względów praktycznych (związanych z dokładnością pomiarów) kulomb jest pochodną jednostki natężenia prądu elektrycznego I w układzie SI. O prądzie elektrycznym będziemy mówić w rozdziale 26, teraz zauważmy tylko, że natężenie prądu I jest stosunkiem ładunku dq przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika w jednostce czasu dt do tego czasu:

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(natężenie prądu elektrycznego).} \tag{21.3}$$

Przekształcając wzór (21.3) i zastępując symbole wielkości fizycznych ich jednostkami (kulomb C, amper A i sekunda s), widzimy, że

$$1C = 1A \cdot 1s$$

*Wartość siły.* Z powodów historycznych (i ze względu na prostszą postać wielu innych wzorów) stałą elektrostatyczną *k* we wzorze (21.1) zapisuje się często jako  $1/4\pi\varepsilon_0$ . Wtedy wartość siły elektrostatycznej opisanej prawem Coulomba

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \qquad \text{(prawo Coulomba).} \tag{21.4}$$

Stałe we wzorach (21.1) i (21.4) mają wartość

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2. \tag{21.5}$$

Wielkość  $\varepsilon_0$ , zwana **przenikalnością elektryczną próżni**, występuje nieraz we wzorach samodzielnie i ma wartość

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{C}^2 / (\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2).$$
 (21.6)

*Rozwiązywanie zadań.* Zauważ, że we wzorze (21.4) określającym wartość siły elektrostatycznej osobno wyznaczamy wartość siły działającej na wybraną cząstkę ze strony innej cząstki, a osobno określamy kierunek działającej siły, analizując znaki ładunków obu cząstek.

*Zasada superpozycji*. Tak jak w przypadku innych sił rozważanych w tej książce, siła elektrostatyczna spełnia zasadę superpozycji. Jeśli mamy *n* cząstek naładowanych, to oddziałują one niezależnie w parach i siła wy-

padkowa działająca na którąkolwiek z nich, np. cząstkę 1, jest równa sumie wektorowej

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \dots + \vec{F}_{1n},$$
 (21.7)

gdzie na przykład  $\vec{F}_{14}$  jest siłą oddziaływania cząstki 4 na cząstkę 1.

Równanie to jest kluczem do rozwiązania wielu zadań, a więc wyraźmy je słowami. Jeśli chcesz poznać wypadkową siłę działającą na wybraną cząstkę naładowaną, otoczoną innymi cząstkami naładowanymi, najpierw jasno zdefiniuj tę wybraną cząstkę. Następnie znajdź siły działające na tę cząstkę ze strony innych cząstek. Narysuj diagram z wektorami sił o początkach w punkcie, w którym znajduje się ta cząstka. (Może to brzmieć trywialnie, ale przeoczenie tego faktu łatwo prowadzi do błędów). Dalej, zgodnie z zasadami opisanymi w rozdziale 3, dodaj te siły *wektorowo* a nie skalarnie. (Nie możesz beztrosko dodawać ich wartości). W wyniku otrzymasz siłę wypadkową działającą na analizowaną cząstkę.

Mimo że wektorowa natura tych sił czyni rozwiązywanie zadań trudniejszym niż gdybyśmy mieli do czynienia ze skalarami, należy się cieszyć, że istnieje wzór (21.7). Gdyby dwa wektory sił nie dodawały się w prosty sposób, ale z jakichś względów wzmacniały wzajemnie, świat byłby znacznie trudniejszy do zrozumienia i opisania.

*Twierdzenia o powłoce.* W elektrostatyce istnieją odpowiedniki twierdzeń o powłoce, których używaliśmy przy omawianiu zagadnień związanych z grawitacją (podrozdział 13.1).

*Twierdzenie o powłoce 1.* Jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę znajdującą się na zewnątrz tej powłoki tak, jakby cały ładunek tej powłoki był skupiony w jej środku.

5.7

*Twierdzenie o powłoce 2.* Jeśli cząstka naładowana znajduje się wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej, to wypadkowa siła elektrostatyczna oddziaływania powłoki na cząstkę jest równa zeru.

(W pierwszym twierdzeniu należy założyć, że ładunek na powłoce jest dużo większy od ładunku cząstki, gdyż wtedy można zaniedbać zmianę rozkładu ładunku na powłoce, spowodowaną obecnością ładunku cząstki).

#### Przewodniki kuliste

Nadmiarowy ładunek na powłoce kulistej wykonanej z materiału przewodzącego rozkłada się jednorodnie na jej (zewnętrznej) powierzchni. Jeśli na przykład na kulistej powłoce metalowej umieścimy nadmiarowe elektrony, to będą one, odpychając się wzajemnie, starały od siebie oddalić. W efekcie będą rozprzestrzeniać się po dostępnej powierzchni, aż równomiernie rozłożą się na niej. Rozkład taki maksymalizuje odległości między parami nadmiarowych elektronów. Zgodnie z pierwszym twierdzeniem o powłoce, powłoka taka będzie wtedy przyciągać lub odpychać ładunki znajdujące się na zewnątrz tak, jakby cały ten nadmiarowy ładunek był skupiony w jej środku. Po usunięciu pewnego ładunku ujemnego z kulistej powłoki metalowej pozostały na powłoce ładunek dodatni jest także jednorodnie rozłożony na jej powierzchni. Jeśli np. usuniemy *n* elektronów, to powstanie *n* miejsc z ładunkiem dodatnim (miejsc pozbawionych elektronu), rozmieszczonych jednorodnie na powłoce. Zgodnie z pierwszym twierdzeniem o powłoce, będzie ona znów przyciągać lub odpychać ładunek znajdujący się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały niezrównoważony ładunek powłoki znajdował się w jej środku.

#### Sprawdzian 2

Na rysunku przedstawiono dwa protony (symbol p) i jeden elektron (symbol e), umieszczone na prostej. W którą stronę działają: a) siła elektrostatyczna oddziaływania elektronu na środkowy proton, b) siła elektrostatyczna oddziaływania drugiego protonu na środkowy proton, c) wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na środkowy proton?



#### Przykład 21.01. Znajdowanie siły wypadkowej oddziaływania dwóch innych cząstek

Poniższy przykład zawiera w istocie trzy elementy umożliwiające przejście od zagadnień łatwiejszych do trudniejszych. Wspólna dla każdego przypadku jest naładowana cząstka 1. Najpierw działa na nią jedna siła (łatwe ćwiczenie). Następnie siły są dwie, ale działają w przeciwnych kierunkach (umiarkowana komplikacja). Wreszcie dwie działające siły mają różne kierunki (i na poważnie trzeba potraktować fakt, że siły są wektorami). Kluczem do rozwiązania tych przykładów jest poprawne narysowanie właściwych sił *zanim* sięgniesz po kalkulator. (Rysunek 21.7 jest dostępny na stronie *WileyPLUS* w postaci udźwiękowionej animacji).

a) Na rysunku 21.7a przedstawiono dwie dodatnio naładowane cząstki, unieruchomione na osi x. Ładunki cząstek wynoszą  $q_1 = 1, 6 \cdot 10^{-19}$  C i  $q_2 = 3, 2 \cdot 10^{-19}$  C, a odległość pomiędzy cząstkami wynosi R = 0,02 m. Jakie są wartość i kierunek siły elektrostatycznej  $\vec{F}_{12}$ , z którą cząstka 2 oddziałuje na cząstkę 1?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Obydwie cząstki są dodatnio naładowane, dlatego też cząstka 1 jest odpychana przez cząstkę 2, a wartość siły jest określona wzorem (21.4). Stąd też działająca na cząstkę siła  $\vec{F}_{12}$  jest skierowana *od* cząstki 2 w ujemnym kierunku osi *x* (zgodnie z diagramem sił na rysunku 21.7b).

**Dwie cząstki:** Używając wzoru (21.4), po podstawieniu zamiast r odległości R, możemy obliczyć wartość siły  $F_{12}$  w następujący sposób:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{R^2}$$
  
= (8,99 \cdot 10<sup>9</sup> N \cdot m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>)  
 $\cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(0,02 \text{ m})^2}$   
= 1,15 \cdot 10^{-24} N.

Stąd siła  $\vec{F}_{12}$  ma następującą wartość i kierunek (względem dodatniego kierunku osi *x*):

$$1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N}$$
 i  $180^{\circ}$  (odpowiedź).

Możemy także zapisać  $\vec{F}_{12}$ , używając wektorów jednostkowych:

$$\vec{F}_{12} = -(1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N})\hat{i}$$
 (odpowiedź).

**b)** Rysunek 21.7c jest identyczny z rysunkiem 21.7a poza tym, że teraz dodatkowo między cząstkami 1 i 2 znajduje się cząstka 3. Jej ładunek wynosi  $q_3 = -3.2 \cdot 10^{-19}$  C. Cząstka 3 jest umieszczona w odległości  $\frac{3}{4}R$  od cząstki 1. Ile wynosi wypadkowa siła elektrostatyczna  $\vec{F}_{1,\text{wyp}}$  oddziaływania cząstek 2 i 3 na cząstkę 1?



**Rys. 21.7.** a) Dwie naładowane cząstki o ładunkach  $q_1$  i  $q_2$  znajdują się na osi x. b) Diagram sił dla cząstki 1 ilustruje działającą na nią siłę elektrostatyczną, pochodzącą od cząstki 2. c) Dołączenie cząstki 3. d) Diagram sił dla cząstki 1. e) Dołączenie cząstki 4. f) Diagram sił dla cząstki 1

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Obecność cząstki 3 nie zmienia siły elektrostatycznej oddziaływania cząstki 2 na cząstkę 1. Zatem siła  $\vec{F}_{12}$  nadal działa na cząstkę 1. Podobnie siła  $\vec{F}_{13}$  oddziaływania cząstki 3 na cząstkę 1 nie zmienia się wskutek obecności cząstki 2. Cząstki 1 i 3 mają ładunki o przeciwnym znaku, dlatego też cząstka 1 jest przyciągana przez cząstkę 3. Siła  $\vec{F}_{13}$  jest skierowana *do* cząstki 3 (zgodnie z diagramem sił na rysunku 21.7d).

**Trzy cząstki:** Aby znaleźć wartość siły  $\vec{F}_{13}$ , przepisujemy wzór (21.4) w postaci

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_3|}{(\frac{3}{4}R)^2}$$
  
= (8,99 \cdot 10<sup>9</sup> N \cdot m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>)  
 $\cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(\frac{3}{4})^2(0,02 \text{ m})^2}$   
= 2,05 \cdot 10^{-24} N.

Możemy także zapisać siłę  $\vec{F}_{13}$ , używając wektorów jednostkowych:

$$\vec{F}_{13} = (2,05 \cdot 10^{-24} \,\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}.$$

Siła wypadkowa  $\vec{F}_{1,wyp}$  działająca na cząstkę 1 jest sumą wektorową sił  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{13}$ , czyli zgodnie ze wzorem (21.7) siłę wypadkową  $\vec{F}_{1,wyp}$  działającą na cząstkę 1 możemy zapisać w postaci

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$
  
= -(1,15 \cdot 10^{-24} N)\tilde{i} + (2,05 \cdot 10^{-24} N)\tilde{i}  
= (9 \cdot 10^{-25} N)\tilde{i} (odpowied\tilde{z}).

Stąd  $\vec{F}_{1,wyp}$  ma następującą wartość i kierunek (względem dodatniego kierunku osi *x*):

$$9 \cdot 10^{-25}$$
 N i  $0^{\circ}$  (odpowiedź).

c) Rysunek 21.7e jest identyczny z rysunkiem 21.7a poza tym, że teraz dodatkowo dodano w zaznaczonym miejscu cząstkę 4 o ładunku  $q_4 = -3, 2 \cdot 10^{-19}$  C. Znajduje się ona w odległości  $\frac{3}{4}R$  od cząstki 1, na prostej tworzącej kąt  $\theta = 60^{\circ}$  z osią x. Ile wynosi wypadkowa siła elektrostatyczna  $\vec{F}_{1,wyp}$  oddziaływania cząstek 2 i 4 na cząstkę 1?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Siła wypadkowa  $\vec{F}_{1,wyp}$  jest sumą wektorową siły  $\vec{F}_{12}$ i nowej siły  $\vec{F}_{14}$  oddziaływania cząstki 4 na cząstkę 1. Cząstki 1 i 4 mają ładunki o przeciwnym znaku, dlatego też cząstka 1 jest przyciągana do cząstki 4. Stąd siła  $\vec{F}_{14}$  działająca na cząstkę 1 jest skierowana *do* cząstki 4 pod kątem  $\theta = 60^{\circ}$  (zgodnie z diagramem sił na rysunku 21.7f).

**Cztery cząstki:** Aby znaleźć wartość siły  $\vec{F}_{14}$ , przepisujemy wzór (21.4) w postaci

$$F_{14} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_4|}{(\frac{3}{4}R)^2}$$
  
= (8,99 \cdot 10<sup>9</sup> N \cdot m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>)  
 $\cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(\frac{3}{4})^2(0,02 \text{ m})^2}$   
= 2,05 \cdot 10^{-24} N.

Stąd na podstawie wzoru (21.7) możemy zapisać siłę wypadkową  $\vec{F}_{1,wyp}$  działającą na cząstkę 1 w postaci

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}.$$

Siły  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{14}$  nie są skierowane wzdłuż tej samej osi, więc *nie możemy* ich zsumować przez proste dodanie ich wartości. Musimy je dodawać jak wektory, stosując jedną z następujących metod.

**Metoda 1.** Bezpośrednie sumowanie na kalkulatorze z zaprogramowaną algebrą wektorową. Dla  $\vec{F}_{12}$  wprowadzamy wartość 1,  $15 \cdot 10^{-24}$  i kąt 180°, dla  $\vec{F}_{14}$  — wartość 2,  $05 \cdot 10^{-24}$  i kąt 60°. Następnie dodajemy wektory.

**Metoda 2.** Dodawanie przy zastosowaniu wektorów jednostkowych. Najpierw musimy zapisać  $\vec{F}_{14}$  w postaci

$$\vec{F}_{14} = (F_{14}\cos\theta)\hat{\mathbf{i}} + (F_{14}\sin\theta)\hat{\mathbf{j}}.$$

Podstawiając 2,05 · 10<sup>-24</sup> N za  $F_{14}$  i 60° za  $\theta$ , otrzymujemy

$$\vec{F}_{14} = (1,025 \cdot 10^{-24} \,\mathrm{N})\hat{i} + (1,775 \cdot 10^{-24} \,\mathrm{N})\hat{j}$$

US Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WilevPLUS.



Następnie dodajemy

$$\vec{F}_{1,\text{wyp}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}$$
  
= -(1,15 \cdot 10^{-24} N)\binom{i} + (1,025 \cdot 10^{-24} N)\binom{i}  
+ (1,775 \cdot 10^{-24} N)\binom{j}  
\approx (-1,25 \cdot 10^{-25} N)\binom{i} + (1,78 \cdot 10^{-24} N)\binom{j}  
(odpowied\zeta)

*Metoda 3. Sumowanie składowych sił.* Suma składowych *x* wynosi

$$F_{1,\text{wyp},x} = F_{12,x} + F_{14,x} = F_{12} + F_{14} \cos 60^{\circ}$$
  
= -1,15 \cdot 10^{-24} N + (2,05 \cdot 10^{-24} N)(\cos 60^{\circ})  
= -1,25 \cdot 10^{-25} N.

Suma składowych y wynosi

 $\theta$ 

$$F_{1,\text{wyp},y} = F_{12,y} + F_{14,y} = 0 + F_{14} \sin 60^{\circ}$$
  
= (2,05 \cdot 10^{-24} N)(\sin 60^{\cdot})  
= 1,78 \cdot 10^{-24} N.

Siła wypadkowa  $\vec{F}_{1,wyp}$  ma więc wartość

$$F_{1,\text{wyp}} = \sqrt{F_{1,\text{wyp},x}^2 + F_{1,\text{wyp},y}^2}$$
  
= 1,78 \cdot 10^{-24} N (odpowiedź).

Aby znależć kierunek siły  $\vec{F}_{1,wyp}$ , obliczamy

$$= \operatorname{arctg} \frac{F_{1,\operatorname{wyp},y}}{F_{1,\operatorname{wyp},x}} = -86^{\circ}.$$

Jest to jednak wynik niezgodny z warunkami zadania, gdyż siła  $\vec{F}_{1,wyp}$  musi mieć kierunek, mieszczący się między kierunkami sił  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{14}$ . Aby otrzymać taką wartość  $\theta$ , dodajemy 180° i otrzymujemy

$$-86^{\circ} + 180^{\circ} = 94^{\circ} \qquad (odpowiedź).$$

Na rysunku przedstawiono trzy układy złożone z elektronu e i dwóch protonów p. a) Uszereguj układy zgodnie z wartością wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania protonów na elektron, zaczynając od wartości największej. b) Czy dla układu (c) kąt między wypadkową siłą działającą na elektron i prostą oznaczoną przez (d) jest mniejszy, czy większy od 45°?
### Przykład 21.02. Równowaga dwóch sił działających na cząstkę

Na rysunku 21.8a przedstawiono dwie cząstki: cząstkę o ładunku  $q_1 = +8q$  umieszczoną w początku układu współrzędnych i cząstkę o ładunku  $q_2 = -2q$  umieszczoną w punkcie o współrzędnej x = L. W którym punkcie (poza nieskończenie odległymi) należy umieścić proton, aby znalazł się w stanie *równowagi* (tzn. aby wypadkowa siła działająca na proton była równa zeru)? Czy jest to stan równowagi *trwałej*, czy *nietrwałej*? (A więc czy po wychyleniu protonu z tego punktu działające na niego siły przywrócą go do punktu równowagi, czy też go od tego punktu odsuną?)



**Rys. 21.8.** a) Dwie cząstki o ładunkach  $q_1$  i  $q_2$  znajdują się na osi x w odległości L. b)–d) Trzy możliwe położenia P, S i R protonu. W każdym położeniu  $\vec{F}_1$  jest siłą oddziaływania cząstki 1 na proton, a  $\vec{F}_2$  jest siłą oddziaływania cząstki 2 na proton

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Jeśli  $\vec{F}_1$  jest siłą oddziaływania ładunku  $q_1$  na proton, a  $\vec{F}_2$  jest siłą oddziaływania ładunku  $q_2$  na proton, to szukamy punktu, w którym  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ . Warunek ten wymaga, aby

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$
 (21.8)

Oznacza to, że w poszukiwanym punkcie siły oddziaływania na proton dwóch innych cząstek muszą być przeciwnie skierowane i mieć równe wartości

$$F_1 = F_2.$$
 (21.9)

**Rozumowanie:** Proton ma ładunek dodatni. Proton i cząstka o ładunku  $q_1$  mają więc ten sam znak i siła  $\vec{F}_1$ musi być skierowana od  $q_1$ . Natomiast proton i cząstka o ładunku  $q_2$  mają przeciwne znaki i siła  $\vec{F}_2$  działająca na proton musi być skierowana do  $q_2$ . Siły "od  $q_1$ " i "do  $q_2$ " mogą być skierowane w przeciwnych kierunkach tylko wtedy, gdy proton znajduje się na osi x.

Jeśli proton umieszczony jest na osi x w którymkolwiek punkcie między  $q_1$  i  $q_2$ , np. w punkcie P na rysunku 21.8b, to siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  są skierowane w tę samą stronę, a nie w przeciwną, jak potrzeba. Jeśli proton jest umieszczony w którymkolwiek punkcie na osi x na lewo od  $q_1$ , np. w punkcie S na rysunku 21.8c, to  $\vec{F}_1$ i  $\vec{F}_2$  są skierowane przeciwnie. Ale ze wzoru (21.4) wynika, że siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  nie mogą mieć tam równych wartości: wartość  $F_1$  musi być większa od wartości  $F_2$ , gdyż  $F_1$  odpowiada bliższemu ładunkowi (o mniejszym r) o większej wartości (8q w porównaniu z 2q).

Na koniec, jeśli proton umieszczony jest w którymkolwiek punkcie na osi x na prawo od  $q_2$ , np. w punkcie R na rysunku 21.8d, to  $\vec{F_1}$  i  $\vec{F_2}$  są także przeciwnie skierowane. Jednak, ponieważ teraz ładunek o większej wartości ( $q_1$ ) jest umieszczony *dalej* od protonu niż ładunek o mniejszej wartości, to istnieje punkt, w którym wartość  $F_1$  jest równa  $F_2$ . Niech x będzie współrzędną tego punktu i  $q_p$  ładunkiem protonu.

*Obliczenia:* Korzystając ze wzoru (21.4), możemy wzór (21.9) zapisać w postaci

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8qq_{\rm p}}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq_{\rm p}}{(x-L)^2}.$$
 (21.10)

(Zauważmy, że we wzorze (21.10) występują tylko wartości ładunków. Rysując rysunek 21.8d, zdecydowaliśmy już o zwrotach działających sił i nie chcemy w tym miejscu włączać żadnych znaków dodatnich czy ujemnych.) Po przekształceniu wzoru (21.10) otrzymujemy

$$\left(\frac{x-L}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Wyciągając pierwiastek z obydwu stron pierwszego równania, otrzymujemy

$$\frac{x-L}{x} = \frac{1}{2},$$

co daje nam ostatecznie

x

$$= 2L$$
 (odpowiedź).

Równowaga w punkcie x = 2L jest nietrwała. Jeśli proton przesuniemy w lewo od punktu *R*, to obie siły  $F_1$  i  $F_2$  wzrosną, ale  $F_2$  wzrośnie bardziej (ponieważ  $q_2$ jest bliżej niż  $q_1$ ) i siła wypadkowa będzie przesuwać proton jeszcze bardziej w lewo. Jeśli proton przesuniemy w prawo, to  $F_1$  i  $F_2$  zmaleją, ale  $F_2$  zmaleje bardziej i siła wypadkowa będzie przesuwać proton jeszcze

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# Przykład 21.03. Podział ładunku pomiędzy dwie jednakowe przewodzące kule

Na rysunku 21.9a przedstawiono dwie identyczne, elektrycznie izolowane przewodzące kule A i B znajdujące się w odległości a, dużej w porównaniu z promieniem kul (odległość mierzymy między środkami kul). Kula A ma ładunek dodatni +Q, a kula B jest elektrycznie obojętna. Początkowo siła elektrostatyczna działająca między kulami jest równa zeru. (Zakładamy, że na powierzchniach kul nie indukuje się ładunek, gdyż znajdują się one w dużej odległości od siebie).



**Rys. 21.9.** Dwie małe przewodzące kule *A* i *B*. a) Na początku kula *A* jest naładowana dodatnio. b) Między kulami przez łączący je przewód zostaje przekazany ładunek ujemny. c) Obie kule są teraz naładowane dodatnio. d) Ujemny ładunek zostaje przekazany kuli *A* przez uziemiający przewód. e) Kula *A* jest teraz obojętna

a) Załóżmy, że kule połączono na chwilę przewodem elektrycznym. Jest on na tyle cienki, że można pominąć jakikolwiek wypadkowy ładunek na nim zgromadzony. Jaka będzie siła elektrostatyczna oddziaływania kul po usunięciu tego przewodu?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Ponieważ kule są identyczne, więc ich połączenie spowoduje, że znajdzie się na nich jednakowy (co do wielkości i znaku) ładunek. 2) Początkowy ładunek wypadkowy (włączając znak) musi być równy końcowej sumie ładunków.

**Rozumowanie:** Jeżeli kule połączymy przewodnikiem, to (ujemne) elektrony przewodnictwa na kuli *B*, które

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

bardziej w prawo. W stanie równowagi trwałej, przy małym przesunięciu proton powracałby z powrotem do położenia równowagi.

zawsze się odpychają, mogą się oddalić od siebie (przepływając wzdłuż przewodnika do dodatnio naładowanej kuli A, która je przyciąga — rys. 21.9b). Kula B traci ładunek ujemny i ładuje się dodatnio, a kula A zyskuje ładunek ujemny i staje się *słabiej* naładowana dodatnio. Przepływ ładunku ustaje, gdy ładunek na kuli B osiągnie wartość +Q/2, a na kuli A zmaleje do +Q/2. Warunek ten będzie osiągnięty, gdy z kuli B na kulę A przepłynie ładunek -Q/2.

Po usunięciu przewodu (rys. 21.9c) możemy założyć, że ładunek na żadnej z kul nie zakłóca jednorodności rozkładu ładunku na drugiej kuli, gdyż promienie kul są małe w porównaniu z odległością między nimi. Możemy więc do każdej z kul zastosować pierwsze twierdzenie o powłoce. Ze wzoru (21.4), po podstawieniu  $q_1 = q_2 = Q/2$  i r = a, otrzymujemy wartość siły elektrostatycznej oddziaływania kul

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(Q/2)(Q/2)}{a^2} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{a}\right)^2$$
(odpowiedź)

Kule, obecnie naładowane dodatnio, odpychają się.

**b**) Załóżmy teraz, że kula *A* zostanie na chwilę uziemiona, a następnie połączenie uziemiające zostanie usunięte. Jaka będzie teraz siła elektrostatyczna, działająca między kulami?

**Rozumowanie:** Połączenie uziemiające naładowanego ciała z Ziemią (która jest ogromnym przewodnikiem) pozwala zobojętnić elektrycznie to ciało. Gdyby kula A była naładowana ujemnie, to wzajemne odpychanie pomiędzy nadmiarowymi elektronami spowodowałoby ich odpłynięcie z kuli do Ziemi. Jednak ponieważ kula A jest naładowana dodatnio, więc elektrony o całkowitym ładunku -Q/2 przepłyną z Ziemi na kulę (rys. 21.9d) w wyniku czego kula stanie się obojętna (rys. 21.9e). Gdy nie ma ładunku na kuli A, siła elektrostatyczna oddziaływania dwóch kul będzie równa zeru.

# **21.2.** ŁADUNEK JEST SKWANTOWANY

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

<ul> <li>21.19 określić ładunek elementarny;</li> <li>21.20 zauważyć, że ładunek elektryczny cząstki lub ciała musi</li> </ul>	być dodatnią lub ujemną całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego.
<ul> <li>Ładunek elektryczny jest skwantowany (może przyjmować tylko pewne określone wartości).</li> <li>Ładunek elektryczny cząstki można wyrazić w postaci ne,</li> </ul>	gdzie <i>n</i> jest dodatnią lub ujemną liczbą całkowitą, a <i>e</i> jest ładun- kiem elementarnym, równoważnym ładunkowi elektrycznemu elektronu lub protonu $\approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ C.

# Ładunek jest skwantowany

W czasach Benjamina Franklina ładunek elektryczny uważano za ciągły płyn, co w wielu przypadkach było ideą przydatną. Obecnie wiemy, że materialne płyny, takie jak powietrze i woda, nie są ciągłe, gdyż są złożone z atomów i cząsteczek, a materia jest nieciągła (dyskretna). Z doświadczenia wynika, że "płyn elektryczny" także nie jest ciągły, a przyjmuje wartości będące wielokrotnością pewnego ładunku elementarnego. Każdy ładunek *q*, dodatni lub ujemny, można zapisać w postaci:

$$q = ne, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$
 (21.11)

gdzie ładunek elementarny e ma wartość

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \,\mathrm{C}.\tag{21.12}$$

Ładunek elementarny *e* jest jedną z ważnych stałych fizycznych. Elektron i proton mają ładunek o wartości bezwzględnej *e* (tab. 21.1). (Kwarki, czyli cząstki, z których zbudowane są protony i neutrony, mają ładunki  $\pm e/3$  lub  $\pm 2e/3$ , ale są one zawsze uwięzione, tzn. nie mogą być obserwowane indywidualnie. Z tego powodu, a także ze względów historycznych, ich ładunków nie traktuje się jako ładunku elementarnego). Często spotykamy się z takimi stwierdzeniami, jak np.: "ładunek na kuli", "przekazany ładunek", "ładunek niesiony przez elektron", które mogłyby sugerować, że ładunek jest substancją. (Takie zdania pojawiały się także w tym rozdziale). Powinniśmy jednak pamiętać, jaki był zamierzony sens tych stwierdzeń: substancją są *cząstki*, a ładunek jest jedynie jedną z ich właściwości, taką jak na przykład masa.

Jeśli jakaś wielkość fizyczna, np. ładunek elektryczny, nie może przyjmować dowolnych wartości, a tylko takie, które należą do dyskretnego zbioru, to mówimy, że ta wielkość jest **skwantowana**. Można na przykład znaleźć cząstkę, która wcale nie ma ładunku albo ma ładunek +10elub -6e, nigdy zaś cząstkę o ładunku, powiedzmy, 3,57*e*.

Kwant ładunku jest mały. Przez włókno zwykłej żarówki o mocy 100 W w każdej sekundzie przepływa na przykład około 10<sup>19</sup> ładunków elementarnych. Ziarnistość ładunku elektrycznego nie ujawnia się więc w zjawiskach

#### Tabela 21.1. Ładunki trzech cząstek

Cząstka	Symbol	Ładunek
Elektron	e lub e <sup>-</sup>	-e
Proton	р	+e
Neutron	n	0

makroskopowych (żarówka nie mruga, gdy przepływają przez nią kolejne elektrony).

Sprawdzian 4

Początkowo na kuli A znajduje się ładunek -50e, a na kuli B ładunek 20e. Kule są wykonane z materiału przewodzącego i mają identyczne rozmiary. Jaki będzie końcowy ładunek na kuli A po zetknięciu się kul?

# Przykład 21.04. Wzajemne odpychanie elektryczne w jądrze

Jądro w atomie żelaza ma promień równy około  $4 \cdot 10^{-15}$  m i zawiera 26 protonów.

a) Jaka jest wartość odpychającej siły elektrostatycznej działającej między dwoma protonami, jeśli znajdują się one w odległości  $4 \cdot 10^{-15}$  m?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Protony można traktować jak cząstki naładowane, a więc wartość siły elektrostatycznej oddziaływania jednego protonu na drugi można obliczyć, korzystając z prawa Coulomba.

*Obliczenia:* Z tabeli 21.1 wynika, że ładunek protonu wynosi +*e*. Ze wzoru (21.4) otrzymujemy

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$
  
=  $\frac{(8,99 \cdot 10^9 \,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2)(1,602 \cdot 10^{-19} \,\mathrm{C})^2}{(4,0 \cdot 10^{-15} \,\mathrm{m})^2} = 14 \,\mathrm{N}$   
(odpowiedź).

**Bez eksplozji:** Byłaby to mała siła, gdyby działała na obiekt makroskopowy, np. melon, ale w odniesieniu do protonu jest ogromna. Takie siły powinny być wystarczające, aby rozbić jądro dowolnego pierwiastka poza wodorem (którego jądro ma tylko jeden proton). Tak się jednak nie dzieje nawet w jądrach o bardzo dużej liczbie protonów. Musi więc istnieć jakaś ogromna siła przyciągająca, przeciwstawiająca się tej wielkiej odpychającej sile elektrostatycznej.

**b**) Jaka jest wartość siły grawitacyjnej działającej między tymi dwoma protonami?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Protony są cząstkami, a więc wartość siły grawitacyjnej ich wzajemnego oddziaływania możemy obliczyć ze wzoru Newtona (21.2).

**Obliczenia:** Podstawiając masę protonu wynoszącą  $m_{\rm p} = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg, otrzymujemy

$$F = G \frac{m_p^2}{r^2}$$
  
=  $\frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2)(1,67 \cdot 10^{-27} \,\mathrm{kg})^2}{(4 \cdot 10^{-15} \,\mathrm{m})^2}$   
=  $1.2 \cdot 10^{-35} \,\mathrm{N}$  (odpowiedź).

*Słabe i silne:* Wynik ten świadczy o tym, że (przyciągająca) siła grawitacyjna jest zbyt słaba, aby przeciwstawić się odpychającym siłom elektrostatycznym między protonami w jądrze. Protony są w rzeczywistości związane ogromną siłą. Oddziaływanie cząstek w jądrze nazywamy (trafnie) *oddziaływaniem silnym*. Protony (i neutrony) oddziałują w ten sposób, gdy są bardzo blisko siebie, tak jak w jądrze atomowym.

Chociaż siła grawitacyjna jest o wiele rzędów wielkości słabsza od siły elektrostatycznej, to w zjawiskach makroskopowych odgrywa większą rolę, ponieważ jest zawsze siłą przyciągania. Oznacza to, że może ona skupić wiele małych ciał w ogromne ciała o wielkich masach (takich jak np. planety i gwiazdy), które mogą oddziaływać dużymi siłami grawitacyjnymi. Natomiast siła elektrostatyczna jest siłą odpychającą dla ładunków o tym samym znaku. Dlatego też nie można skupić dużych ilości dodatniego czy ujemnego ładunku elektrycznego, aby mogły pojawić się duże siły elektrostatyczne.

# **21.3.** ŁADUNEK JEST ZACHOWANY

### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

21.21 zauważyć, że w każdym odosobnionym procesie fizycznym wypadkowy ładunek elektryczny nie może ulec zmianie (całkowity ładunek jest zawsze zachowany); 21.22 opisać proces anihilacji cząstek i produkcji pary cząstek;

21.23 określić liczbę masową i liczbę atomową w kontekście liczby protonów, neutronów i elektronów.

### Podstawowe fakty \_

- Całkowity ładunek elektryczny w dowolnym odosobnionym układzie fizycznym jest zawsze zachowany.
- Dwie cząstki ulegające procesowi anihilacji muszą mieć ładunki o przeciwnych znakach i jednakowej wartości bezwzględ-

 Dwie cząstki pojawiające się w wyniku kreacji pary muszą mieć ładunki o przeciwnych znakach i jednakowej wartości bezwzględnej.

nej.

# Ładunek jest zachowany

Pocierając jedwabiem szklany pręt, tworzymy na nim ładunek dodatni. Pomiar wykazuje, że ujemny ładunek o takiej samej wartości bezwzględnej pojawia się na jedwabiu. Oznacza to, że podczas pocierania ładunek nie jest wytwarzany, lecz tylko przekazywany z jednego ciała do drugiego, co narusza obojętność elektryczną każdego z nich. Tę hipotezę **zachowania ładunku** jako pierwszy postawił Benjamin Franklin. Została ona potwierdzona dokładnymi badaniami zarówno dla dużych ciał naładowanych, jak i dla atomów, jąder i cząstek elementarnych. Nigdy nie znaleziono wyjątków. Możemy więc do naszej listy wielkości, które spełniają zasadę zachowania (energia, pęd i moment pędu) dodać ładunek elektryczny.

Ważnych przykładów zachowania ładunku dostarcza nam *rozpad promieniotwórczy* jądra atomowego, w którym samorzutnie przekształca się ono w inne jądro. I tak np. jądro uranu-238 (<sup>238</sup>U) może rozpaść się, emitując *cząstkę*  $\alpha$  (która jest jądrem helu <sup>4</sup>He) i przekształcić się w jądro toru-234 (<sup>234</sup>Th). Liczba użyta w nazwie jądra i w jego symbolu jako indeks górny jest *liczbą masową*. Liczba masowa równa jest całkowitej liczbie protonów i neutronów znajdujących się w jądrze. W przypadku jądra <sup>238</sup>U ta całkowita liczba wynosi 238. Liczba protonów w jądrze atomowym to *liczba atomowa Z*. Liczby atomowe wszystkich atomów zostały przedstawione w dodatku F. Z tego dodatku dowiemy się, że w rozpadzie

$$^{238}\text{U} \rightarrow ^{234}\text{Th} + {}^{4}\text{He}$$
 (21.13)

*macierzyste* jądro <sup>238</sup>U zawiera 92 protony i ma ładunek +92*e*, jądro *pochodne* <sup>234</sup>Th ma 90 protonów (ładunek +90*e*), a emitowana cząstka  $\alpha$  zawiera 2 protony (ładunek +2*e*). Całkowity ładunek przed rozpadem i po rozpadzie jest równy +92*e*, a więc ładunek elektryczny jest w tym procesie zachowany. (Całkowita liczba protonów i neutronów także jest zachowana: 238 przed rozpadem i 234 + 4 = 238 po rozpadzie).



**Rys. 21.10.** Fotografia śladów pozostawionych przez elektron i pozyton w postaci pęcherzyków w komorze pęcherzykowej. Para cząstek została wytworzona w wyniku procesu kreacji, z kwantu  $\gamma$ , który wpadł do komory z dołu. Obojętny elektrycznie kwant  $\gamma$  nie pozostawił śladu z pęcherzyków wzdłuż swej drogi, tak jak zrobiły to elektron i pozyton

# Podsumowanie

**Ładunek elektryczny** Wielkość oddziaływania elektrycznego cząstki z otaczającymi ją ciałami zależy od jej **ładunku elektrycznego** (zwykle oznaczanym jako *q*), który może być dodatni lub ujemny. Ładunki o tym samym znaku odpychają się, a ładunki o przeciwnych znakach się przyciągają. Ciało z równymi ilościami dwóch rodzajów ładunku jest obojętne elektrycznie, a ciało z niezrównoważonym ładunkiem — naładowane elektrycznie.

**Przewodniki** są materiałami, w których znaczna liczba cząstek naładowanych (elektronów w metalu) może poruszać się swobodnie. Naładowane cząstki w **izolatorach** nie mogą się swobodnie poruszać.

Natężenie prądu elektrycznego I to stosunek ładunku elektrycznego dq przepływającego w czasie dt przez pewien przekrój przewodnika do tego czasu:

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (natężenie prądu elektrycznego). \qquad (21.3)$$

**Prawo Coulomba** Prawo Coulomba opisuje siłę elektrostatyczną (lub elektryczną), działającą między dwoma naładowanymi cząstkami. Jeśli takie cząstki mają ładunki elektryczne  $q_1$  i  $q_2$ , znajdują się w spoczynku w odległości r (lub poruszają się wolno), to siła ich wzajemnego oddziaływania wynosi

Innym przykładem zachowania ładunku jest *proces anihilacji* elektronu  $e^-$  (o ładunku -e) i jego antycząstki, pozytonu  $e^+$  (o ładunku +e), w którym cząstki te przekształcają się w dwa kwanty  $\gamma$  (promieniowania elektromagnetycznego o wielkiej energii)

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$
 (anihilacja). (21.14)

Stosując zasadę zachowania ładunku, musimy ładunki dodawać algebraicznie, uwzględniając ich znaki. W procesie anihilacji (21.14) wypadkowy ładunek układu jest równy zeru zarówno przed, jak i po anihilacji. Ładunek elektryczny jest więc zachowany.

Ładunek elektryczny jest także zachowany w procesie *kreacji pary*, który jest procesem odwrotnym do anihilacji. W takim procesie kwant  $\gamma$ przekształca się w elektron i pozyton

$$\gamma \to e^- + e^+$$
 (kreacja pary). (21.15)

Na rysunku 21.10 przedstawiono proces kreacji pary zachodzący w komorze pęcherzykowej. (Jest to urządzenie, w którym ciecz jest gwałtowie ogrzewana powyżej punktu wrzenia. Jeśli przez komorę przelatuje naładowana cząstka, wzdłuż jej toru powstają maleńkie pęcherzyki gazu.) Kwant  $\gamma$  wpadł do komory z dołu i w pewnym punkcie przekształcił się w elektron i pozyton. Nowe cząstki były naładowane, a więc podczas ruchu każda z nich zostawiła ślad z drobnych pęcherzyków. (Ślady są zakrzywione, gdyż w komorze istnieje pole magnetyczne). Kwant  $\gamma$ , będąc elektrycznie obojętny, nie pozostawił śladu. Można jednak dokładnie powiedzieć, gdzie nastąpiła kreacja pary. Stało się to mianowicie w punkcie, w którym zaczynają się ślady elektronu i pozytonu.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \qquad \text{(prawo Coulomba)},\qquad(21.4)$$

gdzie  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$  jest **przenikalnością** elektryczną próżni (stała elektryczna), a  $\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)} = k = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ .

Wektor siły elektrostatycznej działającej na naładowaną cząstkę ze strony drugiej cząstki jest albo skierowany w kierunku tej cząstki (przeciwne znaki ładunku), albo przeciwnie (jednakowe znaki ładunku). Tak jak w przypadku innych sił, jeśli na cząstkę działa więcej sił, siła wypadkowa jest sumą wektorową (a nie algebraiczną) poszczególnych sił składowych.

Dwa twierdzenia o powłoce dla elektrostatyki brzmią następująco:

**Twierdzenie o powłoce 1.** Jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę, znajdującą się na zewnątrz tej powłoki tak, jakby cały ładunek tej powłoki był skupiony w jej środku.

**Twierdzenie o powłoce 2.** *Jeśli cząstka naładowana znajduje się wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej, to wypadkowa siła elektrostatyczna oddziaływania powłoki na cząstkę jest równa zeru.*  Ładunek elektryczny rozkłada się równomiernie na przewodzącej powłoce kulistej (na jej zewnętrznej powierzchni).

**Ładunek elementarny** Ładunek elektryczny jest **skwantowany** (może przyjmować tylko określone wartości). Dowolny ładunek cząstki można zapisać jako *ne*, gdzie *n* jest dodatnią

# Pytania

1 Na rysunku 21.11 przedstawiono cztery układy pięciu naładowanych cząstek umieszczonych wzdłuż osi w jednakowych odstępach. Wartości wszystkich ładunków z wyjątkiem środkowego (który jest identyczny we wszystkich czterech przypadkach) pokazano na rysunku. Uszereguj te układy według wartości wypadkowej siły elektrostatycznej działającej na środkową cząstkę, zaczynając od największej.



**Rys. 21.11.** Pytanie 1

**2** Na rysunku 21.12 przedstawiono trzy pary jednakowych kul, które zostały najpierw złączone, a później rozdzielone. Na rysunku przedstawiono początkowy ładunek zgromadzony na każdej z nich. Uszereguj te układy według: a) wielkości ładunku przepływającego podczas zetknięcia kul, b) ładunku pozostałego na kuli naładowanej dodatnio, zaczynając od największej.



**3** Na rysunku 21.13 przedstawiono cztery układy naładowanych cząstek. Cząstki te nie mogą się poruszać. W których układach istnieje punkt na lewo od cząstek, w którym umieszczony elektron pozostanie w stanie równowagi?



**4** Na rysunku 21.14 przedstawiono dwie naładowane cząstki. Cząstki te mogą się poruszać wzdłuż osi, na której się znajdują. Istnieje jednak jeden taki punkt, że po umieszczeniu lub ujemną liczbą całkowitą, a *e* jest ładunkiem elementarnym, będącym ładunkiem elektronu i protonu ( $e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}$  C).

**Ładunek elektryczny jest zachowany** Wypadkowy ładunek elektryczny w dowolnym odosobnionym układzie jest zawsze zachowany.

w nim trzeciej naładowanej cząstki wszystkie trzy cząstki będą w stanie równowagi. a) Czy ten punkt znajduje się na lewo od pierwszych dwóch cząstek, na prawo, czy pomiędzy

nimi? b) Czy trzecia cząstka powinna być naładowana dodatnio czy ujemnie? c) Czy równowaga jest trwała czy nietrwała?

**5** Na rysunku 21.15 przedstawiono umieszczoną centralnie cząstkę o ładunku -q, która jest otoczona przez dwa okręgi z umieszczonymi na nich naładowanymi cząstkami. Jaka jest wartość i kierunek wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania pozostałych cząstek na cząstkę środkową? (*Wskazówka*: Rozważ symetrię).



**6** Dodatnio naładowana kula znajduje się w pobliżu obojętnego izolowanego przewodnika. Gdy kula znajduje się blisko przewodnika, zostaje on uziemiony. Czy przewodnik naładuje się dodatnio, ujemnie, czy pozostanie obojętny, jeśli: a) najpierw zabierzemy kulę, a potem usuniemy uziemienie, b) najpierw usuniemy uziemienie, a potem zabierzemy kule?

**7** Na rysunku 21.16 przedstawiono trzy układy składające się z naładowanej cząstki i jednorodnie naładowanej powłoki kulistej. Podano wartości ładunków i promienie kul. Uszereguj te układy według wartości wypadkowej siły elektrostatycznej działającej na cząstkę, zaczynając od największej.



Rys. 21.16. Pytanie 7

8 Na rysunku 21.17 przedstawiono cztery układy cząstek naładowanych. Uszereguj te układy według wartości wypadko-





9 Na rysunku 21.18 przedstawiono cztery układy unieruchomionych cząstek o ładunku +q lub -q. Cząstki umieszczone na osi x są równoodległe od osi y. Rozważ najpierw środkową cząstkę w układzie 1; cząstka ta doznaje działania siły elektrostatycznej ze strony każdej z dwóch pozostałych cząstek. a) Czy wartości F tych sił są takie same, czy różne? b) Czy wartość siły wypadkowej działającej na środkową cząstkę jest równa 2F, większa czy mniejsza od tej wartości? c) Czy składowe x tych dwóch sił dodają się, czy odejmują? d) Czy ich składowe y dodają się, czy odejmują? e) Czy kierunek siły wypadkowej działającej na środkową cząstkę odpowiada odejmowaniu się składowych, czy ich dodawaniu? f) Jaki jest kierunek tej siły wypadkowej? Rozważ teraz pozostałe układy. Jaki jest kierunek siły wypadkowej działającej na środkową cząstkę dla: g) układu 2, h) układu 3, i) układu 4. (Dla każdego układu rozważ symetrię rozkładu ładunku i określ, które składowe się dodaja, a które odejmuja).



**Rys. 21.18.** Pytanie 9

**10** Na rysunku 21.19 przedstawiono umieszczoną centralnie cząstkę o ładunku -2q, która jest otoczona naładowanymi

cząstkami ułożonymi wzdłuż obwodu kwadratu. Odległości pomiędzy tymi cząstkami równe są *d* lub *d*/2. Jaka jest wartość i kierunek wypadkowej siły elektrostatycznej działającej na cząstkę umieszczoną w środku ze strony cząstek zewnętrznych? (*Wskazówka*: Rozważania dotyczące symetrii tego zagadnienia mogą znacznie ułatwić rozwiązanie tego problemu).



**11** Na rysunku 21.20 przedstawiono trzy jednakowe przewodzące kulki A, B i C unoszące się wewnątrz pojemnika uziemionego za pomocą przewodu. Kulki te mają początkowo jednakowy ładunek. Kulka A zderza się najpierw z górną ścianą pojemnika, a następnie z kulką B. Następnie kulka B zderza się z kulką C, która później trafia w dolną ścianę pojemnika. W chwili gdy kulka C dotyka ściany, do pojemnika napływa ładunek -3e, tak jak to pokazano na rysunku. a) Jaki jest początkowy ładunek zgromadzony na każdej z kulek? Jaki ładunek przypłynie przez przewód, gdy b) kulka A i c) kulka B spadną na dolną ścianę pojemnika? d) Jaki całkowity ładunek przepłynie przez przewód podczas całego opisanego procesu?



Rys. 21.20. Pytanie 11

**12** Na rysunku 21.21 przedstawiono cztery układy, w których centralnie umieszczony proton otoczony jest przez protony lub elektrony unieruchomione na półokręgu. Kąty  $\theta$  są jed-

nakowe, podobnie kąty  $\phi$ . a) Znajdź w każdym przypadku kierunek wypadkowej siły działającej na proton znajdujący

się w środku. b) Uszereguj przedstawione przypadki według wartości tej wypadkowej siły, zaczynając od największej.



# Zadania

GO	Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach <i>WileyPLUS</i> (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
•_•••	Liczba kropek określa stopień trudności zadania
ssm	Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w Student Solutions Manual
www	Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
ilw	Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
	Więcej informacji znajdziesz w książce The Flying Circus of Physics i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

### Podrozdział 21.1. Prawo Coulomba

•1 ssm ilw Z cienkiej powłoki kulistej naładowanej początkowo ładunkiem Q przenosimy ładunek q na inną powłokę kulistą znajdującą się w pobliżu. Obie powłoki unieruchomione w pewnej odległości od siebie można traktować jak cząstki. Dla jakiego stosunku q/Q siła elektrostatyczna działająca między tymi powłokami będzie największa?

•2 Identyczne izolowane przewodzące kule 1 i 2 o jednakowym ładunku znajdują się w odległości dużo większej niż ich średnice (rys. 21.22a). Siła elektrostatyczna działająca



na kulę 2 ze strony kuli 1 równa jest  $\vec{F}$ . Przypuśćmy, że identyczna, początkowo neutralna kula 3, która ma izolujący uchwyt dotyka najpierw kuli 1 (rys. 21.22b), następnie kuli 2 (rys. 21.22c), a w końcu zostaje usunięta. Siła elektrostatyczna, która teraz działa na kulę 2, ma wartość F'. Jaki jest stosunek  $\frac{F'}{E}$ ?

•3 ssm W jakiej odległości od siebie muszą znajdować się ładunki punktowe  $q_1 = 26 \,\mu\text{C}$  i  $q_2 = -47 \,\mu\text{C}$ , aby siła elektrostatyczna działająca między nimi równa była 5,7 N?

•4 W powrotnym wyładowaniu atmosferycznym towarzyszącym typowej błyskawicy przez 20  $\mu$ s płynie prąd o natężeniu 2,5  $\cdot$  10<sup>4</sup> A. Jaki ładunek elektryczny przepłynie w tym wyładowaniu?

•5 Ładunek punktowy  $+3 \cdot 10^{-6}$  C jest odległy o 12 cm od drugiego ładunku punktowego  $-1.5 \cdot 10^{-6}$  C. Oblicz wartość siły działającej na każdy ładunek.

•6 ilw Dwie jednakowo naładowane cząstki znajdujące się początkowo w spoczynku w odległości  $3,2 \cdot 10^{-3}$  m zaczęły się poruszać. Zaobserwowano, że początkowe przyspieszenie pierwszej cząstki wynosiło  $7 \text{ m/s}^2$ , a drugiej  $9 \text{ m/s}^2$ . Jeśli masa pierwszej cząstki wynosi  $6,3 \cdot 10^{-7}$  kg, to ile wynoszą: a) masa drugiej cząstki, b) wartość ładunku każdej cząstki? ••7 Na rysunku 21.23 przedstawiono trzy naładowane cząstki, leżące na osi *x*. Cząstki 1 i 2 są unieruchomione. Cząstka 3 może się poruszać, ale okazuje się, że znajduje się

ona w stanie rownowagi (dzia-		
łająca na nią siła wypadkowa	$ -L_{12} \rightarrow  -L_{23}$	
jest równa zeru). Jaki jest sto-	1 2	3
sunek $q_1/q_2$ , jeśli $L_{23} = L_{12}$ ?	Rys. 21.23. Zadania	17 i 40

••8 Na rysunku 21.24 przedstawiono trzy jednakowe przewodzące kule. Początkowo ładunek zgromadzony na kulach A, B i C wynosił odpowiednio 4Q, -6Q i 0. Kule A i B są unieruchomione, a odległość między nimi jest znacznie większa niż promienie tych kul. Przeprowadzamy dwa doświadczenia. W pierwszym z nich kula C dotyka kuli A, następnie (osobno) dotyka kuli B i zostaje wreszcie usunięta z układu. W drugim doświadczeniu o takich samych warunkach początkowych kolejność zdarzeń jest odwrócona: kula C najpierw dotyka kuli

B, potem (osobno) dotyka kuli A i potem zostaje usunięta z układu. Jaki jest stosunek siły elektrostatycznej działającej pomiędzy kulami A i B pod koniec drugiego doświadczenia do siły działającej pomiędzy kulami Ai B pod koniec pierwszego doświadczenia?



••9 ssm www Dwie identyczne unieruchomione przewodzące kule, których środki są odległe o 50 cm, przyciągają się wzajemnie siłą elektrostatyczną o wartości 0,108 N. Następnie kule połączono cienkim przewodem. Po usunięciu przewodu kule odpychają się wzajemnie siłą elektrostatyczną o wartości 0,036 N. Wiedząc, że całkowity ładunek kul jest dodatni, znajdź: a) niezrównoważony ładunek ujemny zgromadzony początkowo na jednej z kul, b) niezrównoważony ładunek dodatni zgromadzony początkowo na drugiej kuli.

••10 • Na rysunku 21.25 przedstawiono cztery cząstki umieszczone w wierzchołkach kwadratu. Ładunki cząstek

równe są  $q_1 = q_4 = Q$ i  $q_2 = q_3 = q$ . a) Znajdź stosunek Q/q, jeśli wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na cząstki 1 i 4 równa jest zero. b) Czy istnieje jakaś wartość ładunku q, dla której wypadkowa siła działająca na każdą z cząstek wynosi zero? Wyjaśnij dlaczego.



Rys. 21.25. Zadania 10, 11 i 70

••11 iiw Ładunki cząstek przedstawionych na rysunku 21.25 równe są  $q_1 = -q_2 = 100 \text{ nC}$  i  $q_3 = -q_4 = 200 \text{ nC}$ , a odległość a = 5,0 cm. Jaka jest składowa wypadkowej siły

elektrostatycznej działającej na cząstkę 3: a) wzdłuż osi *x*, b) wzdłuż osi *y*?

••12 Na osi x znajdują się dwie unieruchomione cząstki. Cząstka 1 o ładunku 40  $\mu$ C znajduje się w punkcie x = -2 cm, zaś cząstka 2 o ładunku Q umieszczona jest w punkcie x = 3 cm. Cząstka 3 o ładunku 20  $\mu$ C zostaje uwolniona z położenia y = 2,0 cm na osi y. Jaka jest wartość Q, jeśli początkowe przyspieszenie cząstki 3 jest skierowane zgodnie z kierunkiem: a) osi x, b) osi y?

••13  $\bigcirc$  Cząstka 1 o ładunku +1  $\mu$ C i cząstka 2 o ładunku -3  $\mu$ C przedstawione na rysunku 21.26 są unieruchomione

na osi x w odległości L = 10 cm od siebie. Jakie powinny być współrzędne a) x i b) y cząstki 3 o nieznanym ładunku  $q_3$ , aby wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na tę cząstkę była równa zeru?



**Rys. 21.26.** Zadania 13, 19, 30, 58 i 67

••14 Na osi x umieszczono trzy cząstki. Cząstka 1 o ładunku  $q_1$  znajduje się w punkcie x = -a, a cząstka 2 o ładunku  $q_2$  umieszczona jest w punkcie x = +a. Jaki musi być stosunek ładunków  $q_1/q_2$ , aby wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na cząstkę 3 o ładunku +Q umieszczoną w punktach a) x = +0,5a oraz b) x = +1,5a była równa zeru?

••15 C Ładunki i współrzędne dwóch cząstek naładowanych znajdujących się na płaszczyźnie xy wynoszą  $q_1 =$ +3  $\mu$ C,  $x_1 =$  3,5 cm,  $y_1 =$  0,5 cm i  $q_2 =$  -4  $\mu$ C,  $x_2 =$  -2 cm,  $y_2 =$  1,5 cm. Znajdź a) wartość i b) kierunek siły elektrostatycznej działającej na cząstkę 2. Jakie powinny być współrzędne c) x i d) y trzeciego ładunku  $q_3 =$  +4  $\mu$ C, aby wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na ładunek 2 ze strony ładunków 1 i 3 była równa zeru?

••16 Solution Na rysunku 21.27a cząstka 1 (o ładunku  $q_1$ ) i cząstka 2 (o ładunku  $q_2$ ) są unieruchomione na osi x w odległości 8 cm od siebie. Na odcinku łączącym te cząstki ma zostać umieszczona cząstka 3 o ładunku  $q_3 = 8 \cdot 10^{-19}$  N tak, aby wypadkowa siła działająca na nią ze strony cząstek 1 i 2 równa była  $\vec{F}_{3,wyp}$ . Na rysunku 21.27b przedstawiono zależność składowej x tej siły od położenia cząstki 3. Skala na osi x określona jest przez  $x_s = 8$  cm. Jakie są: a) znak ładunku  $q_1$  i b) stosunek  $q_2/q_1$ ?





••17 Obie cząstki 1 i 2 przedstawione na rysunku 21.28a mają ładunek 20  $\mu$ C i są unieruchomione w odległości d = 1,5 m od siebie. a) Jaka siła elektrostatyczna działa na cząstkę 1 ze strony cząstki 2? Na rysunku 21.28b przedstawiono także

dodatkową cząstkę 3 o ładunku 20 µC, umieszczoną w taki sposob, że wszystkie trzy cząstki znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego. b) Jaka jest wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na cząstkę 1 ze strony cząstek 2 i 3?



••18 Trzy dodanio naładowane cząstki przedstawione na rysunku 21.29a unieruchomiono na osi x. Cząstki B i C znajdują się tak blisko siebie, iż można założyć, że obie znajdują się w jednakowej odległości od cząstki A. Wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na cząstkę A ze strony cząstek B i C równa jest 2,014  $\cdot$  10<sup>-23</sup> N i jest skierowana w stronę ujemnych wartości x. Na rysunku 21.29b cząstka B została prze-

sunięta na drugą stronę cząstki A, ale nadal jest tak samo od niej odległa. Wypadkowa siła działająca na cząstkę A równa jest teraz 2,877  $\cdot 10^{-24}$  N i skie-rowana jest w stronę ujemnych wartości x. Ile wynosi stosunek  $q_C/q_B$ ?



••19 ssm www Cząstka 1 o ładunku +q i cząstka 2 o ładunku +4q przedstawione na rysunku 21.26 unieruchomiono na osi x w odległości L = 9 cm od siebie. Gdzie należy umieścić cząstkę 3 o ładunku  $q_3$ , aby po uwolnieniu cząstek 1 i 2 wszystkie cząstki pozostały w spoczynku. Znajdź: a) współrzędną x, b) współrzędną y cząstki 3 oraz c) stosunek  $q_3/q_1$ ?

•••20 • Na rysunku 21.30a przedstawiono trzy naładowane cząstki umieszczone na osi x w równych odstępach d. Cząstki A i C unieruchomiono na osi x, a cząstka B może poruszać się po okręgu o środku w położeniu cząstki A. Kąt pomiędzy promieniem wodzącym cząstki B a osią x jest równy  $\theta$  (rys. 21.30b). Na rysunku 21.30c przedstawione są wykresy zależności wartości siły elektrostatycznej  $F_{wyp}$  działającej na cząstkę A ze strony innych cząstek od kąta  $\theta$  dla dwóch róż-



Rys. 21.30. Zadanie 20

nych sytuacji. Wartość tej siły wyrażona jest jako wielokrotność pewnej siły  $F_0$ . I tak np. na krzywej 1 dla  $\theta = 180^{\circ}$ widać, że  $F_{wyp} = 2F_0$ . a) Jaki jest stosunek (włączając znak) ładunku cząstki *C* do ładunku cząstki *B* dla sytuacji 1? b) Jaki jest ten stosunek dla sytuacji 2?

•••21 Stadunek elektryczny nieprzewodzącej powłoki kulistej o promieniu wewnętrznym równym 4 cm i promieniu zewnętrznym 6 cm rozłożony jest niejednorodnie pomiędzy tymi promieniami. *Objętościowa gęstość ładunku*  $\rho$  równa jest ładunkowi przypadającemu na jednostkę objętości i jest wyrażona w kulombach na metr sześcienny. W przypadku rozważanej powłoki  $\rho = b/r$ , gdzie r jest odległością od środka powłoki wyrażoną w metrach, a  $b = 3 \,\mu\text{C}/\text{m}^2$ . Jaki jest całkowity ładunek zgromadzony na tej powłoce?

•••22 • Na rysunku 21.31 przedstawiono układ czterech naładowanych cząstek. W układzie tym kąt  $\theta = 30^{\circ}$ , a odległość d = 2 cm. Ładunek cząstki 2 równy jest  $q_2 = +8 \cdot 10^{-19}$  C, a ładunki cząstek 3 i 4 równe są  $q_3 = q_4 = -1, 6 \cdot 10^{-19}$  C. a) Jaka jest odległość *D* pomiędzy począt-

kiem układu współrzędnych a cząstką 2, jeśli wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na cząstkę 1 ze strony innych cząstek jest równa zeru? b) Czy odległość *D* byłaby większa, mniejsza, czy taka sama jak w punkcie a), gdyby cząstki 3 i 4 zbliżono do osi *x* przy utrzymaniu ich symetrii.



Rys. 21.31. Zadanie 22

•••23 Cząstki 1 i 2 o ładunkach  $q_1 = q_2 = 3, 2 \cdot 10^{-19}$  C przedstawione na rysunku 21.32 znajdują się na osi y w odległości d = 17 cm od początku układu współrzędnych. Cząstka 3 o ładunku  $q_3 = +6, 4 \cdot 10^{-19}$  C przesuwa się stop-

niowo wzdłuż osi x od x = 0do x = +5 m. Dla jakich wartości x wartość siły elektrostatycznej działającej na trzecią cząstkę ze strony dwóch pozostałych będzie a) najmniejsza, b) największa? Jaka jest wartość c) minimalna, d) maksymalna tej siły?



#### Podrozdział 21.2. Ładunek jest skwantowany

•24 Środki dwóch małych, kulistych kropel wody o identycznych ładunkach  $-1 \cdot 10^{-16}$  C znajdują się w odległości 1 cm od siebie. a) Jaka jest wartość siły elektrostatycznej działającej między nimi? b) Ile nadmiarowych elektronów odpowiedzialnych za ten niezrównoważony ładunek znajduje się na każdej kropli?

•25 ilw Ile elektronów należałoby usunąć z monety, aby uzyskała ładunek  $+1 \cdot 10^{-7}$  C?

•26 Jaka jest wartość siły elektrostatycznej działającej między pojedynczo naładowanym jonem sodu (Na<sup>+</sup> o ładunku +e) i towarzyszącym mu pojedynczo naładowanym jonem chloru (Cl<sup>-</sup> o ładunku -e) w krysztale soli, jeśli odległość między tymi jonami wynosi 2,82 · 10<sup>-10</sup> m?

•27 ssm Wartość siły elektrostatycznej działającej między dwoma identycznymi jonami znajdującymi się w odległości  $5 \cdot 10^{-10}$  m wynosi  $3,7 \cdot 10^{-9}$  N. a) Jaki jest ładunek każdego z jonów? b) Ile elektronów "brakuje" w każdym z jonów (powodując niezrównoważony ładunek jonu)?

•28 Prąd o natężeniu 0,3 A przepływający przez klatkę piersiową może wprowadzić serce w stan migotania komór (fibrylacji), ruinując normalny rytm pracy serca i przerywając przepływ krwi (a tym samym dostarczanie tlenu) do mózgu. Ile elektronów przepłynęłoby przez klatkę piersiową, jeśli przepływ takiego prądu trwałby 2 minuty?





Rys. 21.33. Zadanie 29

układu współrzędnych. Początkowe współrzędne cząstki 1 to  $x_1 = -10$  cm, a cząstki 3  $x_3 = 10$  cm. a) W jakie położenie x należałoby przesunąć cząstkę 1, aby kierunek wypadkowej siły elektrostatycznej  $\vec{F}_{wyp}$  działającej na cząstkę 5 obrócił się o 30° w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara? b) W jakie położenie x należałoby przesunąć cząstkę 3, utrzymując jednocześnie cząstkę 1 w jej nowym położeniu, aby obrócić siłę  $\vec{F}_{wyp}$  z powrotem do jej pierwotnego kierunku?

••30 Cząstki 1 i 2 przedstawione na rysunku 21.26 są unieruchomione na osi x w odległości L = 8 cm od siebie. Ładunki tych cząstek są równe  $q_1 = +e$  i  $q_2 = -27e$ . Cząstka 3 o ładunku  $q_3 = +4e$  zostaje umieszczona na odcinku łączącym cząstki 1 i 2. W efekcie na cząstkę 3 działa wypadkowa siła  $\vec{F}_{3,wyp}$ . W jakim punkcie należy umieścić cząstkę 3, aby ta siła była najmniejsza? b) Jaka jest ta minimalna wartość?

••31 ilw Atmosfera Ziemi jest stale bombardowana protonami *promieniowania kosmicznego*, które powstają gdzieś w kosmosie. Gdyby wszystkie protony przeszły przez atmosferę, to na każdy m<sup>2</sup> powierzchni Ziemi padałoby średnio 1500 protonów na sekundę. Jakie byłoby natężenie takiego prądu elektrycznego przepływającego przez całą powierzchnię planety?

••32 Cząstki 1 i 2 przedstawione na rysunku 21.34a są unieruchomione na osi x. Cząstka 1 ma ładunek o wartości

bezwzględnej  $|q_1| = 8e$ . Cząstka 3 o ładunku  $q_3 = +8e$  znajduje się początkowo w pobliżu cząstki 2 na osi x. Następnie cząstka 3 jest stopniowo przesuwana w kierunku dodatnich wartości x. W efekcie zmienia się wypadkowa siła elektrostatyczna  $\vec{F}_{2,wyp}$  działająca na cząstkę 2 ze strony cząstek 1 i 3. Na rysunku 21.34b przedstawiono wykres pokazujący zależność składowej x tej wypadkowej siły od położenia x cząstki 3. Skala na osi x tego wykresu wyznaczona jest przez  $x_s = 0.8$  m. Wartość przedstawionej funkcji asymptotycznie zbiega do  $F_{2,wyp} = 1,5 \cdot 10^{-25}$  N dla  $x \longrightarrow \infty$ . Jaki jest ładunek  $q_2$  cząstki 2 wyrażony jako wielokrotność *e* i uwzględniający znak?



**Rys. 21.34.** Zadanie 32

••33 Oblicz w kulombach ładunek dodatni znajdujący się w 250 cm<sup>3</sup> (obojętnej elektrycznie) wody. (*Wskazówka*: Atom wodoru zawiera jeden proton, atom tlenu zawiera osiem protonów).

•••34 • Na rysunku 21.35 przedstawiono elektrony 1 i 2, które znajdują się na osi x oraz naładowane jony 3 i 4 o jednakowym ładunku -q widziane z punktu 2 pod jednakowymi kątami  $\theta$ . Elektron 2 może się swobodnie poruszać. Pozostałe trzy



cząstki unieruchomione zostały w położeniach odległych wzdłuż osi x o R od tego elektronu. Mają one utrzymywać elektron 2 na miejscu. Jakie są: a) najmniejsza, b) kolejna najmniejsza i c) trzecia najmniejsza wartość kąta  $\theta$ , dla których elektron 2 utrzymywany jest w swoim położeniu, jeśli przyjmiemy fizycznie możliwe wartości  $q \leq 5e$ ?

•••35 ssm W komórce elementarnej kryształu chlorku cezu (CsCl) jony Cs<sup>+</sup> zajmują wierzchołki sześcianu, a jony Cl<sup>-</sup> znajdują się w środku sześcianu (rys. 21.36). Długość krawędzi sześcianu wynosi 0,4 nm. Jonom Cs<sup>+</sup> brakuje jednego elektronu (i dlatego każdy z nich ma ładunek +e), a jony Cl<sup>-</sup> mają po jednym dodatkowym elektronie (i stąd każdy z nich ma ładunek -e). a) Jaka jest wartość wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania na jon Cl<sup>-</sup> ośmiu jonów Cs<sup>+</sup> znajdujących się w wierzchołkach sześcianu? b) Jeśli w krysztale



#### Rys. 21.36. Zadanie 35

brakuje jednego z jonów  $Cs^+$ , to mówimy o *defekcie* kryształu. Jaka jest wartość wypadkowej siły elektrostatycznej oddziaływania na jon  $Cl^-$  siedmiu pozostałych jonów  $Cs^+$ ?

### Podrozdział 21.3. Ładunek jest zachowany

•36 Elektrony i pozytony produkowane są w reakcjach transformacji protonów i neutronów, zachodzących w jądrach atomowych i zwanych *rozpadami beta.* a) Jaka cząstka — elektron czy pozyton — powstaje w takiej reakcji, gdy proton przekształca się w neutron? b) Jaka cząstka — elektron czy pozyton — powstaje w reakcji, gdy neutron przekształca się w proton?

**37** ssm Zidentyfikuj X w następujących reakcjach jądrowych (w pierwszej n oznacza neutron): a)  ${}^{1}H + {}^{9}Be \rightarrow X + n$ , b)  ${}^{12}C + {}^{1}H \rightarrow X$ , c)  ${}^{15}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{4}He + X$ . Skorzystaj z dodatku F.

### Zadania dodatkowe

**38** Solution Na rysunku 21.37 przedstawiono cztery identyczne przewodzące kule, które są dobrze od siebie oddzielone. Kula W (początkowo obojętna elektrycznie) dotyka kuli A, a następnie obie kule zostają od siebie oddzielone. Potem kula W dotyka kuli B (o ładunku początkowym -32e) i zostaje od

niej oddzielona. Wreszcie kula W dotyka kuli C (o ładunku początkowym +48e) i także zostaje od niej oddzielona. Końcowy ładunek kuli W jest równy +18e. Jaki był początkowy ładunek zgromadzony na kuli A?

**39** ssm Cząstka 1 o ładunku +4*e* przedstawiona na rysunku 21.38 znajduje się na wysokości  $d_1 = 2 \text{ mm}$  nad podłogą, a cząstka 2 o ładunku +6*e* jest umieszczona na podłodze w odległości od cząstki 1 liczonej wzdłuż osi *x* równej  $d_2 = 6 \text{ mm}$ .







Rys. 21.38. Zadanie 39

Jaka jest składowa x siły elektrostatycznej działającej na cząstkę 2 ze strony cząstki 1?

**40** Cząstki 1 i 2 przedstawione na rysunku 21.23 są unieruchomione, a cząstka 3 może się swobodnie poruszać. Jaki jest stosunek  $q_1/q_2$ , jeśli wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na cząstkę 3 ze strony cząstek 1 i 2 równa jest zeru, a  $L_{23} = 4L_{12}$ ?

**41** a) Jakie jednakowe ładunki dodatnie należałoby umieścić na Ziemi i na Księżycu, aby zrównoważyć ich przyciąganie grawitacyjne? b) Czemu nie musisz znać odległości do Księżyca, aby rozwiązać to zadanie? c) Ile kilogramów jonów wodoru (tj. protonów) potrzeba, aby uzyskać ładunek dodatni, obliczony w punkcie a)?

**42** Na rysunku 21.39 przedstawiono dwie małe kulki przewodzące o takich samych masach *m* i takich samych ładunkach *q*, wiszące na nieprzewodzących niciach o długości *L*. Załóżmy, że kąt  $\theta$  jest tak mały, że tg $\theta$  można zastąpić funkcją sin  $\theta$ . a) Wykaż, że w stanie równowagi

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{\frac{1}{3}},$$



gdzie x jest odległością między  $q \bigcirc q \bigcirc q$ kulkami. b) Jeśli L = 120 cm, |-----x|m = 10 g i x = 5 cm, to jaką Rys. 21.39. Zadania 42 i 43 wartość ma |q|?

**43** a) Wyjaśnij, co stanie się z kulkami z zadania 42, jeśli jedna z nich zostanie rozładowana (jej ładunek q zostanie przekazany do Ziemi). b) Znajdź nową odległość x w stanie równowagi, używając podanych wartości L, m i obliczonej wartości |q|.

**44 ssm** Jak daleko muszą znajdować się dwa protony, żeby wartość siły elektrostatycznej działającej między nimi była równa wartości siły grawitacyjnej działającej na proton na powierzchni Ziemi?

**45** Ile megakulombów dodatniego ładunku znajduje się w 1 molu obojętnego cząsteczkowego wodoru  $(H_2)$ ?

**46** Na rysunku 21.40 przedstawiono cztery unieruchomione cząstki znajdujące się na osi *x* w równych odległościach *d* = 2 cm. Ich ładunki wynoszą  $q_1 = +2e$ ,  $q_2 = -e$ ,  $q_3 = +e$  i  $q_4 = +4e$ , gdzie  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Jaka jest wypadkowa siła elektrostatyczna zapisana z użyciem wektorów jednostkowych działająca na a) cząstkę 1 i b) cząstkę 2 ze strony innych cząstek?

**Rys. 21.40.** Zadanie 46

$$\frac{d}{2}$$
  $\frac{d}{3}$   $\frac{d}{4}$  x

**47** <sup>60</sup> Ładunki punktowe o wartości  $+6 \mu \text{C} \text{ i} -4 \mu \text{C}$  umieszczone zostały na osi x odpowiednio w punktach x = 8 m ix = 16 m. Jaki ładunek należy umieścić w punkcie x = 24 m, żeby na dowolny ładunek umieszczony w początku układu współrzędnych nie działała żadna siła elektrostatyczna? **48** Trzy jednakowe przewodzące kule przedstawione na rysunku 21.41 umieszczone są w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku d = 20 cm. Promienie kul są znacznie mniejsze niż d, a ładunki na nich umieszczone wynoszą  $q_A = -2$  nC,  $q_B = -4$  nC i  $q_C = +8$  nC. a) Jaka siła elektrostatyczna działa pomiędzy kulami A i B? Następnie kule A i B zostają najpierw połączone cienkim przewodem, potem

rozłączone, dalej kula *B* zostaje uziemiona przez ten przewód, a następnie przewód zostaje usunięty, wreszcie kule *B* i *C* zostają najpierw połączone przewodem, a potem rozłączone. Jakie siły elektrostatyczne będą działać teraz b) pomiędzy kulami *A* i *C* oraz c) pomiędzy kulami *B* i *C*?



Rys. 21.41. Zadanie 48

**49** Neutron składa się z jednego kwarku górnego o ładunku +2e/3 i dwóch kwarków dolnych o ładunku -e/3. Jaka siła elektrostatyczna działa pomiędzy kwarkami dolnymi wewnątrz neutronu, jeśli kwarki te są od siebie oddalone o  $2,6 \cdot 10^{-15}$  m?

**50** Na rysunku 21.42 przedstawiono długi, nieprzewodzący pręt o bardzo małej masie i długości L, o osi obrotu w środku, zrównoważony obciążnikiem o ciężarze W, w odległości x od lewego końca pręta. Na lewym i prawym końcu pręta umocowano małe przewodzące kule o dodatnich ładunkach, odpowiednio, q i 2q. W odległości h poniżej każdej z tych kul znajduje się kula o dodatnim ładunku Q. a) Znajdź odległość x, jeśli pręt jest poziomy i znajduje się w stanie równowagi. b) Jaka powinna być odległość h, aby pionowa siła działająca na łożysko, gdy pręt jest poziomy i w stanie równowagi, była równa zeru?



Rys. 21.42. Zadanie 50

**51** Naładowany nieprzewodzący pręt o długości 2 m i polu przekroju 4 cm<sup>2</sup> ułożony jest wzdłuż dodatniej części osi *x*. Jeden jego koniec znajduje się w początku układu współrzędnych. *Objętościowa gęstość ładunku*  $\rho$  jest ładunkiem przypadającym na jednostkę objętości wyrażonym w kulombach na metr sześcienny. Ile nadmiarowych elektronów znajduje się w tym pręcie, jeśli gęstość  $\rho$  jest: a) stała i ma wartość  $-4 \,\mu\text{C/m^3}$ , b) zmienna i jej wartość określona jest funkcją  $\rho = bx^2$ , gdzie  $b = -2 \,\mu\text{C/m^5}$ ?

**52** Cząstkę o ładunku Q unieruchomiono w początku układu współrzędnych x, y. W chwili t = 0 na osi x w punkcie

x = 20 cm umieszczono cząstkę o masie m = 0.8 g i ładunku  $q = 4 \mu \text{C}$ , która będzie się poruszała z prędkością 50 m/s w kierunku dodatnich wartości y. Dla jakiej wartości Q ruch tej cząstki będzie się odbywał po okręgu? (Pomiń siłę grawitacyjną działającą na tę cząstkę).

**53** Jaka byłaby wartość siły elektrostatycznej działającej pomiędzy dwoma ładunkami punktowymi 1 C odległymi o a) 1 m, b) 1 km, jeśli istniałyby takie ładunki (nie istnieją) i można byłoby stworzyć opisaną konfigurację?

**54** Ładunek 6 μC dzielimy na dwie części, które odsuwamy na odległość 3 mm. Jaka jest największa możliwa wartość siły elektrostatycznej działającej między tymi dwoma częściami?

**55** Pewną część ( $\alpha$ ) ładunku Q znajdującego się na małej kuli przenosimy na inną kulę, która znajduje się w pobliżu. Obie kule mogą być traktowane jak ładunki punktowe. a) Dla jakiej wartości  $\alpha$  siła elektrostatyczna F działająca między obiema kulami jest największa? Ile wynosi b) mniejsza i c) większa wartość  $\alpha$ , dla której siła F równa jest połowie swojej wartości maksymalnej?

**56** Jeśli w suchy dzień kot wielokrotnie ociera się o twoje bawełniane spodnie, to wywołany tym przepływ ładunku pomiędzy jego sierścią i bawełną może cię naładować nadmiarowym ładunkiem  $-2 \mu C$ . a) Ile elektronów przepływa wtedy pomiędzy tobą a kotem?

Ten nadmiarowy ładunek stopniowo odpłynie przez podłogę, ale jeśli zamiast czekać natychmiast dotkniesz kranu, to gdy twoja dłoń się do niego zbliży, pojawi się bolesna iskra. b) Ile elektronów przepłynie do lub od kranu w trakcie tego wyładowania? c) Jaki jest znak ładunku indukowanego w kranie bezpośrednio przed powstaniem iskry, dodatni czy ujemny? d) W którą stronę przepłyną elektrony w powstałej iskrze, jeśli zamiast ciebie do kranu sięgnie pazurem twój kot? e) Jeśli w suchy dzień głaszczesz kota gołą dłonią, powinieneś unikać zbliżania swoich palców do kociego nosa. Inaczej powstająca iskra może mu sprawić ból. Jaki jest mechanizm powstawania takiej iskry, jeśli założymy, że kocia sierść jest izolatorem?

**57** Wiemy, że wartości ujemnego ładunku elektronu i dodatniego ładunku protonu są równe. Przypuśćmy jednak, że te wartości różnią się od siebie o 0, 0001%. Jaką siłą odpychałyby się dwie miedziane monety znajdujące się w odległości 1 m od siebie? Załóż, że każda moneta zawiera  $3 \cdot 10^{22}$  atomów miedzi. (*Wskazówka*: Obojętny atom miedzi zawiera 29 protonów i 29 elektronów). Jaki wynika stąd wniosek?

**58** Cząstka 1 o ładunku  $-80 \,\mu\text{C}$  i cząstka 2 o ładunku  $+40 \,\mu\text{C}$  przedstawione na rysunku 21.26 unieruchomione są na osi x w odległości  $L = 20 \,\text{cm}$ . Jaka jest wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na cząstkę 3 o ładunku  $q_3 = 20 \,\mu\text{C}$ , jeśli znajduje się ona w punkcie: a)  $x = 40 \,\text{cm}$  i b)  $x = 80 \,\text{cm}$ ? Jakie powinny być współrzędne c) x i d) y cząstki 3, jeśli wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na nią ze strony cząstek 1 i 2 jest równa zeru?

**59** Ile wynosi w kulombach całkowity ładunek 75 kg elektronów?

**60 ••** Na rysunku 21.43 przedstawiono sześć naładowanych cząstek rozmieszczonych radialnie dookoła cząstki 7. Odle-

głości pomiędzy nimi a cząstką 7 wynoszą d =1 cm lub 2d. Ładunki cząstek wynoszą  $q_1 = +2e$ ,  $q_2 = +4e$ ,  $q_3 = +e$ ,  $q_4 =$ +4e,  $q_5 = +2e$  i  $q_7 = +6e$ , gdzie  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Ile wynosi wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na cząstkę 7?



v

**61** Trzy naładowane cząstki umieszczone zostały w wierzchołkach trójkąta: ładunki i współrzędne tych cząstek w układzie (x, y) wynoszą odpowiednio:  $Q_1 = 80$  nC, (0 mm, 3 mm),  $Q_2$  (0 mm, -3 mm) i  $Q_3 = 18$  nC, (4 mm, 0 mm). Jak jest wyrażona w notacji wektorowej siła elektrostatyczna działająca na cząstkę 3 ze strony pozostałych cząstek, jeśli ładunek  $Q_2$  wynosi: a) 80 nC, b) -80 nC?

**62 ssm** Jakie są: a) wartość i b) kierunek siły elektrostatycznej działającej na cząstkę 4 ze strony pozostałych trzech

cząstek przedstawionych na rysunku 21.44? Wszystkie cztery cząstki znajdują się na płaszczyźnie xy, a ich ładunki wynoszą:  $q_1 = -3, 2 \cdot 10^{-19}$  C,  $q_2 = +3, 2 \cdot 10^{-19}$  C,  $q_3 = +6, 4 \cdot 10^{-19}$  C i  $q_4 = +3, 2 \cdot 10^{-19}$  C. Ponadto  $\theta_1 = 35^\circ, d_1 = 3$  cm i  $d_2 = d_3 = 2$  cm. **Rys. 21.44.** Zadanie 62

**63** Dwa ładunki punktowe 30 nC i -40 nC są unieruchomione na osi *x* odpowiednio w początku układu współrzędnych i w punkcie *x* = 72 cm. Cząstka o ładunku 42 nC zostaje uwolniona w punkcie *x* = 28 cm. Jaka jest masa tej cząstki, jeśli jej początkowe przyspieszenie wynosi 100 km/s<sup>2</sup>?

**64** Całkowity ładunek dwóch małych naładowanych dodatnich kul jest równy  $5 \cdot 10^{-5}$  C. Jaki jest ładunek kuli o mniejszym ładunku, jeśli na kule odległe o 2 m działają nawzajem siły elektrostatyczne o wartości 1 N?

**65** Początkowy ładunek zgromadzony na trzech identycznych metalowych kulach przedstawionych na rysunku 21.24 był równy Q dla kuli A, -Q/4 dla kuli B i Q/2 dla kuli C. Ładunek  $Q = 2 \cdot 10^{-14}$  C. Kule A i B są unieruchomione, a odległość d między ich środkami równa jest 1,2 m i jest dużo większa niż rozmiar tych kul. Kula C najpierw dotyka kuli A, potem kuli B, aby w końcu zostać usuniętą z układu. Ile wynosi wtedy siła elektrostatyczna działająca między kulami A i B?

**66** W próżni, w pobliżu powierzchni Ziemi, w punkcie o współrzędnej y = 0 znajduje się elektron. W jakim punkcie y należałoby umieścić drugi elektron, aby siła elektrostatyczna działająca na pierwszy elektron równoważyła siłę grawitacyjną oddziaływania Ziemi na pierwszy elektron?

**67** ssm Cząstka 1 o ładunku -5q i cząstka 2 o ładunku +2q przedstawione na rysunku 21.26 unieruchomione są na osi x w odległości L od siebie. Cząstka 3 o nieznanym ładunku  $q_3$  ma zostać umieszczona tak, aby wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na nią za strony cząstek 1 i 2 była równa zeru. Jakie powinny być współrzędne a) x i b) y cząstki 3?

**68** W odległości 30 m znajduje się dwoje studentów: Jan o masie 90 kg i Maria o masie 45 kg. Przypuśćmy, że ładunki dodatni i ujemny znajdujące się w ciele każdego z nich różnią się o 0,01%, przy czym jedno z nich jest naładowane dodatnio, a drugie ujemnie. Znajdź rząd wielkości siły elektrostatycznej przyciągania pomiędzy nimi, rozważając zamiast nich dwie kule wody o tych samych masach co studenci.

**69** W rozpadzie promieniotwórczym opisanym równaniem (21.13) jądro <sup>238</sup>U przekształca się w jądro <sup>234</sup>Th, emitując jądro <sup>4</sup>He. (W tym procesie biorą udział jądra atomowe, a nie atomy, elektrony zatem nie są zaangażowane). Jaka jest a) wartość siły elektrostatycznej działającej pomiędzy jądrami <sup>234</sup>Th i <sup>4</sup>He oraz b) przyspieszenie jądra <sup>4</sup>He, jeśli odległość pomiędzy jądrem <sup>234</sup>Th a jądrem <sup>4</sup>He jest równa 9 · 10<sup>-15</sup> m?

**70** Cztery cząstki przedstawione na rysunku 21.25 znajdują się w wierzchołkach kwadratu. Ładunki tych cząstek wynoszą:  $q_1 = Q$ ,  $q_2 = q_3 = q$ ,  $q_4 = -2Q$ . Jaki jest stosunek q/Q, jeśli wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na cząstkę 1 równa jest zeru?

**71** Elektron znajdujący się w środku kulistej metalowej powłoki o promieniu *R* zostaje wystrzelony w kierunku maleńkiego otworu w tej powłoce, przez którą się z niej wydostaje. Powłoka naładowana jest ujemnie *powierzchniową gęstością ładunku* (ładunkiem przypadającym na jednostkę powierzchni) równą  $6.9 \cdot 10^{-13}$  C/m<sup>2</sup>. Znajdź przyspieszenie elektronu w chwili, gdy znajduje się on w odległości a) r = 0.5R i b) r = 2R od środka powłoki.

**72** Elektron został wystrzelony z prędkością początkową  $v_i = 3,2 \cdot 10^5$  m/s dokładnie w kierunku bardzo odległego protonu, który znajduje się w spoczynku. Ponieważ masa protonu jest znacznie większa niż masa elektronu, można przyjąć, że proton pozostanie w spoczynku. Znajdź odległość pomiędzy obu cząstkami w chwili, w której prędkość elektronu równa będzie  $2v_i$ , obliczając pracę wykonaną nad elektronem przez silę elektrostatyczną.

**73** We wczesnym modelu atomu wodoru (*modelu Bohra*) elektrony poruszają się ze stałą prędkością dookoła protonów

po orbitach kołowych. Długości promieni tych orbit są ograniczone (*skwantowane*) do pewnego zbioru wartości

$$r = n^2 a_0 \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie  $a_0 = 52,92$  pm. Jaka jest prędkość elektronu, jeśli porusza się on po a) najmniejszej dozwolonej orbicie i b) drugiej z kolei najmniejszej orbicie. c) Czy prędkość elektronu zwiększa się, zmniejsza czy pozostaje bez zmian, gdy elektron przenosi się na dalszą orbitę? **74** Przez włókno żarówki o mocy 100 W płynie prąd o natężeniu 0,83 A. Ile czasu zabierze przepłynięcie przez to włókno 1 mola elektronów?

**75** Ładunki elektronu i pozytonu równe są odpowiednio -e i *e*. Masa każdej z tych cząstek wynosi 9,11 · 10<sup>-31</sup> kg. Jak jest stosunek siły elektrostatycznej do siły grawitacyjnej działającej pomiędzy elektronem a pozytonem?

# Pole elektryczne

Ζ

Α

Ł

22

D

# **22.1.** POLE ELEKTRYCZNE

Ζ

Czego się nauczysz? \_

R

0

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **22.01** zauważyć, że naładowana cząstka wytwarza w przestrzeni wokół siebie pole elektryczne  $\vec{E}$ , które jest wielkością wektorową, a więc ma zarówno wartość, jak i kierunek;
- **22.02** wykorzystać pojęcie pola elektrycznego  $\vec{E}$  do wyjaśnienia sposobu, w jaki naładowana cząstka oddziałuje siłą elektrostatyczną  $\vec{F}$  na inną naładowaną cząstkę, mimo że między tymi cząstkami nie ma żadnego kontaktu;

# Podstawowe fakty \_

 Naładowana cząstka wytwarza w otaczającej przestrzeni pole elektryczne (pole wektorowe). Jeśli w tej przestrzeni znajduje się inna cząstka naładowana, to będzie na nią działać siła elektrostatyczna zgodna z wartością i kierunkiem tego pola.

• Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w dowolnym punkcie przestrzeni określamy przez stosunek siły  $\vec{F}$  działającej na umieszczony w tym punkcie ładunek próbny  $q_0$  do tego ładunku

$$\vec{E} = \frac{F}{q_0}$$

0 fizyce

Na rysunku 22.1 przedstawione są dwie cząstki naładowane dodatnio. Z poprzedniego rozdziału wiemy, że na cząstkę 1 działa siła elektrostatyczna związana z obecnością cząstki 2. Znamy też kierunek tej siły, a także, mając więcej danych, potrafimy obliczyć jej wartość. Pozostaje jednak niepokojące pytanie. Skąd cząstka 1 "wie" o obecności cząstki 2? A więc biorąc pod uwagę fakt, że cząstki się nie stykają, w jaki sposób cząstka 2 popycha cząstkę 1 – jaka jest natura tego *oddziaływania na odległość*?

Jednym z celów fizyki jest zapisywanie obserwacji dotyczących naszego świata, takich jak wartość i kierunek siły działającej na cząstkę 1. Innym celem jest dostarczenie wyjaśnień tego co zaobserwowano. Naszym celem w tym rozdziale jest wyjaśnienie, jak działa siła elektryczna na odległość.

- **22.03** wyjaśnić, w jaki sposób (co do zasady) niewielki dodatni ładunek próbny może służyć do wyznaczenia natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie przestrzeni;
- **22.04** wyjaśnić pojęcie linii pola elektrycznego, pamiętając skąd one wychodzą, gdzie się kończą i jakie znaczenie ma ich gęstość.

• Linie pola elektrycznego pomagają nam wizualizować kierunek i wartość pola elektrycznego. Wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie jest styczny do linii pola elektrycznego. Gęstość linii pola w tym punkcie jest proporcjonalna do wartości natężenia pola elektrycznego. Tak więc gęstsze linie odpowiadają silniejszemu polu.

• Linie pola elektrycznego wychodzą z ładunków dodatnich i kończą się na ładunkach ujemnych.



**Rys. 22.1.** W jaki sposób naładowana cząstka 2 odpycha naładowaną cząstkę 1, skoro nie mają one ze sobą kontaktu?

Wyjaśnienie, które tutaj przeanalizujemy, jest następujące: Cząstka 2 wytwarza w otaczającej ją przestrzeni **pole elektryczne**. Dzieje się tak nawet wtedy, gdy tą przestrzenią jest próżnia. Jeśli w dowolnym punkcie tej przestrzeni pojawi się cząstka 1, to będzie ona odczuwać obecność cząstki 2. Na cząstkę 1 będzie wpływać pole elektryczne wytworzone już w danym punkcie przez cząstkę 2. Tak więc cząstka 2 oddziałuje na cząstkę 1 za pomocą pola elektrycznego, które sama wytwarza. Nie jest to zatem oddziaływanie wymagające bezpośredniego kontaktu niezbędnego na przy-kład do przesunięcia ręką kubka z kawą. Zamiast tego na cząstkę 2 działa siła wywołana powstałym polem elektrycznym.

Cele, jakie stawiamy sobie w tym rozdziale to: 1) zdefiniowanie pola elektrycznego, 2) omówienie sposobu obliczania jego natężenia dla różnych układów naładowanych cząstek i ciał oraz 3) analiza wpływu pola elektrycznego na naładowane cząstki (wywołującego przykładowo ich przyspieszenie).

# Pole elektryczne

W fizyce używamy mnóstwa różnych pól. Przykładowo *pole temperatury* w sali wykładowej jest rozkładem temperatur, które moglibyśmy znaleźć, mierząc temperaturę w wielu punktach tej sali. W podobny sposób możemy zdefiniować *pole ciśnienia* w basenie pływackim. Te dwa przykłady odpowiadają *polom skalarnym*, ponieważ temperatura i ciśnienie są wielkościami skalarnymi, a więc mającymi tylko wartość, a nie kierunek.

Pole elektryczne natomiast jest *polem wektorowym*, gdyż niesie informację o sile, informację obejmującą zarówno wartość, jak i kierunek tej siły. Pole to odpowiada rozkładowi wektorów natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , czyli podaje jeden wektor dla każdego punktu przestrzeni wokół naładowanego ciała. Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w pewnym punkcie w pobliżu naładowanego ciała, np. w punkcie P pokazanym na rysunku 22.2a, można w zasadzie zdefiniować w następujący sposób: najpierw umieszczamy w tym punkcie *dodatni* ładunek  $q_0$ , zwany *ładunkiem próbnym*. Nazwa ładunku próbnego wskazuje, że służy on do testowania pola elektrycznego. (Ładunek próbny musi być niewielki, aby nie zaburzać rozkładu ładunku zgromadzonego w tym ciele). Następnie mierzymy siłę elektrostatyczną  $\vec{F}$ , która działa na ładunek próbny. Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytworzonego w punkcie P przez naładowane ciało definiujemy wtedy wzorem

$$\vec{E} = \frac{\dot{F}}{q_0}$$
 (natężenie pola elektrycznego). (22.1)

Ponieważ ładunek próbny jest dodatni, więc oba wektory występujące we wzorze (22.1) są tak samo skierowane. Kierunek natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  jest taki sam jak kierunek siły  $\vec{F}$ . Wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w punkcie *P* wynosi  $E = F/q_0$ . Tak jak to pokazano na rysunku 22.2b natężenie pola elektrycznego w punkcie *P* przedstawiamy zawsze w postaci wektora o początku w punkcie *P*. (Może to zabrzmieć trywialnie, ale rysowanie wektorów w jakikolwiek inny sposób zwykle prowadzi do pomyłek. Innym częstym błędem jest mieszanie pojęcia *siły* 



**Rys. 22.2.** a) Dodatni ładunek próbny  $q_0$ umieszczony w punkcie *P* w pobliżu naładowanego ciała. Siła elektrostatyczna  $\vec{F}$ działa na ten ładunek próbny. b) Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  wytwarzanego w punkcie *P* przez naładowane ciało

i *pola*. Siła elektrostatyczna jest przyciągająca lub odpychająca. Pole elektryczne jest abstrakcyjną właściwością wytwarzaną w przestrzeni przez naładowane ciało.) Ze wzoru (22.1) widzimy, że jednostką natężenia pola elektrycznego w układzie SI jest niuton na kulomb (N/C).

Ładunek próbny możemy umieszczać w rożnych innych punktach przestrzeni. Robimy to, aby zmierzyć w tych punktach natężenie pola elektrycznego. Uzyskujemy w ten sposób rozkład natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez naładowane ciało. Pole to istnieje niezależnie od ładunku próbnego. Pole elektryczne jest wytwarzane przez naładowane ciało w otaczającej je przestrzeni (nawet w próżni) niezależnie od tego czy akurat się tam pojawimy, żeby je zmierzyć.

W kilku następnych podrozdziałach będziemy wyznaczać pole elektryczne wokół naładowanych cząstek i różnych naładowanych ciał. Najpierw jednak sprawdźmy, w jaki sposób można przedstawić graficznie pole elektryczne.

# Linie pola elektrycznego

 $\mathbf{\star}$ 

Rozejrzyj się po pokoju, w którym się znajdujesz. Czy potrafisz wyobrazić sobie pole wektorów w otaczającej cię przestrzeni, wektorów o różnych wartościach i kierunkach? Choć wydaje się to niemożliwe, Michael Faraday, który w XIX wieku wprowadził ideę pola elektrycznego, znalazł na to sposób. Wyobraził sobie linie, zwane obecnie **liniami pola elektrycznego**, które wypełniają przestrzeń wokół naładowanego ciała.

Na rysunku 22.3 przedstawiono kulę, na której znajduje się jednorodnie rozłożony ładunek ujemny. Jeśli umieścimy *dodatni* ładunek próbny gdziekolwiek w pobliżu kuli (rys. 22.3a), to będzie na niego działać siła elektrostatyczna, skierowana *do* środka tej kuli. Innymi słowy, wektory natężenia pola elektrycznego we wszystkich punktach w pobliżu kuli są skierowane radialnie do jej środka. Możemy przedstawiać to pole elektryczne, rysując linie pola tak jak to pokazano na rysunku 22.3b. W każdym punkcie, takim jak ten przedstawiony na rysunku, kierunek linii pola przechodzącej przez dany punkt odpowiada kierunkowi wektora natężenia pola w tym punkcie.

Związek między liniami pola i wektorami natężenia pola elektrycznego jest następujący: 1) W dowolnym punkcie przestrzeni wektor natężenia pola musi być styczny do linii pola w tym punkcie. (Łatwo to zobaczyć na rysunku 22.3, gdzie linie pola są proste, jednak wkrótce zobaczymy także linie zakrzywione). 2) Względna gęstość linii pola mierzona w płaszczyźnie prostopadłej do tych linii odpowiada względnej wartości natężenia pola, im większa gęstość linii tym większe natężenie pola.

Gdyby kula przedstawiona na rysunku 22.3 była naładowana jednorodnie ładunkiem dodatnim, to wektory natężenia pola elektrycznego, a stąd i linie pola elektrycznego we wszystkich punktach w pobliżu kuli byłyby skierowane radialnie *od* kuli. Mamy więc następującą regułę:

Linie pola elektrycznego wychodzą od ładunku dodatniego (gdzie się zaczynają) i są skierowane ku ładunkowi ujemnemu (gdzie się kończą).

Na rysunku 22.3b linie pola wychodzą z odległych ładunków dodatnich, których nie pokazano.



**Rys. 22.3.** a) Siła elektrostatyczna  $\vec{F}$ działająca na dodatni ładunek próbny w pobliżu kuli jednorodnie naładowanej ładunkiem ujemnym. b) Wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w miejscu ładunku próbnego i linie pola elektrycznego w przestrzeni w pobliżu kuli. Linie pola wchodzą *do* ujemnie naładowanej kuli. (Linie pola wychodzą z odległych ładunków dodatnich)



**Rys. 22.4.** a) Siła działająca na dodatni ładunek próbny w pobliżu bardzo dużej nieprzewodzącej płyty o jednej powierzchni jednorodnie naładowanej ładunkiem dodatnim. b) Wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w miejscu ładunku próbnego i linie pola elektrycznego w przestrzeni w pobliżu płyty. Linie pola wychodzą z dodatnio naładowanej płyty. c) Widok z boku sytuacji (b)

Innym przykładem jest nieskończenie duża nieprzewodząca *płyta* (płaszczyzna), której fragment przedstawiono na rysunku 22.4a. Płyta ta jest po jednej stronie równomiernie naładowana dodatnim ładunkiem elektrycznym. Jeśli w dowolnym punkcie znajdującym się w pobliżu tej płyty (po każdej z jej stron) umieścimy dodatni ładunek próbny, to stwierdzimy, że wypadkowa siła elektrostatyczna działająca na ten ładunek będzie do niej prostopadła i skierowana na zewnątrz tej płyty. Prostopadły kierunek siły jest sensowny, gdyż jakakolwiek jej składowa skierowana powiedzmy w górę będzie równoważona przez składową działającą w dół. Jedyną możliwością jest kierunek prostopadły do płyty, tak więc wektory natężenia pola elektrycznego i linie pola muszą być skierowane od płyty i prostopadle do niej, tak jak to pokazują rysunki 22.4b i c.

Ponieważ ładunek elektryczny jest rozłożony równomiernie na całej płaszczyźnie, więc wszystkie wektory natężenia pola mają taką samą wartość. Pole elektryczne o takiej samej wartości i takim samym kierunku natężenia w każdym punkcie nazywamy *jednorodnym polem elektrycznym*. (Z polem jednorodnym pracuje się znacznie łatwiej niż z polem *niejednorodnym*, w którym natężenie pola zmienia się od punktu do punktu). Oczywiście nieskończenie duża płyta nie istnieje w rzeczywistości. Korzystanie z tego modelu jest tylko sposobem stwierdzenia, że interesuje nas pole elektryczne w punktach znajdujących się niedaleko jej powierzchni, ale daleko od jej krawędzi.

Na rysunku 22.5 przedstawiono linie pola dla dwóch jednakowych ładunków dodatnich. Tym razem linie pola są zakrzywione, ale nadal obowiązują takie same reguły ich rysowania: 1) wektor natężenia pola w dowolnym punkcie jest styczny do linii pola w tym punkcie i jest tak samo skierowany, co zostało pokazane dla jednego punktu, 2) gęstsze linie oznaczają silniejsze pole. Aby wyobrazić sobie pełny trójwymiarowy rozkład linii pola dookoła tych dwóch ładunków, obróć rozkład przedstawiony na rysunku 22.5 dookoła *osi symetrii*, która jest pionową prostą przechodzącą przez obie cząstki.



**Rys. 22.5.** Linie pola dla dwóch jednakowych dodatnich ładunków punktowych. Czyż widoczny wzór nie sugeruje, że ładunki odpychają się wzajemnie?

# **22.2.** POLE ELEKTRYCZNE ŁADUNKU PUNKTOWEGO

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **22.05** narysować naładowaną cząstkę, określić znak jej ładunku, wybrać pobliski punkt i narysować wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , którego początek będzie się znajdował w tym punkcie;
- **22.06** określić kierunek wektora natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  wytwarzanego w danym punkcie przez pojedynczą cząstkę naładowaną ładunkiem dodatnim lub ujemnym;
- 22.07 dla dowolnego punktu pola elektrycznego pojedynczej cząstki naładowanej zastosować zależność między wartością

#### Podstawowe fakty.

• Wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  wytwarzanego przez cząstkę o ładunku q w odległości r od tej cząstki wynosi 1 |q|

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q|}{r^2}$$

 Wszystkie wektory natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez cząstkę naładowaną dodatnio są zwrócone od tej natężenia pola E, wielkością tego ładunku |q| i odległością r tego punktu od ładunku;

- 22.08 zauważyć, że podany tu wzór na natężenie pola elektrycznego ma zastosowanie wyłącznie w przypadku ładunków punktowych, a nie dotyczy ciał rozciągłych;
- 22.09 znaleźć wypadkowe pole elektryczne pochodzące od więcej niż jednego ładunku jako sumę wektorową (a nie skalarną) natężeń pól elektrycznych pochodzących od każdego z tych ładunków.

cząstki. Wektory natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez cząstkę naładowaną ujemnie są zwrócone ku tej cząstce.

 Jeśli pole elektryczne w danym punkcie pochodzi od więcej niż jednej cząstki, to wypadkowe natężenie pola jest sumą wektorową natężeń poszczególnych pól elektrycznych — natężenie pola elektrycznego spełnia zasadę superpozycji.

# Pole elektryczne ładunku punktowego

Aby znaleźć pole naładowanej cząstki (często nazywanej *ładunkiem punktowym*), umieszczamy w dowolnym punkcie, w odległości r od tego ładunku punktowego dodatni ładunek próbny  $q_0$ . Z prawa Coulomba (21.4) wiesz, że wartość siły elektrostatycznej, działającej ze strony cząstki o ładunku  $q_0$  na ten ładunek wynosi

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}.$$

Tak jak poprzednio, siła  $\vec{F}$  jest skierowana od ładunku punktowego, jeśli q jest ładunkiem dodatnim, i do ładunku punktowego, jeśli q jest ładunkiem ujemnym. Natężenie pola elektrycznego (w punkcie, w którym znajduje się ładunek próbny) na podstawie wzoru (22.1) wynosi

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \qquad \text{(ladunek punktowy)}. \tag{22.2}$$

Zastanówmy się jeszcze raz nad kierunkami. Natężenie  $\vec{E}$  jest skierowane tak samo, jak siła działająca na dodatni ładunek próbny: od ładunku punktowego, jeśli q jest ładunkiem dodatnim, i do niego, jeśli ładunek q jest ujemny.

Zatem w przypadku dowolnej naładowanej cząstki, jeśli tylko wiemy, jaki jest znak jej ładunku q, to możemy natychmiast określić, jak zwrócony jest wektor natężenia pola elektrycznego. Wartość natężenia pola elektrycz-



**Rys. 22.6.** Wektory natężenia pola elektrycznego w otoczeniu dodatniego ładunku punktowego

nego w dowolnym punkcie odległym od tego ładunku o r możemy znaleźć, przekształcając wzór (22.2) w postać skalarną

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \qquad \text{(hadunek punktowy)}.$$
 (22.3)

We wzorze (22.3) piszemy moduł |q|, aby uniknąć niebezpieczeństwa otrzymania ujemnej wartości natężenia pola, gdy ładunek q jest ujemny. Znak "minus" mógłby sugerować, że wartość natężenia pola ma coś wspólnego z jego kierunkiem. Oczywiście tak nie jest, gdyż wzór (22.3) dotyczy tylko wartości natężenia pola. Nad kierunkiem wektora należy się zastanowić osobno.

Na rysunku 22.6 przedstawiono pewną liczbę wektorów natężenia pola elektrycznego w punktach wokół cząstki naładowanej dodatnio. Bądź jednak ostrożny. Każdy z tych wektorów przedstawia wielkość wektorową w punkcie, w którym znajduje się jego początek. Wektor natężenia pola elektrycznego nie jest czymś, co rozciąga się "odtąd dotąd", tak jak wektor przemieszczenia.

Ogólnie, jeśli pola elektryczne w danym punkcie pochodzą od wielu ładunków punktowych, to natężenie pola wypadkowego możemy znaleźć, umieszczając w tym punkcie dodatni ładunek próbny. Następnie wypisujemy siły działające na ładunek próbny ze strony każdego z tych ładunków, na przykład  $\vec{F}_{01}$  będzie siłą działającą ze strony cząstki 1. Siły te spełniają zasadę superpozycji, tak więc dodajemy je wektorowo

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \dots + \vec{F}_{0n}$$

Aby przejść do natężenia pola elektrycznego, stosujemy wzór (22.1) do każdej z tych sił

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{\vec{F}_{01}}{q_0} + \frac{\vec{F}_{02}}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_{0n}}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n.$$
 (22.4)

Ze wzoru (22.4) widać, że do natężeń pola elektrycznego stosuje się także zasadę superpozycji. Jeśli chcesz wyznaczyć w pewnym punkcie wypadkowe natężenie pola elektrycznego pochodzącego od wielu ładunków, musisz znaleźć natężenie pola pochodzące od każdego z nich (np. natężenie  $\vec{E}_1$  pochodzące od cząstki 1 itd.), a następnie dodać wektorowo te natężenia. (Tak jak w przypadku sił elektrostatycznych nie możesz beztrosko dodać jedynie ich wartości). Dodawanie wektorów natężeń jest tematem wielu zadań domowych.

# Sprawdzian 1

Na rysunku przedstawiono umieszczone na osi x proton p i elektron e. Jaki jest kierunek natężenia pola elektrycznego elektronu w: a) punkcie S, b) punkcie R? Jaki jest kierunek wypadkowego natężenia pola elektrycznego w: c) punkcie R, d) punkcie S?



### Przykład 22.01. Wypadkowe pole elektryczne trzech cząstek naładowanych

Na rysunku 22.7a przedstawiono trzy cząstki o ładunkach  $q_1 = +2Q$ ,  $q_2 = -2Q$  i  $q_3 = -4Q$ , z których każda znajduje się w odległości *d* od początku układu współrzędnych. Jakie jest wypadkowe natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w początku układu?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Ładunki  $q_1, q_2$  i  $q_3$  wytwarzają w początku układu pola elektryczne o natężeniach odpowiednio  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  i  $\vec{E}_3$ , a wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest sumą wektorową  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ . Aby znaleźć tę sumę, musimy najpierw znaleźć wartości i kierunki tych trzech wektorów natężeń.

**Wartości i kierunki:** Aby znaleźć wartość natężenia  $\vec{E}_1$ , które jest wytworzone przez ładunek  $q_1$ , korzystamy ze wzoru (22.3) i po podstawieniu d zamiast r i 2Q zamiast q otrzymujemy

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q}{d^2}.$$

Podobnie obliczamy wartości natężeń  $\vec{E}_2$  i  $\vec{E}_3$ , które wynosza 1 20 1 40

 $^{4}E_2 = rac{1}{4\piarepsilon_0}rac{2Q}{d^2}$  i  $E_3 = rac{1}{4\piarepsilon_0}rac{4Q}{d^2}.$ 

Następnie musimy znaleźć kierunki trzech wektorów natężenia pola elektrycznego w początku układu. Ładunek  $q_1$  jest ładunkiem dodatnim, dlatego też natężenie wytwarzanego przez niego pola jest skierowane *od* niego. Ładunki  $q_2$  i  $q_3$  są ujemne, a więc natężenia odpowiadających im pól są skierowane *do* nich. Stąd natężenia pól elektrycznych, wytworzonych w środku układu przez te trzy naładowane cząstki mają kierunki przedstawione na rysunku 22.7b. (*Uwaga*: Początki wektorów umieściliśmy w punkcie, gdzie są obliczane natężenia pól — takie postępowanie zmniejsza prawdopodobieństwo pomyłki. Gdybyśmy te wektory związali z cząstkami wytwarzającymi to pole, prawdopodobieństwo pomyłki wzrosłoby dramatycznie.).

**Dodawanie natężeń:** Możemy teraz dodać wektorowo natężenia, podobnie jak w rozdziale 21 dodawaliśmy siły. W celu uproszczenia obliczeń warto tu jednak skorzystać z symetrii. Z rysunku 22.7b widzimy, że natężenia  $\vec{E}_1$  i  $\vec{E}_2$  mają ten sam kierunek. Zatem ich suma wektorowa ma ten sam kierunek, a jej wartość wynosi

$$E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q}{d^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4Q}{d^2}$$

Jest ona równa wartości natężenia  $\vec{E}_3$ .

Musimy teraz dodać dwa wektory:  $\vec{E}_3$  i sumę wektorową  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Oba składniki mają taką samą wartość i są skierowane symetrycznie względem osi *x*, tak jak pokazano na rysunku 22.7c. Korzystając z symetrii rysunku 22.7c, wnioskujemy, że składowe *y* naszych dwóch wektorów są jednakowe co do wartości bezwzględnej (jeden jest skierowany w górę a drugi w dół) i znoszą się wzajemnie, a składowe *x*, jednakowe co do wartości bezwzględnej, dodają się (oba wektory skierowane są w prawo). Stąd wypadkowe natężenie pola  $\vec{E}$  w początku układu jest skierowane w dodatnim kierunku osi *x* i ma wartość:



**Rys. 22.7.** a) Trzy cząstki o ładunkach  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$  znajdują się w takiej samej odległości d od początku układu. b) Wektory natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  i  $\vec{E}_3$  w początku układu, pochodzącego od tych trzech cząstek. c) Wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}_3$  i suma wektorowa  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$  w początku układu

# **22.3.** POLE ELEKTRYCZNE DIPOLA ELEKTRYCZNEGO

## Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 22.10 narysować dipol elektryczny, identyfikując ładunki (ich wielkości i znaki), oś dipola i kierunek elektrycznego momentu dipolowego;
- 22.11 określić kierunek pola elektrycznego w dowolnym punkcie na osi dipola, włączając w to punkty pomiędzy ładunkami tworzącymi dipol;
- 22.12 wyprowadzić wzór na pole elektryczne dipola elektrycznego ze wzoru na pole elektryczne ładunków tworzących ten dipol;
- 22.13 porównać, jak natężenie pola elektrycznego maleje w funkcji odległości w przypadku dipola oraz ładunku punk-

#### Podstawowe fakty.

• Dipol elektryczny składa się z dwóch cząstek mających ładunki o przeciwnych znakach i jednakowych wartościach bezwzględnych *q*, które znajdują się w niewielkiej odległości *d* od siebie.

• Elektryczny moment dipolowy  $\vec{p}$  ma wartość qd i jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego.

 Wartość natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez dipol w odległym od niego punkcie znajdującym się na osi (prostej przechodzącej przez oba ładunki dipola) tego dipola może towego, tzn. określić, w którym z tych przypadków pole elektryczne zanika szybciej z odległością;

- **22.14** zastosować w przypadku dipola wzór określający wartość elektrycznego momentu dipolowego *p* w zależności od odległości pomiędzy ładunkami *d* oraz wartości każdego z nich *q*;
- 22.15 wyrazić natężenie pola elektrycznego na osi dipola w dowolnym oddalonym od niego punkcie jako funkcję odległości z od środka dipola i wartości elektrycznego momentu dipolowego p lub iloczynu wartości ładunków q i ich wzajemnej odległości d.

zostać wyrażona jako funkcja albo iloczynu qd, albo wartości momentu dipolowego p:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{z^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{p}{z^3},$$

gdzie z jest odległością tego punktu od środka dipola.

• Ze względu na zależność  $1/z^3$ , natężenie pola elektrycznego dipola maleje szybciej z odległością niż natężenie pola wytwarzanego przez każdy z ładunków dipola, które zmienia się jak  $1/r^2$ .



**Rys. 22.8.** Linie pola elektrycznego wokół dipola elektrycznego wraz z wektorem natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  narysowanym w jednym punkcie (stycznie do linii pola w tym punkcie)

# Pole elektryczne dipola elektrycznego

Na rysunku 22.8a przedstawiono linie pola elektrycznego wytwarzanego przez dwie naładowane cząstki o takiej samej wartości ładunku q, ale przeciwnych znakach. Taki bardzo popularny i ważny układ ładunków nazywamy **dipolem elektrycznym**. Ładunki wchodzące w skład dipola znajdują się w odległości d od siebie i leżą na osi przechodzącej przez obie cząstki, zwanej *osią dipola*. Oś dipola jest osią symetrii tego układu, dookoła której można w wyobraźni obrócić płaski obraz pola przedstawiony na rysunku 22.8, aby uzyskać rozkład pola w trójwymiarowej przestrzeni. Oznaczmy tę oś jako oś z. Ograniczymy w tym miejscu nasze rozważania do poszukiwania wartości i zwrotu pola elektrycznego w dowolnym punkcie P na osi dipola, który znajduje się w odległości z od środkowego punktu dipola.

Na rysunku 22.9a przedstawione są natężenia pola elektrycznego wytwarzanego w punkcie P przez każdą z cząstek. Bliższa cząstka o ładunku +q wytwarza pole o natężeniu  $E_{(+)}$ , skierowane w stronę dodatnich wartości osi z. Dalsza cząstka o ładunku –q wytwarza pole o natężeniu  $E_{(-)}$ , skierowane w stronę ujemnych wartości osi z, dokładnie w stronę tej cząstki. Poszukujemy wypadkowego natężenia pola elektrycznego w punkcie P, zgodnie ze wzorem (22.4). Jednak ponieważ wektory natężenia pola leżą na tej samej osi, możemy po prostu oznaczyć kierunki tych wektorów znakami plus i minus, tak jak to zwykle robiliśmy w przypadku sił działających wzdłuż tej samej osi. Możemy wtedy napisać, że wartość wypadkowego pola w punkcie *P* wynosi

$$E = E_{(+)} - E_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_{(-)}^2}$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z - \frac{1}{2}d)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z + \frac{1}{2}d)^2}.$$
(22.5)

Po algebraicznym przekształceniu wzór ten można zapisać w postaci

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{2z}\right)^2} \right].$$
 (22.6)

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i pomnożeniu jego czynników dochodzimy do wzoru

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \frac{2d/z}{\left(1 - (\frac{d}{2z})^2\right)^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \frac{d}{\left(1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right)^2}.$$
 (22.7)

Zwykle jesteśmy zainteresowani polem elektrycznym dipola tylko w odległościach dużych w porównaniu z wymiarami dipola, czyli dla  $z \gg d$ . Przy tak dużych odległościach we wzorze (22.7) mamy  $d/(2z) \ll 1$ . Możemy wtedy w naszym przybliżeniu zaniedbać w mianowniku wyraz d/(2z), przez co otrzymujemy

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{z^3}.$$
 (22.8)

Iloczyn qd, który zawiera dwie wielkości charakteryzujące dipol, q i d, jest wartością p wielkości wektorowej zwanej **elektrycznym momentem dipolowym**  $\vec{p}$  dipola. (Jednostką momentu  $\vec{p}$  jest kulomb razy metr (C·m)). Wzór (22.8) możemy więc zapisać w postaci

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{p}{z^3} \qquad \text{(dipol elektryczny)}.$$
 (22.9)

Moment dipolowy  $\vec{p}$  jest skierowany od ujemnego do dodatniego ładunku dipola, zgodnie z rysunkiem 22.9b, dlatego też możemy używać wektora  $\vec{p}$  do określania ustawienia dipola.

Ze wzoru (22.9) wynika, że mierząc natężenie pola elektrycznego dipola tylko w odległych punktach, nie potrafimy znaleźć osobno ładunku q i odległości d, a tylko ich iloczyn. Natężenie pola w odległych punktach nie ulegnie zmianie, jeśli na przykład podwoimy q i równocześnie dwukrotnie zmniejszymy d. Chociaż wzór (22.9) jest słuszny tylko dla odległych punktów na osi dipola, to okazuje się, że natężenie pola E dla dipola zmienia się proporcjonalnie do  $1/r^3$  dla *wszystkich* odległych punktów, niezależnie od tego, czy leżą one na osi dipola, czy też nie; wielkość r jest tu odległością między rozważanym punktem i środkiem dipola.

Analiza rysunku 22.9 i linii pola przedstawionych na rysunku 22.8 pokazuje, że natężenie  $\vec{E}$  dla odległych punktów na osi dipola zawsze jest skierowane tak jak wektor momentu dipolowego  $\vec{p}$ . Jest to prawda bez



**Rys. 22.9.** a) Dipol elektryczny. Wektory natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}_{(+)}$  i  $\vec{E}_{(-)}$  w punkcie *P* na osi dipola pochodzą od dwóch ładunków dipola. Punkt *P* znajduje się w odległości  $r_{(+)}$  i  $r_{(-)}$  od poszczególnych ładunków tworzących dipol. b) Moment dipolowy  $\vec{p}$  dipola jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego

względu na to, czy punkt P znajduje się w górnej, czy w dolnej części osi dipola.

Ze wzoru (22.9) wynika, że jeśli podwoimy odległość punktu od dipola, to natężenie pola elektrycznego w tym punkcie zmaleje ośmiokrotnie. Jeśli jednak podwoimy odległość od pojedynczego ładunku punktowego, to zgodnie ze wzorem (22.3) natężenie pola elektrycznego zmaleje tylko czterokrotnie. Tak więc natężenie pola elektrycznego dipola maleje szybciej wraz z odległością niż natężenie pola elektrycznego pojedynczego ładunku. Fizycznym powodem tego szybkiego zmniejszania się natężenia pola elektrycznego dipola jest to, że z odległych punktów dipol wygląda jak dwa równe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwne ładunki, które prawie, choć nie całkiem, się pokrywają. Stąd natężenia ich pola elektrycznego w odległych punktach prawie całkiem się znoszą.

### Przykład 22.02. Dipol elektryczny i duszki atmosferyczne

Duszki (ang. *sprites*) atmosferyczne (rys. 22.10a) są ogromnymi błyskami, które występują powyżej dużych wyładowań atmosferycznych. Przez dekady były one obserwowane przez pilotów latających w nocy, jednak były tak krótkie i nikłe, że uważano je za iluzje. Potem w latach dziewięćdziesiątych dwudziestego wieku duszki zostały utrwalone na taśmie wideo. Zjawisko duszków ciągle nie jest do końca zrozumiałe, ale uważa się, że powstają one, gdy pomiędzy Ziemią a chmurą burzową dochodzi do szczególnie silnego wyładowania atmosferycznego. Występują one zwłaszcza wtedy, gdy wyładowanie takie przenosi z Ziemi do podstawy chmur ogromną ilość ładunku ujemnego -q (rys. 22.10b).

Zaraz po takim transferze, na Ziemi powstaje skomplikowany rozkład ładunku dodatniego. Możemy jednak modelować pole elektryczne związane z ładunkami w chmurze i na Ziemi, przyjmując, że jest ono polem skierowanego pionowo dipola o ładunku -q na wysokości h w chmurze i ładunku +q umieszczonego na głębokości h pod ziemią (rys. 22.10c). Jakie jest natężenie

a)

pola elektrycznego tego dipola nieco ponad chmurami na wysokości  $z_1 = 30 \text{ km}$  i nieco ponad stratosferą na wysokości  $z_2 = 60 \text{ km}$ , jeśli q = 200 C i h = 6 km?

# **PODSTAWOWE FAKTY**

Wartość natężenia pola elektrycznego dipola możemy przybliżyć, stosując wzór (22.8).

Obliczenia: Zapisujemy ten wzór w postaci

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q(2h)}{z^3},$$

gdzie 2*h* jest odległością pomiędzy ładunkami -q i +q przedstawionymi na rysunku 22.10c. Wartość natężenia pola elektrycznego na wysokości  $z_1 = 30$  km wynosi

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(200\text{C})(2)(6 \cdot 10^3 \text{ m})}{(30 \cdot 10^3 \text{ m})^3} = 1.6 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$
  
(odpowiedź).



**Rys. 22.10.** a) Zdjęcie duszka atmosferycznego (dzięki uprzejmości NASA). b) Wyładowanie atmosferyczne, w którym ogromna ilość ładunku ujemnego przenoszona jest z ziemi do podstawy chmury. c) Dipol elektryczny jako model układu chmura-ziemia

Podobnie dla wysokości  $z_2 = 60 \text{ km}$  znajdujemy

$$E = 2 \cdot 10^2 \,\mathrm{N/C} \qquad (\mathrm{odpowied}\dot{z}).$$

Tak jak to rozważamy w podrozdziale 22.6, gdy wartość natężenia pola elektrycznego przekracza pewną wielkość krytyczną  $E_k$ , pole elektryczne może oderwać elektrony od atomów (zjonizować atomy). Uwolnione elektrony mogą zderzać się z innymi atomami wywołując ich świecenie. Krytyczna wartość natężenia  $E_k$ zależy od gęstości powietrza, w którym istnieje pole elektryczne. Na wysokości  $z_2 = 60 \text{ km}$  gęstość powietrza jest tak mała, że natężenie pola elektrycznego  $E = 2 \cdot 10^2 \text{ N/C}$  przekracza wartość krytyczną  $E_k$  i atomy w powietrzu emitują światło. Niżej, nieco ponad chmurami, na wysokości  $z_1 = 30 \text{ km}$  gęstość powietrza jest znacznie większa, natężenie pola  $E = 1,6 \cdot 10^3 \text{ N/C}$  nie przekracza wartości krytycznej  $E_k$  i atomy nie świecą. Tłumaczy to, dlaczego duszki mogą powstawać tylko bardzo wysoko ponad chmurami burzowymi.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **22.4.** POLE ELEKTRYCZNE NAŁADOWANEJ LINII

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

<b>22.16</b> znaleźć liniową gęstość ładunku $\lambda$ dla jednorodnego roz- kładu ładunku, linii, powierzchniową gęstość ładunku $\sigma$ dla jednorodnego rozkładu ładunku na powierzchni oraz objęto- ściową gęstość ładunku $\rho$ dla jednorodnego rozkładu ładunku	linii, dzieląc ładunek tej linii na elementy $dq$ , a następnie sumując (całkując) wektory natężenia pola elektrycznego $d\vec{E}$ wytwarzanego w tym punkcie przez każdy element ła- dunku;
w objętości;	22.18 wyjaśnić, jak wykorzystać symetrię do uproszczenia ob-
w dowolnym punkcie w pobliżu jednorodnie naładowanej	się w pobliżu jednorodnie naładowanej linii.
Podstawowe fakty	
• Wzór opisujący natężenie pola elektrycznego cząstki nała- dowanej nie ma zastosowania dla ciał o ciągłym rozkładzie ładunku.	Następnie dodajemy składowe, całkując składowe wektory pola elektrycznego d $\vec{E}$ pochodzące od wszystkich elementów ładunku.
• Aby znaleźć pole elektryczne wytwarzane w jakimś punkcie przez ciało o ciągłym rozkładzie ładunku, rozważamy najpierw pole wytwarzane przez element ładunku d <i>q</i> znajdujący się w tym ciele. Musi on być na tyle mały, żebyśmy mogli zastosować do niego wzory opisujące pole naładowanej cząstki.	• Ponieważ poszczególne pola elektryczne o natężeniach d $\vec{E}$ mają różne wartości i różne kierunki, najpierw spraw- dzamy, czy symetria zagadnienia pozwala nam zreduko- wać pewne składowe tych pól i tym samym ułatwić cał- kowanie.

# Pole elektryczne naładowanej linii

Rozważaliśmy dotąd pole elektryczne wytwarzane przez jeden lub co najwyżej kilka ładunków punktowych. Teraz staniemy przed większym wyzwaniem i przyjrzymy się sytuacji, w której cienkie (w przybliżeniu jednowymiarowe) ciało, takie jak pręt lub pierścień, naładowane jest ogromną (większą niż bylibyśmy w stanie kiedykolwiek policzyć) liczbą ładunków punktowych. W następnym podrozdziale rozważymy takie naładowane dwuwymiarowe ciała, jak tarcza z ładunkiem rozłożonym na powierzchni. W następnym rozdziale zmierzymy się z ciałami trójwymiarowymi, takimi jak kula z ładunkiem równomiernie rozłożonym w jej objętości.



**Rys. 22.11.** Pierścień naładowany jednorodnie dodatnio. Element ładunku zajmuje długość ds (znacznie powiększoną dla lepszej widoczności). Element ten wytwarza w punkcie P pole elektryczne o natężeniu d $\vec{E}$ .

 Tabela 22.1.
 Niektóre wielkości

 określające rozkład ładunku elektrycznego

Nazwa	Symbol	Jednostka SI
Ładunek	q	С
Liniowa gęstość		
ładunku	λ	C/m
Powierzchniowa		
gęstość ładunku	σ	C/m <sup>2</sup>
Objętościowa		
gęstość ładunku	ρ	C/m <sup>3</sup>

*Uwaga.* Wielu czytelników uważa z różnych powodów ten podrozdział za najtrudniejszy w całej książce. Opisane tu zagadnienia wymagają wykonania wielu kroków, niezbędna jest kontrola wielu własności wektorów, a poza wszystkim definiujemy tu i obliczamy całki. Najgorsze jest jednak to, że procedura ta może być różna dla różnych układów ładunków. W tym miejscu skupiamy się na pewnym szczególnym układzie (naładowanym pierścieniu). Ważne jest jednak opanowanie ogólnej metody, którą będzie można później stosować w przypadku innych układów (takich jak pręty czy łuki okręgów), jakie mogą się pojawić w zadaniach domowych.

Na rysunku 22.11 przedstawiono cienki pierścień o promieniu *R* naładowany równomiernie wzdłuż całego obwodu ładunkiem dodatnim. Pierścień wykonany jest z plastiku, co oznacza, że jego ładunek jest unieruchomiony. Dookoła pierścienia rozciągają się linie pola elektrycznego. W tym miejscu jednak ograniczymy nasze zainteresowanie do dowolnego punktu *P* leżącego na osi pierścienia (na prostej przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do płaszczyzny, na której leży) w odległości *z* od jego środka.

Gdy mamy do czynienia z ciałami o ciągłym rozkładzie ładunku, wówczas wygodnie jest wyrazić ładunek danego obiektu za pomocą gęstości ładunku, a nie całkowitego ładunku. Dla naładowanej linii będziemy używać *liniowej gęstości ładunku*  $\lambda$  (czyli ładunku przypadającego na jednostkę długości linii), której jednostką w układzie SI jest kulomb na metr. W tabeli 22.1 przedstawiono także inne gęstości ładunku, których będziemy używać w tym rozdziale.

*Pierwszy duży problem.* Do tej pory posługiwaliśmy się wzorem opisującym pole elektryczne pojedynczej cząstki. (Możemy co prawda dodać pola kilku cząstek, tak jak to zrobiliśmy w przypadku dipola, żeby uzyskać pewne szczególne rozwiązanie, jednak robiąc to w zasadzie cały czas korzystamy ze wzoru (22.3)). Spójrz teraz na pierścień z rysunku 22.11. Oczywiście nie jest to cząstka, a więc wzór (22.3) nie ma tu zastosowania. A więc co z tym zrobić?

Rozwiązanie polega na podzieleniu w myśli tego pierścienia na nieskończenie małe elementy o ładunkach tak małych, że można je traktować *jak* ładunki punktowe. Wtedy *możemy* zastosować wzór (22.3).

**Drugi duży problem.** Wiemy teraz, że do każdego elementu ładunku dq (litera d podkreśla, że ładunek jest mały) możemy zastosować wzór (22.3). Umiemy tym samym znaleźć wyrażenie na wkład tego ładunku do pola elektrycznego d $\vec{E}$  (litera d podkreśla, że ten przyczynek jest mały). Jednak każde takie składowe natężenie ma w punkcie P własny kierunek. Jak dodać te natężenia, aby znaleźć wypadkowe pole elektryczne w punkcie P?

Rozwiązanie polega na rozłożeniu tych wektorów na składowe, a następnie zsumowaniu osobno najpierw jednej, a potem drugiej składowej tych wektorów. Przedtem jednak należy sprawdzić, czy jedna ze składowych po prostu nie znika. (Znoszenie składowych oszczędza mnóstwo czasu).

*Trzeci duży problem.* W pierścieniu znajduje się ogromna liczba elementów ładunku dq, a zatem istnieje ogromna liczba cząstkowych natężeń d $\vec{E}$ , które trzeba do siebie dodać, nawet jeśli część ich składowych się nawzajem znosi. Jak możemy dodać do siebie więcej elementów niż moglibyśmy je kiedykolwiek przeliczyć? Odpowiedzią jest zsumowanie tych elementów metodą całkowania. **Do dzieła.** Zróbmy teraz to wszystko (jeszcze raz, patrz szerzej na ogólną procedurę i nie koncentruj się jedynie na jej drobnych szczegółach). Wybieramy dowolny element pokazany na rysunku 22.11. Niech ds będzie długością tego (lub każdego innego) elementu pierścienia, którego ładunek wynosi dq. Ponieważ  $\lambda$  jest liniową gęstością ładunku (ładunkiem przypadającym na jednostkę długości), więc

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}s. \tag{22.10}$$

*Cząstkowe pole elektryczne.* Element ładunku d*q* wytwarza w punkcie *P* odległym o *r* od tego elementu cząstkowe pole elektryczne o natężeniu d*Ē*, tak jak to pokazano na rysunku 22.11. (Tak, wprowadzamy nową zmienną, której nie było w treści zadania, ale wkrótce zamienimy ją na inne, tym razem już "legalne" zmienne). Następnie przepisujemy wzór na natężenie pola ładunku punktowego (22.3), wykorzystując "legalne" zmienne d*Ē* i d*q*, a potem podstawiamy pod element ładunku d*q* wyrażenie ze wzoru (22.10). Wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez elementu ładunku d*q* wynosi

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}.$$
 (22.11)

Zauważmy, że nielegalna zmienna r jest długością przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego przedstawionego na rysunku 22.11. Możemy zatem przekształcić wzór (22.11), odpowiednio podstawiając r

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda ds}{(z^2 + R^2)}.$$
 (22.12)

Wzór (22.12) określa wartość każdego cząstkowego natężenia pola elektrycznego związanego z każdym z elementów ładunku, gdyż wszystkie mają taki sam ładunek i znajdują się w jednakowej odległości od punktu P. Na rysunku 22.11 pokazano także, że kierunek każdego cząstkowego natężenia pola d $\vec{E}$  nachylony jest do osi symetrii pierścienia (osi z) pod kątem  $\theta$  i ma w ten sposób składowe prostopadłe i równoległe od tej osi.

**Znoszące się składowe.** Teraz następuje miła chwila, w której eliminujemy jeden zestaw tych składowych. Zwróć uwagę na element ładunku znajdujący się dokładnie naprzeciw tego, który jest przedstawiony na rysunku 22.11. Wkład tego elementu do pola elektrycznego ma również wartość d*E*. Jednak wektor tego natężenia jest nachylony pod kątem  $\theta$ w przeciwnym kierunku niż wektor natężenia pochodzącego od elementu d*q*, jak pokazuje to widok z boku przedstawiony na rysunku 22.12. Tak więc dwie składowe pola prostopadłe do osi *z* nawzajem się znoszą. Takie zniesienie następuje dla każdego elementu ładunku wokół pierścienia i jego *symetrycznie położonego partnera* znajdującego się po drugiej stronie tego pierścienia. W ten sposób możemy zaniedbać wpływ wszystkich prostopadłych składowych natężenia pola elektrycznego.

**Dodawanie składowych.** Odnosimy tu także inny spory sukces. Wszystkie pozostałe przyczynki do natężenia pola są skierowane w dodatnią stronę osi z, tak więc możemy je po prostu skalarnie dodać. Możemy zatem już teraz powiedzieć, jaki jest kierunek wypadkowego pola elektrycznego w punkcie P. Jest ono skierowane od pierścienia. Z rysunku 22.12



**Rys. 22.12.** Natężenie pola elektrycznego wytwarzanego w punkcie *P* przez element ładunku i symetrycznie ułożony odpowiednik tego ładunku (znajdujący się po przeciwległej stronie pierścienia). Składowe natężenia prostopadłe do osi *z* redukują się wzajemnie; składowe równoległe dodają się

wynika, że wartości równoległych składowych cząstkowych natężeń pola równe są d $E \cos \theta$ , gdzie kąt  $\theta$  jest kolejną nielegalną zmienną. Wartość  $\cos \theta$  możemy wyrazić w funkcji zmiennych legalnych, wykorzystując własności trójkąta prostokątnego pokazanego na rysunku 22.11

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}.$$
(22.13)

Ze wzorów (22.12) i (22.13) dla składowej równoległej wektora d $\vec{E}$  pochodzącego od każdego elementu ładunku otrzymujemy

$$dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\lambda}{(z^2 + R^2)^{3/2}} ds.$$
 (22.14)

*Całkowanie.* Ponieważ musimy dodać ogromną liczbę tych elementów natężenia, definiujemy całkę względem długości pierścienia w granicach od punktu startowego (nazwijmy go s = 0), przez cały obwód pierścienia ( $s = 2\pi R$ ), aż do punktu końcowego. Jedyną wielkością we wzorze (23.14), która zmienia się podczas całkowania, jest *s*, a więc pozostałe wielkości można wyłączyć przed znak całki. Całkowanie daje więc

$$E = \int dE \cos \theta = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}.$$
(22.15)

To poprawna odpowiedź, ale wiedząc, że  $\lambda = q/(2\pi R)$ , możemy to natężenie pola wyrazić jako funkcję całkowitego ładunku pierścienia

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$
 (naładowany pierścień). (22.16)

Jeśli ładunek umieszczony na pierścieniu jest ujemny, a nie jak założyliśmy dodatni, to wartość natężenia pola w punkcie P jest w dalszym ciągu dana wzorem (22.16), ale wektor natężenia jest skierowany do pierścienia zamiast od pierścienia.

Sprawdźmy wzór (22.16) dla punktu znajdującego się na osi tak daleko, że  $z \gg R$ . Dla takiego punktu wyrażenie  $z^2 + R^2$  we wzorze (22.16) można przybliżyć przez  $z^2$  i wzór (22.16) przybiera wówczas postać

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{z^2}$$
 (pole naładowanego pierścienia w dużej odległości). (22.17)

Jest to rozsądny wynik, ponieważ przy dużej odległości pierścień "wygląda" jak ładunek punktowy. Jeśli zastąpimy z odległością r we wzorze (22.17), to uzyskamy wzór (22.3) określający wartość natężenia pola elektrycznego ładunku punktowego.

Sprawdźmy następnie wzór (22.16) dla punktu leżącego w środku pierścienia, czyli dla z = 0. Ze wzoru (22.16) wynika, że w tym punkcie E = 0. Jest to również rozsądny wynik, bo jeśli umieścilibyśmy w środku pierścienia ładunek próbny, to działająca na niego wypadkowa siła elektrostatyczna byłaby równa zeru; siła pochodząca od dowolnego elementu pierścienia znosiłaby się z siłą od elementu po przeciwnej stronie pierścienia. Ze wzoru (22.1) i faktu, że siła w środku pierścienia jest równa zeru, wynika, że natężenie pola także jest równe zeru.

# Przykład 22.03. Pole elektryczne naładowanego łuku okręgu

Na rysunku 22.13a przedstawiono plastikowy pręt naładowany jednorodnie ładunkiem -Q. Pręt został wygięty tak, że tworzy łuk okręgu o promieniu r i rozwartości 120°. Osie układu współrzędnych wybieramy w taki sposób, że oś symetrii pręta pokrywa się z osią x, a środek układu znajduje się w środku krzywizny P pręta. Jak wyrazisz natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ pręta w punkcie P w funkcji Q i r?

# **PODSTAWOWE FAKTY**

Ze względu na ciągły rozkład ładunku w pręcie musimy znaleźć wyrażenie na natężenie pola wytworzonego przez elementy pręta, a następnie dodać je przez całkowanie.

*Element długości:* Rozważmy element o długości ds umieszczony nad osią x pod kątem  $\theta$  (rys. 22.13b i c). Jeśli  $\lambda$  oznacza liniową gęstość ładunku pręta, to nasz element ds ma ładunek o wartości

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}s. \tag{22.18}$$

**Pole wytwarzane przez element łuku:** Taki element wytwarza w punkcie P znajdującym się od niego w odległości r pole elektryczne o natężeniu d $\vec{E}$ . Traktując ten element jak ładunek punktowy, możemy przedstawić wzór (22.3) dla wartości wektora d $\vec{E}$  w postaci

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2}.$$
 (22.19)

Wektor  $d\vec{E}$  jest skierowany do ds, gdyż ładunek dq jest ujemny.

*Element położony symetrycznie:* Dla każdego wybranego przez nas elementu ds istnieje w dolnej połowie pręta symetrycznie położony element ds' (obraz zwierciadlany). Natężenie pola elektrycznego d $\vec{E}'$  wytworzonego w punkcie *P* przez ds' ma także wartość opisaną wzorem (22.19), jednak wektor natężenia jest skierowany do ds' zgodnie z rysunkiem 22.13d. Jeśli rozłożymy wektory natężenia pola pochodzącego od ds i ds' na składowe x i y, tak jak pokazano na rysunku 22.13e i f, to widzimy, że składowe y znoszą się (ponieważ mają jednakowe wartości i przeciwne kierunki). Widzimy także, że składowe x mają jednakowe wartości i takie same kierunki.

*Sumowanie:* Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego pręta, należy więc zsumować (przez całkowanie) tylko

składowe *x* natężeń pola od wszystkich elementów łuku. Na podstawie rysunku 22.13f i wzoru (22.19) możemy zapisać składową  $dE_x$  natężenia pola pochodzącego od elementu d*s* w postaci

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta ds. \qquad (22.20)$$

Wzór (22.20) ma dwie zmienne:  $\theta$  i *s*. Przed obliczeniem całki musimy pozbyć się jednej z nich. W tym celu zastosujemy związek

$$\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta$$
,

w którym d $\theta$  jest kątem o wierzchołku w punkcie *P*, który odpowiada długości łuku ds (rys. 22.13g). Po tym podstawieniu możemy scałkować wzór (22.20) względem kąta  $\theta$ , od  $\theta = -60^{\circ}$  do  $\theta = 60^{\circ}$ . Otrzymujemy wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie *P* 

$$E = \int dE_x = \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos\theta r d\theta$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} [\sin\theta]_{-60^\circ}^{60^\circ}$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} [\sin 60^\circ - \sin (-60^\circ)] = \frac{1,73\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$
 (22.21)

(Gdybyśmy przestawili granice całkowania, to otrzymalibyśmy ten sam wynik ze znakiem minus. Całkowanie daje tylko wartość wektora  $\vec{E}$ , a więc znak nie jest istotny).

*Gęstość ładunku:* W celu obliczenia  $\lambda$  zauważmy, że całemu prętowi odpowiada kąt 120°, czyli  $\frac{1}{3}$  kąta pełnego. Długość pręta wynosi więc  $2\pi r/3$ , a liniowa gęstość ładunku wynosi

$$\lambda = \frac{\text{ladunek}}{\text{długość}} = \frac{Q}{2\pi r/3} = \frac{0,477Q}{r}$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (22.21), otrzymujemy

$$E = \frac{(1,73)(0,477Q)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{0,83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Natężenie  $\vec{E}$  jest skierowane do pręta wzdłuż osi symetrii rozkładu ładunku. Używając notacji wektorowej, zapisujemy je w postaci

$$\vec{E} = \frac{0,83Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{i}}.$$





**Rys. 22.13.** Dostępne w *WileyPLUS* jako animacja z podkładem głosowym. a) Pręt plastikowy o ładunku – Q stanowi część łuku okręgu o promieniu r i kącie środkowym 120°; punkt P jest w środku krzywizny pręta. b)–c) Element w górnej części pręta, pod kątem  $\theta$  do osi i długości ds, wytwarza w punkcie P pole elektryczne o natężeniu d $\vec{E}$ . d) Element ds', symetryczny do ds względem osi x, wytwarza w punkcie P pole o takiej samej wartości natężenia d $\vec{E'}$ . e)–f) Składowe natężenia pola elektrycznego. g) Elementowi długości łuku ds odpowiada kąt d $\theta$  o wierzchołku w punkcie P

# Sztuka rozwiązywania zadań Krótki przewodnik obliczania natężenia pola pochodzącego od naładowanej linii

Oto szczegółowy opis metody obliczania natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  wytwarzanego w punkcie *P* przez jednorodnie naładowaną linię będącą łukiem okręgu lub odcinkiem prostej. Ogólna strategia polega na wybraniu elementu d*q* ładunku, znalezieniu przyczynku d $\vec{E}$  od tego elementu i scałkowaniu d $\vec{E}$  po całej naładowanej linii.

Krok 1. Jeśli naładowana linia jest łukiem okręgu, to jako ds należy wybrać długość elementu tego łuku. Jeśli linia jest prostą biegnącą wzdłuż osi x, to jako d*x* wybieramy długość elementu. Zaznaczamy ten element na rysunku.

- **Krok 2.** Szukamy związku ładunku dq z długością elementu łuku ds, zgodnie ze wzorem dq =  $\lambda$ ds lub dq =  $\lambda$ dx. Rozważamy dq i  $\lambda$  dodatnie, nawet jeśli ładunek jest w rzeczywistości ujemny. (Znak ładunku weźmiemy pod uwagę w następnym kroku).
- **Krok 3.** Wyrażamy natężenie pola d $\vec{E}$  wytworzonego w punkcie *P* przez ładunek dq, korzystając ze wzoru (22.3) i zastępując q w tym równaniu przez  $\lambda ds$  lub  $\lambda dx$ . Jeśli ładunek zgromadzony na linii jest dodatni, to w punkcie *P* rysujemy wektor d $\vec{E}$  tak, aby był skierowany od dq. Jeśli ładunek jest ujemny, to rysujemy wektor skierowany do dq.
- Krok 4. Zawsze w rozważanej sytuacji poszukujemy symetrii. Jeśli punkt P leży na osi symetrii rozkładu ładunku, to rozkładamy nateżenie pola d $\vec{E}$  wytworzonego przez dq na składowe: prostopadła i równoległą do osi symetrii. Rozważamy następnie drugi element dq', który znajduje się symetrycznie do dqwzględem osi symetrii. W punkcie P rysujemy wektor natężenia pola d $\vec{E}'$  wytworzonego przez ten symetryczny element i rozkładamy go na składowe. Jedna ze składowych natężenia wytworzonego przez dq jest składową, która się znosi z odpowiednią składową natężenia pola wytworzonego przez dq' i nie wymaga dalszych rozważań. Druga składowa natężenia pola wytworzonego przez dq dodaje się do składowej, wytworzonej przez dq'. Sumujemy składowe pochodzące od wszystkich elementów przez całkowanie.
- Krok 5. Poniżej podajemy cztery ogólne typy jednorodnego rozkładu ładunku oraz omówieniem strategii uproszczenia całki z kroku 4.

*Pierścień* z punktem *P* leżącym na (prostopadłej) osi symetrii, tak jak na rysunku 22.11. W wyrażeniu na d*E* zastępujemy  $r^2$  sumą  $z^2 + R^2$ , tak jak we wzorze (22.12). Wyrażamy składowe natężenia d*Ē* przez  $\theta$ , co wprowadza cos  $\theta$ , ale kąt  $\theta$  jest identyczny dla wszystkich elementów i dlatego nie jest zmienną. Zastępujemy cos  $\theta$ , tak jak we wzorze (22.13), i całkujemy względem *s* po całym obwodzie pierścienia.

*Łuk okręgu* z punktem *P* leżącym w środku krzywizny, tak jak na rysunku 22.13. Wyrażamy przyczynki do natężenia pola d $\vec{E}$  przez  $\theta$ , co wprowadza sin $\theta$  lub cos $\theta$ . Zastępując ds przez  $rd\theta$ , otrzymujemy jedną zmienną  $\theta$  zamiast dwóch zmiennych *s* i  $\theta$ . Całkujemy względem kąta  $\theta$  od jednego końca łuku do drugiego.

Odcinek prostej z punktem P na jego przedłużeniu, tak jak na rysunku 22.14a. W wyrażeniu na dE zastępujemy r przez x. Całkujemy względem x od jednego końca naładowanego odcinka do drugiego.



**Rys. 22.14.** a) Punkt *P* znajduje się na przedłużeniu naładowanego odcinka. b) Punkt *P* znajduje się na symetralnej naładowanego odcinka, w odległości y od odcinka. c) Punkt *P* znajduje się w odległości y od naładowanego odcinka, ale w przeciwieństwie do (b) nie leży na jego symetralnej

Odcinek prostej z punktem P w odległości y od naładowanego odcinka, tak jak na rysunku 22.14b. W wyrażeniu na dE zastępujemy r wyrażeniem zawierajacym x i y. Jeśli punkt P umieszczony jest na symetralnej naładowanego odcinka, to znajdujemy wyrażenie na dodające się przyczynki natężenia pola d $\vec{E}$ , co wprowadza  $\sin \theta$  lub  $\cos \theta$ . Przechodzimy od dwóch zmiennych x i  $\theta$  do jednej zmiennej x przez zastąpienie funkcji trygonometrycznej definiującym ją wyrażeniem zawierającym x i y. Obliczamy całkę względem x od jednego do drugiego końca odcinka. Jeśli punkt P nie jest umieszczony na symetralnej, tak jak na rysunku 22.14c, to tworzymy całkę sumującą składowe d $E_x$  i całkujemy względem x, aby znaleźć  $E_x$ . Następnie tworzymy całkę sumującą składowe d $E_v$  i ponownie całkujemy względem x, aby znaleźć  $E_v$ . Wartość i kierunek natężenia pola  $\vec{E}$  wyznaczamy w standardowy sposób, korzystając ze składowych  $E_x$  i  $E_y$ .

**Krok 6.** Jeden z wybranych wariantów granic całkowania daje dodatni wynik. Przeciwny wybór daje ten sam wynik z przeciwnym znakiem – należy wtedy pominąć znak minus. Jeśli wynik chcemy wyrazić przez całkowity ładunek Q rozkładu, to zastępujemy  $\lambda$  przez Q/L, gdzie L jest długością naładowanej linii. Dla pierścienia L jest długością jego obwodu.

# Sprawdzian 2

Na rysunku przedstawiono trzy nieprzewodzące pręty: jeden w kształcie łuku okręgu i dwa proste. Każdy pręt jest jednorodnie naładowany ładunkiem o wartości bezwzględnej Q w górnej i dolnej połowie, jak pokazano na rysunku. Jak jest skierowane wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punkcie P w przypadku każdego z prętów?



# **22.5.** POLE ELEKTRYCZNE NAŁADOWANEJ TARCZY

# Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 22.19 naszkicować tarczę naładowaną jednorodnie i wskazać kierunek natężenia pola elektrycznego w punkcie na jej osi, jeśli ładunek tarczy jest dodatni lub ujemny;
- 22.20 wyjaśnić, w jaki sposób wzór na natężenie pola elektrycznego na osi jednorodnie naładowanego pierścienia

# Podstawowe fakty \_

• Wartość natężenia pola elektrycznego na osi jednorodnie naładowanej tarczy wynosi

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right),$$

można wykorzystać do znalezienia wzoru na natężenie pola elektrycznego na osi jednorodnie naładowanej tarczy;

**22.21** zastosować związek pomiędzy natężeniem pola elektrycznego w punkcie na osi jednorodnie naładowanej tarczy a powierzchniową gęstością ładunku  $\sigma$ , promieniem tarczy R i odległością z od tarczy do tego punktu.

gdzie z jest odległością tego punktu od środka tarczy, R jest promieniem tarczy, a  $\sigma$  jest powierzchniową gęstością ładunku.



**Rys. 22.15.** Tarcza o promieniu *R* jest naładowana jednorodnie dodatnio. Pokazany pierścień o promieniu *r* i szerokości radialnej d*r* wytwarza w punkcie *P* na osi tarczy pole elektryczne o natężeniu d $\vec{E}$ 

# Pole elektryczne naładowanej tarczy

Przejdziemy teraz od naładowanej linii do powierzchniowej gęstości ładunku, analizując pole elektryczne kołowej plastikowej tarczy o promieniu R, której górna powierzchnia jest naładowana jednorodnie ładunkiem o gęstości powierzchniowej  $\sigma$  (ładunek przypadający na jednostkę powierzchni, zob. tabela 22.1). Tarcza wytwarza dookoła siebie pole elektryczne, w tym miejscu jednak ograniczymy nasze rozważania do dowolnego punktu Pznajdującego się na osi tarczy w odległości z od jej środka, tak jak to pokazano na rysunku 22.15.

Moglibyśmy postępować tak jak w poprzednim podrozdziale, definiując dwuwymiarową całkę uwzględniającą wszystkie przyczynki do pola pochodzące od dwuwymiarowego rozkładu ładunku na górnej powierzchni tarczy. Możemy jednak zaoszczędzić sporo pracy, korzystając z ładnego skrótu opartego na wynikach naszej poprzedniej analizy pola na osi cienkiego pierścienia.

Tak jak to przedstawiono na rysunku 22.15 na tarczę nakładamy pierścień o dowolnym promieniu  $r \leq R$ . Pierścień jest tak cienki, że możemy traktować ładunek na nim zgromadzony jako element ładunku dq. Aby znaleźć przyczynek tego pierścienia do natężenia pola elektrycznego d*E*  w punkcie P, wyrażamy wzór (22.16) jako funkcję ładunku dq i promienia r tego pierścienia:

$$dE = \frac{zdq}{4\pi\varepsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$
 (22.22)

Natężenie pola elektrycznego skierowane jest w dodatnią stronę osi z.

Aby znaleźć całkowite natężenie pola elektrycznego w punkcie P, scałkujemy wzór (22.22) od środka tarczy (r = 0) do jej krawędzi (r = R). W ten sposób zsumujemy wszystkie przyczynki do natężenia dE (przesuwając nasz wyimaginowany pierścień po całej powierzchni tarczy). Oznacza to jednak, że chcemy całkować względem zmiennego promienia pierścienia r.

Element dr wprowadzimy do naszych rozważań, przekształcając element ładunku dq we wzorze (22.22). Ponieważ pierścień jest tak cienki, więc jego szerokość nazwiemy dr. Wtedy powierzchnia pierścienia dS będzie równa iloczynowi jego obwodu  $2\pi r$  i szerokości dr. Tak więc wykorzystując powierzchniową gęstość ładunku  $\sigma$ , otrzymujemy

$$dq = \sigma dS = \sigma (2\pi r dr). \qquad (22.23)$$

Po podstawieniu tego wzoru do wzoru (22.22) i niewielkim uproszczeniu możemy zsumować wszystkie przyczynki do natężenia pola dE, obliczając całkę

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2} (2r) dr, \qquad (22.24)$$

w której wszystkie stałe (włączając w to *z*) wyłączyliśmy przed znak całki. Aby obliczyć tę całkę, sprowadzamy ją do postaci  $\int X^m dX$ , podstawiając  $X = z^2 + r^2$ ,  $m = -\frac{3}{2}$  i dX = 2rdr. Wartość takiej całki wynosi

$$\int X^m \mathrm{d}X = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

zatem wzór (22.24) przybiera postać

$$E = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \left[ \frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R.$$
 (22.25)

Uwzględniając granice całkowania we wzorze (22.25), otrzymujemy po przekształceniu wyrażenie

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \qquad \text{(naładowana tarcza)} \qquad (22.26)$$

na wartość natężenia pola elektrycznego, wytwarzanego przez płaską, kołową, naładowaną tarczę w punktach leżących na jej osi. (Przy obliczaniu całki przyjęliśmy  $z \ge 0$ ).

Jeśli przyjmiemy, że  $R \rightarrow \infty$  przy ustalonej skończonej wartości *z*, to drugi człon w nawiasach we wzorze (22.26) będzie dążył do zera i wzór ten przybierze postać

$$E = \frac{\delta}{2\varepsilon_0} \qquad \text{(nieskończona płaszczyzna).} \tag{22.27}$$

Jest to wartość natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez nieskończoną płaszczyznę, na przykład przez naładowaną jednorodnie z jednej strony płytę z izolatora takiego jak plastik. Linie pola elektrycznego w takiej sytuacji są przedstawione na rysunku 22.4.

Wzór (22.27) otrzymujemy także, jeśli przyjmiemy  $z \rightarrow 0$  we wzorze (22.26), przy ustalonym skończonym *R*. Wynik ten dowodzi, że w punktach bliskich tarczy natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez tarczę jest takie samo jak w przypadku tarczy o nieskończonym promieniu.

# **22.6.** ŁADUNEK PUNKTOWY W POLU ELEKTRYCZNYM

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

**22.22** zastosować związek pomiędzy ładunkiem q naładowanej cząstki znajdującej się w zewnętrznym (czyli wytworzonym przez inne naładowane ciała) polu elektrycznym, natężeniem tego pola elektrycznego  $\vec{E}$  i siłą elektrostatyczną  $\vec{F}$ działającą na tę cząstkę oraz określić wzajemne kierunki tej siły i tego pola w przypadku cząstki naładowanej dodatnio lub ujemnie;

22.23 wyjaśnić metodę zastosowaną przez Millikana do pomiaru ładunku elementarnego;

22.24 wyjaśnić ogólną zasadę działania drukarki atramentowej.

#### Podstawowe fakty

• Gdy cząstka o ładunku q znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , wówczas działa na nią siła elektrostatyczna

 $\vec{F} = q\vec{E}.$ 

• Jeśli ładunek q jest dodatni, to wektor siły jest skierowany

tak samo jak wektor natężenia pola elektrycznego. Jeśli ładunek *q* jest ujemny, to wektor siły jest skierowany przeciwnie do wektora natężenia (znak "minus" we wzorze zmienia kierunek siły w stosunku do kierunku natężenia).

# Ładunek punktowy w polu elektrycznym

W poprzednich czterech podrozdziałach zajmowaliśmy się pierwszym z postawionych zadań: przy danym rozkładzie ładunku znajdowaliśmy natężenie pola elektrycznego, wytwarzanego przez ten ładunek w otaczającej go przestrzeni. Obecnie zajmiemy się drugim zadaniem: określeniem, co stanie się z naładowaną cząstką, gdy znajdzie się w polu elektrycznym wytworzonym przez inne stacjonarne lub powoli poruszające się ładunki.

Otóż na naładowaną cząstkę będzie działać siła elektrostatyczna, określona następującym wzorem:

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{22.28}$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki (z uwzględnieniem jego znaku), a  $\vec{E}$  jest natężeniem pola elektrycznego, wytworzonego przez pozostałe ładunki w miejscu, w którym znajduje się cząstka. (Natężenie to *nie* uwzględnia pola wytworzonego przez samą cząstkę — aby odróżnić te dwa pola, pole działające na cząstkę we wzorze (22.28) nazywa się często *polem zewnętrz-nym*. Naładowana cząstka (lub naładowane ciało) nie podlega oddziaływaniu swego własnego pola elektrycznego). Na podstawie wzoru (22.28) możemy powiedzieć, że:
Siła elektrostatyczna  $\vec{F}$ , działająca na cząstkę umieszczoną w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  ma kierunek natężenia  $\vec{E}$ , jeśli ładunek cząstki q jest dodatni, i kierunek przeciwny, jeśli ładunek q jest ujemny.

# Pomiar ładunku elementarnego

5.7

Wzór (22.28) stanowi podstawę pomiaru ładunku elementarnego e, jakiego dokonał amerykański fizyk Robert A. Millikan w latach 1910–1913. Na rysunku 22.16 przedstawiono używaną przez niego aparaturę. Gdy maleńkie kropelki oleju zostaną wstrzyknięte do komory A, niektóre z nich zostaną w czasie tego procesu naładowane dodatnio lub ujemnie. Przeanalizujmy kropelkę, która przechodzi na dół przez mały otwór w płycie P<sub>1</sub> do komory C i załóżmy, że kropelka ma ujemny ładunek q.

Jeśli klucz S na rysunku 22.16 jest otwarty (jest w narysowanym położeniu), to źródło B nie wytwarza pola elektrycznego w komorze C. Jeśli jest zamknięty (istnieje połączenie między komorą C i dodatnim biegunem źródła), to powstaje nadmiarowy ładunek dodatni na płycie przewodzącej P<sub>1</sub> i nadmiarowy ładunek ujemny na płycie przewodzącej P<sub>2</sub>. W wyniku naładowania płyt, w komorze C powstanie pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , skierowanym w dół. Zgodnie ze wzorem (22.28) pole to działa siłą elektrostatyczną na każdą naładowaną kropelkę, która pojawi się w komorze, oraz wpływa na jej ruch. W szczególności, nasza ujemnie naładowana kropelka zacznie poruszać się do góry.

Analizując ruch kropelek oleju przy otwartym i zamkniętym kluczu, Millikan określił wielkość ładunku q i odkrył, że wartości q były zawsze dane wzorem

$$q = ne$$
,  $dla n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , (22.29)

gdzie *e* jest stałą podstawową równą  $1,60 \cdot 10^{-19}$  C i zwaną *ładunkiem elementarnym*. Doświadczenie Millikana jest przekonującym dowodem skwantowania ładunku. Częściowo za tę pracę w 1923 roku Millikan otrzymał nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki. Współczesne pomiary ładunku elementarnego opierają się na różnych powiązanych ze sobą doświadczeniach, znacznie dokładniejszych niż pionierski eksperyment Millikana.

# Drukarka atramentowa

Potrzeba bardzo szybkiego druku o dobrej jakości spowodowała poszukiwanie innego sposobu niż drukowanie uderzeniowe stosowane w standardowych maszynach do pisania. Jednym z takich sposobów jest tworzenie liter przez wtryskiwanie maleńkich kropelek atramentu na papier.

Na rysunku 22.17 przedstawiono ujemnie naładowaną kropelkę, która porusza się między dwiema przewodzącymi płytkami odchylającymi, między którymi wytworzono jednorodne pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , skierowanym w dół. Kropelka jest odchylana do góry zgodnie ze wzorem (22.28) i pada na papier w punkcie, którego położenie jest określone przez wartość natężenia  $\vec{E}$  i ładunku q kropelki.



**Rys. 22.16.** Aparatura do pomiaru ładunku elementarnego *e* w doświadczeniu Millikana z kropelkami oleju. Gdy naładowana kropelka oleju przejdzie do komory C przez otwór w płycie P<sub>1</sub>, na jej ruch wpływa zamknięcie lub otwarcie klucza S, czyli włączenie lub wyłączenie pola elektrycznego w komorze C. Lunetka służy tu do oglądania kropli i pozwala śledzić jej ruch







**Rys. 22.18.** Metalowe druty są tak silnie naładowane, że pole elektryczne wytworzone przez nie w otaczającej przestrzeni wywołuje przebicie w występującym tam powietrzu (fot. Adam Hart-Davis/Photo Researchers, Inc.) W praktyce wartość natężenia pola E jest stała. Położenie kropelki jest określone przez ładunek q przekazany kropelce w układzie ładowania, przez który kropelka musi przejść przed wejściem do układu odchylającego. Układ ładowania jest z kolei aktywowany elektronicznie za pomocą sygnałów kodujących drukowany tekst czy rysunek.

# Przebicie elektryczne oraz iskrzenie

Gdy natężenie pola elektrycznego w powietrzu przekracza pewną wartość krytyczną  $E_k$ , zachodzi w nim zjawisko *przebicia elektrycznego* polegające na uwalnianiu elektronów z atomów znajdujących się w powietrzu. Ponieważ te uwolnione elektrony (i powstałe w wyniku jonizacji atomów jony – przyp. tłum.) zaczynają przyspieszać w polu elektrycznym, powietrze zaczyna przewodzić prąd elektryczny. W trakcie swego ruchu elektrony zderzają się z innymi atomami spotkanymi na swej drodze, wywołując ich świecenie. To emitowane światło powoduje, że możemy zobaczyć drogę pokonywaną przez uwolnione z atomów elektrony. Drogi te zwykle nazywany iskrami. Na rysunku 22.18 przedstawiono iskry powstałe ponad naładowanymi metalowymi przewodami w miejscach, gdzie pole elektryczne wywołane przez te przewody powoduje przebicie elektryczne powietrza.



# Sprawdzian 3

a) Jak skierowana jest siła elektrostatyczna działająca na elektron i pochodząca od pola elektrycznego o natężeniu przedstawionym na rysunku? b) W którym kierunku elektron będzie przyspieszany, jeśli przed wejściem w obszar pola elektrycznego poruszał się równolegle do osi y? c) Jeśli elektron poruszał się początkowo w prawo, to czy jego prędkość wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie stała?



# Przykład 22.04. Ruch naładowanej cząstki w polu elektrycznym

Na rysunku 22.19 przedstawiono odchylające płytki drukarki atramentowej z naniesionymi osiami układu współrzędnych x, y. Kropelka atramentu o masie  $m = 1,3 \cdot 10^{-10}$  kg i ujemnym ładunku  $Q = 1,5 \cdot 10^{-13}$ C wpada w obszar między płytkami, poruszając się początkowo wzdłuż osi x z prędkością  $v_x = 18$  m/s. Długość L płyt wynosi 1,6 cm. Płytki są naładowane i wytwarzają pole elektryczne we wszystkich punktach



między nimi. Załóż, że pole jest jednorodne, wektor natężenia pola  $\vec{E}$  jest skierowany w dół i ma wartość 1,4 · 10<sup>6</sup> N/C. Jakie jest pionowe odchylenie kropelki po przejściu przez całą długość płytki? (Siła grawitacyjna działająca na kroplę jest mała w porównaniu z siłą elektrostatyczną i można ją pominąć).

# **PODSTAWOWE FAKTY**

Kropla jest naładowana ujemnie, a natężenie pola elektrycznego jest skierowane *w dół*. Zgodnie ze wzorem (22.28) na naładowaną kropelkę działa stała siła elektrostatyczna o wartości *QE*, skierowana do *góry*. Kropelka, poruszając się równolegle do osi *x* ze stałą prędkością  $v_x$ , zaczyna więc odchylać się do góry z pewnym stałym przyspieszeniem  $a_y$ . **Obliczenia:** Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona (F = ma) dla składowych wzdłuż osi y otrzymujemy

$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}.$$
 (22.30)

Oznaczmy przez *t* czas potrzebny kropelce na przejście obszaru między płytkami. Po czasie *t* pionowe i poziome przesunięcia kropelki wynoszą odpowiednio

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2$$
 i  $L = v_x t.$  (22.31)

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **22.7.** DIPOL W POLU ELEKTRYCZNYM

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 22.25 na rysunku przedstawiającym dipol elektryczny znajdujący się w zewnętrznym polu elektrycznym wskazać kierunki natężenia tego pola, elektrycznego momentu dipolowego, sił elektrostatycznych działających na oba ładunki tworzące dipol, a także kierunek, w którym siły te będą starały się obrócić dipol; ponadto będziesz umiał określić wypadkową siłę działającą na dipol elektryczny umieszczony w zewnętrznym polu elektrycznym;
- 22.26 znaleźć moment siły działający na dipol elektryczny w zewnętrznym polu elektrycznym, obliczając iloczyn wektorowy elektrycznego momentu dipolowego i natężenia pola elektrycznego w notacji z wartościami wektorów i kątem pomiędzy nimi oraz przy użyciu notacji wektorowej;

#### Podstawowe fakty .

• Moment siły działający na dipol elektryczny  $\vec{p}$  znajdujący się w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  dany jest przez iloczyn wektorowy

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

• Energia potencjalna  $E_p$  związana z ustawieniem elektrycznego momentu dipolowego w polu elektrycznym dana jest przez iloczyn skalarny  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ .

# Eliminując t z tych równań i podstawiając wartość (22.30) zamiast $a_y$ , otrzymujemy

$$y = \frac{QEL^2}{2mv_x^2}$$
  
=  $\frac{(1.5 \cdot 10^{-13} \text{ C})(1.4 \cdot 10^6 \text{ N/C})(1.6 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{(2)(1.3 \cdot 10^{-10} \text{ kg})(18 \text{m/s})^2}$   
= 6.4 \cdot 10^{-4} m = 0.64 mm  
(odpowiedź)

- 22.27 powiązać energię potencjalną dipola w zewnętrznym polu elektrycznym z pracą wykonaną przez moment siły podczas obracania dipola w polu;
- 22.28 znaleźć energię potencjalną dipola w zewnętrznym polu elektrycznym, obliczając iloczyn skalarny momentu dipolowego i natężenia pola w postaci skalarnej i w postaci wektorowej;
- 22.29 określić kąty pomiędzy dipolem elektrycznym i natężeniem zewnętrznego pola elektrycznego odpowiadające najmniejszej i największej energii dipola w tym polu oraz najmniejszej i największej wartości momentu siły działającego na ten dipol.

• Gdy ustawienie dipola ulega zmianie, praca wykonana przez pole elektryczne wynosi

$$W = -\Delta E_{\rm p}$$

Jeśli ta zmiana wykonywana jest pod wpływem zewnętrznego momentu siły, to praca wykonana przez ten moment wynosi  $W_{\text{zew}} = -W$ .

# Dipol w polu elektrycznym

Elektryczny moment dipolowy  $\vec{p}$  dipola elektrycznego zdefiniowaliśmy jako wektor skierowany od ujemnego do dodatniego ładunku dipola. Jak zobaczymy, zachowanie się dipola w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  można w pełni opisać bez potrzeby wnikania w strukturę dipola, używając jedynie dwóch wektorów  $\vec{E}$  i  $\vec{p}$ .



**Rys. 22.20.** Cząsteczka H<sub>2</sub>O składająca się z trzech jąder (zaznaczonych kropkami) i obszarów, gdzie występują elektrony. Elektryczny moment dipolowy  $\vec{p}$  jest skierowany od (ujemnej) tlenowej do (dodatniej) wodorowej strony cząsteczki



**Rys. 22.21.** a) Dipol elektryczny w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ . Dwie kulki o ładunkach jednakowych co do wartości, ale o przeciwnych znakach znajdują się w odległości *d*. Linia między kulkami reprezentuje ich sztywne połączenie. b) Pole o natężeniu  $\vec{E}$  działa momentem siły  $\vec{M}$  na dipol. Moment siły  $\vec{M}$  jest skierowany za kartkę, co zaznaczono symbolem  $\otimes$ 

Cząsteczka wody (H<sub>2</sub>O) jest dipolem elektrycznym, co przedstawiono na rysunku 22.20. Czarne kropki przedstawiają jądro tlenu (mające 8 protonów) i dwa jądra wodoru (mające po jednym protonie). Pokolorowane powierzchnie przedstawiają obszary w otoczeniu jąder, w których można znaleźć elektrony.

W cząsteczce wody dwa atomy wodoru i atom tlenu nie leżą na jednej prostej. Proste, które można przez nie przeprowadzić, tworzą kąt równy około 105°, jak to przedstawiono na rysunku 22.20. W efekcie cząsteczka wody ma określoną stronę tlenową i stronę wodorową. Co więcej, 10 elektronów cząsteczki ma skłonność do pozostawania bliżej jądra tlenu niż jąder wodoru. Stąd strona tlenowa cząsteczki ma więcej ładunku ujemnego niż wodorowa, co prowadzi do powstania elektrycznego momentu dipolowego  $\vec{p}$ , skierowanego wzdłuż osi symetrii cząsteczki, jak to pokazano na rysunku. Jeśli cząsteczka wody znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym, to zachowuje się jak dipol elektryczny z rysunku 22.9.

W celu zbadania tego zachowania rozważmy taki dipol, umieszczony w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ (rys. 22.21a). Zakładamy, że dipol jest sztywnym układem składającym się z dwóch przeciwnie naładowanych kulek, każda o ładunku q, które znajdują się w odległości d od siebie. Moment dipolowy  $\vec{p}$  tworzy kąt  $\theta$ z kierunkiem natężenia pola  $\vec{E}$ .

Na naładowane końce dipola działają siły elektrostatyczne. Pole elektryczne jest jednorodne, a więc siły działają w przeciwnych kierunkach (jak pokazano na rysunku 22.21) i mają taką samą wartość F = qE. W jednorodnym polu elektrycznym wypadkowa siła oddziaływania pola na dipol jest więc równa zeru i środek masy dipola (ŚM) się nie porusza. Jednak siły działające na naładowane końce wytwarzają wypadkowy moment siły  $\vec{M}$  względem środka masy dipola. Środek masy leży na prostej, łączącej naładowane końce, w pewnej odległości x od jednego końca i w odległości d-x od drugiego. Korzystając ze wzoru (10.39) ( $M = rF \sin \phi$ ), możemy zapisać wartość wypadkowego momentu siły  $\vec{M}$  w postaci

$$M = Fx\sin\theta + F(d-x)\sin\theta = Fd\sin\theta.$$
(22.32)

Wartość momentu siły  $\vec{M}$  możemy także zapisać, używając wartości natężenia pola elektrycznego *E* i momentu dipolowego p = qd. W tym celu do wzoru (22.32) podstawimy qE za *F* i p/q za *d* i otrzymamy wyrażenie na wartość momentu siły

$$M = pE\sin\theta. \tag{22.33}$$

Wzór ten możemy ogólnie zapisać w postaci wektorowej

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$
 (moment siły działający na dipol). (22.34)

Wektory  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$  przedstawiono na rysunku 22.21b. Moment siły działający na dipol dąży do obrócenia  $\vec{p}$  (a stąd i dipola) w kierunku natężenia pola  $\vec{E}$ , czyli do zmniejszenia kąta  $\theta$ . Na rysunku 22.21 obrót taki jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. W rozdziale 10 powiedzieliśmy, że dla momentu siły prowadzącego do obrotu zgodnego z kierunkiem ruchu wskazówek zegara wygodnie jest włączyć znak minus do wartości momentu. Przy takim zapisie moment siły z rysunku 22.21 ma postać

$$M = -pE\sin\theta. \tag{22.35}$$

### Energia potencjalna dipola elektrycznego

Z ustawieniem dipola elektrycznego w polu elektrycznym związana jest energia potencjalna. Dipol ma najmniejszą energię potencjalną, gdy jest w stanie równowagi, czyli gdy jego moment  $\vec{p}$  jest skierowany zgodnie z kierunkiem natężenia pola  $\vec{E}$  (wówczas  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = 0$ ). Dla każdego innego ustawienia dipol ma większą energię potencjalną. Podobnie jest dla wahadła, które ma *swą* najmniejszą grawitacyjną energię potencjalną w *swym* stanie równowagi, czyli w najniższym punkcie. Nadanie dipolowi lub wahadłu innego ustawienia (przez obrót) wymaga wykonania pracy przez siłę zewnętrzną.

Możemy zawsze w całkiem dowolny sposób zdefiniować konfigurację o zerowej energii potencjalnej, ponieważ fizyczne znaczenie mają tylko różnice energii potencjalnej. Okazuje się, że wyrażenie na energię potencjalną dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym jest najprostsze, jeśli wybierzemy zerową wartość energii potencjalnej dla kąta  $\theta$  (rys. 22.21) równego 90°. Możemy teraz znaleźć energię potencjalną  $E_p$  dipola przy dowolnej innej wartości kąta  $\theta$ , korzystając ze wzoru (8.1) ( $\Delta E_p = -W$ ), tzn. obliczając pracę W, wykonaną przez pole przy obróceniu dipola od ustawienia odpowiadającego wartości 90° do wartości  $\theta$ . Ze wzoru (10.53) ( $W = \int M d\theta$ ) i wzoru (22.35) znajdujemy, że energia potencjalna  $E_p$  przy dowolnym kącie  $\theta$  wynosi

$$E_{\rm p} = -W = -\int_{90^{\circ}}^{\theta} M d\theta = \int_{90^{\circ}}^{\theta} pE \sin\theta d\theta.$$
(22.36)

Obliczenie całki prowadzi do wyniku

$$E_{\rm p} = -pE\cos\theta. \tag{22.37}$$

Wzór ten możemy zapisać ogólnie w postaci wektorowej

$$E_{\rm p} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$
 (energia potencjalna dipola). (22.38)

Ze wzorów (22.37) i (22.38) wynika, że energia potencjalna dipola jest najmniejsza ( $E_p = -pE$ ), gdy  $\theta = 0$ , czyli gdy  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$  mają ten sam kierunek; energia potencjalna jest największa ( $E_p = pE$ ), gdy  $\theta = 180^\circ$ , czyli gdy  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$  są przeciwnie skierowane.

Gdy dipol obraca się od początkowego ustawienia  $\theta_p$  do innego  $\theta_k$ , praca *W*, wykonana przez pole elektryczne nad dipolem wynosi

$$W = -\Delta E_{\rm p} = -(E_{\rm p,k} - E_{\rm p,p}), \qquad (22.39)$$

gdzie  $E_{k,p}$  i  $E_{p,p}$  można obliczyć ze wzoru (22.38). Jeśli zmiana ustawienia jest spowodowana przez zewnętrzny moment siły, to praca  $W_{zewn}$ wykonana nad dipolem przez ten moment siły różni się znakiem od pracy wykonanej nad dipolem przez pole, czyli

$$W_{\text{zewn}} = -W = E_{\text{k},\text{p}} - E_{\text{p},\text{p}}.$$
 (22.40)

# Kuchenka mikrofalowa

Jeśli żywność zawiera wodę, to można ją podgrzewać i gotować w kuchence mikrofalowej. Jest to możliwe, gdyż cząsteczki wody są dipolami elektrycznymi. Gdy włączasz kuchenkę, źródło mikrofal wytwarza w kuchence, a więc także i w żywności, szybko zmienne pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ . Ze wzoru (22.34) widać, że na dipol elektryczny  $\vec{p}$  umieszczony w polu elektrycznym działa moment siły kierujący go wzdłuż kierunku natężenia pola  $\vec{E}$ . Ponieważ natężenie pola  $\vec{E}$  zmienia się w czasie, cząsteczki wody stale obracają się, dążąc do ustawienia się wzdłuż kierunku natężenia pola  $\vec{E}$ .

Tam gdzie trzy cząsteczki wody tworzą słabo związany kompleks, energia pola elektrycznego przekazywana jest energii termicznej wody (a więc żywności). Obracanie dipoli zrywa niektóre z tych słabych wiązań. Gdy są one odtwarzane, energia ta przenoszona jest na chaotyczny ruch całej grupy i dalej do otaczających ją cząsteczek. Wkrótce ta energia termiczna wody staje się wystarczająca, aby ugotować żywność.



# Sprawdzian 4

Na rysunku przedstawiono cztery ustawienia dipola elektrycznego w zewnętrznym polu elektrycznym. Uszereguj te ustawienia względem: a) wartości momentu siły działającego na dipol, b) energii potencjalnej dipola, zaczynając od wartości największej.



# Przykład 22.05. Moment siły i energia dipola elektrycznego w polu elektrycznym

Obojętna cząsteczka wody (H<sub>2</sub>O) w stanie gazowym ma elektryczny moment dipolowy o wartości  $6.2 \cdot 10^{-30}$  C·m.

**a**) W jakiej odległości od siebie znajdują się środki dodatniego i ujemnego ładunku cząsteczki?

# **PODSTAWOWE FAKTY**

Moment dipolowy cząsteczki zależy od wartości q dodatniego lub ujemnego ładunku cząsteczki i odległości d między środkami ładunków.

**Obliczenia:** W obojętnej cząsteczce wody znajduje się 10 elektronów i 10 protonów i dlatego wartość jej momentu dipolowego wynosi

$$p = qd = (10e)(d),$$

gdzie *d* jest poszukiwaną odległością, a *e* ładunkiem elementarnym. Stąd

$$d = \frac{p}{10e} = \frac{(6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})}{(10)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})} = 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$
  
= 3,9 pm (odpowiedź).

Otrzymana odległość jest nie tylko bardzo mała, ale jest mniejsza od promienia atomu wodoru.

**b**) Jakim maksymalnym momentem siły pole może oddziaływać na dipol, jeśli cząsteczka znajdzie się w polu elektrycznym o natężeniu  $1.5 \cdot 10^4$  N/C (pole o takim natężeniu można łatwo wytworzyć w laboratorium)?

# PODSTAWOWE FAKTY

Moment siły działający na dipol jest największy, gdy kąt między wektorami  $\vec{p}$  i  $\vec{E}$  wynosi 90°.

**Obliczenia:** Podstawiając  $\theta = 90^{\circ}$  do wzoru (22.33), otrzymujemy

c) Jaką pracę musi wykonać *czynnik zewnętrzny*, aby obrócić tę cząsteczkę o 180°, zaczynając od równoległego ustawienia odpowiadającego  $\theta = 0^{\circ}$ ?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Praca wykonana przez czynnik zewnętrzny (w postaci zewnętrznego momentu siły przyłożonego do tej cząsteczki) jest równa zmianie energii potencjalnej przy zmianie ustawienia cząsteczki.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

# **Podsumowanie**

**Pole elektryczne** Jednym ze sposobów wyjaśnienia działania siły elektrostatycznej między dwoma ładunkami jest założenie, że każdy ładunek wytwarza w przestrzeni wokół siebie pole elektryczne. Siła elektrostatyczna działająca na dowolny ładunek jest wywołana polem elektrycznym, wytworzonym przez inne ładunki w miejscu, w którym znajduje się rozważany ładunek.

**Definicja natężenia pola elektrycznego** Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w dowolnym punkcie jest określone przez siłę elektrostatyczną  $\vec{F}$  działającą na umieszczony w tym punkcie dodatni ładunek próbny  $q_0$ 

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$
(22.1)

Linie pola elektrycznego Linie pola elektrycznego umożliwiają graficzne przedstawienie kierunku i wartości natężeń pola elektrycznego. Wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie jest styczny do linii pola przechodzącej przez ten punkt. Gęstość linii pola w dowolnym obszarze jest proporcjonalna do wartości natężenia pola w tym obszarze. Linie pola są skierowane od ładunków dodatnich do ujemnych.

**Pole ładunku punktowego** Wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytworzonego przez ładunek punktowy q, w odległości r od tego ładunku wynosi

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q|}{r^2}.$$
 (22.3)

Wektor natężenia pola  $\vec{E}$  jest skierowany od ładunku punktowego, jeśli ładunek jest dodatni i do ładunku punktowego, jeśli ładunek jest ujemny.

**Pole dipola elektrycznego** *Dipol elektryczny* składa się z dwóch cząstek o jednakowej wartości ładunku q, ale o przeciwnym znaku, znajdujących się w odległości d od siebie. Elektryczny **moment dipolowy**  $\vec{p}$  dipola ma wartość qd i jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego. Wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez dipol w odległym punkcie na osi dipola (prostej przechodzącej przez obydwa ładunki) wynosi

Obliczenia: Ze wzoru (22.40) otrzymujemy

$$W_{\text{zewn}} = E_{\text{p},180^{\circ}} - E_{\text{p},0^{\circ}}$$
  
=  $(-pE \cos 180^{\circ}) - (-pE \cos 0^{\circ}) = 2pE$   
=  $(2) \cdot (6, 2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}) \cdot (1, 5 \cdot 10^4 \text{ N/C})$   
=  $1, 9 \cdot 10^{-25} \text{ J}$  (odpowiedź).

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{p}{z^3},\tag{22.9}$$

gdzie z jest odległością między punktem i środkiem dipola.

**Pole ładunku o rozkładzie ciągłym** Natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez *ładunek o rozkładzie ciągłym* obliczamy, traktując elementy ładunku jak ładunki punktowe i następnie sumując przez całkowanie wektory natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez wszystkie elementy ładunku.

**Pole naładowanej tarczy** Wartość natężenia pola elektrycznego na osi jednorodnie naładowanej tarczy wynosi

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right), \qquad (22.26)$$

gdzie z jest odległością tego punktu od środka tarczy, R jest promieniem tarczy, a  $\sigma$  jest powierzchniową gęstością ładunku.

Siła działająca na ładunek punktowy w polu elektrycznym Gdy ładunek punktowy q znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  wytworzonym przez inne ładunki, siła elektrostatyczna  $\vec{F}$  działająca na ładunek punktowy wynosi

$$\vec{F} = q \vec{E}. \tag{22.28}$$

Siła  $\vec{F}$  ma ten sam kierunek co natężenie  $\vec{E}$ , jeśli ładunek q jest dodatni, i przeciwny kierunek, jeśli ładunek q jest ujemny.

**Dipol w polu elektrycznym** Jeśli dipol elektryczny o momencie dipolowym  $\vec{p}$  znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , to pole działa na dipol momentem siły M

$$M = \vec{p} \times \vec{E}. \tag{22.34}$$

Dipol ma energię potencjalną  $E_p$ , związaną z jego ustawieniem w polu elektrycznym

$$E_{\rm p} = -\vec{p}\cdot\vec{E}.$$

Energia potencjalna dipola jest tak określona, że przyjmuje wartość równą zeru, gdy moment  $\vec{p}$  jest prostopadły do natężenia  $\vec{E}$ ; jest najmniejsza ( $E_p = -pE$ ), gdy moment  $\vec{p}$  ma kierunek zgodny z natężeniem  $\vec{E}$ , i największa ( $E_p = pE$ ), gdy moment  $\vec{p}$  ma kierunek przeciwny do natężenia  $\vec{E}$ .

# Pytania

1 Na rysunku 22.22 przedstawiono trzy układy linii pola elektrycznego. W każdym z układów w punkcie *A* zostaje umieszczony nieruchomy proton, który jest następnie przyspieszany przez pole elektryczne w kierunku punktu *B*. Odległość pomiędzy punktami *A* i *B* we wszystkich trzech układach jest jednakowa. Uszereguj te trzy układy zgodnie z wartości pędu protonu w punkcie *B*, zaczynając od wartości największych.



2 Na rysunku 22.23 przedstawiono dwa układy naładowa-

nych czastek. Boki zaznaczonych kwadratów, których środkami jest punkt P nie są równoległe do siebie. Ładunki elekrozmiesztrvczne czone są w odległości d lub d/2 wzdłuż obwodów kwadratów. Jakie sa wartość i kierunek wypadkowego nateżenia pola elektrycznego w punkcie P?



**Rys. 22.23.** Pytanie 2

**3** Na rysunku 22.24 dwie cząstki o ładunku -q są rozmieszczone symetrycznie względem osi y; każda z nich wytwarza pole elektryczne w leżącym na tej osi punkcie P. a) Czy wartości natężeń pól w punkcie P są równe? b) Czy natężenie każdego pola elektrycznego jest skierowane do czy od ładunku, który je wytwarza? c) Czy wartość wypadkowego natężenia pola elektrycznego w punkcie P jest równa sumie wartości E natężeń tych dwóch pól (czyli czy jest równa 2E)? d) Czy składowe x natężeń tych dwóch pól dodają się, czy

odejmują? e) Czy ich składowe y dodają się, czy odejmują? f) Czy kierunek wypadkowego natężenia pola w punkcie *P* jest kierunkiem składowych, które się odejmują, czy składowych, które się dodają? g) Jaki jest kierunek wypadkowego natężenia pola?



4 Na rysunku 22.25 przedstawiono cztery układy naładowa-

nych cząstek. Cząstki po lewej i po prawej stronie środkowego punktu są od siebie równo odległe. Wartości ładunków pokazane są na rysunku. Uszereguj te układy zgodnie z wartością natężenia pola elektrycznego w punkcie środkowym, zaczynając od wartości największej.



**5** Na rysunku 22.26 przedstawiono dwie naładowane unieruchomione cząstki umieszczone na osi. a) Gdzie na osi (w skończonej odległości) znajduje się punkt, w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest równe zeru: między ładunkami, na lewo czy na prawo od nich? b) Czy

*poza osią* (w skończonej odległości) istnieje punkt o zerowym natężeniu pola elektrycznego?



**6** Na rysunku 22.27 przedstawiono dwa identyczne okrągłe nieprzewodzące pierścienie znajdujące się na równoległych płaszczyznach i mające wspólną oś. Ładunek każdego z pierścieni jest jednorodnie rozłożony wzdłuż jego obwodu. Każdy z pierścieni wytwarza pole elektryczne, w szczególności na ich osi. W trzech przedstawionych przypadkach ładunek umieszczony na pierścieniach *A* i *B* równy jest odpowiednio: 1)  $q_0$  i  $q_0$ , 2)  $-q_0$  i  $-q_0$ , oraz 3)  $-q_0$  i  $q_0$ . Uszereguj te trzy przypadki zgodnie z wartością natężenia wypadkowego pola elektrycznego: a) w punkcie  $P_1$  w środku pomiędzy pierście-

niami, b) w punkcie  $P_2$ w środku pierścienia *B* oraz c) w punkcie  $P_3$  po prawej stronie od pierścienia *B*, zaczynając od wartości największej.



7 Energie potencjalne związane z czterema ustawieniami dipola elektrycznego w polu elektrycznym wynoszą: 1)  $-5E_{p0}$ , 2)  $-7E_{p0}$ , 3)  $3E_{p0}$  oraz 4)  $5E_{p0}$ , gdzie wartość  $E_{p0}$  jest dodatnia. Uszereguj ustawienia: a) zgodnie z wartością kąta między elektrycznym momentem dipolowym  $\vec{p}$  i natężeniem pola elektrycznego  $\vec{E}$ , b) według wartości momentu siły działającego na dipol elektryczny, zaczynając od wartości największej.

**8** a) Czy dla dipola ze sprawdzianu 4 praca wykonana nad nim przez pole przy obrocie od ustawienia 1 do ustawienia 2

jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru? b) Jeśli dipol obraca się od ustawienia 1 do ustawienia 4, to czy praca wykonana przez pole jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak w (a)?

**9** Na rysunku 22.28 przedstawiono dwie tarcze i płaski pierścień. Każde z przedstawionych ciał naładowane jest jednorodnie takim samym ładunkiem Q. Uszereguj te ciała zgodnie z wartością natężenia wypadkowego pola elektrycznego w punktach P (znajdujących się na jednakowych wysokościach ponad nimi), zaczynając od wartości największej.



Rys. 22.28. Pytanie 9

**10** Na rysunku 22.29 elektron e przechodzi przez mały otwór w płycie *A*, poruszając się w kierunku płyty B. Jednorodne pole elektryczne w obszarze między płytami spowalnia elektron bez odchylania. a) Jaki jest kierunek natężenia pola? b) Cztery inne cząstki również przechodzą przez małe otwory w płycie *A* lub w płycie *B*, wpadając w obszar między pły-

tami. Trzy z nich mają ładunki  $+q_1$ ,  $+q_2$  i  $-q_3$ , czwarta (oznaczona przez n) jest neutronem, który jest cząstką obojętną elektrycznie.  $+q_1$ Czy prędkość każdej z tych czterech cząstek rośnie, maleje, czy pozostaje taka sama w obszarze między płytami?





11 Na rysunku 22.30a przedstawiono plastikowy pręt o kolistym kształcie, jednorodnie naładowany ładunkiem +Q, który wytwarza pole elektryczne o wartości natężenia Ew środku krzywizny pręta (w początku układu). Na rysunkach 22.30b, c i d przedstawiono inne pręty koliste, naładowane jednorodnie, z ładunkiem kolejno powiększanym o +Q, aż do wypełnienia całego okręgu. Piąty rozkład (który oznaczymy przez (e)) jest taki sam, jak w (d), ale pręt w czwartej ćwiartce ma ładunek -Q. Uszereguj te rozkłady zgodnie z wartością natężenia pola elektrycznego w środku krzywizny, zaczynając od największego.

**12** Gdy trzy dipole elektryczne ustawione są obok siebie, każdy z nich odczuwa istnienie pola elektrycznego wytwarzanego przez dwa pozostałe. Taki układ ma zatem pewną energię potencjalną. Na rysunku 22.31 przedstawiono dwa układy takich trzech umieszczonych obok siebie dipoli. Dipole mają

jednakową wartość momentu dipolowego, a odległości pomiędzy sąsiednimi dipolami są jednakowe. W którym z przypadków energia potencjalna układu trzech dipoli jest większa?



**13** Na rysunku 22.32 przedstawiono trzy pręty, każdy naładowany takim samym ładunkiem Q umieszczonym jednorodnie wzdłuż ich długości. Pręty a (o długości L) i b (o długości L/2) są odcinkami, a punkty P znajdują się nad ich środkami. Pręt c (o długości L/2) jest zwinięty w okrąg, którego środkiem jest punkt P. Uszereguj te pręty zgodnie z wartością natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez nie w punkcie P, zaczynając od największej.



14 Na rysunku 22.33 przedstawiono pięć protonów wystrzelonych w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ . Kierunek i wartość ich prędkości początkowych pokazana jest na rysunku. Uszereguj te protony zgodnie z wartością ich przyspieszenia wywołanego polem elektrycznym, zaczynając od największej.



Rys. 22.33. Pytanie 14

# Zadania

60

Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach WileyPLUS (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

- Liczba kropek określa stopień trudności zadania
- ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w Student Solutions Manual
- www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
- ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
- Więcej informacji znajdziesz w książce The Flying Circus of Physics i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

# Podrozdział 22.1. Pole elektryczne

•1 Naszkicuj linie pola elektrycznego w obszarach między i poza dwiema współśrodkowymi powłokami kulistymi, gdy na wewnętrznej powłoce jest jednorodnie rozłożony ładunek dodatni  $q_1$ , a na powłoce zewnętrznej jednorodnie rozłożony ładunek ujemny  $-q_2$ . Rozważ przypadki:  $q_1 > q_2$ ,  $q_1 = q_2$  i  $q_1 < q_2$ .

2 Na rysunku 22.34 przedstawiono linie pola elektrycznego, których wzajemna odległość w lewej części rysunku jest dwa razy większa niż w prawej. a) Jeśli wartość na-



**Rys. 22.34.** Zadanie 2

tężenia pola w punkcie *A* wynosi 40 N/C, to jaka siła działa na proton w punkcie *A*? b) Jaka jest wartość natężenia pola w punkcie *B*?

### Podrozdział 22.2. Pole elektryczne ładunku punktowego

•3 ssm Jądro atomu plutonu-239 zawiera 94 protony. Załóżmy, że jądro to ma promień równy 6,64 fm, a ładunek dodatni jest równomiernie rozłożony w obszarze jądra. Wyznacz: a) wartość i b) kierunek wektora natężenia pola elektrycznego, wytworzonego na powierzchni jądra przez ten ładunek dodatni.

•4 Dwie naładowane cząstki są unieruchomione na na osi x. Cząstka 1 o ładunku  $-2 \cdot 10^{-7}$  C w punkcie x = 6 cm, a cząstka 2 o ładunku  $+2 \cdot 10^{-7}$  C w punkcie x = 21 cm. Jakie jest natężenie pola elektrycznego w środku pomiędzy tymi cząstkami wyrażone w notacji wektorowej?

•5 ssm Jaka jest wartość ładunku punktowego, który w odległości 50 cm wytwarza pole elektryczne o natężeniu 2 N/C?

•6 Jaka jest wartość ładunku punktowego, który w punktach odległych o 1 m wytwarza pole elektryczne o natężeniu 1 N/C?

••7 ssm ilw www Na rysunku 22.35 przedstawiono cztery cząstki umieszczone w wierzchołkach kwadratu o boku długości a = 5 cm. Ładunki tych cząstek wynoszą:  $q_1 = +10$  nC,

 $q_2 = -20 \text{ nC}, q_3 = +20 \text{ nC}$ oraz  $q_4 = -10 \text{ nC}.$  Jakie jest natężenie pola elektrycznego w środku tego kwadratu wyrażone w notacji wektorowej?

••8 • Na rysunku 22.36 przedstawiono cztery unieruchomione cząstki o ładunkach  $q_1 = q_2 = +5e, q_3 = +3e$ i  $q_4 = -12e$ . Odległość  $d = 5 \mu m$ . Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez te cząstki w punkcie *P*?

••9 • Na rysunku 22.37 przedstawiono dwie naładowane cząstki umieszczone na osi x:  $-q = -3, 2 \cdot 10^{-19}$  C w punkcie x = -3 m oraz  $q = 3, 2 \cdot 10^{-19}$  C w punkcie x = +3 m. Jakie są: a) wartość i b) kierunek (w stosunku do dodatniego kierunku osi x) natężenia wypadkowego pola elektrycznego wytworzonego przez te cząstki w punkcie Pdla y = 4 m?

••10 • Na rysunku 22.38a przestawiono dwie naładowane cząstki unieruchomione

a)



b)



na osi x w odległości L od siebie. Stosunek ich ładunków  $q_1/q_2$  wynosi 4. Na rysunku 22.38b przedstawiono składową x natężenia wypadkowego pola elektrycznego  $E_{wyp,x}$  wytworzonego przez te cząstki na osi x po prawej stronie cząstki 2. Jednostką skali na osi x jest  $x_s = 30$  cm. a) Dla jakiej wartości x > 0 natężenie  $E_{wyp,x}$  jest największe? b) Jaka jest wartość tego maksimum, jeśli cząstka 2 ma ładunek  $-q_2 = -3e$ ?

••11 ssm Dwie naładowane cząstki unieruchomiono na osi x. Cząstka 1 o ładunku  $q_1 = 2, 1 \cdot 10^{-8}$  C znajduje się w punkcie x = 20 cm, a cząstka 2 o ładunku  $q_2 = -4q_1$  w punkcie x = 70 cm. W którym miejscu na osi x (poza nieskończonością) wypadkowe pole elektryczne wytwarzane przez obie cząstki jest równe zeru?

••12 • Na rysunku 22.39 przedstawiono rozkład elektronów (e) i protonów (p) umieszczonych na łuku okręgu o pro-

mieniu r = 2 cm pod kątami  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 50^\circ$ ,  $\theta_3 = 30^\circ$  i  $\theta_4 = 20^\circ$  względem osi x. Jakie są: a) wartość i b) kierunek natężenia pola elektrycznego (w stosunku do dodatniego kierunku osi x) wytwarzanego przez te cząstki w środku okręgu?



**Rys. 22.39.** Zadanie 12

••13 • Na rysunku 22.40 przedstawiono proton (p) umieszczony na osi tarczy naładowanej jednorodnie ładunkiem nadmiarowych elektronów. Na rysunku pokazano tarczę widzianą z boku i trzy z tych elektronów: elektron  $e_c$  znajdujący się w środku tarczy oraz dwa elektrony  $e_s$  znajdujące się na przeciwnych krawędziach tarczy w odległości R od jej środka. Proton znajduje się początkowo w odległości z = R = 2 cm od tarczy. Jakie są wartości: a) natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}_c$  wywołanego przez elektron  $e_c$  oraz b) *wypadkowego* natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}_{s,wyp}$  wywołanego przez elektrony  $e_s$ ? Następnie proton zostaje przesunięty do punktu z = R/10. Jakie są wartości natężenia pola elektrycznego: c)  $\vec{E}_c$  i d)  $\vec{E}_{s,wyp}$  w tym położeniu? e) Z punktów a) i c) wi-

dać, że tak jak się można tego spodziewać w wyniku zbliżania protonu do tarczy rośnie wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}_c$ . Dlaczego zatem, jak widać z punktów b) i d), jednocześnie maleje natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}_{s,wyp}$ ?



••14 Na rysunku 22.41 przedstawiono dwie naładowane cząstki unieruchomione na osi *x*: cząstkę 1 o ładunku  $q_1 = -5q$  i cząstkę 2 o ładunku  $q_2 = +2q$ . a) W którym punkcie na osi *x* natężenie wypadkowego pola elektrycznego wytwo-rzonego przez te cząstki równe jest zeru? Wyraź współrzędną

tego punktu jako wielokrotność *L*. b) Naszkicuj linie wypadkowego pola elektrycznego dookoła i pomiędzy tymi cząstkami.

••15 Na rysunku 22.42 przedstawiono trzy unieruchomione cząstki o ładunkach  $q_1 = q_2 = +e i q_3 = +2e$ . Odległość  $a = 6 \mu$ m. Jakie są: a) wartość i b) kierunek wypadkowego pola elektrycznego wytwarzanego przez te cząstki w punkcie *P*?

•••16 Na rysunku 22.43 przedstawiono plastikowy pierścień o promieniu R =50 cm. Na pierścieniu znajdują się dwa małe naładowane koraliki. Koralik 1 o ładunku +2  $\mu$ C został unieruchomiony po lewej stronie pierścienia. Koralik 2 o ładunku +6  $\mu$ C może się poruszać wzdłuż pierścienia. Koraliki wytwarzają pole elektryczne,



Rys. 22.41. Zadanie 14







wartość wypadkowego natężenia tego pola w środku pierścienia wynosi *E*. Jaka powinna być wartość: a) dodatnia i b) ujemna kąta  $\theta$ , odpowiadającego ustawieniu koralika 2, dla której  $E = 2 \cdot 10^5$  N/C?

•••17 Na rysunku 22.44a przedstawiono plastikowy pierścień o promieniu R = 60 cm, na którym znajdują się dwa naładowane koraliki. Koralik 2, który nie jest pokazany na rysunku, jest unieruchomiony. Koralik 1, mogący się swobodnie



Rys. 22.44. Zadanie 17

poruszać wzdłuż pierścienia, znajduje się początkowo na osi x pod kątem  $\theta = 0^{\circ}$ . Koralik ten przesunięto wzdłuż pierścienia na przeciwną jego stronę do położenia  $\theta = 180^{\circ}$ , poruszając się przez pierwszą i drugą ćwiartkę układu współrzędnych. Na rysunku 22.44b przedstawiono wyrażoną w zależności od kąta  $\theta$  składową x wypadkowego natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez oba koraliki w środku pierścienia. Na rysunku 22.44c przedstawiono wyrażoną podobnie składową y tego natężenia. Skale na pionowych osiach są określone przez  $E_{x,s} = 5 \cdot 10^4$  N/C i  $E_{y,s} = -9 \cdot 10^4$  N/C. a) Pod jakim kątem  $\theta$  znajduje się koralik 2? Jakie są ładunki b) koralika 1 i c) koralika 2?

### Podrozdział 22.3 Pole elektryczne dipola elektrycznego

••18 Natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez dipol elektryczny na jego osi można przybliżyć wzorami (22.8) i (22.9). Jaki będzie kolejny składnik wyrażenia na natężenie pola elektrycznego na osi dipola, jeśli we wzorze (22.7) zastosuje się rozwinięcie dwumianu, czyli innymi słowy, ile wynosi  $E_n$  we wzorze

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{z^3} + E_{\rm n}$$

••19 Na rysunku 22.45 przedstawiono dipol elektryczny. Znajdź: a) wartość i b) kierunek natężenia pola elektrycznego (w stosunku do dodatniego kierunku osi x) wytwarzanego przez ten dipol w punkcie P. Punkt P znajduje się w odległości  $r \gg d$  od dipola.



••20 Wzory (22.8) i (22.9) wyrażają przybliżenia wartości natężenia pola elektrycznego dipola elektrycznego w punktach na osi dipola. Rozważmy punkt *P* na tej osi w odległości z = 5d od środka dipola (*d* jest odległością pomiędzy ładunkami dipola). Niech  $E_{\text{przyb}}$  będzie wartością natężenia pola elektrycznego w punkcie *P* przybliżoną wzorami (22.8)

i (22.9). Niech  $E_{\text{praw}}$  będzie prawdziwą wartością tego natężenia. Jaki jest stosunek natężeń  $E_{\text{przyb}}/E_{\text{praw}}$ ?

•••21 ssm Kwadrupol elektryczny. Na rysunku 22.46 przedstawiono kwadrupol elektryczny. Składa się on z dwóch dipoli, których mo-



Rys. 22.46. Zadanie 21

menty dipolowe mają taką samą wartość, ale przeciwne kierunki. Pokaż, że wartość natężenia E na osi kwadrupola w punkcie P w odległości z od jego środka (przy założeniu  $z \gg d$ ) wynosi 3Q

$$E = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 z^4},$$

gdzie wielkość  $Q = 2qd^2$  nosi nazwę elektrycznego momentu kwadrupolowego rozważanego rozkładu ładunków.

#### Podrozdział 22.4 Pole elektryczne naładowanej linii

•22 *Gęstość, gęstość, gęstość.* a) Ładunek –300*e* jest jednorodnie rozłożony wzdłuż łuku okręgu o promieniu 4 cm i kącie 40°. Jaka jest liniowa gęstość ładunku umieszczonego na łuku. b) Ładunek –300*e* jest jednorodnie rozłożony na jednej stronie okrągłej tarczy o promieniu 2 cm. Jaka jest powierzchniowa gęstość ładunku zgromadzonego na tarczy? c) Ładunek –300*e* jest jednorodnie rozłożony w objętości kuli o promieniu 2 cm. Jaka jest objętościowa gęstość ładunku zgromadzonego w kuli?

•23 Na rysunku 22.47 przedstawiono dwa równoległe nieprzewodzące pierścienie, których środki znajdują się na prostej, prostopadłej do obydwu pierścieni. Pierścień 1 o promieniu R jest jednorodnie naładowany ładunkiem  $q_1$ ; pierścień 2 o tym samym promieniu jest

jednorodnie naładowany ładunkiem  $q_2$ . Pierścienie znajdują się w odległości 3R. Wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punkcie *P* na wspólnej osi, w odległości *R* od pierścienia 1 wynosi zero. Jaki jest stosunek ładunków  $q_1/q_2$ ?



••24 Z cienkiego nieprzewodzącego pręta jednorodnie naładowanego ładunkiem Q utworzono okrąg o promieniu R(rys. 22.48). Osią symetrii tego okręgu jest oś z układu współrzędnych z początkiem w środku okręgu. Jaka jest wartość

natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez ten pręt w punktach: a) z = 0 i b)  $z = \infty$ ? c) Dla jakiej dodatniej wartości z, wyrażonej jako wielokrotność *R*, wartość tego natężenia jest największa? d) Jaka jest największa wartość natężenia, jeśli R = 2 cm, a  $Q = 4 \mu$ C?



Rys. 22.48. Zadanie 24

••25 Na rysunku 22.49 przedstawiono trzy łuki okręgów o środku w początku układu współrzędnych. Ładunek jednorodnie rozłożony na każdym łuku wyrażony jest jako wielokrotność  $Q = 2 \mu C$ . Promienie łuków wyrażone są jako wielokrotność R = 10 cm. Jakie są: a) wartość i b) kierunek

natężenia wypadkowego pola elektrycznego (w stosunku do dodatniego kierunku osi *x*) wytworzonego przez te łuki w początku układu współrzędnych?

••26 • Iw Na rysunku 22.50 przedstawiono cienki szklany pręt w kształcie półokręgu o promieniu r = 5 cm. Wzdłuż pręta rozłożony jest jednorodnie ładunek elektryczny: w górnej połowie +q = 4,5 pC, a w dolnej połowie -q = -4,5 pC. Jakie są: a) wartość i b) kierunek



Rys. 22.49. Zadanie 25



Rys. 22.50. Zadanie 26

natężenia wypadkowego pola elektrycznego  $\vec{E}$  (w stosunku do dodatniego kierunku osi x) wytworzonego przez te łuki w punkcie P, który jest początkiem układu współrzędnych?

••27 S Na rysunku 22.51 przedstawiono dwa jednorodnie naładowane plastikowe pręty: na jednym z nich znajduje się ładunek +q, a na drugim -q. Pręty w kształcie półokręgu tworzą razem okrąg o promieniu R = 8,5 cm umieszczony na płaszczyźnie *xy*. Oś *x* przechodzi przez oba punkty łączą-

ce półokręgi. Znajdź: a) wartość i b) kierunek natężenia wypadkowego pola elektrycznego  $\vec{E}$  (w stosunku do dodatniego kierunku osi *x*) wytworzonego przez półokręgi w punkcie *P*, który jest początkiem układu współrzędnych, jeśli ładunek q = 15 pC?





••28 Pierścień o promieniu R = 2,4 cm jest naładowany jednorodnie ładunkiem +Q. Wypadkowe natężenie pola elektrycznego mierzone jest na osi symetrii pierścienia, która jest do niego prostopadła. W jakiej odległości od środka pierścienia wartość natężenia tego pola jest największa?

••29 • Na rysunku 22.52a przedstawiono nieprzewodzący pręt naładowany jednorodnie ładunkiem +Q. Pręt w kształcie półokręgu o promieniu R wytwarza w jego środku krzywizny P pole elektryczne, którego natężenie ma wartość  $E_{cent}$ . Ile



Rys. 22.52. Zadanie 29

razy zwiększyłaby się wartość tego natężenia, gdyby pręt zwinięto do punktu znajdującego się w odległości *R* od punktu *P* (rys. 22.52b)?

••30 • Na rysunku 22.53 przedstawiono dwa współśrodkowe pierścienie o promieniach odpowiednio R i R' = 3R,

które leżą na tej samej płaszczyźnie. Na osi z, w odległości D = 2R od środka pierścieni znajduje się punkt P. Na mniejszym pierścieniu znajduje się jednorodnie rozłożony ładunek +Q. Jaki jest, wyrażony jako wielokrotność Q, ładunek jednorodnie rozłożony na drugim pierścieniu, jeśli wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punkcie P jest równe zeru?



Rys. 22.53. Zadanie 30

••31 ssm ilw www Na rysunku 22.54 przedstawiono nieprzewodzący pręt o długości L = 8, 15 cm naładowany jednorodnie ładunkiem -q = 4,23 fC. a) Jaka jest gęstość liniowa ładunku tego pręta? b) Jakie są wartość i c) kierunek (w stosunku do dodatniego kierunku osi x) natężenia pola elektrycznego wytworzonego w punkcie P, znajdującego się w odległości a = 12 cm od pręta? Ile wynosi natężenie pola elektrycznego w odległości a = 50 m od d) pręta i e) cząstki o ładunku -q = 4,23 fC, którą zastąpiliśmy ten pręt (z takiej odległości pręt "wygląda" jak naładowana cząstka)?



•••32 • Na rysunku 22.55 przedstawiono cienki nieprzewodzący pręt o długości L = 14,5 cm, na którym jednorodnie

rozłożony jest dodatni ładunek o wartości q = 7,81 pC. Jakie są: a) wartość i b) kierunek (w stosunku do dodatniego kierunku osi x) natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez ten pręt w punkcie P znajdującym się w odległości R = 6 cm od pręta i leżącym na jego prostopadłej symetralnej?

••33 • Na rysunku 22.56 przedstawiono nieprzewodzący pręt ułożony wzdłuż półprostej, naładowany jednorodnie z gęstością liniową  $\lambda$ . Pokaż, że natężenie pola elek-



trycznego  $\vec{E_P}$  w punkcie *P* tworzy kąt 45° z prętem i że wynik jest niezależny od odległości *R*. (*Wskazówka*: Znajdź niezależnie równoległą i prostopadłą (do pręta) składową natężenia pola elektrycznego  $\vec{E_P}$  w punkcie *P* i porównaj te składowe).

#### Podrozdział 22.5. Pole elektryczne naładowanej tarczy

•34 Ładunek górnej powierzchni tarczy o promieniu 2,5 cm ma gęstość powierzchniową 5,3  $\mu$ C/m<sup>2</sup>. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego wytworzonego przez tarczę w punkcie leżącym na osi symetrii prostopadłej do tarczy, w odległości 12 cm od tarczy?

•35 ssm www W jakiej odległości od środka jednorodnie naładowanej plastikowej tarczy o promieniu równym 0,6 m (na jej osi symetrii prostopadłej do tej tarczy) wartość natężenia pola elektrycznego jest równa połowie tej wartości w środku tarczy?

••36 Plastikowa tarcza w kształcie koła, którego promień R = 2 cm, jest na jednej powierzchni jednorodnie naładowana ładunkiem o wartości  $Q = +(2 \cdot 10^6)e$ . Na tej powierzchni umieszczono centralnie okrągły pierścień o szerokości 30 µm. Promień tego pierścienia odpowiadający środkowi jego szerokości równy jest r = 0,5 cm. Wyraź w kulombach ładunek zgromadzony wewnątrz tego pierścienia.

••37 Przypuśćmy, że projektujesz urządzenie, w którym pole elektryczne ma być wytwarzane przez jednorodnie naładowaną tarczę o promieniu *R*. Najistotniejsza dla tego urządzenia jest wartość natężenia pola elektrycznego na osi symetrii prostopadłej do powierzchni tarczy w punkcie *P* odległym o 2*R* od środka tarczy (rys. 22.57a). Analiza kosztów sugeruje zmianę kształtu omawianego urządzenia na pierścień o takim

samym promieniu zewnętrznym R i promieniu wewnętrznym R/2 (rys. 22.57b). Przypuśćmy, że ten pierścień miałby taką samą powierzchniową gęstość ładunku jak pierwotnie planowana tarcza. O ile procent zmniejszy się wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie P, jeśli tarczę zamieni się na pierścień?



**Rys. 22.57.** Zadanie 37

••38 Na rysunku 22.58a przedstawiono jednorodnie naładowaną tarczę w kształcie koła. Środkowa oś z jest prostopadła do powierzchni tarczy, a jej początek znajduje się w środku



Rys. 22.58. Zadanie 38

tarczy. Na rysunku 22.58b przedstawiono wykres wartości natężenia pola elektrycznego wzdłuż tej osi wyrażonej w jednostkach maksymalnej wartości natężenia pola  $E_m$  w środku tarczy. Jednostką skali na osi z jest  $z_s = 8$  cm. Jaki jest promień tarczy?

### Podrozdział 22.6. Ładunek punktowy w polu elektrycznym

•39 W doświadczeniu Millikana kropelka oleju o promieniu 1,64  $\mu$ m i gęstości 0,851 g/cm<sup>3</sup> zawisła w komorze C (rys. 22.16), gdy włączono skierowane w dół pole elektryczne o natężeniu 1,92 · 10<sup>5</sup> N/C. Znajdź ładunek kropelki jako wielokrotność *e*.

•40 😨 Elektron, którego prędkość wynosi  $5 \cdot 10^8$  cm/s, wpada w pole elektryczne o natężeniu  $1 \cdot 10^3$  N/C, poruszając się wzdłuż linii pola w kierunku, w którym jego ruch jest opóźniony. a) Jaką drogę przebywa elektron w polu do chwili zatrzymania? b) Ile czasu upłynie do tego momentu? c) Jeśli obszar pola elektrycznego ma tylko 8 mm długości (za mało do zatrzymania w nim elektronu), to jaka część początkowej energii kinetycznej elektronu zostanie w tym obszarze stracona?

•41 ssm Naładowana chmura wytwarza pole elektryczne w powietrzu nad powierzchnią Ziemi. Na cząstkę o ładunku  $-2 \cdot 10^{-9}$  C, znajdującą się w tym polu, działa siła elektrostatyczna o wartości  $3 \cdot 10^{-6}$  N, skierowana w dół. a) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego? Jakie są: b) wartość i c) kierunek siły elektrostatycznej  $\vec{F}_e$  działającej na proton umieszczony w tym polu? d) Jaka jest wartość siły grawitacyjnej  $\vec{F}_g$  działającej na proton? d) Ile wynosi stosunek wartości siły elektrostatycznej do wartości siły grawitacyjnej  $\vec{F}_g$ , działającej na proton?

•42 Wilgotne powietrze ulega przebiciu (cząsteczki ulegają jonizacji) w polu elektrycznym o natężeniu 3 · 10<sup>6</sup> N/C. Jakie są wartości siły elektrostatycznej działającej w takim polu na: a) elektron b) jon jednododatni?

•43 ssm Spoczywający początkowo elektron znalazł się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $2 \cdot 10^4$  N/C. Oblicz przyspieszenie elektronu (pomiń siłę ciężkości).

•44 Cząstka  $\alpha$  (jądro atomu helu) ma masę 6,64 · 10<sup>-27</sup> kg i ładunek +2*e*. Jakie są: a) wartość i b) kierunek natężenia pola elektrycznego, w którym siła elektrostatyczna zrównoważy siłę ciężkości działającą na tę cząstkę?

•45 ilw Na osi dipola, w odległości 25 nm od jego środka znajduje się elektron. Jaka jest wartość siły elektrostatycznej działającej na ten elektron ze strony dipola, jeśli jego moment dipolowy jest równy  $3,6 \cdot 10^{-29}$  C · m? Przyjmij ze odległość 25 nm jest znacznie większa niż odległość między ładunkami tworzącymi dipol.

•46 W wyniku działania pola elektrycznego elektron doznaje przyspieszenia o wartości  $1.8 \cdot 10^9 \text{ m/s}^2$  skierowanego na wschód. Znajdź: a) wartość i b) kierunek natężenia tego pola.

•47 ssm Stosując pola elektryczne do przyspieszania protonów w działach protonowych, można wytwarzać wiązki szybkich protonów. a) Jakiego przyspieszenia dozna proton, jeśli natężenie pola elektrycznego działa wynosi  $2 \cdot 10^4$  N/C? b) Jaką prędkość uzyska proton, jeśli pole będzie przyspieszało proton na drodze 1 cm?

••48 Na rysunku 22.59 przedstawiono spoczywający początkowo elektron (e) znajdujący się na osi jednorodnie naładowanej tarczy o promieniu *R*. Powierzchniowa gęstość ładunku na tarczy wynosi  $+4 \cdot 10^4 \,\mu\text{C/m}^2$ .

Jakie jest początkowe przyspieszenie elektronu zaraz po jego uwolnieniu, jeśli jego odległość od środka tarczy wynosi: a) R, b) R/100, c) R/1000? d) Dlaczego zbliżenie elektronu do tarczy powoduje jedynie nieznaczny wzrost tego przyspieszenia?



Rys. 22.59. Zadanie 48

••49 Klocek o masie 10 g i ładunku  $+8 \cdot 10^{-5}$  C umieszczono w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E} = 3000\hat{i} - 600\hat{j}$ , gdzie składowe  $\vec{E}$  podano w niutonach na kulomb (N/C). Jakie są: a) wartość i b) kierunek (w stosunku do dodatniego kierunku osi x) siły elektrostatycznej działającej na klocek? Jeśli klocek spoczywał (w chwili t = 0 s) w początku układu, to jakie będą jego współrzędne c) x i d) y w chwili t = 3 s?

••50 W pewnej chwili składowe prędkości elektronu poruszającego się między dwiema naładowanymi równoległymi płytami wynoszą  $v_x = 1.5 \cdot 10^5$  m/s i  $v_y = 3 \cdot 10^3$  m/s. Załóż, że pole elektryczne między płytami jest dane przez  $\vec{E} = (120 \text{ N/C})\hat{j}$ . a) Ile wynosi przyspieszenie elektronu? b) Jaka będzie prędkość elektronu, gdy jego współrzędna *x* zmieni się o 2 cm? Wyniki wyraź w notacji wektorowej.

••51 Załóżmy, że pszczoła jest kulą o średnicy 1 cm jednorodnie naładowaną na powierzchni ładunkiem 45 pC. Załóżmy, że kuliste ziarno pyłku ma średnicę 40  $\mu$ m. Przyjmijmy, że jest ono utrzymywane na powierzchni pszczoły, ponieważ jej ładunek indukuje na bliższej powierzchni pyłku ładunek – 1 pC, a na powierzchni dalszej ładunek +1 pC. a) Jaka jest wartość wypadkowej siły elektrostatycznej działającej na pyłek ze strony pszczoły? Przyjmijmy następnie, że pszczoła przenosi ziarno pyłku na odległość 1 mm od znamienia słupka, które traktujemy jak cząstkę o ładunku –45 pC. b) Jaka jest wartość wypadkowej siły elektrostatycznej działającej na ziarno pyłku ze strony znamienia słupka? c) Czy ziarno pyłku pozostanie na pszczole, czy przeniesie się na pyłek?

••52 Do obszaru pola elektrycznego o natężeniu E = 50 N/C wpada elektron z prędkością początkową 40 km/s. Kierunek

prędkości elektronu pokrywa się z kierunkiem natężenia pola elektrycznego. a) Ile wynosi prędkość elektronu po 1,5 ns od jego wejścia w obszar pola? b) Jaką drogę pokona w tym czasie elektron?

••53 Dwie duże równoległe płyty miedziane znajdują się w odległości 5 cm od siebie, a między nimi wytworzone jest jednorodne pole elektryczne przedstawione na rysunku 22.60. Spoczywający początkowo elektron opuszcza płytę ujemną w tej samej chwili, w której proton jest uwolniony z płyty

dodatniej. Pomijając siłę oddziaływania wzajemnego cząstek, znajdź odległość cząstek od płyty dodatniej w chwili mijania się. (Czy nie jest dziwne, że przy rozwiązywaniu tego zadania nie musimy znać natężenia pola elektrycznego?)

••54 •• Na rysunku 22.61 przedstawiono elektron wystrzelony z prędkością początkową  $v_0 = 2 \cdot 10^6$  m/s pod kątem  $\theta_0 = 40^\circ$  względem osi x. Elektron porusza się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E} = (5 \text{ N/C})\hat{j}$ .



Rys. 22.60. Zadanie 53



Rys. 22.61. Zadanie 54

Ekran do detekcji elektronów umieszczony jest równolegle do osi y w odległości x = 3 m. Jaka jest wyrażona w notacji wektorowej prędkość elektronu w chwili, gdy uderzy on w ten ekran?

••55 ilw W obszarze między dwiema przeciwnie naładowanymi płytami istnieje jednorodne pole elektryczne. Elektron, początkowo spoczywający przy ujemnie naładowanej płycie, został uwolniony i uderzył po czasie  $1,5 \cdot 10^{-8}$  s w przeciwnie naładowaną płytę, znajdującą się w odległości 2 cm. a) Ile wynosiła prędkość elektronu w momencie, gdy zderzył się z drugą płytą? b) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  panującego między płytami?

#### Podrozdział 22.7. Dipol w polu elektrycznym

•56 Dipol elektryczny, składający się z ładunków +2e i -2eumieszczonych w odległości 0,78 nm od siebie, znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu 3,4  $\cdot$  10<sup>6</sup> N/C. Oblicz wartość momentu siły działającego na dipol, jeśli moment dipolowy jest: a) równoległy, b) prostopadły, c) antyrównoległy do natężenia pola elektrycznego.

•57 ssm Dipol elektryczny składający się z ładunków o wartości 1,5 nC, które znajdują się w odległości 6,2 μm od siebie, umieszczono w polu elektrycznym o natężeniu 1100 N/C.
a) Jaka jest wartość elektrycznego momentu dipolowego tego dipola?
b) Jaka jest różnica między energiami potencjal-

nymi, odpowiadającymi równoległemu i antyrównoległemu ustawieniu dipola względem natężenia pola  $\vec{E}$ ?

••58 Dipol elektryczny umieszczono w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , którego wartość wynosi 20 N/C.

Na rysunku 22.62 przedstawiono wykres energii potencjalnej tego dipola  $E_{\rm p}$  w funkcji kąta  $\theta$  pomiędzy natężeniem pola  $\vec{E}$  a momentem dipolowym  $\vec{p}$ . Jednostką skali na osi pionowej jest  $E_{\rm p,s} = 100 \cdot 10^{-28}$  J. Jaka jest wartość momentu dipolowego  $\vec{p}$ ?



••59 Jaką pracę należy wykonać, aby obrócić dipol elektryczny o 180° w jednorodnym polu elektrycznym? Natężenie pola ma wartość 46 N/C, moment dipolowy ma wartość  $3,02 \cdot 10^{-25}$  N · C, a początkowy kąt pomiędzy natężeniem

pola a momentem dipolowym wynosi 64°.
••60 Pewien dipol elektryczny umieszczono w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu *E*, którego wartość wynosi 40 N/C. Na rysunku 22.63 przedstawiono wykres zależności

wartości momentu siły M działającego na ten dipol od kąta  $\theta$  pomiędzy natężeniem pola  $\vec{E}$  a momentem dipolowym  $\vec{p}$ . Jednostką momentu siły na osi pionowej jest  $M_{\rm s} = 100 \cdot 10^{-28} \,\text{N} \cdot \text{m}$ . Jaka jest wartość momentu dipolowego  $\vec{p}$ ?



ego  $\vec{p}$ ? **Rys. 22.63.** Zadanie 60

••61 Znajdź częstość drgań dipola elektrycznego o momencie dipolowym  $\vec{p}$  i momencie bezwładności *I* dla małych amplitud drgań wokół jego położenia równowagi w jednorodnym polu elektrycznym o wartości natężenia *E*.

# Zadania dodatkowe

**62** a) Jakie jest przyspieszenie elektronu w jednorodnym polu elektrycznym o wartości  $1,4 \cdot 10^6$  N/C? b) Ile czasu trwałoby przyspieszenie elektronu od spoczynku do prędkości równej jednej dziesiątej prędkości światła? c) Jaką drogę przebyłby elektron w tym czasie?

**63** Kulista kropla wody o średnicy 1,2  $\mu$ m jest zawieszona w nieruchomym powietrzu w wyniku działania pola elektrycznego o natężeniu E = 462 N/C skierowanego w dół. a) Jaka jest wartość siły ciężkości działającej na tę kroplę? b) Ile nadmiarowych elektronów znajduje się w kropli?

**64** Trzy cząstki, o dodatnim ładunku Q każda, znajdują sie w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku długości d. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez te cząstki w środku każdego z boków tego trójkąta?

**65** Na rysunku 22.64a przedstawiono cząstkę o ładunku +Q, która w punkcie *P* odległym od niej o *R* wytwarza pole

elektryczne o wartości natężenia  $E_{\text{pkt}}$ . Na rysunku 22.64b taka sama wielkość ładunku została równomiernie rozłożona wzdłuż łuku okręgu o promieniu R i kącie środkowym  $\theta$ , na którym oparty jest łuk. Ładunek zgromadzony na łuku wytwarza w środku tego okręgu P pole elektryczne o wartości

natężenia  $E_{\text{tuk}}$ . Dla jakiej wartości kąta  $\theta$  $E_{\text{tuk}} = 0,5 \cdot E_{\text{pkt}}$ ? (*Wskazówka*: Prawdopodobnie skorzystasz z graficznej metody rozwiązania). **Rys. 22.64.** Zadanie 65

**66** W dwóch wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku długości  $2 \cdot 10^{-6}$  m znajdują się proton i elektron. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez te dwie cząstki w trzecim wierzchołku trójkąta?

**67** Nić rozciągnięta wzdłuż osi x od x = 0 do x = 3 m jest jednorodnie naładowana z liniową gęstością ładunku 9 nC/m. Znajdź wartość natężenia pola elektrycznego na osi x w punkcie x = 4 m.

**68** Na rysunku 22.65 przedstawiono osiem cząstek rozłożonych wzdłuż obwodu kwadratu, w którym odległość między nimi d = 2 cm. Wielkości kolejnych ładunków wynoszą  $q_1 = +3e$ ,  $q_2 = +e$ ,  $q_3 = -5e$ ,  $q_4 = -2e$ ,  $q_5 = +3e$ ,  $q_6 = +e$ ,  $q_7 = -5e$ i  $q_8 = +e$ . Jakie jest natężenie wypadkowego pola elektrycznego w środku kwadratu wyrażone w notacji wektorowej?



**69** Dwie cząstki, każda o ładunku 12 nC znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku długości 2 m. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w trzecim wierzchołku trójkąta, jeśli: a) oba ładunki są dodatnie, b) jeden ładunek jest dodatni, a drugi ujemny?

**70** W poniższej tabeli przedstawiono znalezione przez Millikana wartości ładunku, znajdujące się w różnych chwilach na pojedynczej kropelce. Jaką wartość ładunku elementarnego *e* można przyjąć na podstawie tych danych?

$6,563 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$13,13 \cdot 10^{-19}$ C	$19,71 \cdot 10^{-19}$ C
$8,204 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$16,48 \cdot 10^{-19}$ C	$22,89 \cdot 10^{-19}$ C
$11,50 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$18,08 \cdot 10^{-19}$ C	$26,13 \cdot 10^{-19}$ C

**71** Z pręta o długości 4 m, wzdłuż którego jednorodnie rozłożono ładunek 20 nC, utworzono łuk okręgu o promieniu 2 m. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w środku krzywizny tego łuku?

**72** Elektron może poruszać się wzdłuż osi symetrii naładowanego pierścienia o promieniu *R*, przedstawionego na rysunku 22.11, gdzie  $z \ll R$ . Pokaż, że siła elektrostatyczna działająca na elektron może spowodować jego drgania wokół środka pierścienia z częstością kołową

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$$

gdzie q jest ładunkiem pierścienia, a m – masą elektronu.

**73** ssm Natężenie pola elektrycznego na płaszczyźnie xy wytworzonego przez dodatnio naładowaną cząstkę w punkcie (3, 3) cm wynosi 7,2( $4\hat{i} + 3\hat{j}$ ) N/C, a w punkcie (2, 0) cm wynosi 100 $\hat{i}$  N/C. Jakie są współrzędne a) x i b) y tej cząstki? c) Jaki jest jej ładunek?

74 a) Jaki całkowity ładunek nadmiarowy q musi znajdować się na tarczy przedstawionej na rysunku 22.15, aby wartość natężenia pola elektrycznego w środku tej tarczy, na jej powierzchni, wynosiła  $3 \cdot 10^6$  N/C (przy takiej wartości natężenia E powietrze ulega przebiciu, co prowadzi do iskrzenia). Promień tarczy wynosi 2,5 cm. b) Załóżmy, że efektywna powierzchnia pola przekroju każdego atomu znajdującego się na powierzchni tarczy wynosi 0,015 nm<sup>2</sup>. Ile atomów potrzeba, aby pokryć powierzchnię tarczy? c) Ładunek wymieniony w punkcie a) jest wynikiem wyłapania przez niektóre atomy na powierzchni tarczy musi być tak naładowana?

**75** Trzy cząstki przedstawione na rysunku 22.66: cząstka 1 (o ładunku  $+1 \mu$ C), cząstka 2 (o ładunku  $+1 \mu$ C) i cząstka 3 (o ładunku Q) znajdują się w wierzchołkach trójkąta równo-

bocznego o boku długości *a*. Dla jakiej wartości *Q* (znajdź znak i wartość) natężenie wypadkowego pola elektrycznego w środku tego trójkąta jest równe zeru?

**76** Na rysunku 22.67 przedstawiono dipol elektryczny, który wychyla się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  ze swojego początkowego położenia ( $\theta_p = 20^\circ$ ) do położenia końcowego ( $\theta_k = 20^\circ$ ). Elektryczny moment dipolowy tego dipola wynosi  $1, 6 \cdot 10^{-27} \text{C} \cdot \text{m}$ . Wartość natężenia pola elektrycznego wynosi  $3 \cdot 10^6$  N/C. O ile zmienia się energia potencjalna tego dipola?







Rys. 22.67. Zadanie 76

**77** W początku osi *x* znajduje się cząstka o ładunku  $-q_1$ . a) W jakim punkcie na tej osi należałoby umieścić cząstkę o ładunku  $-4q_1$ , aby natężenie pola elektrycznego w punkcie x = 2 mm było równe zeru? b) Jeśli w tym miejscu umieszczonoby zamiast tego cząstkę o ładunku  $+4q_1$ , to jaki byłby kierunek (względem dodatniego kierunku osi x) natężenia wypadkowego pola elektrycznego w punkcie x = 2 mm?

**78** Dwie cząstki, każda o dodatnim ładunku q, zostały unieruchomione na osi y, jedna znajduje się w punkcie y = d, a druga w y = -d. a) Napisz funkcję opisującą wartość natężenia wypadkowego pola elektrycznego E na osi x w zależności od  $x = \alpha d$ . b) Narysuj wykres funkcji  $E(\alpha)$  dla  $0 < \alpha < 4$ . Korzystając z tego wykresu, znajdź wartości  $\alpha$ , dla których: c) wartość E jest największa, d) wartość E jest równa połowie tej największej wartości.

**79** Na tarczy zegara umieszczono ujemne ładunki punktowe o wartościach -q, -2q, -3q, ..., -12q unieruchomione w odpowiadających im położeniach godzinowych. Wskazówki zegara nie zakłócają wypadkowego pola elektrycznego wytwarzanego przez te ładunki punktowe. O której godzinie wskazówka godzinowa ułoży się w kierunku natężenia pola elektrycznego w środku tarczy zegara? (*Wskazówka*: Skorzystaj z symetrii).

**80** Znajdź elektryczny moment dipolowy elektronu i protonu, które znajdują się 4,3 nm od siebie.

**81** W pobliżu powierzchni Ziemi istnieje w atmosferze pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$  skierowanym w dół, którego średnia wartość wynosi 150 N/C. Ładując elektrycznie wykonaną z siarki kulkę, która waży 4,4 N, chcemy ją "zwiesić" w tym polu. a) Jakiego ładunku (podaj wartość i znak) trzeba użyć? b) Dlaczego takie doświadczenie jest niepraktyczne?

82 Pręt wygięty w kształcie łuku okręgu o promieniu krzywizny R = 9 cm jest jednorodnie naładowany dodatnim ładunkiem Q = 6,25 pC. Kąt środkowy, na którym oparty jest ten łuk, wynosi  $\theta = 2,4$  rad. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez ten łuk w środku okręgu?

**83** ssm W polu elektrycznym, którego natężenie  $\vec{E} = (4000 \text{ N/C})\hat{i}$ , znajduje się dipol elektryczny o momencie dipolowym

$$\vec{p} = (3\hat{i} + 4\hat{j})(1,24 \cdot 10^{-30} \,\mathrm{C} \cdot \mathrm{m})$$

a) Ile wynosi energia potencjalna tego dipola? b) Ile wynosi moment siły działający na ten dipol? c) Jaką pracę musi wykonać zewnętrzny moment siły, aby obrócić ten dipol do nowego położenia, w którym jego moment dipolowy wynosi

$$\vec{p} = (-4\hat{i} + 3\hat{j})(1,24 \cdot 10^{-30} \,\mathrm{C} \cdot \mathrm{m})?$$

84 Przez naładowanie dolnej płyty dodatnio i górnej płyty ujemnie wytworzono jednorodne pole elektryczne o natężeniu  $2 \cdot 10^3$  N/C, skierowane do góry (rys. 22.68). Płyty mają długość L = 10 cm i znajdują się w odległości d = 2 cm. Z lewej krawędzi



Rys. 22.68. Zadanie 84

dolnej płyty wystrzelono elektron w obszar między płytami. Początkowa prędkość  $\vec{v}_0$  elektronu tworzy kąt  $\theta = 45^{\circ}$ z dolną płytą i ma wartość  $6 \cdot 10^6$  m/s. a) Czy elektron uderzy w którąś płytę? b) Jeśli tak, to w którą płytę i w jakiej odległości, patrząc w kierunku poziomym od lewej krawędzi płyty?

**85** Wykorzystując dane z zadania 70, przyjmij, że ładunek q zgromadzony w kropli wynosi q = ne, gdzie n jest liczbą naturalną, a e jest ładunkiem elementarnym. a) Znajdź n dla każdej z wymienionych wartości ładunku q. b) Metodą najmniejszych kwadratów wyznacz liniową zależność ładunku q od liczby n, a następnie wyznacz z tej zależności wartość e.

**86** Na rysunku 22.66 przedstawiono cząstkę 1 (o ładunku +2 pC), cząstkę 2 (o ładunku -2 pC) i cząstkę 3 (o ładunku

+5 pC) znajdujące się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a = 9, 5 cm. a) Wyznacz kierunek siły  $\vec{F}_3$  (w stosunku do dodatniego kierunku osi x) działającej na cząstkę 3 ze strony innych cząstek, szkicując linie pola elektrycznego, które one wywołały. b) Wyznacz wartość siły  $\vec{F}_3$ .

**87** Na rysunku 22.69 przedstawiono cząstkę 1 o ładunku  $q_1 = 1 \text{ pC}$  i cząstkę 2 o ładunku  $q_2 = -2 \text{ pC}$  znajdujące się w odległości d = 5 cm od siebie. Zapisz w notacji wektorowej wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punktach: a) *A*, b) *B* i c) *C*. Naszkicuj linie pola elektrycznego.



# Prawo Gaussa

D

Ζ

Α

Ł

Ζ

0

# **23.1.** STRUMIEŃ POLA ELEKTRYCZNEGO

23

# Czego się nauczysz?

R

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 23.01 zauważyć, że prawo Gaussa wiąże natężenie pola elektrycznego w punktach na zamkniętej powierzchni (rzeczywistej lub wyimaginowanej), którą nazywamy powierzchnią Gaussa, z całkowitym ładunkiem objętym przez tę powierzchnię;
- 23.02 zauważyć, że strumień pola elektrycznego Φ przenikający przez powierzchnię odpowiada natężeniu pola elektrycznego przenikającego przez tę powierzchnię (a nie ślizgającego się po niej);
- 23.03 zauważyć, że wektor powierzchni dla płaszczyzny jest wektorem prostopadłym do tej płaszczyzny, którego wartość jest równa polu jej powierzchni;
- 23.04 zauważyć, że dowolną powierzchnię można podzielić na elementy powierzchni, które są na tyle małe, aby można było traktować je jako płaskie; Można w takim przypadku każdemu z tych elementów przypisać wektor powierzchni d*S*, który jest

# Podstawowe fakty

• Strumień elektryczny  $\Phi$  przez powierzchnię odpowiada "ilości" pola elektrycznego przenikającego przez tę powierzchnię.

• Wektor powierzchni  $d\vec{S}$  dla elementu powierzchni jest wektorem prostopadłym do tego elementu, którego wartość jest równa polu powierzchni dS tego elementu.

• Strumień elektryczny  $\mathrm{d}\Phi$  przez element powierzchni o wektorze powierzchni  $\mathrm{d}\vec{S}$  jest równy iloczynowi skalarnemu

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

do niego prostopadły i ma wartość równą polu powierzchni danego elementu;

- **23.05** obliczyć strumień  $\Phi$  przenikający przez powierzchnię, całkując po całej powierzchni iloczyn skalarny natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  i wektora elementu powierzchni  $d\vec{S}$ , stosując przy tym notację z wartościami wektorów i kątów między nimi lub używając notacji wektorowej;
- **23.06** wyjaśnić znak algebraiczny związany ze strumieniem wpływającym lub wypływającym z zamkniętej powierzchni;
- **23.07** obliczyć *wypadkowy* strumień  $\Phi$  przez powierzchnię *zamkniętą* (pamiętając o właściwym znaku) przez całkowanie po całej powierzchni iloczynu skalarnego natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  i wektora elementu powierzchni d $\vec{S}$ ;
- 23.08 określić, czy w celu uproszczenia całkowania, które pozwala wyznaczyć wypadkowy strumień przez powierzchnię, można podzielić zamkniętą powierzchnię na części (takie jak ściany sześcianu).
- Całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię wynosi

 $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad \text{(całkowity strumień)},$ 

gdzie całkowanie odbywa się po powierzchni.

• Wypadkowy strumień przez zamkniętą powierzchnię (której używamy w prawie Gaussa) wynosi

 $\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  (wypadkowy strumień),

gdzie całkowanie odbywa się po całej powierzchni.

# 0 fizyce

W poprzednim rozdziale znaleźliśmy natężenie pola elektrycznego w punktach bliskich takim rozciągłym naładowanym ciałom, jak na przykład pręty. Technika, którą przy tym stosowaliśmy, była pracochłonna. Dany rozkład ładunku dzieliliśmy na elementy ładunku dq, znajdowaliśmy natęże-



**Rys. 23.1.** Wektory natężenia pola elektrycznego i linie pola elektrycznego przenikają wyimaginowaną sferyczną powierzchnię Gaussa, która zawiera cząstkę o ładunku +Q



**Rys. 23.2.** W tym przypadku cząstka obejmowana przez powierzchnię Gaussa ma ładunek +2Q



**Rys. 23.3.** Czy potrafisz powiedzieć, jaki ładunek jest obejmowany przez powierzchnię Gaussa w tym przypadku?

nie pola elektrycznego d $\vec{E}$  pochodzące od tego elementu i rozkładaliśmy ten wektor na składowe. Następnie sprawdzaliśmy, czy odpowiednie składowe pochodzące od wszystkich elementów ładunku ostatecznie się kasują, czy dodają. Wreszcie sumowaliśmy te dodające się składowe, całkując je po wszystkich elementach ładunku. Po drodze zmienialiśmy jednocześnie sposób zapisu tej całki.

Jednym z podstawowych celów fizyki jest znajdowanie prostych sposobów rozwiązywania takich pracochłonnych zadań. Jednym z głównych narzędzi służących do realizacji tego celu jest korzystanie z symetrii. W tym rozdziale omówimy piękny związek pomiędzy ładunkiem i natężeniem pola elektrycznego. W pewnych sytuacjach o dużej symetrii pozwala nam on znaleźć natężenie pola elektrycznego wytwarzanego przez rozciągłe naładowane ciała przez wykonanie kilku prostych obliczeń. Związek ten nazywany **prawem Gaussa** został wyprowadzony przez niemieckiego matematyka i fizyka Carla Friedricha Gaussa (1777–1855).

Przyjrzyjmy się najpierw pewnym prostym przykładom, które oddadzą ducha prawa Gaussa. Na rysunku 23.1 przedstawiono cząstkę o ładunku +Q, która jest otoczona przez wyimaginowaną koncentryczną sferę. W punktach znajdujących się na tej sferze (nazywanej *powierzchnią Gaussa*) wektory natężenia pola elektrycznego przyjmują umiarkowane wartości (dane wzorem  $E = kQ/r^2$ ) i są skierowane radialnie od cząstki (ponieważ jest ona naładowana dodatnio). Linie pola elektrycznego są także skierowane na zewnątrz i mają umiarkowaną gęstość (która jest, przypomnijmy, związana z wartością natężenia pola). Mówimy, że wektory natężenia pola i linie pola *przenikają* przez powierzchnię.

Rysunek 23.2 jest podobny do poprzedniego poza tym, że cząstka znajdująca się wewnątrz powierzchni ma ładunek +2Q. Ponieważ ładunek zawarty wewnątrz powierzchni jest teraz dwa razy większy, natężenie pola elektrycznego przenikającego na zewnątrz przez (taką samą) powierzchnię Gaussa jest teraz dwa razy większe niż to pokazane na rysunku 23.1, a gęstość linii pola jest także dwa razy większa. Treść tego zdania odpowiada w skrócie prawu Gaussa.

Prawo Gaussa określa związek między natężeniem pola elektrycznego w punktach na (zamkniętej) powierzchni Gaussa i całkowitym ładunkiem objętym tą powierzchnią.

Sprawdźmy to teraz na trzecim przykładzie cząstki, znajdującej się w środku takiej samej sferycznej powierzchni (*sfery Gaussa* lub bardziej chwytliwie *Sfery G*), jak to jest przedstawione na rysunku 23.3. Jaka jest wartość i znak ładunku objętego tą sferą? Przenikanie sfery w kierunku środka oznacza natychmiast, że ładunek musi być ujemny. Z faktu, że gęstość linii pola jest dwa razy mniejsza niż na rysunku 23.1 wynika także, że ładunek musi być równy 0,5Q. (Korzystanie z prawa Gaussa jest podobne do oceny zawartości pudełka z prezentem na podstawie papieru, w który jest ono opakowane).

Zagadnienia, z którymi spotkamy się w tym rozdziale, są dwojakiego rodzaju. Czasami znamy ładunek i stosujemy prawo Gaussa do wyznaczenia natężenia pola elektrycznego w danym punkcie. Czasem znamy nateżenie pola elektrycznego na powierzchni Gaussa i korzystamy z prawa Gaussa, aby znaleźć ładunek objęty ta powierzchnia. Nie możemy jednak tego wszystkiego zrobić tak jak do tej pory, a wiec porównując po prostu na rysunku gestości linii pola elektrycznego. Potrzebujemy ilościowej metody określania, "ile" pola elektrycznego przenika przez powierzchnię. Miara tej ilości jest strumień pola elektrycznego.

# Strumień pola elektrycznego

elementu

*Płaska powierzchnia, jednorodne pole.* Zaczynamy od płaszczyzny o polu powierzchni S znajdującej się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ . Na rysunku 23.4a przedstawiono jeden z wektorów nateżenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  przenikający przez mały kwadratowy element tej płaszczyzny o polu powierzchni  $\Delta S$  (gdzie  $\Delta$  oznacza, że element jest "mały"). W istocie tylko składowa x natężenia pola (o wartości  $E_x = E \cos \theta$ , jak to widać na rysunku 23.4b) przenika przez ten kwadrat. Składowa y ślizga się jedynie po jego powierzchni (wcale go nie przenikając) i nie ma znaczenia dla prawa Gaussa. Wielkość pola elektrycznego przenikającego przez element powierzchni definiujemy jako strumień elektryczny  $\Delta \Phi$ przenikający przez ta powierzchnie:

$$\Delta \Phi = (E\cos\theta)\Delta S.$$

Istnieje także inny sposób zapisania prawej strony tego równania tak, aby zachować tylko składową natężenia pola przenikającego przez powierzchnie. Zdefiniujmy wektor powierzchni  $\Delta \vec{S}$ , który jest prostopadły do danego elementu płaszczyzny i ma wartość równa polu jego powierzchni  $\Delta S$ (rys. 23.4c). Możemy wtedy napisać

$$\Delta \Phi = \vec{E} \cdot \Delta \vec{S},$$

a iloczyn skalarny automatycznie zachowa składowa natężenia  $\vec{E}$ , która jest równoległa do  $\Delta \vec{S}$  a zatem przenika przez powierzchnie elementu płaszczyzny.

Aby znaleźć całkowity strumień przenikający przez powierzchnię na rysunku 23.4, sumujemy strumienie przenikające przez każdy element na tej powierzchni

$$\Phi = \sum \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}. \tag{23.1}$$

Jednak ponieważ nie chcemy dodawać setek (lub więcej) wartości strumienia, zamieniamy na elementy powierzchni o polu powierzchni dS. Całkowity strumień jest wtedy równy

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{(całkowity strumień).} \quad (23.2)$$
  
**Rys. 23.4.** a) Wektor natężenia pola elektrycznego przenika mały  
kwadratowy element płaskiej powierzchni. b) Tylko składowa *x* tego  
wektora przenika element powierzchni, składowa *y* ślizga się po nim.  
c) Wektor powierzchni tego elementu jest prostopadły do elementu  
powierzchni, a jego wartość jest równa polu powierzchni danego  
elementu

a)

. b)



leży na powierzchni: strumień zero

**Rys. 23.5.** Powierzchnia Gaussa dowolnego kształtu, znajdująca się w polu elektrycznym. Powierzchnia jest podzielona na małe kwadraty o polu powierzchni  $\Delta S$ . Pokazano wektory natężenia pola  $\vec{E}$ i wektory powierzchni  $\Delta \vec{S}$  dla trzech przykładowych kwadratów oznaczonych 1, 2 i 3 Teraz możemy znaleźć całkowity strumień, całkując iloczyn skalarny po całej powierzchni.

*Iloczyn skalarny.* Iloczyn skalarny, który całkujemy po całej powierzchni, możemy znaleźć, używając do zapisu obu wektorów notacji wektorowej. Przykładowo na rysunku 23.4  $d\vec{S} = dS\hat{i}$ , a natężenie  $\vec{E}$  może być równe powiedzmy ( $4\hat{i} + 4\hat{j}$ ) N/C. Możemy też obliczyć iloczyn skalarny, korzystając z wartości i kątów:  $E \cos \theta \, dS$ . Gdy pole elektryczne jest jednorodne, a powierzchnia płaska, iloczyn  $E \cos \theta$  można wyłączyć przed znak całki. Pozostała całka  $\int dS$  jest sumą pól wszystkich elementów powierzchni, równą po prostu całkowitej powierzchni *S*. Tak więc całkowity strumień w tej prostej sytuacji wynosi

$$\oint = (E \cos \theta) S$$
 (jednorodne pole, płaska powierzchnia). (23.3)

*Powierzchnia zamknięta.* Aby użyć prawa Gaussa do powiązania strumienia i ładunku, potrzebujemy powierzchni zamkniętej. Skorzystajmy z powierzchni zamkniętej przedstawionej na rysunku 23.5, która znajduje się w niejednorodnym polu elektrycznym. (Nie przejmuj się. Zadania domowe dotyczą mniej skomplikowanych powierzchni). Tak jak poprzednio, rozważymy najpierw strumień przenikający małe kwadraty. Teraz jednak interesują nas nie tylko składowe natężenia przenikające przez tę powierzchnię, ale także to, czy pole wpływa, czy też wypływa z wnętrza objętości otoczonej przez tę powierzchnię (tak jak to pokazano na rysunkach od 23.1 do 23.3).

*Kierunki.* Aby kontrolować kierunek przenikania, ponownie skorzystamy z wektora powierzchni  $\Delta \vec{S}$ , który jest prostopadły do elementu powierzchni. Tym razem jednak kierujemy go zawsze na zewnątrz danej powierzchni. Następnie, jeśli wektor natężenia przenika ją na zewnątrz, to przyjmujemy, że ma kierunek zgodny z kierunkiem wektora powierzchni. Wtedy kąt  $\theta = 0$ , a  $\cos \theta = 1$ . Iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$  jest dodatni i taki sam znak ma strumień. Odwrotnie, jeśli natężenie pola jest skierowane do wnętrza objętości otoczonej przez tę powierzchnię, to kąt  $\theta = 180^{\circ}$ , a  $\cos \theta = -1$ . W takim przypadku iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$  jest ujemny i taki sam znak ma strumień. Jeśli wektor natężenia pola elektrycznego jest styczny do powierzchni (nie przenika jej), to iloczyn skalarny jest równy zeru (ponieważ  $\theta = 90^{\circ}$ ), a  $\cos \theta = 0$  i tak samo znika strumień. Na rysunku 23.5 przedstawiono kilka ogólnych przykładów, a podsumowanie naszych rozważań znajduje się poniżej.

Pole przenikające do wnętrza objętości otoczonej przez powierzchnię oznacza ujemny strumień. Pole wypływające z wnętrza objętości otoczonej przez powierzchnię odpowiada strumieniowi dodatniemu. Wektor natężenia styczny do powierzchni to strumień równy zeru.

*Strumień wypadkowy.* W zasadzie, aby znaleźć **wypadkowy strumień** przez powierzchnię przedstawioną na rysunku 23.5, wystarczy znaleźć strumienie przenikające każdy pokazany kwadrat, a następnie zsumować te wyniki (uwzględniając znaki algebraiczne). Jednak nie jest naszym celem wykonywanie tak ogromnej pracy. Zamiast tego zmniejszamy powierzchnie

kwadratów, zastępując je ostatecznie elementami powierzchni o wektorach powierzchni d $\vec{S}$ , a następnie całkujemy:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad \text{(wypadkowy strumień).} \tag{23.4}$$

Kółeczko na całce oznacza, że aby uzyskać *wypadkowy* strumień przenikający przez powierzchnię (tak jak na rysunku 23.5, strumień może wpływać z jednej strony i wypływać z drugiej), całkowanie musimy wykonać po całej zamkniętej powierzchni. Pamiętaj, że chcemy wyznaczyć ten wypadkowy strumień, ponieważ z nim właśnie prawo Gaussa wiąże ładunek zawarty wewnątrz omawianej powierzchni. (O prawie Gaussa wkrótce). Zauważ, że strumień jest skalarem (zwróć uwagę, że mówimy o wektorach związanych z polem, ale strumień jest *ilością* przenikającego natężenia pola a nie samym wektorem tego natężenia). Jednostką strumienia w układzie SI jest niuton razy metr kwadratowy na kulomb (N  $\cdot$  m<sup>2</sup>/C).

# Sprawdzian 1

Powierzchnia Gaussa, w kształcie powierzchni sześcianu o polu powierzchni ściany *S*, przedstawiona na rysunku znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , które jest skierowane w dodatnim kierunku osi *z*. Wyraź przez *E* i *S* strumień pola elektrycznego przenikający przez: a) przednią ścianę (leżącą w płaszczyźnie *xy*), b) tylną ścianę, c) górną ścianę, d) powierzchnię całego sześcianu.



# Przykład 23.01. Strumień przenikający walec w jednorodnym polu

Na rysunku 23.6 przedstawiono powierzchnię Gaussa w postaci powierzchni walca o promieniu R (walca G), umieszczonego w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , przy czym oś walca jest równoległa do kierunku natężenia pola. Czemu jest równy strumień  $\Phi$  pola elektrycznego, przenikający przez tę zamkniętą powierzchnię?

# **PODSTAWOWE FAKTY**

Strumień elektryczny przez powierzchnię możemy znaleźć przez scałkowanie iloczynu skalarnego  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  po powierzchni Gaussa. Nie możemy jednak dokonać tego, obliczając pojedynczą całkę. Musimy być bardziej sprytni, dzieląc powierzchnię walca na trzy części, dla których obliczenie całki staje się możliwe.

**Obliczenia:** Wypadkowy strumień przedstawiamy jako sumę trzech całek: po lewym denku *a*, po powierzchni

bocznej walca *b* i po prawym denku *c*:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{a} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{b} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{c} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$
(23.5)

Wybierzmy element powierzchni na lewym denku. Wektor powierzchni d $\vec{S}$  musi być prostopadły do tego elementu i skierowany na zewnątrz walca. Na rysunku 23.6 oznacza to, że kąt między wektorem powierzchni





a wektorem natężenia pola elektrycznego wynosi 180°. Zauważmy też, że wartość E natężenia pola na tym denku jest stała i można ją wyłączyć przed znak całki. Wynika stąd, że strumień przenikający przez lewe denko wynosi

$$\int_{a} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 180^\circ) dS = -E \int dS = -ES$$

gdzie  $\int dS$  jest polem powierzchni denka  $S = \pi R^2$ . Podobnie dla prawego denka, gdzie dla wszystkich punktów  $\theta = 0^\circ$ , mamy

$$\int_{C} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 0^\circ) dS = ES.$$

Na koniec, dla powierzchni bocznej walca, gdzie we wszystkich punktach kąt  $\theta = 90^\circ$ , mamy:

$$\int_{b} \vec{S} \cdot d\vec{S} = \int E(\cos 90^{\circ}) dS = 0.$$

Podstawiając te wyniki do wzoru (23.5), otrzymujemy ostatecznie

$$\Phi = -ES + 0 + ES = 0 \qquad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

Wypadkowy strumień równy jest zeru, ponieważ wszystkie linie reprezentujące pole elektryczne całkowicie przechodzą przez powierzchnię Gaussa, wchodząc przez lewe denko i wychodząc przez prawe.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# Przykład 23.02. Strumień przenikający walec w niejednorodnym polu

*Niejednorodne* pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E} = 3x\hat{i}+4\hat{j}$  przenika przez sześcienną powierzchnię Gaussa przedstawioną na rysunku 23.7a. (Wartość natężenia *E* jest wyrażone w niutonach na kulomb, a *x* w metrach). Oblicz strumień elektryczny przenikający przez prawą ścianę, lewą ścianę i górną ścianę sześcianu. (Pozostałe ściany rozważymy w innym przykładzie).

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Strumień elektryczny  $\Phi$  przez powierzchnię możemy obliczyć, całkując iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  po każdej ze ścian.

**Prawa ściana:** Wektor powierzchni  $\vec{S}$  jest zawsze prostopadły do powierzchni i skierowany na zewnątrz powierzchni Gaussa. Stąd wektor d $\vec{S}$  dla każdego elementu powierzchni na prawej ścianie sześcianu musi być skierowany w kierunku dodatnim osi x. Przykład takiego elementu pokazany jest na rysunkach 23.7b i 23.7c, ale identyczny wektor byłby związany z dowolnym elementem powierzchni na tej ścianie. Najwygodniej zapisać to, używając notacji wektorowej

$$dS = dS\hat{i}.$$

Ze wzoru (23.4) strumień  $\varPhi_{\rm p}$  przenikający przez prawą ścianę wynosi więc

$$\Phi_{p} = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int (3x\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (dS\hat{i})$$
$$= \int [(3x) \cdot (dS)\hat{i} \cdot \hat{i} + (4)(dS)\hat{j} \cdot \hat{i}]$$
$$= \int (3xdS + 0) = 3\int x \, dS.$$

Aby obliczyć całkę po prawej ścianie, skorzystajmy z faktu, że na całej ścianie x ma jednakową wartość x = 3 m. Oznacza to, że możemy tę stałą wartość podstawić za x. Może być to nieco mylące, gdyż przejściu z lewej ściany na prawą towarzyszy odpowiednia zmiana x. Jednak ponieważ prawa ściana sześcianu jest prostopadła do osi x, każdy punkt na jej powierzchni ma tę samą współrzędną x. (Współrzędne y i z nie są dla naszej całki istotne). Otrzymamy zatem

$$\Phi_{\rm p} = 3\int 3\,\mathrm{d}S = 9\int\mathrm{d}S.$$

Całka  $\int dS$  daje nam po prostu pole powierzchni  $S = 4 \text{ m}^2$  dla prawej ściany i ostatecznie

 $\label{eq:phi} \varPhi_p = (9 \ \text{N/C})(4 \ \text{m}^2) = 36 \ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C} \quad (\text{odpowied}\acute{z}).$ 

**Lewa ściana:** Procedura obliczania strumienia przenikającego przez lewą ścianę jest taka sama, jak dla prawej ściany. Jednak dwa czynniki ulegają zmianie. 1) Wektor powierzchni  $d\vec{S}$  jest skierowany w kierunku ujemnym osi x i stąd  $d\vec{S} = -dS\hat{i}$  (rys. 23.7d). 2) Na lewej ścianie mamy x = 1 m. Po uwzględnieniu tych dwóch zmian strumień  $\Phi_1$  przez lewą ścianę wynosi

 $\Phi_1 = -12 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ (odpowiedź).

**Górna ściana:** Wektor powierzchni  $d\vec{S}$  jest skierowany w dodatnim kierunku osi y i stąd  $d\vec{S} = dS\hat{j}$  (patrz rys. 23.7e). Strumień  $\Phi_g$  przenikający przez górną ściane wynosi wiec



Rys. 23.7. a) Powierzchnia Gaussa w postaci powierzchni sześcianu o jednej krawędzi na osi x znajduje się w niejednorodnym polu elektrycznym, którego natężenie zależy od x. b) Z każdym elementem powierzchni wiążemy wektor skierowany na zewnątrz, który jest prostopadły do tej powierzchni, c) Ściana po prawej stronie: składowa x natężenia pola przenika powierzchnię, wytwarzając strumień dodatni (skierowany na zewnątrz). Składowa y nateżenia pola nie przenika powierzchni sześcianu i nie daje wkładu do strumienia. d) Ściana po lewej stronie: składowa x natężenia pola przenika powierzchnię, wytwarzając strumień ujemny (skierowany do środka). e) Górna ściana: składowa y natężenia pola przenika powierzchnię, wytwarzając strumień dodatni (skierowany na zewnątrz)

# **23.2.** PRAWO GAUSSA

# Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **23.09** zastosować prawo Gaussa do powiązania wypadkowego strumienia  $\Phi$  przenikającego przez powierzchnię zamkniętą z wypadkowym ładunkiem  $q_{\rm wewn}$  otoczonym tą powierzchnią;
- 23.10 określić, w jaki sposób algebraiczny znak wypadkowego ładunku zawartego wewnątrz powierzchni Gaussa wiąże się z wypadkowym strumieniem elektrycznym przenikającym tę powierzchnię;

#### Podstawowe fakty.

• Prawo Gaussa opisuje związek wypadkowego strumienia elektrycznego  $\Phi$  przenikającego przez zamkniętą powierzchnię z wypadkowym ładunkiem  $q_{\rm wewn}$ , otoczonym tą powierzchnią:

 $\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}}$  (prawo Gaussa).

- 23.11 zauważyć, że ładunek znajdujący się poza powierzchnią Gaussa nie daje żadnego wkładu do wypadkowego strumienia elektrycznego przenikającego tę zamkniętą powierzchnię;
- 23.12 wyprowadzić przy użyciu prawa Gaussa wzór na wartość natężenia pola elektrycznego naładowanej cząstki;
- 23.13 zauważyć, że stosując prawo Gaussa dla naładowanej cząstki lub jednorodnie naładowanej kuli, wygodnie jest zastosować powierzchnię Gaussa w kształcie koncentrycznej sfery.

 Prawo Gaussa może być także zapisane przy użyciu natężenia pola elektrycznego przenikającego przez powierzchnię Gaussa:

 $\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{wewn}}$  (prawo Gaussa).

# Prawo Gaussa

Prawo Gaussa opisuje związek między wypadkowym strumieniem  $\Phi$  pola elektrycznego, przenikającym przez zamkniętą powierzchnię (powierzchnię Gaussa) i *wypadkowym* ładunkiem  $q_{\text{wewn}}$ , zawartym *wewnątrz* objętości otoczonej tą powierzchnią. Zgodnie z tym prawem

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}}$$
 (prawo Gaussa). (23.6)

Po podstawieniu do powyższego równania wzoru (23.4) definiującego strumień, prawo Gaussa można także zapisać w postaci

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{wewn}}$$
 (prawo Gaussa). (23.7)

Wzory (23.6) i (23.7) są słuszne tylko wtedy, gdy ładunek znajduje się w próżni lub (co jest praktycznie tym samym) w powietrzu. W rozdziale 25 zmodyfikujemy prawo Gaussa, aby uwzględnić sytuacje, gdy rozważamy takie materiały, jak: mika, olej czy szkło.

We wzorach (23.6) i (23.7) ładunek  $q_{\text{wewn}}$  jest algebraiczną sumą wszystkich dodatnich i ujemnych ładunków zawartych wewnątrz objętości otoczonej daną powierzchnią i może być dodatni, ujemny lub zerowy. Zamiast używać tylko bezwzględnej wartości ładunku, uwzględniamy także jego znak, ponieważ ten znak zawiera istotną informację o wypadkowym strumieniu przenikającym przez powierzchnię Gaussa. Jeśli ładunek  $q_{\text{wewn}}$  jest dodatni, to przeważa strumień *na zewnątrz*; jeśli ładunek  $q_{\text{wewn}}$  jest ujemny, to przeważa strumień *do wewnątrz*.

Ładunek znajdujący się na zewnątrz powierzchni nie jest włączony do członu  $q_{\text{wewn}}$  w prawie Gaussa bez względu na to jak jest duży lub jak blisko się znajduje. Dokładna postać rozkładu, czyli położenie ładunków wewnątrz powierzchni Gaussa, także nie odgrywa roli; istotne po prawej stronie wzorów (23.6) i (23.7) są tylko wartość i znak wypadkowego ładunku, otoczonego powierzchnią Gaussa. Wielkość  $\vec{E}$  po lewej stronie

wzoru (23.7) jest jednak natężeniem pola elektrycznego, wytworzonego przez *wszystkie* ładunki zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz powierzchni Gaussa. Może się to wydawać pewną niekonsekwencją. Przypomnij sobie jednak, że pole elektryczne wytworzone przez ładunki na zewnątrz powierzchni Gaussa daje zerowy wypadkowy strumień przenikający *przez* tę powierzchnię, gdyż tyle samo linii pola wytworzonego przez te ładunki pada na powierzchnię, co ją opuszcza.

Zastosujemy te idee do rysunku 23.8, na którym przedstawiono linie pola elektrycznego wytworzonego przez dwa ładunki punktowe o jednakowych wartościach, ale o przeciwnych znakach. Przedstawiono także w przekroju cztery powierzchnie Gaussa. Rozważmy po kolei każdą z nich.

- **Powierzchnia**  $S_1$ . We wszystkich punktach na tej powierzchni linie pola elektrycznego wychodzą na zewnątrz. Stąd strumień pola elektrycznego przenikający przez tę powierzchnię jest dodatni, dodatni jest także całkowity ładunek znajdujący się wewnątrz powierzchni, tak jak wymaga tego prawo Gaussa. (Zgodnie ze wzorem (23.6), jeśli strumień  $\Phi$ jest dodatni, to taki musi być też ładunek  $q_{wewn}$ ).
- *Powierzchnia* S<sub>2</sub>. We wszystkich punktach na tej powierzchni linie pola elektrycznego wchodzą do wnętrza. Stąd strumień pola elektrycznego jest ujemny i taki jest też całkowity ładunek wewnątrz powierzchni, jak wymaga tego prawo Gaussa.
- **Powierzchnia**  $S_3$ . Ta powierzchnia nie otacza żadnego ładunku i stąd  $q_{\text{wewn}} = 0$ . Prawo Gaussa (wzór (23.6)) wymaga, aby wypadkowy strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię był równy zeru. Jest tak rzeczywiście, bo wszystkie linie pola przechodzą całkowicie przez powierzchnię, wchodząc u góry i wychodząc na dole.
- *Powierzchnia S*<sub>4</sub>.Wypadkowy ładunek wewnątrz tej powierzchni jest równy zeru, bo otaczane ładunki, dodatni i ujemny, mają jednakowe wartości. Prawo Gaussa wymaga, aby wypadkowy strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię był równy zeru. Jest tak rzeczywiście, bo tyle samo linii opuszcza powierzchnię *S*<sub>4</sub>, co na nią pada.

Co się stanie, gdy w pobliżu powierzchni  $S_4$  z rysunku 23.8 umieścimy na zewnątrz niej ogromny ładunek Q? Rozkład linii pola z pewnością się zmieni, ale wypadkowy strumień dla każdej z czterech powierzchni Gaussa nie ulegnie zmianie. Jest to zrozumiałe, bo linie pola związane z dodanym ładunkiem Q będą całkowicie przechodziły przez każdą z czterech powierzchni Gaussa, nie dając wkładu do wypadkowego strumienia przez każdą z nich. Wartość Q nie jest uwzględniona w prawie Gaussa, gdyż Qleży na zewnątrz wszystkich czterech rozważanych powierzchni Gaussa.



**Rys. 23.8.** Dwa ładunki punktowe o jednakowej wartości, ale o przeciwnym znaku i linie pola reprezentujące wypadkowe natężenie wytworzonego przez te ładunki pola elektrycznego. Pokazano przekrój czterech powierzchni Gaussa. Powierzchnia  $S_1$  otacza ładunek dodatni. Powierzchnia  $S_2$  otacza ładunek ujemny. Powierzchnia  $S_3$  nie otacza żadnego ładunku. Powierzchnia  $S_4$  otacza obydwa ładunki i całkowity ładunek jest równy zeru

# Sprawdzian 2

Na rysunku przedstawiono trzy sytuacje, w których sześcienna powierzchnia Gaussa znajduje się w polu elektrycznym. Strzałki i liczby wskazują kierunki linii pola i wartości (w  $N \cdot m^2/C$ ) strumienia, przenikającego przez każdą ze ścian każdego sześcianu. (Jaśniejsze strzałki dotyczą ścian niewidocznych). W których sytuacjach sześcian otacza: a) dodatni ładunek wypadkowy, b) ujemny ładunek wypadkowy, c) zerowy ładunek wypadkowy?





**Rys. 23.9.** Sferyczna powierzchnia Gaussa, w której środku znajduje się ładunek punktowy *q* 

# Prawo Gaussa a prawo Coulomba

Jedną z sytuacji, w których możemy zastosować prawo Gaussa, jest wyznaczanie pola elektrycznego naładowanej cząstki. Pole to ma symetrię sferyczną (natężenie pola zależy tylko od odległości r od cząstki, a nie od kierunku). Tak więc, aby skorzystać z tej symetrii, otaczamy cząstkę sferyczną powierzchnią Gaussa o środku w punkcie, w którym znajduje się cząstka, tak jak to przedstawiono na rysunku 23.9 w przypadku cząstki o dodatnim ładunku q. W takim przypadku natężenie pola elektrycznego ma taką samą wartość E w każdym punkcie na sferze (wszystkie punkty znajdują się w tej samej odległości od naładowanej cząstki). Własność ta uprości całkowanie.

Stosujemy tę samą procedurę co poprzednio. Wybieramy nieskończenie mały obszar na sferze. Rysujemy odpowiadający mu wektor powierzchni d $\vec{S}$ , który jest prostopadły do tego elementu i skierowany na zewnątrz. Z własności symetrii wynika, że w każdym punkcie natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  również jest prostopadłe do powierzchni sfery i skierowane na zewnątrz. Kąt  $\theta$  między  $\vec{E}$  i d $\vec{S}$  jest równy zeru, a więc prawo Gaussa możemy zapisać w postaci

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \oint E dS = q_{\text{wewn}},$$
 (23.8)

gdzie  $q_{\text{wewn}} = q$ . Ponieważ natężenie pola *E* ma taką samą wartość na całej powierzchni sferycznej, więc wartość natężenia *E* można wyłączyć przed znak całki

$$\varepsilon_0 E \oint \mathrm{d}S = q. \tag{23.9}$$

Pozostała całka jest teraz tylko sumą pól powierzchni elementów sfery i jest równa jej polu powierzchni  $4\pi r^2$ . Po podstawieniu tej wartości otrzymujemy

 $\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q$ 

lub

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$
 (23.10)

Jest to dokładnie wzór (22.3), który otrzymaliśmy, używając prawa Coulomba.

# Sprawdzian 3

Przez sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu *r* otaczającą odosobnioną cząstkę naładowaną przenika wypadkowy strumień elektryczny o wartości  $\Phi_i$ . Załóżmy, że zamieniliśmy otaczającą powierzchnię Gaussa na: a) większą sferę, b) powierzchnię sześcianu o długości krawędzi równej *r*, c) powierzchnię sześcianu o długości krawędzi równej z c) powierzchnię sześcianu o długości krawędzi równej z c) powierzchnię sześcianu o długości krawędzi równej z c) powierzchnię sześcianu

# Przykład 23.03. Wykorzystanie prawa Gaussa do wyznaczenia natężenia pola elektrycznego

Na rysunku 23.10a przedstawiono w przekroju plastikową powłokę kulistą o promieniu R = 10 cm naładowaną jednorodnie ładunkiem Q = -16e. W środku tej powłoki znajduje się cząstka o ładunku q = +5e. Wyznacz natężenie pola elektrycznego (jego wartość i kierunek): a) w punkcie  $P_1$  w odległości  $r_1 = 6$  cm od środka i b) w punkcie  $P_2$  w odległości  $r_2 = 12$  cm od środka tej powłoki.



**Rys. 23.10.** a) Naładowana plastikowa powłoka kulista otacza naładowaną cząstkę. b) Aby znaleźć natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P_1$ , wyznacz sferę Gaussa, na której znajdzie się ten punkt. Natężenie pola elektrycznego przenika ją na zewnątrz. Wektor powierzchni skierowany jest na zewnątrz. c) Punkt  $P_2$  znajduje się na sferze Gaussa,  $\vec{E}$  jest skierowane do środka, d $\vec{S}$  w dalszym ciągu jest skierowane na zewnątrz

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Ponieważ sytuacja przedstawiona na rysunku 23.10a ma symetrię sferyczną, więc zgodnie ze wzorem (23.7) do wyznaczenia natężenia pola możemy zastosować prawo Gaussa z powierzchnią w postaci sfery o środku w punkcie, w którym znajduje się ładunek (i który jest także środkiem tej powłoki). 2) Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego w punkcie, umieszczamy ten punkt na powierzchni Gaussa (w taki sposób natężenie pola  $\vec{E}$ , którego poszukujemy, będzie natężeniem pola  $\vec{E}$  w iloczynie skalarnym wewnątrz całki w prawie Gaussa). 3) Prawo Gaussa jest związkiem wypadkowego strumienia elektrycznego przenikającego zamkniętą powierzchnię z wypadkowym ładunkiem znajdującym się wewnątrz tej powierzchni.

**Obliczenia:** Aby znaleźć natężenie pola w punkcie  $P_1$ , konstruujemy sferyczną powierzchnię Gaussa, na której znajduje się ten punkt, a więc sferę o promieniu  $r_1$ . Ponieważ ładunek obejmowany przez tę sferę Gaussa jest dodatni, więc strumień elektryczny przenikający przez nią musi być też dodatni, a więc skierowany na zewnątrz. Zatem wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  także musi być skierowany na zewnątrz i ze względu na symetrię sferyczną musi być skierowany **radialnie** na zewnątrz, tak jak to przedstawiono na rysunku 23.10b. Na tym rysunku nie pokazano plastikowej powłoki, ponieważ powierzchnia Gaussa jej nie obejmuje.

Rozważmy element powierzchni znajdujący się na sferze w punkcie  $P_1$ . Odpowiadający mu wektor powierzchni d $\vec{S}$  jest skierowany radialnie na zewnątrz (zawsze musi być skierowany na zewnątrz powierzchni Gaussa). Tak więc kąt  $\theta$  pomiędzy wektorem  $\vec{E}$  a wektorem d $\vec{S}$  równy jest zeru. Możemy teraz przepisać lewą stronę wzoru (23.7) (prawa Gaussa) w postaci

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \oint E \cos 0 \, dS$$
  
=  $\varepsilon_0 \oint E \, dS$   
=  $\varepsilon_0 E \oint dS$ ,

gdzie w ostatnim kroku natężenie pola elektrycznego E wyłączamy przed znak całki, ponieważ jest ono takie samo we wszystkich punktach na powierzchni Gaussa czyli jest stałą. Pozostała całka jest po prostu sumą pól wszystkich elementów powierzchni na sferze. Wiemy już jednak, że powierzchnia sfery wynosi  $4\pi r^2$ . Po pod-stawieniu tego wyniku otrzymujemy wzór (23.7) w postaci

$$\varepsilon_0 E 4\pi r^2 = q_{\text{wewn}}.$$

Jedynym ładunkiem obejmowanym przez powierzchnię Gaussa, na której znajduje się punkt  $P_1$ , jest ładunek cząstki. Rozwiązując powyższe równanie względem *E* i podstawiając  $q_{\text{wewn}} = 5e$  oraz  $r = r_1 = 6 \cdot 10^{-2}$  m, otrzymujemy wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P_1$ 

$$E = \frac{q_{\text{wewn}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
  
=  $\frac{5(1,6\cdot10^{-19} \text{ C})}{4\pi(8,85\cdot10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0,06 \text{ m})^2}$   
=  $2\cdot10^{-6} \text{ N/C}$  (odpowiedź).

Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego w punkcie  $P_2$ , postępujemy podobnie, tworząc sferę Gaussa z punktem  $P_2$  na powierzchni. Tym razem jednak wypadkowy ładunek objęty przez tę sferę wynosi  $q_{\text{wewn}} =$ q + Q = 5e + (-16e) = -11e. Ponieważ ten ładunek jest ujemny, więc wektory natężenia pola elektrycznego na tej sferze skierowane są do wewnątrz (rys. 23.10c). Kąt  $\theta$  pomiędzy wektorami  $\vec{E}$  i d $\vec{S}$  jest równy 180°, a ich iloczyn skalarny wynosi  $E(\cos 180^\circ)dS = -EdS$ . Korzystając teraz z prawa Gaussa i podstawiając r =  $r_2 = 12 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ , a także nową wartość  $q_{\text{wewn}}$ , wyznaczamy wartość natężenia pola elektrycznego

$$E = \frac{-q_{\text{wewn}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
  
=  $\frac{-[-11(1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})]}{4\pi(8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(0.12 \text{ m})^2}$   
= 1.1 \cdot 10^{-6} N/C (odpowiedź).

Zwróć uwagę, jak bardzo skomplikowałyby się rachunki, gdybyśmy zamiast korzystać z symetrii sferycznej i używać sfery Gaussa, umieścili punkty  $P_1$  i  $P_2$  na powierzchni sześcianu Gaussa. W takim przypadku kąt  $\theta$  i wartość natężenia pola E zmieniałyby się dramatycznie na powierzchni sześcianu, a obliczenie całki w prawie Gaussa stałoby się bardzo trudne.

#### Przykład 23.04. Wykorzystanie prawa Gaussa do wyznaczenia ładunku wewnątrz powierzchni

Jaki jest wypadkowy ładunek znajdujący się wewnątrz powierzchni Gaussa w postaci sześcianu analizowanego w przykładzie 23.02?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Wypadkowy ładunek zawarty wewnątrz (prawdziwej lub wyimaginowanej) zamkniętej powierzchni jest powiązany z wypadkowym strumieniem pola elektrycznego prawem Gaussa zgodnie ze wzorem (23.6) ( $\varepsilon \Phi = q_{\text{wewn}}$ ).

**Strumień:** Aby skorzystać ze wzoru (23.6), musimy znać strumień przenikający wszystkie sześć ścian sześcianu. Znamy już strumienie przenikające przez prawą ścianę ( $\Phi_p = 36 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ ), lewą ścianę ( $\Phi_1 = -12 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ ) i górną ścianę ( $\Phi_g = 16 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ ). W przypadku dolnej ściany obliczenia przebiegają tak samo jak dla ściany górnej *z wyjątkiem* tego, że wektor powierzchni d $\vec{S}$  dla powierzchni na tej ścianie jest teraz skierowany w dół zgodnie z kierunkiem osi *y* (przypomnij sobie, że wektor ten musi być zawsze skierowany *na zewnątrz powierzchni Gaussa*). Mamy zatem

$$d\vec{S} = -dS\hat{j}$$
 i znajdujemy $\Phi_{\rm d} = -16\,{
m N}\cdot{
m m}^2/{
m C}$ 

Dla ściany przedniej mamy  $d\vec{S} = dS\hat{k}$ , a dla ściany tylnej  $d\vec{S} = -dS\hat{k}$ . Obliczając iloczyn skalarny zadanego natężenia pola elektrycznego  $E = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$  z każdym ze znalezionych wektorów powierzchni dS, otrzymujemy 0. Oznacza to znikanie strumienia przenikającego te powierzchnie. Możemy teraz znaleźć całkowity strumień przenikający przez sześć ścian sześcianu

$$\Phi = (36 - 12 + 16 - 16 + 0 + 0) \,\mathrm{N \cdot m^2/C}$$
  
= 24 N \cdot m^2/C.

*Ładunek wewnątrz powierzchni:* Następnie korzystamy z prawa Gaussa, aby znaleźć ładunek  $q_{\text{wewn}}$  zawarty wewnątrz sześcianu

$$q_{\text{wewn}} = \varepsilon_0 \Phi$$
  
= (8,85 \cdot 10^{-12} C^2 / N \cdot m^2) \cdot 24 N \cdot m^2 / C  
= 2,1 \cdot 10^{-10} C (odpowiedź).

Tak więc analizowany sześcian zawiera *wypadkowy* ładunek dodatni.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **23.3.** IZOLOWANY PRZEWODNIK NAŁADOWANY

# Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

**23.14** zastosować związek pomiędzy powierzchniową gęstością ładunku  $\sigma$  a powierzchnią, na której równomiernie rozłożony jest ładunek;

23.15 zauważyć, że cały nadmiarowy ładunek (dodatni lub ujemny) znajdujący się w izolowanym przewodniku rozkłada się na jego powierzchni;

23.16 określić wartość natężenia pola elektrycznego wewnątrz izolowanego przewodnika;

23.17 dla przewodnika z wnęką zawierającą naładowane ciało

#### Podstawowe fakty

• Ładunek nadmiarowy na izolowanym przewodniku jest rozmieszczony całkowicie na jego zewnętrznej powierzchni.

 Natężenie wewnętrznego pola elektrycznego w naładowanym izolowanym przewodniku równe jest zeru. Natężenie zewyznaczyć ładunek zgromadzony na ścianach tej wnęki i na zewnętrznej powierzchni tego przewodnika;

23.18 wyjaśnić, w jaki sposób można użyć prawo Gaussa do znalezienia wartości natężenia pola elektrycznego E w pobliżu izolowanej powierzchni przewodzącej naładowanej jednorodnie o powierzchniowej gęstości ładunku σ;

**23.19** zastosować związek pomiędzy powierzchniową gęstością ładunku  $\sigma$  i natężeniem pola elektrycznego *E* w punktach znajdujących się w pobliżu jednorodnie naładowanej przewodzącej powierzchni oraz określić kierunek tego natężenia.

wnętrznego pola elektrycznego (w pobliżu tego przewodnika) jest skierowane prostopadle do jego powierzchni, a jego wartość zależy od powierzchniowej gęstości ładunku  $\sigma$  i wynosi

 $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$ 

# Izolowany przewodnik naładowany

Prawo Gaussa pozwala udowodnić ważne twierdzenie o izolowanych (odosobnionych) przewodnikach:



Jeśli nadmiarowy ładunek zostaje umieszczony na izolowanym przewodniku, to ten ładunek przesuwa się całkowicie na powierzchnię przewodnika. We wnętrzu przewodnika nie ma żadnego nadmiarowego ładunku.

Fakt ten może wydawać się naturalny, bo ładunki o tym samym znaku odpychają się wzajemnie. Można stąd wywnioskować, że przesuwając się do powierzchni, nadmiarowe ładunki oddalają się od siebie tak daleko, jak to jest tylko możliwe. Odwołamy się do prawa Gaussa, aby sprawdzić poprawność tego rozumowania.

Na rysunku 23.11a przedstawiono w przekroju izolowany kawałek miedzi naładowany ładunkiem q i zawieszony na izolującej nici. Powierzchnię Gaussa umieszczamy wewnątrz powierzchni przewodnika.

Natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika musi być równe zeru. Gdyby tak nie było, to na (swobodne) elektrony przewodnictwa, które zawsze występują w przewodniku, działałyby siły. (W przewodniku płynąłby prąd elektryczny, czyli ładunek przepływałby z miejsca na miejsce). W izolowanym przewodniku nie ma oczywiście takich ciągle płynących prądów i dlatego natężenie pól elektrycznych wewnątrz przewodnika jest zerowe.

(Gdy przewodnik jest ładowany, *występuje* w nim wewnętrzne pole elektryczne. Jednak dodawany ładunek szybko rozmieszcza się w taki sposób, że wypadkowe natężenie pola elektrycznego – wektorowa suma



**Rys. 23.11.** a) Kawałek miedzi o ładunku *q* jest zawieszony na izolującej nici. Powierzchnia Gaussa została wybrana wewnątrz metalu, w pobliżu powierzchni przewodnika. b) Kawałek miedzi ma teraz wewnątrz wnękę. Powierzchnia Gaussa leży wewnątrz metalu, w pobliżu powierzchni wneki natężeń pól elektrycznych, wytworzonych przez wszystkie ładunki, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz przewodnika – jest równe zeru. Wówczas ruch ładunków ustaje, ponieważ siła wypadkowa działająca na każdy ładunek jest równa zeru – ładunki znajdują się wtedy w *równowadze elektrostatycznej*).

Jeśli natężenie  $\vec{E}$  jest równe zeru w każdym punkcie wewnątrz miedzianego przewodnika, to musi być zerowe we wszystkich punktach powierzchni Gaussa, ponieważ ta powierzchnia, chociaż może znajdować się blisko powierzchni przewodnika, z pewnością znajduje się w jego wnętrzu. Oznacza to, że strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa musi być zerowy. Z prawa Gaussa wynika wtedy, że ładunek wypadkowy wewnątrz powierzchni Gaussa musi być także równy zeru. Nadmiarowego ładunku nie ma wewnątrz powierzchni Gaussa, dlatego też musi być na zewnątrz tej powierzchni, co oznacza, że znajduje się on na powierzchni przewodnika.

# Izolowany przewodnik z wnęką

Na rysunku 23.11b przedstawiono ten sam przewodnik wiszący na nici, ale tym razem z wnęką, znajdującą się całkowicie w przewodniku. Uzasadnione wydaje się założenie, że gdy wycinamy elektrycznie obojętny materiał, aby utworzyć wnękę, nie zmieniamy rozkładu ani ładunku, ani pola elektrycznego, istniejącego na rysunku 23.11a. Znów zastosujemy prawo Gaussa, aby przeprowadzić dowód ilościowy.

Narysujmy powierzchnię Gaussa otaczającą wnękę, bliską jej powierzchni, ale znajdującą się wewnątrz przewodzącego ciała. Wewnątrz przewodnika  $\vec{E} = 0$ , a więc strumień elektryczny przez tę nową powierzchnię Gaussa musi być równy zeru. Z prawa Gaussa wynika więc, że wnęka nie może zawierać wypadkowego ładunku. Wnioskujemy, że na ścianach wnęki nie ma wypadkowego ładunku – cały nadmiarowy ładunek pozostaje na zewnętrznej powierzchni przewodnika, tak jak na rysunku 23.11a.

# Usunięcie przewodnika

Załóżmy, że w jakiś magiczny sposób nadmiarowe ładunki mogą zostać "zamrożone" na powierzchni przewodnika, na przykład przez pokrycie ich plastikową powłoką, tak że przewodnik można całkowicie usunąć. Jest to równoważne powiększeniu wnęki z rysunku 23.11b tak, aby wypełniała w całości przewodnik, pozostawiając tylko ładunki. Pole elektryczne nie ulegnie wtedy żadnej zmianie – pozostanie zerowe we wnętrzu cienkiej naładowanej powłoki i nie zmieni się w punktach na zewnątrz powłoki. Wynika stąd, że pole elektryczne jest wytworzone przez ładunki, a nie przez przewodnik. Przewodnik po prostu umożliwia tylko ładunkom zajęcie odpowiedniego położenia.

#### Zewnętrzne pole elektryczne

Wiesz już, że nadmiar ładunku na izolowanym przewodniku przesuwa się całkowicie na powierzchnię przewodnika. Jeśli jednak powierzchnia przewodnika nie jest sferyczna, to ładunek nie rozkłada się równomiernie. Innymi słowy, powierzchniowa gęstość ładunku  $\sigma$  (ładunek przypadający na

jednostkę powierzchni) nie jest stała na powierzchni dowolnego przewodnika niesferycznego. Ta zmienność powoduje, że na ogół bardzo trudno jest wyznaczyć natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunki powierzchniowe.

Korzystając z prawa Gaussa, można jednak łatwo określić natężenie pola elektrycznego tuż przy powierzchni przewodnika. Rozważmy w tym celu na tyle mały wycinek powierzchni, aby można było zaniedbać jakąkolwiek jego krzywiznę, czyli aby można było uważać go za płaski. Wyobraźmy sobie następnie małą walcową powierzchnię Gaussa, zawierającą ten wycinek (rys. 23.12): jedno denko powierzchni znajduje się całkowicie wewnątrz przewodnika, drugie całkowicie na zewnątrz przewodnika, a powierzchnia boczna walca jest prostopadła do powierzchni przewodnika.

Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  na powierzchni przewodnika i tuż nad nią musi być także prostopadłe do tej powierzchni. Gdyby tak nie było, to natężenie pola miałoby składową skierowaną wzdłuż powierzchni przewodnika. Taka składowa prowadziłaby do działania sił na ładunki powierzchniowe, powodując ich ruch. Jednak taki ruch naruszałby nasze milczące założenie, że mamy do czynienia z równowagą elektrostatyczną. Wynika stąd, że natężenie  $\vec{E}$  jest prostopadłe do powierzchni przewodnika.

Zsumujemy obecnie strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa. Strumień przez wewnętrzne denko jest zerowy, bo natężenie pola elektrycznego w przewodniku wynosi zero. Strumień przez boczną powierzchnię walca także znika, bo w części znajdującej się wewnątrz przewodnika nie ma pola elektrycznego, a w części znajdującej się na zewnątrz natężenie pola elektrycznego jest równoległe do elementu powierzchni Gaussa. Nie znika jedynie strumień przenikający przez zewnętrzne denko powierzchni Gaussa, gdzie natężenie  $\vec{E}$  jest prostopadłe do płaszczyzny denka. Zakładamy, że pole powierzchni S denka jest wystarczająco małe, aby wartość natężenia E była na nim stała. Strumień przenikający przez denko wynosi wtedy ES i taki jest wypadkowy strumień  $\Phi$  przez powierzchnię Gaussa.

Ładunek  $q_{\text{wewn}}$  objęty powierzchnią Gaussa znajduje się na powierzchni przewodnika o polu powierzchni S. (Pomyśl o tym cylindrze jak o foremce do ciastek). Jeśli  $\sigma$  jest ładunkiem przypadającym na jednostkę powierzchni, to  $q_{\text{wewn}}$  wynosi  $\sigma S$ . Po podstawieniu  $\sigma S$  za  $q_{\text{wewn}}$ i ES za  $\Phi$  w równaniu (23.6) prawo Gaussa przybierze postać

$$\varepsilon_0 E S = \sigma S,$$

z której otrzymujemy

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$
 (powierzchnia przewodnika). (23.11)

Wartość natężenia pola elektrycznego tuż przy powierzchni przewodnika jest więc proporcjonalna do powierzchniowej gęstości ładunku w tym miejscu przewodnika. Jeśli ładunek na przewodniku jest dodatni, to natężenie pola elektrycznego jest skierowane na zewnątrz przewodnika, tak jak na rysunku 23.10. Jeśli ładunek jest ujemny, to natężenie pola elektrycznego jest skierowane do przewodnika.



**Rys. 23.12.** Widok z ukosa (a) i z boku (b) drobnej części dużego odosobnionego przewodnika z nadmiarowym ładunkiem dodatnim na jego powierzchni. Zamknięta walcowa powierzchnia Gaussa wnika do przewodnika i jest do niego prostopadła, obejmując pewien ładunek. Linie pola elektrycznego przechodzą przez zewnętrzne denko walca, ale nie przez wewnętrzne denko. Zewnętrzne denko ma pole powierzchni *S* i wektor powierzchni  $\vec{S}$ 

Linie pola na rysunku 23.12 muszą się kończyć na ładunkach ujemnych, gdzieś w otoczeniu. Jeśli przesuniemy te ładunki w pobliże przewodnika, to gęstość ładunku w dowolnym miejscu na powierzchni przewodnika ulegnie zmianie. Zmieni się także natężenie pola elektrycznego. Związek między E i  $\sigma$  będzie jednak nadal określony wzorem (23.11).

# Przykład 23.05. Kulista metalowa powłoka, pole elektryczne i ładunek otoczony przez powierzchnię Gaussa

Na rysunku 23.13a przedstawiono przekrój kulistej powłoki metalowej o wewnętrznym promieniu *R*. W odległości *R*/2 od środka powłoki umieszczono cząstkę o ładunku  $-5 \mu$ C. Jeśli powłoka jest elektrycznie obojętna, to jakie (indukowane) ładunki znajdują się na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki? Czy te ładunki są rozłożone równomiernie? Jaki jest rozkład pola wewnątrz i na zewnątrz powłoki?



**Rys. 23.13.** a) Ujemny ładunek punktowy umieszczono wewnątrz kulistej powłoki metalowej, która jest elektrycznie obojętna. b) Na wewnętrznej powierzchni powłoki pojawił się wtedy niejednorodny rozkład ładunku dodatniego, a na zewnętrznej powierzchni – jednorodny rozkład ładunku ujemnego

# PODSTAWOWE FAKTY

Na rysunku 23.13b przedstawiono przekrój sferycznej powierzchni Gaussa wewnątrz metalu, tuż poza wewnętrzną powierzchnią powłoki. Natężenie pola elektrycznego wewnątrz metalu (i stąd na powierzchni Gaussa wewnątrz metalu) musi być równe zeru. Oznacza to, że strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa musi być także równy zeru. Z prawa Gaussa wy-

# PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

nika, że *wypadkowy* ładunek otoczony przez powierzchnię Gaussa musi być zerowy.

**Rozumowanie:** Przy naładowanej cząstce o ładunku  $-5 \,\mu\text{C}$  znajdującej się wewnątrz powłoki, na wewnętrznej powierzchni powłoki musi gromadzić się ładunek  $+5 \,\mu\text{C}$ . Gdyby ta cząstka znajdowała się w środku powłoki, to ten dodatni ładunek byłby rozłożony jednorodnie na powierzchni wewnętrznej. Jednak ponieważ naładowana cząstka znajduje się poza środkiem, to rozkład ładunku dodatniego jest niejednorodny, jak to przedstawiono na rysunku 23.13b. Ładunek dodatni ma tendencję do gromadzenia się na wycinkach wewnętrznej powierzchni, najbliższych (ujemnej) cząstce.

Ze względu na to, że powłoka jest elektrycznie obojętna, jej wewnętrzna powierzchnia może mieć ładunek +5  $\mu$ C tylko wtedy, gdy elektrony o całkowitym ładunku -5  $\mu$ C opuszczą wewnętrzną powierzchnię i przesuną się na powłokę zewnętrzną. Elektrony rozkładają się tu jednorodnie, co zaznaczono na rysunku 23.13b. Ten rozkład ładunku ujemnego jest jednorodny, ponieważ powłoka jest kulista. Niejednorodny rozkład ładunku dodatniego na wewnętrznej powierzchni nie może wytworzyć takiego pola elektrycznego, które mogłoby wpłynąć na rozkład ładunku na zewnętrznej powierzchni. Ponadto te ujemne ładunki odpychają się wzajemnie.

Na rysunku 23.13b przedstawiono w przybliżeniu linie pola wewnątrz i na zewnątrz powłoki. Wszystkie linie pola przecinają powłokę prostopadle. Wewnątrz powłoki rozkład linii pola jest nierównomierny wskutek niejednorodności rozkładu ładunku dodatniego. Poza powłoką rozkład pola jest taki, jakby było ono wytworzone przez ładunek punktowy, umieszczony w środku powłoki i jakby powłoki nie było. Jest tak niezależnie od tego, gdzie wewnątrz powłoki umieszczono naładowaną cząstkę.

# **23.4.** ZASTOSOWANIE PRAWA GAUSSA: SYMETRIA WALCOWA

### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

23.20 wyjaśnić, w jaki sposób można użyć prawa Gaussa do wyznaczenia wartości nateżenia pola elektrycznego wokół naładowanej linii lub powierzchni walcowej (takiej jak plastikowy pręt) o liniowej gęstości ładunku  $\lambda$ ;

23.21 zastosować związek pomiędzy liniową gęstością ładunku  $\lambda$  na powierzchni walcowej i wartością natężenia

# Podstawowe fakty

• Natężenie pola elektrycznego w punkcie znajdującym się w pobliżu naładowanej linii prostej (lub pręta o nieskończonej długości) o gestości ładunku  $\lambda$  jest prostopadłe do tej linii i ma

pola elektrycznego E w odległości r od osi symetrii tej powierzchni;

23.22 wyjaśnić, w jaki sposób można użyć prawa Gaussa do wyznaczenia pola elektrycznego wewnatrz nieprzewodzacego ciała o powierzchni walcowej (takiej jak plastikowy pręt) naładowanej ze stałą gestością objętościową ładunku  $\rho$ .

(naładowana linia prosta),

Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa

Na rysunku 23.14 przedstawiono fragment nieskończenie długiego walcowego plastikowego pręta, naładowanego jednorodnie dodatnio o gęstości liniowej ładunku  $\lambda$ . Znajdziemy teraz wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w odległości r od osi pręta. Możemy tego dokonać, stosując podejście przedstawione w rozdziale 22 (element ładunku dq, cząstkowe natężenie pola d $\vec{E}$  itd.). Jednak zastosowanie prawa Gaussa pozwala nam zrobić to prościej, szybciej i bardziej elegancko.

Rozkład ładunku i pole elektryczne mają symetrie walcową. Aby znaleźć natężenie pola w odległości r od osi pręta, wybieramy powierzchnie Gaussa w kształcie walca o promieniu r i wysokości h, współosiowego z prętem. (Jeśli chcemy wyznaczyć natężenie pola elektrycznego w danym punkcie, to musi się on znaleźć na bocznej ścianie tej powierzchni Gaussa). Możemy teraz zastosować prawo Gaussa, aby powiązać ładunek zawarty wewnątrz powierzchni Gaussa z całkowitym strumieniem przenikającym te powierzchnie.

Po pierwsze należy zauważyć, że ze względu na symetrię natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie musi być skierowane radialnie na zewnątrz (ładunek jest dodatni). Oznacza to, że w każdym punkcie na obu denkach walca natężenie pola elektrycznego jest równoległe do powierzchni i nie przenika jej. Tak więc strumień pola przenikający te denka jest równy zeru.

Aby znaleźć strumień przenikający boczną powierzchnię walca, zauważmy najpierw, że dla dowolnego elementu tej powierzchni odpowiedni wektor powierzchni d $\vec{S}$  jest skierowany radialnie na zewnątrz (poza wnętrze powierzchni Gaussa). Wektor ten jest więc skierowany tak samo jak natężenie pola przenikające ten element powierzchni. W rezultacie iloczyn skalarny w prawie Gaussa równy jest po prostu  $E dS \cos 0 = E dS$ , a wartość natężenia E możemy wyłączyć przed znak całki. Pozostała całka to po prostu suma pól wszystkich elementów powierzchni bocznej walca. Wiemy już jednak, że to całkowite pole powierzchni bocznej walca jest ilo-



Rys. 23.14. Powierzchnia Gaussa w postaci zamkniętej powierzchni walcowej otacza odcinek bardzo długiego, jednorodnie naładowanego, walcowego pręta plastikowego

wartość  $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}$ gdzie r jest odległościa punktu od tej linii. czynem jego wysokości *h* i długości obwodu podstawy  $2\pi r$ . Strumień pola elektrycznego przez powierzchnię walca wynosi

$$\Phi = ES\cos\theta = E(2\pi rh)\cos0 = E(2\pi rh).$$

Jednocześnie prawo Gaussa mówi o ładunku  $q_{\text{wewn}}$  objętym rozważaną powierzchnią. Ponieważ liniowa gęstość ładunku (ładunek przypadający na jednostkę długości) jest stała, więc ładunek objęty powierzchnią Gaussa wynosi  $\lambda h$ . Prawo Gaussa

przybiera postać

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}}$$
$$\varepsilon_0 E \cdot (2\pi rh) = \lambda h.$$

Stąd otrzymujemy

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$
 (naładowana linia prosta). (23.12)

Wzór ten określa wartość natężenia pola elektrycznego pochodzącego od nieskończenie długiej, jednorodnie naładowanej linii prostej w punkcie znajdującym się w odległości r od tej linii. Natężenie  $\vec{E}$  jest skierowane radialnie od linii, jeśli ładunek jest dodatni, i do linii, jeśli ładunek jest ujemny. Wzór (23.12) określa także w przybliżeniu wartość natężenia pola naładowanej nici o *skończonej* długości w punktach, które nie znajdują się zbyt blisko jej końców (w porównaniu z odległością od nici).

Jeśli rozważamy pręt o stałej gęstości objętościowej ładunku  $\rho$ , to podobnej procedury możemy użyć do wyznaczenia natężenia pola elektrycznego *wewnątrz* tego pręta. Moglibyśmy po prostu skurczyć walcową powierzchnię Gaussa pokazaną na rysunku 23.14, aż znajdzie się wewnątrz pręta. Gęstość ładunku w pręcie jest stała, więc ładunek  $q_{\text{wewn}}$  objęty przez walec byłby wtedy proporcjonalny do objętości pręta zawartej wewnątrz powierzchni Gaussa.

#### Przykład 23.06. Prawo Gaussa a lider wstępujący wyładowania atmosferycznego

*Lider wstępujący wyładowania atmosferycznego*. Kobieta przedstawiona na rysunku 23.15 stała na platformie punktu widokowego w Sequoia National Park w Stanach Zjednoczonych, gdy ponad nią przesuwała się duża chmura burzowa. Niektóre ze swobodnych elektronów znajdujących się w jej ciele pod wpływem ujemnie naładowanej podstawy tej chmury spłynęły do ziemi (rys. 23.16a), co spowodowało, że została ona naładowana dodatnio. Obecność dużej ilości ładunku w jej ciele potwierdza obserwacja stających dęba włosów, które odpychają się od siebie i układają wzdłuż linii pola elektrycznego wytwarzanego przez ten ładunek.

Kobieta nie została porażona przez wyładowanie atmosferyczne. Znalazła się jednak w śmiertelnym niebezpieczeństwie, gdyż natężenie tego pola elektrycznego niewiele różniło się od wartości wywołującej przebicie elektryczne w otaczającym ją powietrzu. Przebicie **Rys. 23.15.** Kobieta na zdjęciu została dodatnio naładowana przez chmurę burzową, która znajdowała się ponad nią (dzięki uprzejmości NOAA)




**Rys. 23.16.** a) Niektóre ze swobodnych elektronów z ciała kobiety odpłynęły do Ziemi pozostawiając ją naładowaną dodatnio. b) Gdy w powietrzu zachodzi przebicie elektryczne, powstaje lider wstępujący, który umożliwia elektronom uwolnionym z cząsteczek w powietrzu przepłynięcie do kobiety. c) Walec będący modelem kobiety

takie mogłoby nastąpić wzdłuż ścieżki rozciągającej się od jej ciała w górę, zwanej liderem wstępującym. Lider wstępujący jest niebezpieczny, ponieważ jonizacja cząstek powietrza, która wzdłuż niego następuje, powoduje gwałtowne uwalnianie z tych cząsteczek ogromnej liczby elektronów. Gdyby z głowy kobiety z rysunku 23.15 rozwinął się lider wstępujący, to elektrony te przepłynęłyby do jej ciała, aby ją zneutralizować (rys. 23.16b). Przez jej ciało nastąpiłby ogromny, przypuszczalnie zabójczy przepływ ładunku. Taki przepływ jest niebezpieczny, ponieważ może zakłócić lub nawet zatrzymać jej oddech (który dostarcza tlen do organizmu) i równomierny rytm serca (który jest niezbędny do podtrzymania przepływu krwi dostarczającej tlen do organizmu). Przepływ tak dużego prądu mógłby też spowodować oparzenia.

Modelem ciała kobiety będzie dla nas wąski pionowy walec o wysokości L = 18 m i promieniu R = 0,1 m (rys. 23.16c). Przypuśćmy, że wzdłuż tego walca rozłożony jest równomiernie ładunek Q, a przebicie elektryczne może nastąpić, gdy natężenie pola elektrycznego wzdłuż jej ciała przekroczy wartość krytyczną  $E_{\rm kr} = 2,4$  MN/C. Jaki ładunek Q spowodowałby powstanie wzdłuż jej ciała pola elektrycznego zdolnego przebić otaczające powietrze?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Ponieważ  $R \ll L$ , więc dany rozkład ładunku możemy przybliżyć odcinkiem naładowanej linii prostej. Następnie, ponieważ przyjmujemy, że ładunek jest rozmieszczony równomiernie wzdłuż tej linii, więc możemy przybliżyć wartość natężenia pola elektrycznego wzdłuż jej ciała, korzystając z wzoru (23.12) ( $E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r$ ).

**Obliczenia:** Podstawiając za *E* wartość krytyczną natężenia pola  $E_{\rm kr}$ , za promień walca *R* odległość od tej prostej *r* i stosunek Q/L za liniową gęstość ładunku  $\lambda$ , otrzymujemy

$$E_{\rm kr} = \frac{Q/L}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

lub

$$Q = 2\pi\varepsilon_0 RLE_{\rm kr}.$$

Podstawiając dane, uzyskujemy

$$Q = (2\pi)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(0,1 \text{ m})$$
  
 
$$\cdot (1,8 \text{ m})(2,4 \cdot 10^6 \text{ N/C})$$
  
= 2,402 \cdot 10^{-5} C \approx 24 \muC (odpowiedź).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

## **23.5.** ZASTOSOWANIE PRAWA GAUSSA: SYMETRIA PŁASZCZYZNOWA

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 23.23 zastosować prawo Gaussa do wyznaczenia wartości natężenia pola elektrycznego E w pobliżu dużej nieprzewodzącej płaszczyzny naładowanej o stałej gęstości powierzchniowej ładunku σ;
- **23.24** skorzystać ze związku pomiędzy gęstością ładunku i wartością natężenia pola elektrycznego *E* w pobliżu dużej *nieprzewodzącej* płaszczyzny naładowanej jednorodnie

o gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma$ , a także określić kierunek tego natężenia;

**23.25** zastosować związek pomiędzy gęstością ładunku i wartością natężenia pola elektrycznego E w pobliżu dwóch dużych równoległych *przewodzących* płaszczyzn naładowanych jednorodnie o gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma$ , a także określić kierunek tego natężenia.

#### Podstawowe fakty

• Natężenie pola elektrycznego nieskończonej nieprzewodzącej płaszczyzny naładowanej jednorodnie o gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma$  jest prostopadłe do tej płaszczyzny i ma wartość

 $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  (naładowana nieprzewodząca płaszczyzna).

• Natężenie pola elektrycznego przy zewnętrznej powierzchni

przewodnika naładowanego jednorodnie o gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma$  jest prostopadłe do tej powierzchni i ma wartość

 $E = \frac{o}{\varepsilon_0}$  (naładowana powierzchnia przewodnika).

Wewnątrz przewodnika natężenie pola elektrycznego jest równe zeru.

#### Zastosowanie prawa Gaussa: symetria płaszczyznowa

#### Płyta nieprzewodząca

Na rysunku 23.17 przedstawiono fragment cienkiej nieskończonej nieprzewodzącej płaskiej płyty naładowanej jednorodnie dodatnio ładunkiem o gęstości powierzchniowej  $\sigma$ . Jako prosty model takiej płyty może służyć arkusz cienkiej plastikowej folii, jednorodnie naładowany z jednej strony. Znajdźmy natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w odległości *r* od płyty.

W tym zagadnieniu przydatną powierzchnią Gaussa jest przedstawiona na rysunku powierzchnia walcowa, zamknięta denkami o polu powierzchni S, przecinająca prostopadle płytę. Z symetrii zagadnienia wynika, że natężenie  $\vec{E}$  musi być prostopadłe do płyty, a więc także i do denek. Ponadto, ponieważ ładunek jest dodatni, więc natężenie  $\vec{E}$  jest skierowane *od* płyty, a zatem linie pola elektrycznego przecinają denka powierzchni Gaussa, wychodząc na zewnątrz. Linie pola nie przecinają powierzchni bocznej, dlatego też strumień elektryczny przez tę część powierzchni Gaussa jest równy zeru. Na powierzchni denek  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  wynosi po prostu EdS i prawo Gaussa

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_{\mathrm{wewn}}$$

przybiera postać

$$\varepsilon_0(ES + ES) = \sigma S,$$

gdzie  $\sigma S$  jest ładunkiem objętym przez powierzchnię Gaussa. Mamy zatem



**Rys. 23.17.** Widoki: a) z ukosa, b) z boku fragmentu bardzo dużej, cienkiej płyty plastikowej, jednorodnie naładowanej z jednej strony ładunkiem o gęstości powierzchniowej  $\sigma$ . Zamknięta walcowa powierzchnia Gaussa przenika przez płytę i jest prostopadła do niej Rozważamy tutaj nieskończoną płytę o jednorodnej gęstości ładunku, a więc wynik ten obowiązuje dla każdego punktu w skończonej odległości od płyty. Wzór (23.13) jest zgodny ze wzorem (22.27), który znaleźliśmy, całkując składowe natężenia pola elektrycznego, wytworzonego przez poszczególne ładunki.

#### Dwie przewodzące płyty

Na rysunku 23.18a przedstawiono przekrój cienkiej nieskończonej przewodzącej płyty, na której znajduje się nadmiar ładunku dodatniego. Z podrozdziału 23.3 wiemy, że ten ładunek nadmiarowy znajduje się tylko na powierzchni płyty. Płyta jest bardzo cienka i bardzo duża, a więc możemy założyć, że cały ładunek nadmiarowy umieszczony jest w zasadzie na dwóch dużych ścianach płyty.

Gdy nie ma zewnętrznego pola elektrycznego, które mogłoby spowodować jakiś szczególny rozkład ładunku, wówczas ładunek rozkłada się na dwóch płaszczyznach i ma jednorodną gęstość powierzchniową  $\sigma_1$ . Ze wzoru (23.11) wiemy, że poza płytą taki ładunek wytwarza pole elektryczne o natężeniu równym  $E = \sigma_1/\varepsilon_0$ . Nadmiarowy ładunek jest dodatni, a więc natężenie pola jest skierowane od płyty.

Na rysunku 23.18b przedstawiono identyczną płytę z nadmiarowym ładunkiem ujemnym, o takiej samej gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma_1$ . Wytworzone pole różni się jedynie tym, że jego natężenie jest teraz skierowane do płyty.

Załóżmy, że ustawiliśmy płyty z rysunków 23.18a i b równolegle i blisko siebie (rys. 23.18c). Płyty są przewodnikami, dlatego też po takim ich ustawieniu ładunek nadmiarowy na jednej płycie przyciąga ładunek nadmiarowy na drugiej i cały nadmiarowy ładunek przesunie się na wewnętrzne powierzchnie płyt, tak jak pokazano na rysunku 23.18c. Przy dwukrotnie większym ładunku nowa gęstość powierzchniowa ładunku  $\sigma$ na każdej wewnętrznej powierzchni jest równa  $2\sigma_1$ . Stąd natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie między płytami ma wartość

$$E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$
 (23.14)

Natężenie pola elektrycznego jest skierowane od płyty naładowanej dodatnio do płyty naładowanej ujemnie. Na zewnętrznych powierzchniach nie pozostał żaden nadmiarowy ładunek, więc natężenie na lewo i na prawo od płyt jest równe zeru.

Ponieważ ładunki na płytach przesunęły się, gdy zbliżaliśmy płyty do siebie, więc rozkład ładunku dla układu dwóch płyt nie jest wyłącznie sumą rozkładów ładunku dla pojedynczych płyt.

Może cię zastanawiać, dlaczego omawiamy szczegółowo tak wydawałoby się nierealistyczne zagadnienie, jakim jest postać pola elektrycznego wytworzonego przez nieskończoną naładowaną płytę. Jednym z powodów jest to, że takie "nieskończone" sytuacje stanowią dobre przybliżenie wielu zagadnień rzeczywistego świata. Wzór (23.13) dobrze opisuje pole dla skończonej nieprzewodzącej płyty, jeśli rozważamy punkty znajdujące się niedaleko tej płyty i niezbyt blisko jej krawędzi. Wzór (23.14) obowiązuje dla pary skończonych przewodzących płyt, znajdujących się w niewielkiej



**Rys. 23.18.** a) Cienka, bardzo duża płyta przewodząca z nadmiarowym ładunkiem dodatnim. b) Identyczna płyta z nadmiarowym ładunkiem ujemnym. c) Obie płyty ustawione równolegle i blisko siebie

odległości od siebie, jeśli rozważamy punkty niezbyt bliskie krawędzi płyt. Nie zajmujemy się krawędziami płyt, ponieważ aby znaleźć wyrażenia dla natężeń pól blisko krawędzi, nie możemy już korzystać z symetrii płaszczyznowej. Linie pola są tam w rzeczywistości zakrzywione (mówimy zwykle o *zjawisku krawędziowym* lub *brzegowym*) i może być bardzo trudno podać wzory opisujące natężenia pól.

#### Przykład 23.07. Pole elektryczne dwóch równoległych naładowanych nieprzewodzących płyt

Na rysunku 23.19a przedstawiono fragmenty dwóch dużych równoległych nieprzewodzących płyt, z których każda jest jednorodnie naładowana z jednej strony. Wartości gęstości powierzchniowej ładunku są równe  $\sigma_{(+)} = 6,8 \ \mu\text{C/m}^2$  dla płyty naładowanej dodatnio i  $\sigma_{(-)} = 4,3 \ \mu\text{C/m}^2$  dla płyty naładowanej ujemnie.

Oblicz natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ : a) na lewo od płyt, b) między płytami, c) na prawo od płyt.



**Rys. 23.19.** a) Dwie duże równoległe płyty, jednorodnie naładowane z jednej strony. b) Natężenia pól elektrycznych wytworzonych przez każdą z płyt z osobna. c) Wypadkowe natężenie pola od obydwu naładowanych płyt, obliczone w wyniku zastosowania zasady superpozycji

#### PODSTAWOWE FAKTY

Przy unieruchomionych (znajdujących się w materiale nieprzewodzącym) ładunkach pole elektryczne płyt przedstawionych na rysunku 23.19a można znaleźć przez: a) wyznaczenie natężenia pola pochodzącego od każdej płyty, tak jak gdyby tej drugiej nie było, b) algebraiczne dodanie natężeń pól tych płyt, korzystając z zasady superpozycji. (Natężenia te możemy dodać algebraicznie, ponieważ są one równoległe do siebie). **Obliczenia:** Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}_{(+)}$  płyty naładowanej w dowolnym punkcie przestrzeni jest skierowane *od* tej płyty i zgodnie ze wzorem (23.13) przyjmuje wartość

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(+)}}{2\varepsilon_0} = \frac{6.8 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{C/m^2}}{(2)(8.85 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{C^2/(N \cdot m^2)})}$$
  
= 3.84 \cdot 10^5 N/C.

Podobnie natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}_{(-)}$  płyty ujemnej w dowolnym punkcie jest skierowane *do* tej płyty i ma wartość

$$E_{(-)} = \frac{\sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} = \frac{4.3 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{C/m^2}}{(2)(8.85 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{C^2/(N \cdot m^2)})}$$
  
= 2.43 \cdot 10^5 N/C.

Na rysunku 23.19b przedstawiono natężenia pól wytworzonych przez płyty na lewo od płyt (L), między nimi (M) i na prawo od nich (P). Wypadkowe natężenia pola w tych trzech obszarach wynikają z zasady superpozycji. Na lewo wartość natężenia wynosi

$$E_{\rm L} = E_{(+)} - E_{(-)} = 3,84 \cdot 10^5 \,\text{N/C} - 2,43 \cdot 10^5 \,\text{N/C}$$
  
= 1,4 \cdot 10^5 \text{ N/C} (odpowiedź).

Ponieważ  $E_{(+)}$  jest większe od  $E_{(-)}$ , więc wypadkowe natężenie pola  $\vec{E}_{\rm L}$  w tym obszarze jest skierowane w lewo, tak jak przedstawiono na rysunku 23.19c. Na prawo od płyt natężenie pola  $\vec{E}_{\rm P}$  ma taką samą wartość, ale jest skierowane w prawo (rys. 23.19c).

Między płytami natężenia dwóch pól dodają się i mamy

$$E_{\rm M} = E_{(+)} + E_{(-)}$$
  
= 3,84 \cdot 10<sup>5</sup> N/C + 2,43 \cdot 10<sup>5</sup> N/C  
= 6,3 \cdot 10<sup>5</sup> N/C (odpowiedź).

Natężenie pola  $\vec{E}_{\rm M}$  jest skierowane w prawo.

# **23.6.** ZASTOSOWANIE PRAWA GAUSSA: SYMETRIA SFERYCZNA

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 23.26 zauważyć, że jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę znajdującą się na zewnątrz tej powłoki, tak jakby cały ładunek był skupiony w jej środku;
- 23.27 zauważyć, że na naładowaną cząstkę znajdującą się wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej nie działa ze strony tej powłoki żadna siła elektrostatyczna;
- 23.28 dla punktu na zewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej zastosować związek między wartością natęże-

#### Podstawowe fakty

• Natężenie pola elektrycznego na zewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej o promieniu *R* i całkowitym ładunku *q* jest skierowane radialnie (do środka lub na zewnątrz w zależności od znaku ładunku) i ma wartość

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$
 (na zewnątrz powłoki kulistej),

gdzie r jest odległością od środka powłoki do punktu, w którym wartość E jest wyznaczana. Natężenie pola jest takie samo jak dla układu, w którym cały ładunek byłby skupiony w środku sfery.

- nia pola elektrycznego E, ładunkiem zgromadzonym na tej powłoce q i odległością tego punktu od środka powłoki r;
- 23.29 wyznaczyć wartość natężenia pola elektrycznego w punktach wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej;
- 23.30 wyznaczyć wartość i kierunek natężenia pola elektrycznego w punktach wewnątrz i na zewnątrz jednorodnie naładowanej objętościowo kuli.
- Natężenie pola wewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej jest równe zeru.
- Natężenie pola elektrycznego wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli jest skierowane radialnie i ma wartość

$$E = rac{1}{4\pi arepsilon_0} rac{q}{R^3} r$$
 (wewnątrz naładowanej kuli),

gdzie q jest całkowitym ładunkiem, R jest promieniem kuli, a r jest odległością od środka powłoki do punktu, w którym wartość E jest wyznaczana.

#### Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna

Zastosujemy teraz prawo Gaussa do udowodnienia dwóch twierdzeń o powłoce, przedstawionych bez dowodu w podrozdziale 21.1:

Powłoka kulista naładowana jednorodnie przyciąga lub odpycha cząstkę naładowaną, znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały ładunek powłoki był skupiony w środku powłoki.

Na rysunku 23.20 przedstawiono naładowaną powłokę kulistą o całkowitym ładunku q i promieniu R oraz dwie współśrodkowe sferyczne powierzchnie Gaussa  $S_1$  i  $S_2$ . Postępując według procedury opisanej w podrozdziale 23.2 przy stosowaniu prawa Gaussa do powierzchni  $S_2$ , dla której  $r \ge R$ , otrzymujemy

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \qquad \text{(powłoka kulista, pole dla } r \ge R \text{ ).} \qquad (23.15)$$

Jest to takie samo natężenie pola, jakie wytworzyłby ładunek punktowy q, umieszczony w środku naładowanej powłoki. Powłoka o ładunku q oddziałuje zatem na naładowaną cząstkę znajdującą się na zewnątrz tej powłoki taką samą siłą jak ładunek punktowy q, umieszczony w środku powłoki. Jest to dowód pierwszego twierdzenia o powłoce.



**Rys. 23.20.** Przekrój cienkiej, jednorodnie naładowanej powłoki kulistej o całkowitym ładunku q. Dwie powierzchnie Gaussa  $S_1$ i  $S_2$  pokazane są także w przekroju. Powierzchnia  $S_2$  obejmuje powłokę, a powierzchnia  $S_1$  obejmuje jedynie jej puste wnętrze Stosując prawo Gaussa do powierzchni  $S_1$ , dla której r < R, otrzymujemy

$$E = 0$$
 (powłoka kulista, pole dla  $r < R$ ), (23.16)

ponieważ powierzchnia Gaussa nie obejmuje żadnego ładunku. Gdyby więc naładowana cząstka znajdowała się wewnątrz powłoki, to powłoka ta nie działałaby na nią żadną wypadkową siłą. Jest to dowód drugiego twierdzenia o powłoce.

Powłoka kulista naładowana jednorodnie nie działa siłą elektrostatyczną na cząstkę naładowaną znajdującą się wewnątrz powłoki.

Dowolny sferycznie symetryczny rozkład ładunku, taki jak na rysunku 23.21, można utworzyć przez złożenie współśrodkowych powłok kulistych. Aby można było zastosować dwa twierdzenia o powłoce, gęstość objętościowa ładunku  $\rho$  powinna mieć określoną wartość dla każdej powłoki, ale wartości te nie muszą być dla wszystkich powłok jednakowe. Stąd gęstość  $\rho$  dla sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku może zależeć wyłącznie od odległości *r* od jej środka. Możemy wtedy sumować wkłady do pola wytworzonego przez symetryczny rozkładu ładunku "powłoka po powłoce".

Na rysunku 23.21a cały ładunek znajduje się wewnątrz powierzchni Gaussa o promieniu r > R. Natężenie pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunek zgromadzony na tej powierzchni Gaussa, jest takie samo jak dla ładunku punktowego, znajdującego się w środku i wobec tego obowiązuje wzór (23.15).

Na rysunku 23.21b przedstawiono powierzchnię Gaussa o promieniu r < R. Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego w punktach na powierzchni Gaussa, rozważmy dwa układy naładowanych powłok: jeden układ zawierający powłoki wewnątrz powierzchni Gaussa i drugi – na zewnątrz. Ze wzoru (23.16) wynika, że ładunek znajdujący się na zewnątrz powierzchni wytwarza zerowe wypadkowe natężenie pola elektrycznego na powierzchni Gaussa. Natomiast ze wzoru (23.15) wynika, że ładunek objęty przez powierzchnię wytwarza takie natężenie pola elektrycznego, jak gdyby objęty ładunek był skupiony w środku. Jeśli q' oznacza obejmowany ładunek, to wzór (23.15) możemy napisać w postaci

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'}{r^2} \qquad \text{(rozkład sferyczny, pole dla } r \leqslant R\text{)}. \tag{23.17}$$

Jeśli cały ładunek q zamknięty wewnątrz sfery o promieniu R jest rozłożony jednorodnie, to ładunek q' wewnątrz sfery o promieniu r na rysunku 23.21b jest proporcjonalny do q:

$$\frac{\text{hadunek wewnątrz sfery o promieniu } r}{\text{objętość wnętrza sfery o promieniu } r} = \frac{\text{cały hadunek}}{\text{cała objętość}},$$

czyli

$$\frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$
(23.18)





Otrzymujemy stąd

$$q' = q \frac{r^3}{R^3}$$
(23.19)

i po podstawieniu do wzoru (23.17)

$$E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r \qquad \text{(jednorodny rozkład sferyczny, pole dla } r \leqslant R\text{)}.$$
(23.20)

#### Sprawdzian 4

Na rysunku przedstawiono dwie duże równoległe nieprzewodzące płyty, naładowane jednorodnie, z identycznymi (dodatnimi) gęstościami powierzchniowymi i naładowaną jednorodnie kulę z (dodatnią) gęstością objętościową. Uszereguj wartości natężenia wypadkowego pola elektrycznego w czterech ponumerowanych punktach, zaczynając od największej.



#### **Podsumowanie**

**Prawo Gaussa** *Prawo Gaussa* i prawo Coulomba, chociaż mają różne postaci, są równoważnymi sposobami opisu związku między ładunkiem i natężeniem pola elektrycznego w sytuacjach statycznych. Prawo Gaussa ma postać

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{\text{wewn}}$$
 (prawo Gaussa), (23.6)

gdzie  $q_{\text{wewn}}$  jest wypadkowym ładunkiem wewnątrz zamkniętej powierzchni (**powierzchni Gaussa**), a  $\Phi$  jest wypadkowym **strumieniem** natężenia pola elektrycznego przez tę powierzchnię

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ (strumień elektryczny przez powierzchnię Gaussa)}$$
(23.4)

Prawo Coulomba można wyprowadzić z prawa Gaussa.

**Zastosowanie prawa Gaussa** Korzystając z prawa Gaussa i w pewnych przypadkach korzystając z symetrii, możemy wyprowadzić wiele ważnych związków elektrostatycznych. Oto niektóre z nich:

- Ładunek nadmiarowy na izolowanym przewodniku znajduje się tylko na zewnętrznej jego powierzchni.
- 2. Natężenie pola elektrycznego przy zewnętrznej *powierzchni naładowanego przewodnika* jest prostopadłe do tej powierzchni i ma wartość

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$
 (powierzchnia przewodnika). (23.11)

Wewnątrz przewodnika mamy E = 0.

 Natężenie pola elektrycznego nieskończonej *linii naładowanej* z gęstością liniową ładunku λ jest w dowolnym punkcie prostopadłe do naładowanej linii i ma wartość

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(naładowana linia)}, \qquad (23.12)$$

gdzie r jest odległością punktu od naładowanej linii.

4. Natężenie pola elektrycznego *nieskończonej nieprzewodzącej płyty*, naładowanej jednorodnie z gęstością powierzchniową ładunku  $\sigma$  jest prostopadłe do płaszczyzny płyty i wynosi

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$
 (naładowana płaszczyzna). (23.13)

5. Natężenie pola elektrycznego *na zewnątrz jednorodnie naładowanej powłoki kulistej* o promieniu *R* i całkowitym ładunku *q* jest skierowane radialnie i ma wartość

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \qquad \text{(powłoka kulista dla } r \ge R\text{)}, \quad (23.15)$$

gdzie *r* jest odległością od środka powłoki do punktu, w którym wartość *E* jest wyznaczana. (Dla punktów na zewnątrz powłoki ładunek zachowuje się tak, jakby był skupiony w środku sfery). Natężenie pola *wewnątrz kulistej powłoki naładowanej jednorodnie* jest równe zeru

$$E = 0$$
 (powłoka kulista, dla  $r < R$ ). (23.16)

6. Natężenie pola elektrycznego *wewnątrz jednorodnie naładowanej kuli* jest skierowane radialnie i ma wartość

$$E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)r.$$
 (23.20)

#### **Pytania**

1 Wektor powierzchni jest równy:  $\vec{S} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) m^2$ . Oblicz strumień elektryczny przenikający przez tę powierzchnię, jeśli nateżenie pola wynosi: a)  $\vec{E} = 4\hat{i} N/C$ , b)  $\vec{E} = 4\hat{k} N/C$ .

2 Na rysunku 23.22 przedstawiono w przekroju trzy walce o wysokości L naładowane jednorodnie ładunkiem Q. Każdy z nich otoczony jest współosiowa walcowa powierzchnia Gaussa. Wszystkie te powierzchnie maja jednakowe promienie. Uszereguj powierzchnie Gaussa według wartości nateżenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie powierzchni, zaczynając od wartości największej.



3 Na rysunku 23.23 przedstawiono w przekroju kulkę metalowa, dwie kuliste powłoki metalowe i trzy sferyczne powierzchnie Gaussa o promieniach R, 2R i 3R – wszystkie maja wspólny środek. Jednorodnie rozłożone ładunki trzech metalowych ciał wyno-

szą: Q dla kulki, 3Q dla mniejszej powłoki i 5Q dla większej powłoki. Uszereguj powierzchnie Gaussa według wartości natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie na powierzchni, zaczynając od wartości największej.

4 Na rvsunku 23.24 przedstawiono w przekroju dwie sfery Gaussa i dwa sześciany Gaussa o środku w punkcie, w którym znajduje sie dodatnio naładowana cząstka. a) Uszereguj te powierzchnie Gaussa według całkowitego strumienia pola elektrycznego, który je przenika, począwszy od największego. b) Uszereguj wartości nateże-



Rys. 23.23. Pytanie 3



Rys. 23.24. Pytanie 4

nia pola elektrycznego w punktach na tych powierzchniach, zaczynając od największej. Czy te wartości są stałe, czy zmieniaja sie dla różnych punktów tej samej powierzchni?

5 Na rysunku 23.25 przedstawiono swobodny elektron znajdujący się pomiędzy dwiema nieskończonymi nieprzewodzącymi poziomymi płytami naładowanymi jednorodnie o gestoś-

ci powierzchniowej ładunku równej odpowiednio  $\sigma_{(+)}$  i  $\sigma_{(-)}$ . Poniżej podano te wielkości oraz odległość pomiedzy płytami dla trzech sytuacji. Uszereguj je według wartości przyspieszenia działajacego na elektron, zaczynajac od najwiekszej.



**Rys. 23.25.** Pytanie 5

Sytuacja	$\sigma_{(+)}$	$\sigma_{(-)}$	Odległość
1	$+4\sigma$	$-4\sigma$	d
2	$+7\sigma$	$-\sigma$	4d
3	$+3\sigma$	$-5\sigma$	9 <i>d</i>

6 Trzy nieskończone nieprzewodzące płyty naładowane jednorodnie o gestości powierzchniowej ładunku  $\sigma$ ,  $2\sigma$  i  $3\sigma$  są ustawione równolegle, podobnie jak dwie płyty na rysunku 23.19a. W jakiej kolejności sa one ustawione, od lewej do prawej, jeśli natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytworzonego przez ten układ, ma wartość E = 0 w jednym obszarze i  $E = 2\sigma/\varepsilon_0$  w drugim obszarze między nimi?

7 Na rysunku 23.26 przedstawiono cztery sytuacje, w których cztery bardzo długie pręty rozciągają się ponad i pod powierzchnia kartki (na rysunku widać tylko ich przekroje). Wartości podane pod każdym przekrojem opisują liniową gestość ładunku odpowiedniego pręta w mikrokulombach na metr. Prety odległe są od siebie o d lub 2d, jak to pokazano na rysunku, a zaznaczony punkt pomiędzy środkowymi prętami jest od nich równo odległy. Uszereguj przedstawione sytuacje według wartości natężenia całkowitego pola elektrycznego w tym środkowym punkcie, zaczynając od największej.



8 Na rysunku 23.27 przedstawiono cztery kule naładowane jednorodnie objętościowo ładunkiem Q każda. a) Uszereguj kule według ich gestości objętościowej ładunku, zaczynając od największej. Na rysunku zaznaczono także punkt P dla każdej kuli, zawsze w tej samej odległości od jej środka. b) Uszereguj kule według wartości natężenia pola elektrycznego, wytwarzanego w punkcie P, zaczynajac od największej.



**9** Mała naładowana kulka znajduje się wewnątrz metalowej powłoki kulistej o promieniu *R*. Wypadkowe ładunki na kulce i powłoce wynoszą odpowiednio dla trzech sytuacji: 1) +4q, 0; 2) -6q, +10q; 3) +16q, -12q. Uszereguj te sytuacje według ładunku na: a) wewnętrznej powierzchni powłoki, b) zewnętrznej powierzchni powłoki, zaczynając od największego dodatniego ładunku.

**10** Uszereguj sytuacje z pytania 9 według wartości natężenia pola elektrycznego: a) w połowie grubości powłoki, b) w punkcie odległym o 2R od środka powłoki, zaczynając od wartości największej.

**11** Na rysunku 23.28 przedstawiono trzy długie naładowane współosiowe powłoki walcowe. Środkowa powłoka *A* naładowana jest jednorodnie ładunkiem  $q_S = +3q_0$ . Jakie ładunki  $q_B$  i  $q_C$  powinny być jednorodnie rozłożone na powłokach *B* i *C*, aby (jeśli to możliwe) całkowite natężenie pola elektrycznego było równe zeru w: a) punkcie 1, b) punkcie 2, c) punkcie 3?



**12** Na rysunku 23.29 przedstawiono cztery powierzchnie Gaussa składające się z jednakowych powierzchni walcowych i denek o różnym kształcie. Powierzchnie te znajdują się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  skierowanym równolegle do ich osi symetrii tych powierzchni. Denka powierzchni mają kształty:  $S_1$  – wypukłej półsfery,  $S_2$  – wklęsłej półsfery,  $S_3$  – stożka i  $S_4$  – koła. Uszereguj te powierzchnie według a) całkowitego strumienia elektrycznego, który je przenika i b) strumienia elektrycznego przenikającego górne i dolne denko każdej z powierzchni, zaczynając od największego.



#### Zadania

- Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
   Liczba kropek określa stopień trudności zadania
- ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w Student Solutions Manual
- www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
- ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
  - Więcej informacji znajdziesz w książce The Flying Circus of Physics i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

#### Podrozdział 23.1 Strumień pola elektrycznego

•1 ssm Długość boku kwadratu przedstawionego na rysunku 23.30 wynosi 3,2 mm. Kwadrat znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym. Wartość natężenia tego pola wynosi E = 1800 N/C. Linie pola tworzą kąt  $\theta = 35^{\circ}$  z normalną do powierzchni kwadratu, tak jak pokazano na ry-.



Rys. 23.30. Zadanie 1

sunku. Przyjmując, że ta normalna jest skierowana "na zewnątrz", tak jakby powierzchnia stanowiła jedną ścianę pudełka, oblicz strumień elektryczny przez tę powierzchnię.

••2 Pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E} = 4\hat{i} - 3(y^2 + 2)\hat{j}$  przenika powierzchnię Gaussa w kształcie sześcianu o boku 2 m, ustawionego tak jak na rysunku 23.7. (Wartość natężenia wyrażona jest w niutonach na kulomb, a położenie wzdłuż osi *x* w metrach). Oblicz strumień pola elektrycznego przenikającego przez: a) górną, b) dolną, c) lewą i d) tylną ścianę sześcianu. e) Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię sześcianu? ••3 Długość krawędzi sześcianu na rysunku 23.31 wynosi 1,40 m. Sześcian znajduje się w obszarze jednorodnego pola

elektrycznego i jest ustawiony tak jak na rysunku. Znajdź strumień elektryczny przenikający przez prawą ścianę sześcianu, jeśli natężenie pola elektrycznego wyrażone w niutonach na kulomb (N/C) wynosi: a) 6î, b)  $-2\hat{j}$ , c)  $-3\hat{i} + 4\hat{k}$ . d) Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię sześcianu dla każdego z tych pól?



#### Podrozdział 23.2 Prawo Gaussa

•4 Na rysunku 23.32 w obszarze jednorodnego pola elektrycznego o wartości natężenia E = 3 mN/C znajduje się siatka na motyle. Obręcz siatki ma kształt okręgu o promieniu

a = 11 cm i jest ustawiona prostopadle do kierunku natężenia pola. Siatka nie zawiera żadnego niezrównoważonego ładunku elektrycznego. Oblicz strumień elektryczny przenikający przez siatkę.

•5 Na rysunku 23.33 przedstawiono proton znajdujący się w odległości *d*/2 nad środkiem kwadratu o boku *d*. Jaki strumień pola elektrycznego przenika ten kwadrat? (*Wskazówka*: Pomyśl o tym kwadracie jako o boku sześcianu o krawędzi *d*).





•6 W każdym punkcie na powierzchni sześcianu z rysunku 23.31 natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dodatnim kierunku osi z. Długość krawędzi sześcianu wynosi 3 m. Na górnej ścianie sześcianu  $\vec{E} = -34\hat{k}$  N/C, a na dolnej ścianie sześcianu  $\vec{E} = +20\hat{k}$  N/C. Określ wypadkowy ładunek zawarty w sześcianie.

•7 Ładunek punktowy o wartości 1,8 μC znajduje się w środku sześciennej powierzchni Gaussa. Jaki jest wypadkowy strumień elektryczny przez tę powierzchnię, jeśli długość krawędzi sześcianu wynosi 55 cm?

••8 The Jeśli włączymy natrysk w zamkniętej łazience, to woda rozpryskująca się na wannie może wypełnić powietrze ujemnie naładowanymi jonami i wytworzyć w powietrzu pole elektryczne o natężeniu do 1000 N/C. Wyobraź sobie łazienkę o wymiarach  $2,5 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ . Przyjmij, że przy suficie, podłodze i czterech ścianach natężenie pola elektrycznego

jest stałe, skierowane prostopadle do powierzchni i ma wartość 600 N/C. Przyjmij, że te powierzchnie tworzą zamkniętą powierzchnię Gaussa. Jakie są: a) gęstość objętościowa ładunku  $\rho$ , b) liczba nadmiarowych ładunków elementarnych *e* na metr sześcienny w powietrzu w łazience?

••9 ilw Na rysunku 23.31 przedstawiono zamkniętą powierzchnię Gaussa w kształcie sześcianu, którego krawędź ma długość 1,40 m. Jakie są: a) całkowity strumień pola elektrycznego  $\Phi$  przenikającego powierzchnię i b) całkowity ładunek  $q_{\text{wewn}}$  znajdujący się wewnątrz sześcianu, jeśli  $\vec{E} = 3y\hat{j}$  N/C, gdzie y jest wyrażone w metrach? Jakie są c) całkowity strumień  $\Phi$  i d) całkowity ładunek  $q_{\text{wewn}}$ , jeśli natężenie pola  $\vec{E} = [-4\hat{i} + (6 + 3y)\hat{j}]$  N/C?

••10 Na rysunku 23.34 przedstawiono zamkniętą powierzchnię Gaussa w kształcie sześcianu, którego krawędź ma długość 2 m. Sześcian znajduje się w obszarze, w którym panuje nie-

jednorodne pole elektryczne  $\vec{E} = [(3x+4)\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k}]$  N/C, gdzie x jest wyrażone w metrach. Jaki jest całkowity ładunek elektryczny znajdujący sie wewnatrz sześcianu?

••11 The Na rysunku 23.35 przedstawiono zamkniętą powierzchnię Gaussa w kształcie sześcianu, którego krawędź ma długość 2 m. Jeden z wierzchołków tego sześcianu ma współrzędne  $x_1 = 5$  m,  $y_1 = 5$  m. Sześcian znajduje się w obszarze, w którym



Rys. 23.34. Zadanie 10



**Rys. 23.35.** Zadanie 11

panuje niejednorodne pole elektryczne  $\vec{E} = (-3\hat{i}-4y^2\hat{j}+3\hat{k})$ N/C, gdzie y jest wyrażone w metrach. Jaki jest całkowity ładunek elektryczny znajdujący się wewnatrz sześcianu?

••12 Na rysunku 23.36 przedstawiono dwie unieruchomione nieprzewodzące powłoki kuliste. Powłoka 1 ma promień 3 cm, a jej zewnętrzna powierzchnia jest naładowana jedno-rodnie z gęstością ładunku powierzchniowego  $+6 \,\mu\text{C/m}^2$ . Powłoka 2 ma promień 2 cm,

a jej zewnętrzna powierzchnia jest naładowana jednorodnie z gęstością ładunku powierzchniowego  $+4 \,\mu C/m^2$ . Środki powłok są oddalone o L = 10 cm. Jakie jest natężenie pola elektrycznego dla x=2 cm wyrażone w notacji wektorowej?





••13 ssm Natężenie pola elektrycznego w pewnym obszarze atmosfery ziemskiej jest skierowane pionowo w dół. Na wysokości 300 m natężenie pola ma wartość 60 N/C, a na wysokości 200 m – wartość 100 N/C. Znajdź wypadkowy ładunek w sześcianie, którego długość krawędzi wynosi 100 m, a ściany poziome umieszczono na wysokości 200 i 300 m.

••14 Strumień a nieprzewodzące powłoki. W środku dwóch koncentrycznych powłok kulistych zawieszono naładowaną cząstkę. Powłoki są cienkie i wykonane z materiału nieprzewodzącego. Na rysunku 23.37a pokazano przekrój tego układu. Na rysunku 23.37b przedstawiono wykres całkowitego strumienia  $\Phi$  przenikającego sferę Gaussa, której środek pokrywa się z położeniem cząstki, w funkcji promienia r tej sfery. Jednostką skali na osi pionowej tego wykresu jest  $\Phi_s = 5 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ . a) Jaki jest ładunek tej cząstki? Jakie ładunki znajdują się na b) powłoce A i c) powłoce B?





••15 W jednym z wierzchołków sześcianu Gaussa umieszczono cząstkę o ładunku +q. Znajdź strumień przenikający a) każdą ze ścian sześcianu, do której należy ten wierzchołek i b) pozostałe ściany sześcianu, wyrażony jako wielokrotność  $q/\varepsilon_0$ .

•••16 Powierzchnia Gaussa w kształcie pudełka, pokazana na rysunku 23.38, zawiera całkowity ładunek +24 C i znajduje się w polu elektrycznym, którego natężenie wynosi  $\vec{E} = [(10+2x)\hat{i}-3\hat{j}+bz\hat{k}]$  N/C, gdzie x i z są wyrażone w me-





Podrozdział 23.3 Izolowany przewodnik naładowany

•17 ssm Jednorodnie naładowana przewodząca kula o średnicy 1,2 m ma gęstość powierzchniową ładunku 8,1  $\mu$ C/m<sup>2</sup>. a) Znajdź wypadkowy ładunek na kuli. b) Jaki jest całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię kuli?

•18 Natężenie pola elektrycznego panującego tuż nad powierzchnią naładowanego bębna fotokopiarki ma wartość  $E = 2,3 \cdot 10^5$  N/C. Jaka jest gęstość powierzchniowa ładunku na bębnie?

•19 Pojazdy kosmiczne przelatujące przez ziemskie pasy promieniowania mogą zbierać dużą liczbę elektronów. Powstały ładunek może uszkodzić elementy elektroniczne i uniemożliwić ich działanie. Załóżmy, że kulisty metalowy satelita o średnicy 1,3 m zgromadził w czasie jednego obiegu orbity ładunek 2,4  $\mu$ C. a) Znajdź powstałą gęstość powierzchniową ładunku. b) Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego (wytworzonego przez ten ładunek powierzchniowy) tuż na zewnątrz satelity.

•20 Strumień a przewodzące powłoki. W środku dwóch przewodzących koncentrycznych powłok kulistych unieruchomiono naładowaną cząstkę. Na rysunku 23.39a przedstawiono przekrój tego układu. Na rysunku 23.39b pokazano wykres całkowitego strumienia  $\Phi$  przenikającego sferę Gaussa, której środek pokrywa się z położeniem cząstki, w funkcji promienia *r* tej sfery. Jednostką skali na osi pionowej tego wykresu jest  $\Phi_s = 5 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ . a) Jaki jest ładunek tej cząstki? Jakie ładunki znajdują się na b) powłoce *S* i b) powłoce *B*?



Rys. 23.39. Zadanie 20

••21 Izolowany przewodnik ma ładunek wypadkowy  $+10 \cdot 10^{-6}$  C. Wewnątrz przewodnika jest wnęka, w której znajduje się ładunek punktowy  $q = +3 \cdot 10^{-6}$  C. Jaki ładunek znajduje się na: a) powierzchni wnęki, b) zewnętrznej powierzchni przewodnika?

### Podrozdział 23.4. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria walcowa

•22 W odległości 9 cm od bardzo długiego nieprzewodzącego pręta naładowanego jednorodnie z gęstością 6 μC/m uwolniono elektron. Jaka jest początkowa wartość przyspieszenia tego elektronu?

•23 a) Bęben fotokopiarki ma długość 42 cm i średnicę 12 cm. Natężenie pola elektrycznego tuż nad powierzchnią tego bębna ma wartość  $E = 2,3 \cdot 10^5$  N/C. Oblicz całkowity ładunek znajdujący się na bębnie. b) Producent chce wytwarzać podręczną wersję tej fotokopiarki, co wymaga zmniejszenia rozmiarów bębna do długości 28 cm i średnicy 8 cm. Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni bębna nie może ulec zmianie. Jaki musi być ładunek na mniejszym bębnie?

•24 Na rysunku 23.40 przedstawiono przekrój długiej metalowej rury o cienkich ściankach i promieniu R = 3 cm. Rura jest naładowana powierzchniowo. Ładunek przypadający na jednostkę długości rury równy jest  $\lambda = 2 \cdot 10^{-8}$ C/m. Jaka jest wartość natężenia pola *E* w odległości od osi *r* rury równej a) *r* = *R*/2 i b) *r* = 2*R*? c) Wykreśl zależność wartości natężenia pola *E* w funkcji odległości *r* dla zakresu od *r* = 0 do *r* = 2*R*.



**Rys. 23.40.** Zadanie 24

•25 ssm Nieskończona naładowana linia prosta wytwarza w odległości 2 m pole elektryczne o natężeniu 4,5 · 10<sup>4</sup> N/C. Oblicz liniową gęstość ładunku znajdującego się na tej linii.

••26 Na rysunku 23.41a przedstawiono naładowany pręt o małej średnicy, a także współosiową z tym prętem naładowaną powłokę walcową. Oba ciała są nieprzewodzące, a ładunek rozmieszczony jest na ich zewnętrznych powierzchniach. Na rysunku 23.41b przedstawiono wykres wartości składowej radialnej natężenia pola pola elektrycznego w funkcji odległości *r* od ich wspólnej osi. Jednostką skali na osi pionowej jest  $E_s = 3 \cdot 10^3$  N/C. Wyznacz gęstość liniową ładunku zgromadzonego na tych powłokach.



••27 Długi prosty drut jest naładowany ujemnie ładunkiem o gęstości liniowej 3,6 nC/m. Drut ma zostać otoczony cienką nieprzewodzącą powłoką walcową, współosiową z drutem, o zewnętrznym promieniu 1,5 cm. Powłoka ma mieć dodatni ładunek na swej zewnętrznej powierzchni, rozłożony z taką gęstością powierzchniową  $\sigma$ , aby natężenie wypadkowego pola elektrycznego na zewnątrz powłoki było równe zeru. Oblicz gęstość  $\sigma$ .

••28 Długi, cienki, nieprzewodzący pręt jest naładowany jednorodnie z gęstością liniową 2 nC/m. Pręt jest otoczony współosiową długą, przewodzącą powłoką walcową (o wewnętrznym promieniu 5 cm i zewnętrznym promieniu 10 cm). Wypadkowy ładunek na przewodniku wynosi zero. a) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w odległości 15 cm od osi pręta? Jaka jest gęstość powierzchniowa ładunku na: b) wewnętrznej, c) zewnętrznej powierzchni przewodnika?

••29 ssm www Na rysunku 23.42 przedstawiono przekrój przewodzącego pręta o promieniu  $R_1 = 1,3$  mm i długości L = 11 m, który znajduje się wewnątrz cienkościennej współosiowej z prętem powłoki walcowej o promieniu  $R_2 = 10 R_1$  i takiej samej długości L. Całkowity ładunek zgromadzony na pręcie jest równy  $Q_1 = +3,4 \cdot 10^{-12}$  C, a na powłoce  $Q_2 = -2Q_1$ . Ile wynosi a) wartość E i b) jaki jest kierunek

(radialnie na zewnątrz czy do osi) natężenia pola elektrycznego w odległości  $r = 2R_2$  od wspólnej osi tych ciał? Ile wynosi c) wartość *E* i d) jaki jest kierunek (radialnie na zewnątrz czy do osi) natężenia pola elektrycznego w odległości  $r = 5R_1$  od wspólnej osi tych ciał? Jaki ładunek znajduje się na e) wewnętrznej i f) zewnętrznej powierzchni tej powłoki?



**Rys. 23.42.** Zadanie 29

••30 Na rysunku 23.43 przedstawiono wycinki dwóch bardzo długich, równoległych, unieruchomionych, naładowa-

nych nici, znajdujących się w odległości L = 8 cm od siebie. Jednorodne gęstości liniowe ładunku na niciach 1 i 2 wynoszą, odpowiednio, +6  $\mu$ C/m i -2  $\mu$ C/m. Gdzie na osi x znajduje się punkt, w którym całkowite natężenie pola elektrycznego tych dwóch nici jest równe zeru?





••31 ilw Dwie naładowane długie współosiowe powierzchnie walcowe mają promienie 3 i 6 cm. Ładunek przypadający na jednostkę długości jest równy  $5 \cdot 10^{-6}$  C/m na wewnętrznym walcu i  $-7 \cdot 10^{-6}$  C/m na zewnętrznym walcu. Znajdź a) wartość natężenia pola elektrycznego *E* i b) kierunek (radialnie na zewnątrz czy do osi) natężenia pola elektrycznego dla radialnej odległości od wspólnej osi r = 4 cm. Znajdź c) wartość natężenia pola elektrycznego *E* i d) kierunek (radialnie na zewnątrz czy do osi) natężenia pola elektrycznego dla radialnej odległości od wspólnej osi r = 8 cm.

•••32 • Długi nieprzewodzący walec o promieniu 4 cm jest naładowany niejednorodnie ładunkiem o gęstości objętościowej  $\rho$ . Gęstość ładunku jest funkcją radialnej odległości r od osi walca określoną wzorem  $\rho = Ar^2$ , gdzie  $A = 2.5 \,\mu\text{C/m}^5$ . Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w odległości: a) 3 cm, b) 5 cm od osi walca?

#### Podrozdział 23.5. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria płaszczyznowa

••33 Na rysunku 23.44 przedstawiono dwie duże cienkie płyty metalowe ustawione równolegle blisko siebie. Na swych wewnętrznych powierzchniach płyty mają nadmiarowe ładunki przeciwnego znaku o gęstości powierzchniowej  $7 \cdot 10^{-22}$ C/m<sup>2</sup>. Płyta naładowana ujemnie znajduje się z lewej strony. Znajdź natężenie pola elektrycznego wyrażone w notacji wektorowej: a) na lewo od płyt, b) na prawo od płyt, c) między płytami.



•34 Na rysunku 23.45 przedstawiono nieskończoną, płaską, nieprzewodzącą powierzchnię, w której wycięto mały okrągły otwór o promieniu *R*. Powierzchnia ta jest naładowana jednorodnie ładunkiem o gęstości powierzchniowej  $\sigma = 4,5 \text{ pC/m}^2$ . W środku tego otworu znajduje się początek osi *z*, która jest prostopadła do naładowanej powierzchni. Wyraź natężenie pola w punkcie *P* o współrzędnej *z* = 2,56 cm za pomocą notacji wektorowej. (*Wskazówka*: Zastosuj wzór (22.26) i zasadę superpozycji).



•35 • Na rysunku 23.46a przedstawiono trzy duże, równoległe plastikowe powierzchnie, które są jednorodnie naładowane. Na rysunku 23.46b pokazano zależność składowej natężenia pola elektrycznego wzdłuż osi x od położenia na tej osi przechodzącej przez wszystkie powierzchnie. Jednostką skali na pionowej osi tego wykresu jest  $E_s = 6 \cdot 10^5$  N/C. Wyznacz stosunek gęstości ładunku na powierzchni 3 do gęstości ładunku na powierzchni 2.



Rys. 23.46. Zadanie 35

•36 Na rysunku 23.47 przedstawiono przekrój przez dwie duże, równoległe nieprzewodzące płyty z jednakowymi rozkładami dodatniego ładunku o gęstości powierzchniowej  $\sigma =$ 

 $1,77 \cdot 10^{-22} \text{ C/m}^2$ . Znajdź natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ zapisane w notacji wektorowej w punktach: a) powyżej płyt, b) pomiędzy płytami, c) poniżej płyt.



•37 ssm www Na kwadratowej płycie o boku długości 8 cm i zaniedbywalnej grubości znajduje się całkowity ładunek  $6 \cdot 10^{-6}$  C. a) Oszacuj natężenie pola elektrycznego *E* tuż (powiedzmy 0,5 mm) ponad środkiem tej płyty, zakładając, że ładunek jest rozłożony równomiernie na obu jej powierzchniach. b) Oszacuj natężenie pola elektrycznego *E* w odległości 30 m (dużej w porównaniu z rozmiarami płyty) od środka tej płyty, traktując płytę jak naładowaną cząstkę.

••38 •• Na rysunku 23.48a przedstawiono elektron wystrzelony bezpośrednio z jednorodnie naładowanej plastikowej płyty z prędkością  $v_s = 2 \cdot 10^5$  m/s skierowaną prostopadle do niej. Płyta jest nieprzewodząca, płaska i bardzo duża. Na rysunku 23.48b przedstawiono zależność pionowej prędkości v tego elektronu od czasu t, aż do chwili, gdy elektron z powrotem trafił w płytę. Wyznacz gęstość powierzchniową ładunku tej płyty.



Rys. 23.48. Zadanie 38

••39 ssm Na rysunku 23.49 przedstawiono w przekroju małą nieprzewodzącą kulkę o masie m = 1 mg i ładunku

 $q = 2 \cdot 10^{-8}$  C (rozłożonym jednorodnie w całej jej objętości), zawieszoną na izolowanej nici, tworzącej kąt  $\theta = 30^{\circ}$  z pionową, jednorodnie naładowaną nieprzewodzącą płytą. Oblicz gęstość powierzchniową ładunku  $\sigma$ na płycie, uwzględniając siłę ciężkości działającą na kulkę i zakładając, że płyta rozciąga się daleko w kierunku pionowym i poziomym.



Rys. 23.49. Zadanie 39

••40 Na rysunku 23.50 przedstawiono bardzo dużą nieprzewodzącą naładowaną płytę o gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma = -2 \,\mu C/m^2$  oraz cząstkę o ładunku  $Q = 6 \,\mu C$ , znajdującą się w odległości *d* od tej płyty. Płyta i ładunek są unieruchomione. Jaka jest (inna niż w nieskończoności):

a) dodatnia i b) ujemna współrzędna punktu na osi *x*, w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  tych dwóch obiektów wynosi zero, jeśli d = 0,2 m. c) Jaka jest dodatnia współrzędna punktu na osi *x*, w którym  $\vec{E} = 0$ , jeśli d = 0,8 m?



••42 Dwie duże płyty metalowe o polu powierzchni 1 m<sup>2</sup> znajdują się naprzeciw siebie w odległości 5 cm i mają jednakowe co do wartości bezwzględnej |q|, ale przeciwne ładunki na swych wewnętrznych powierzchniach. Jaki ładunek zgromadzony jest na każdej płycie, jeśli wartość *E* natężenia pola elektrycznego między płytami wynosi 55 N/C? Zaniedbaj efekty krawędziowe.

•••43 • Na rysunku 23.51 przedstawiono przekrój przez bardzo dużą nieprzewodzącą płytę o grubości d = 9,4 mm

naładowanej jednorodnie ładunkiem o gęstości objętościowej  $\rho = 5.8$  fC/m<sup>3</sup>. Początek osi *x* znajduje się w środku tej płyty. Znajdź wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie o współrzędnej *x* równej: a) 0, b) 2 mm, c) 4,7 mm i d) 26 mm.



Rys. 23.51. Zadanie 43

### Podrozdział 23.6. Zastosowanie prawa Gaussa: symetria sferyczna

•44 Na rysunku 23.52 przedstawiono wykres wartości natężenia pole elektrycznego wewnątrz i na zewnątrz kuli naładowanej jednorodnie w całej objętości ładunkiem dodatnim. Jednostką skali na



Rys. 23.52. Zadanie 44

pionowej osi wykresu jest  $E_s = 5 \cdot 10^7$  N/C. Jaki jest całkowity ładunek zgromadzony na tej kuli? •45 Dwie naładowane współśrodkowe sfery mają promienie 10 cm i 15 cm. Ładunek na wewnętrznej sferze wynosi  $4 \cdot 10^{-8}$  C, a na zewnętrznej sferze  $2 \cdot 10^{-8}$  C. Znajdź natężenie pola elektrycznego w odległości: a) r = 12 cm, b) r = 20 cm od środka sfer.

•46 Wyobraźmy sobie kulę jednorodnie naładowaną ładunkiem dodatnim w całej objętości z wyjątkiem wąskiego radialnego tunelu przechodzącego od jednej powierzchni przez środek do przeciwległej powierzchni tej kuli. Przypuśćmy, że w dowolnym miejscu wewnątrz tego tunelu, a także poza kulą możemy umieścić proton. Niech  $F_R$  będzie wartością siły elektrostatycznej działającej na proton, gdy znajduje się on na powierzchni kuli o promieniu R. Wyraź jako wielokrotność R odległość punktu, w którym siła elektrostatyczna działająca na proton równa jest  $0.5F_R$ , jeśli ten punkt znajduje się a) na zewnątrz kuli, b) wewnątrz tunelu.

•47 ssm Na przewodzącej kuli o promieniu 10 cm znajduje się nieznany ładunek. Jaki jest wypadkowy ładunek zgromadzony na tej kuli, jeśli natężenie pola elektrycznego w odległości 15 cm od jej środka ma wartość 3 · 10<sup>3</sup> N/C i jest skierowane radialnie do jej wnętrza?

••48 • W środku powłoki kulistej unieruchomiony jest ładunek dodatni. Na rysunku 23.53 przedstawiono wartość natężenia pola elektrycznego E w funkcji odległości r od tego środka. Jednostką skali na pionowej osi wykresu jest  $E_s = 10 \cdot 10^7$  N/C. Jaki jest całkowity ładunek zgromadzony na tej powłoce?





o wewnętrznym promieniu b = 2a i zewnętrznym promieniu c = 2,4a. Kula jest naładowana jednorodnie objętościowo ładunkiem  $q_1 =$ +5 fC, a powłoka kulista ładunkiem  $q_2 = -q_1$ . Znajdź wartość natężenia pola elektrycznego w odległości r od środka dla: a) r = 0, b) r =a/2, c) r = a, d) r = 1,5a, e) r = 2,3a i f) r = 3,5a.



Jakie ładunki znajdują się na g) wewnętrznej i h) zewnętrznej powierzchni powłoki?

••50 Participation en a construction de la constru

 $-2 \mu C/m^2$ . W którym punkcie (innym niż  $x = \infty$ ) wypadkowe natężenie pola elektrycznego tych powłok równe jest zeru?

••51 ssm www Na rysunku 23.56 przedstawiono nieprzewodzaca powłoke kulista o wewnetrznym promieniu a = 2 cm i zewnetrznym promieniu b = 2,4 cm. Powłoka jest naładowana (w swojej objetości) ładunkiem dodatnim o gestości objętościowej  $\rho = A/r$ , gdzie A jest stałą, a r jest odległością od środka powłoki. Dodatkowo w środku powłoki umieszczona jest mała kulka o ładunku q = 45 fC. Jaka powinna być wartość stałej A, aby pole elektryczne w objętości powłoki ( $a \leq r \leq b$ ) było stałe?

••52 •• Na rysunku 23.57 przedstawiono nieprzewodzącą powłokę kulistą o wewnętrznym promieniu a = 10 cm i zewnętrznym promieniu b = 2a cm. Powłoka jest naładowana jednorodnie z objętościową gęstoś-





Rys. 23.57. Zadanie 52

cią ładunku  $\rho = 1,84$  nC/m<sup>3</sup>. Znajdź wartość natężenia pola elektrycznego w odległości *r* od środka powłoki dla: a) *r* = 0, b) *r* = *a*/2, c) *r* = *a*, d) *r* = 1,5*a*, e) *r* = *b* i f) *r* = 3*b*.

••53 ilw Objętościowa gęstość ładunku  $\rho$  w nieprzewodzącej kuli o promieniu R = 5,6 cm zmienia się w funkcji odległości od środka kuli zgodnie ze wzorem  $\rho = (14,1 \text{ pC/m}^3)$ r/R. a) Znajdź całkowity ładunek kuli. Znajdź wartość natężenia pola elektrycznego E w odległości r od środka powłoki dla: b) r = 0, c) r = R/2, d) r = R. e) Narysuj wykres Ew funkcji r. •••54 Na rysunku 23.58 przedstawiono w przekroju dwie kule jednorodnie naładowane objętościowo. Każda z kul ma promień *R*. Punkt *P* znajduje się na odcinku łączącym środki

tych kul w odległości R/2 od środka kuli 1. Jaki jest stosunek całkowitych ładunków kul  $q_2/q_1$ , jeśli wypadkowe pole elektryczne w punkcie Pwynosi zero?



•••55 Sferycznie symetryczny, ale niejednorodny, objętościowy rozkład ładunku powoduje powstawanie pola elektrycznego o natężeniu  $E = Kr^4$ , skierowanego radialnie od środka sfery, gdzie r jest odległością od środka sfery i K jest stałą. Jaka jest gęstość objętościowa  $\rho$  tak rozłożonego ładunku?

#### Zadania dodatkowe

**56** Natężenie pola elektrycznego w pewnej przestrzeni wynosi  $\vec{E} = (x+2)\hat{i}$  N/C, gdzie *x* jest wyrażone w metrach. Rozważ walcową powierzchnię Gaussa o promieniu r = 20 cm, która jest współosiowa z osią *x*. Jedna z podstaw walca ma współrzędną x = 0. a) Jaka jest wartość natężenia strumienia elektrycznego przenikającego drugą podstawę walca o współrzędnej x = 2 m? b) Jaki jest całkowity ładunek zawarty w walcu?

**57** Cienkościenna powłoka kulista o promieniu 25 cm ma niezrównoważony ładunek równy  $2 \cdot 10^{-7}$  C. Znajdź wartość natężenia pola elektrycznego *E* w punkcie: a) wewnątrz powłoki, b) tuż nad jej powierzchnią i c) w odległości 3 m od jej środka.

**58** Cała płaszczyzna xy jest naładowana jednorodnie ładunkiem o gęstości powierzchniowej 8 nC/m<sup>2</sup>. Jaki strumień elektryczny przenika przez sferyczną powierzchnię Gaussa o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 5 cm?

**59** Nieskończony obszar przestrzeni rozciągający się od x = -5 cm do x = 5 cm wypełniony jest ładunkiem o jednorodnej gęstości objętościowej  $\rho = 1,2$  nC/m<sup>3</sup>. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie o współrzędnych: a) x = 4 cm i b) x = 6 cm?

**60** Tajemnica proszku czekoladowego. Eksplozje wywołane przez wyładowania elektrostatyczne (iskry) stanowią poważne niebezpieczeństwo w urządzeniach przeładowujących ziarno lub proszek. Taka eksplozja wystąpiła w proszku czekoladowym w fabryce herbatników w latach siedemdziesiątych XX wieku. W fabryce tej robotnicy zwykle opróżniali dostarczone worki z proszkiem do skrzyni ładunkowej, z której proszek był wdmuchiwany przez uziemione rury z polichlorku winylu do silosa. Gdzieś na tej drodze wystąpiły dwa warunki konieczne, aby nastąpiła eksplozja: 1) Wartość natężenia pola elektrycznego wyniosła 3 · 10<sup>6</sup> N/C lub więcej,

tak że nastąpiło przebicie elektryczne i iskrzenie. 2) Energia iskry wyniosła 150 mJ lub więcej, tak że doszło do eksplozji proszku. Sprawdźmy najpierw, czy warunek (1) mógł być spełniony przy przepływie proszku przez rury z polichlorku winylu.

Załóżmy, że strumień *ujemnie* naładowanych ziarenek proszku jest wdmuchiwany przez walcową rurę o promieniu R = 5 cm. Przyjmij, że proszek i jego ładunek są rozłożone jednorodnie w rurze z gęstością objętościową ładunku  $\rho$ . a) Korzystając z prawa Gaussa, znajdź zależność natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  w rurze od odległości r od osi rury. b) Czy wartość natężenia E maleje, czy rośnie wraz ze wzrostem r? c) Czy natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  jest skierowane radialnie do osi, czy od osi rury? d) Przyjmując gęstość objętościową ładunku  $\rho = 1, 1 \cdot 10^{-3}$  C/m<sup>3</sup> (typową w fabryce herbatników), znajdź maksymalną wartość natężenia pola elektrycznego i określ, gdzie występuje ta maksymalna wartość. e) Czy iskrzenie mogło wystąpić, a jeśli tak, to gdzie? (Dalszy ciąg tej historii poznasz w zadaniu 70 w rozdziale 24).

**61** ssm Cienkościenna metalowa powłoka kulista o promieniu *a* naładowana jest ładunkiem  $q_0$ . Współśrodkowa z tą powłoką jest inna cienkościenna metalowa powłoka o promieniu b > a i ładunku  $q_0$ . Jakie jest natężenie wypadkowego pola elektrycznego w odległości *r* od środka powłok, jeśli: a) r < a, b) b > r > a, c) r > b? d) Jakie kryterium zastosowałbyś, aby określić, w jaki sposób ładunek rozkłada się pomiędzy wewnętrzne i zewnętrze powierzchnie tych powłok?

**62** Cząstka o ładunku  $q = 1 \cdot 10^{-7}$  C umieszczona jest w środku sferycznej wnęki o promieniu 3 cm, znajdującej się w dużym bloku metalu. Jakie jest natężenie pola elektrycznego, a) w odległości 1,5 cm od środka wnęki, b) gdziekolwiek w metalu?

**63** Po orbicie o promieniu r = 1 cm dookoła naładowanej kuli porusza się proton. Prędkość protonu  $v = 3 \cdot 10^5$  m/s. Znajdź ładunek zgromadzony na kuli.

**64** Wzór (23.11) ( $E = \sigma/\varepsilon_0$ ) pozwala wyznaczyć natężenie pola elektrycznego w pobliżu naładowanej przewodzącej kuli. Zastosuj ten wzór do przewodzącej kuli o promieniu *r* i ładunku *q* i pokaż, że natężenie pola elektrycznego poza tą kulą jest takie samo jak natężenie pola cząstki o ładunku *q* umieszczonej w środku kuli.

**65** Kula o promieniu *R* jest jednorodnie naładowana ładunkiem *Q*. a) Jaka część tego ładunku jest zawarta wewnątrz kuli o promieniu r = R/2? b) Jaki jest stosunek wartości natężenia pola elektrycznego w punkcie r = R/2 do wartości natężenia na powierzchni tej kuli?

**66** Strumień elektryczny  $-750 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$  wytwarzany jest przez naładowaną cząstkę i przenika sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu 10 cm i środku w punkcie, w którym znajduje się ta cząstka. a) Jaki strumień przenikałby powierzchnię

Gaussa, jeśli jej promień byłby dwa razy większy? b) Jaki jest ładunek cząstki?

**67** ssm Natężenie pola elektrycznego w punkcie *P* znajdującym się tuż ponad zewnętrzną powierzchnią wydrążonego sferycznego przewodnika o wewnętrznym promieniu 10 cm i zewnętrzym promieniu 20 cm ma wartość 450 N/C i jest skierowane na zewnątrz. Po wprowadzeniu do wnętrza tej powłoki cząstki o nieznanym ładunku *Q* pole elektryczne nadal skierowane było na zewnątrz, ale jego wartość zmniejszyła się do 180 N/C. a) Jaki był całkowity ładunek obejmowany przez zewnętrzną powierzchnię tej kuli, zanim wprowadzono do jej wnętrza ładunek *Q*? b) Wyznacz ładunek *Q*. Jaki ładunek zgromadzi się na b) wewnętrznej i c) zewnętrznej powierzchni tego przewodnika po wprowadzeniu ładunku *Q*?

**68** Całkowity strumień elektryczny przenikający każdą ze ścian kości do gry ma wartość wyrażoną w jednostkach  $10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ , która jest dokładnie równa liczbie oczek *N* (od 1 do 6) na tej ścianie. Strumień jest skierowany do środka dla nieparzystego *N* i na zewnątrz dla parzystego *N*. Jaki jest wypadkowy ładunek znajdujący się wewnątrz kości?

**69** Na rysunku 23.59 przedstawiono w przekroju trzy nieskończone nieprzewodzące płaszczyzny, na których jest równomiernie rozłożony ładunek elektryczny. Gęstości powierzchniowe ładunku wynoszą:  $\sigma_1 =$  $+2 \mu C/m^2$ ,  $\sigma_2 =$  $+4 \mu C/m^2$  i  $\sigma_3 =$ 



 $-5 \,\mu\text{C/m^2}$ , a odległość L = 1,5 cm. Jakie jest natężenie pola elektrycznego w punkcie *P* wyrażone w notacji wektorowej?

**70** Nieprzewodząca kula o promieniu 5 cm jest jednorodnie wypełniona ładunkiem o stałej gęstości objętościowej  $\rho = 3.2 \,\mu\text{C/m}^3$ . Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie odległym o a) 3,5 cm i b) 8 cm od środka tej kuli?

**71** Powierzchnia Gaussa w kształcie półkuli o promieniu R = 5,68 cm znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu E = 2,5 N/C. Powierzchnia ta nie zawiera żadnego wypadkowego ładunku. Natężenie pola elektrycznego na (płaskiej) podstawie półkuli jest prostopadłe do tej powierzchni i skierowane w stronę półkuli. Jaki jest strumień pola przenikający: a) podstawę, b) pozostałą powierzchnię półkuli?

**72** Jaki jest całkowity ładunek objęty przez sześcian Gaussa z zadania 2?

**73** Nieprzewodząca kula jest naładowana jednorodnie ładunkiem o gęstości objętościowej  $\rho$ . Niech  $\vec{r}$  będzie wektorem od środka kuli do punktu *P* wewnątrz kuli. a) Pokaż, że natężenie pola elektrycznego w punkcie *P* jest dane wzorem  $\vec{E} = \rho \vec{r}/3\varepsilon_0$ . (Zauważ, że wynik jest niezależny od promienia kuli). b) W kuli wycięto następnie kulistą wnękę, jak to przed-

stawiono na rysunku 23.60. Korzystając z zasady superpozycji, pokaż, że natężenie pola elektrycznego we wszystkich punktach wnęki jest jednakowe i równe  $\vec{E} = \rho \vec{a}/3\varepsilon_0$ , gdzie  $\vec{a}$  jest wektorem położenia środka wnęki względem środka kuli.



Rys. 23.60. Zadanie 73

**74** Kula o promieniu 6 cm jest jednorodnie wypełniona ładunkiem o gęstości objętościowej 500 nC/m<sup>3</sup>. Rozważ sześcienną powierzchnię Gaussa o środku w środku kuli. Jaki strumień elektryczny przenika tę powierzchnię, jeśli krawędź sześcianu ma długość: a) 4 cm i b) 14 cm?

75 Na rysunku 23.61 przedstawiono licznik Geigera--Müllera. czyli przyrząd używany do wykrywania promieniowania jonizujacego (promieniowania powodującego jonizację atomów). Licznik składa sie z cienkiego, dodatnaładowanego drutu, nio otoczonego przez współosiowa przewodzaca powłokę walcową, naładowaną takim samym co do wartości bezwzglednej ładunkiem ujemnym. Wewnatrz walca powstaje wiec silne radialne pole elektryczne. Walec jest wypełniony gazem szlachetnym



**Rys. 23.61.** Zadanie 75

pod niskim ciśnieniem. Gdy cząstka promieniowania wpada przez walcową ściankę do licznika, jonizuje kilka atomów gazu. Powstałe elektrony swobodne (oznaczone przez e) są przyciągane do dodatnio naładowanego drutu. Pole elektryczne jest jednak na tyle silne, że między zderzeniami z innymi atomami gazu swobodne elektrony uzyskują energię wystarczającą do zjonizowania tych atomów. Powstaje więc więcej elektronów swobodnych i proces się powtarza, aż elektrony dotrą do drutu. Powstała "lawina" elektronów jest zbierana przez drut, wytwarzając sygnał, który jest używany do zarejestrowania przejścia wywołującej ją cząstki promieniowania. Przyjmując, że promień drutu wynosi 25  $\mu$ m, promień powłoki walcowej 1,4 cm, długość rury 16 cm i natężenie pola elektrycznego przy wewnętrznej ściance powłoki 2,9 · 10<sup>4</sup> N/C, oblicz całkowity ładunek dodatni w drucie.

**76** Nieskończenie długi walec o promieniu R jest naładowany jednorodnie objętościowo. a) Wykaż, że w odległości r od osi walca (dla r < R) mamy

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0},$$

gdzie  $\rho$  jest objętościową gęstością ładunku. b) Wyprowadź wyrażenie dla E, gdy r > R.

**77** ssm Na zewnętrznej powierzchni kulistej powłoki przewodzącej znajduje się ładunek  $-14 \,\mu\text{C}$ , a w jej środku umieszczona jest naładowana cząstka. Jeśli całkowity ładunek powłoki wynosi  $-10 \,\mu\text{C}$ , to jakie są: a) ładunek znajdujący się na wewnętrznej powierzchni powłoki, b) ładunek cząstki?

**78** Kula o promieniu 4 cm jest jednorodnie wypełniona ładunkiem 6 pC. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w odległości: a) 6 cm i b) 3 cm od środka kuli?

**79** Woda w rowie melioracyjnym o szerokości w = 3,22 m i głębokości d = 1,04 m płynie z prędkością 0,207 m/s. *Strumień masy* wody przez powierzchnię jest iloczynem gęstości wody (1000 kg/m<sup>3</sup>) i jej strumienia objętości przez tę powierzchnię. Oblicz strumienie masy przez następujące powierzchnie: a) powierzchnię o polu wd, zanurzoną całkowicie w wodzie i prostopadłą do kierunku przepływu, b) prostopadłą do kierunku przepływu powierzchnię o polu 3wd/2, z której część wd znajduje się w wodzie, c) powierzchnię o polu wd/2, całkowicie zanurzoną w wodzie, prostopadłą do kierunku przepływu, d) powierzchnię o polu wd, w połowie w wodzie i w połowie nad wodą, prostopadłą do kierunku przepływu, e) powierzchnię o polu wd, całkowicie zanurzoną w wodzie, o normalnej tworzącej kąt 34° z kierunkiem przepływu.

**80** Cała płaszczyzna xy jest naładowana jednorodnie ładunkiem o gęstości powierzchniowej 8 nC/m<sup>2</sup>. Równoległa do niej płaszczyzna zdefiniowana przez z = 2 m jest jednorodnie naładowana ładunkiem o gęstości powierzchniowej 3 nC/m<sup>2</sup>. Wyznacz wartość natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie o współrzędnej: a) z = 1 m i b) z = 3 m.

**81** Kula jest jednorodnie wypełniona naładowanymi cząstkami. W jakiej odległości od środka tej kuli, wyrażonej jako wielokrotność jej promienia R a) wewnątrz i b) na zewnątrz kuli, wartość natężenia pola elektrycznego jest równa  $\frac{1}{4}$  wartości maksymalnej?

# Potencjał elektryczny

Α

Ł

Ζ

24

# **24.1.** POTENCJAŁ ELEKTRYCZNY

Ζ

0

D

#### Czego się nauczysz?

R

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **24.01** zauważyć, że siła elektrostatyczna jest siłą zachowawczą i jest z nią związana energia potencjalna;
- 24.02 zauważyć, że w każdym punkcie pola elektrycznego wytwarzanego przez naładowane ciało, ciało to wytwarza potencjał elektryczny V, który jest wielkością skalarną i może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne w zależności od znaku ładunku tego ciała;
- **24.03** dla naładowanej cząstki umieszczonej w danym punkcie pola elektrycznego wytwarzanego przez naładowane ciało zastosować związek pomiędzy potencjałem elektrycznym tego ciała V w danym punkcie, ładunkiem cząstki q i energią potencjalną  $E_p$  układu cząstka-ciało;
- 24.04 przekształcać energię wyrażoną w dżulach i elektronowoltach;
- 24.05 gdy naładowana cząstka przesuwa się z punktu początkowego do punktu końcowego w polu elektrycznym, zasto-

#### Podstawowe fakty

• Potencjał elektryczny *V* w punkcie *P* w polu elektrycznym naładowanego ciała wynosi

$$V = \frac{-W_{\infty}}{q_0} = \frac{E_{\rm p}}{q_0},$$

gdzie  $W_{\infty}$  jest pracą, którą wykonałaby siła elektrostatyczna działająca na dodatni ładunek próbny  $q_0$  przy przeniesieniu go z nieskończoności do punktu P, a  $E_p$  jest elektryczną energią potencjalną, która zostałaby w takim przypadku zmagazynowana w układzie ładunek próbny-ciało.

• Jeśli cząstka o ładunku q znajduje się w punkcie, w którym potencjał pola elektrycznego wytwarzanego przez naładowane ciało równy jest V, to elektryczna energia potencjalna  $E_p$  układu cząstka-ciało wynosi

$$E_{\rm p} = q V.$$

• Jeśli cząstka pokonuje różnicę potencjałów  $\Delta V$ , to odpowiednia zmiana elektrycznej energii potencjalnej wynosi

sować związek między zmianą potencjału  $\Delta V$ , ładunkiem cząstki q, zmianą jej energii potencjalnej  $\Delta E_{\rm p}$  i pracą W wykonaną przez siłę elektryczną;

- 24.06 zauważyć, że jeśli naładowana cząstka przesuwa się pomiędzy dwoma zadanymi punktami w polu elektrycznym naładowanego ciała, to praca wykonana przy tym przez siłę elektrostatyczną nie zależy od toru cząstki;
- **24.07** powiązać różnicę potencjałów  $\Delta V$  ze zmianą energii kinetycznej  $\Delta E_k$  naładowanej cząstki, jeśli ta cząstka pokonuje w polu elektrycznym zadaną różnicę potencjałów bez przyłożonej siły zewnętrznej;
- **24.08** powiązać różnicę potencjałów  $\Delta V$  ze zmianą energii kinetycznej  $\Delta E_k$  naładowanej cząstki i pracą  $W_{\text{zew}}$  sił zewnętrznych, jeśli ta cząstka pokonuje w polu elektrycznym zadaną różnicę potencjałów z przyłożoną siłą zewnętrzną.

$$\Delta E_{\rm p} = q \,\Delta V = q (V_{\rm k} - V_{\rm p}).$$

• Jeśli cząstka, na którą nie działa żadna siła zewnętrzna, pokonuje różnicę potencjałów  $\Delta V$ , to zastosowanie zasady zachowania energii mechanicznej pozwala określić zmianę energii kinetycznej tej cząstki jako

$$\Delta E_{\mathbf{k}} = -q \,\Delta V.$$

• Jeśli natomiast na cząstkę działa siła zewnętrzna, która wykonuje przy tym pracę  $W_{zew}$ , to odpowiednia zmiana energii kinetycznej wynosi

$$\Delta E_{\rm k} = -q\,\Delta V + W_{\rm zew}.$$

• W szczególnym przypadku, gdy  $\Delta E_k = 0$ , praca wykonana przez siłę zewnętrzną odpowiada wyłącznie pokonaniu przez cząstkę różnicy potencjałów

$$W_{\text{zew}} = q \Delta V$$



#### 0 fizyce

Jednym z celów fizyki jest identyfikacja podstawowych sił działających w naszym świecie, takich jak siła elektrostatyczna, o której mówiliśmy w rozdziale 21. Innym, związanym z tym celem jest określenie, czy dana siła jest zachowawcza, a więc czy można z nią związać energię potencjalną. Motywacją powiązania energii potencjalnej z siłą jest możliwość zastosowania zasady zachowania energii w izolowanych układach z działającą siłą. Ta wyjątkowo ważna zasada zachowania pozwala nam przewidzieć wyniki doświadczeń, w których obliczenia samej siły byłyby bardzo trudne. Fizycy i inżynierowie zauważyli na podstawie doświadczeń, że siła elektrostatyczna jest zachowawcza i związana jest z nią energia potencjalna. W tym rozdziale zdefiniujemy najpierw ten rodzaj energii, a potem zaczniemy z niej korzystać.

W ramach szybkiego testu powróćmy do sytuacji rozważanej w rozdziale 22: na rysunku 24.1 przedstawiono cząstkę 1 o dodatnim ładunku  $q_1$ umieszczoną w punkcie *P* znajdującym się w pobliżu cząstki 2 o dodatnim ładunku  $q_2$ . W rozdziale 22 wyjaśniliśmy, w jaki sposób cząstka 2 może odpychać cząstkę 1 bez żadnego kontaktu. Aby opisać tę siłę  $\vec{F}$  (która jest wielkością wektorową), zdefiniowaliśmy natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ (także wielkość wektorową) wytwarzane przez cząstkę 2 w punkcie *P*. Natężenie pola elektrycznego istnieje w punkcie *P* bez względu na to, czy znajduje się tam cząstka 1. Jeśli zdecydujemy się ją tam umieścić, to działająca siła będzie wynikiem istniejącego tam natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  i ładunku q.

Pójdźmy dalej. Jeśli uwolnimy cząstkę 1 w punkcie P, to zacznie się ona poruszać, nabywając tym samym energię kinetyczną. Energia nie może się pojawiać znikąd, zatem skąd ona pochodzi? Energia ta związana jest z energią potencjalną  $E_p$  powiązaną z siłą działającą pomiędzy dwiema cząstkami pokazanymi na rysunku 24.1. Aby wyjaśnić energię potencjalną  $E_p$  (która jest wielkością skalarną), definiujemy **potencjał elektryczny** V (także wielkość skalarną), który jest wytwarzany przez cząstkę 2 w punkcie P. Potencjał elektryczny istnieje w punkcie P bez względu na to, czy znajduje się tam cząstka 1. Jeśli zdecydujemy się ją tam umieścić, to energia potencjalna tego układu dwóch cząstek wyniknie z istniejącego tam potencjału elektrycznego V i ładunku q.

W tym rozdziale naszymi celami będą: 1) zdefiniowanie potencjału elektrycznego, 2) dyskusja, jak go obliczyć dla rożnych ustawień naładowanych cząstek i ciał oraz 3) określenie związku pomiędzy potencjałem elektrycznym V i elektryczną energią potencjalną  $E_p$ .

#### Potencjał elektryczny i elektryczna energia potencjalna

Zamierzamy zdefiniować potencjał elektryczny (lub w skrócie *potencjał*), korzystając z pojęcia elektrycznej energii potencjalnej, zatem naszym pierwszym zadaniem jest znalezienie odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób mierzyć elektryczną energię potencjalną? W rozdziale 8 mierzyliśmy grawitacyjną energię potencjalną  $E_p$  dowolnego ciała, 1) przypisując wartość  $E_p = 0$  dla konfiguracji odniesienia (na przykład na poziomie stołu) i 2) obliczając następnie pracę W wykonywaną przez siłę grawitacji przy



**Rys. 24.1.** Cząstka 1 znajduje się w punkcie *P* w polu elektrycznym cząstki 2



**Rys. 24.2.** a) W polu naładowanego pręta ładunek próbny zostaje przeniesiony z nieskończoności do punktu *P*. b) Potencjał pola elektrycznego *V* w punkcie *P* definiujemy na podstawie energii potencjalnej konfiguracji przedstawionej w punkcie a)

przesuwaniu tego ciała w górę lub w dół w stosunku do poziomu odniesienia. Następnie zdefiniowaliśmy energię potencjalną jako

$$E_{\rm p} = -W$$
 (energia potecjalna). (24.1)

Powtórzmy tę samą procedurę z naszą nową siłą zachowawczą - siłą elektrostatyczną. Korzystając z rysunku 24.2a, chcemy znaleźć energię potencjalną  $E_p$  związaną z dodatnim ładunkiem próbnym  $q_0$  umieszczonym w punkcie P w polu elektrycznym naładowanego pręta. Po pierwsze musimy określić konfigurację odniesienia, dla której energia potencialna  $E_{\rm p} = 0$ . Rozsądnym wyborem jest umieszczenie ładunku próbnego nieskończenie daleko od pręta, ponieważ w takiej sytuacji znika jego oddziaływanie z prętem. Następnie przenosimy ładunek próbny z nieskończoności do punktu P, aby stworzyć konfigurację przedstawioną na rysunku 24.2a. Obliczamy prace wykonana przez siłe elektrostatyczna nad czastka wzdłuż jej toru. Energia potencjalna ładunku w położeniu końcowym jest wówczas dana wzorem (24.1), gdzie W jest teraz pracą wykonaną przez pole elektryczne nad cząstką naładowaną przy jej przesunięciu do punktu końcowego. Nazwijmy te prace  $W_{\infty}$ , aby podkreślić, że ładunek próbny został przeniesiony z nieskończoności. Praca ta, a zatem i energia potencjalna, może być w zależności od znaku ładunku zgromadzonego na pręcie zarówno dodatnia, jak i ujemna.

Następnie definiujemy potencjał elektryczny V w punkcie P, korzystając z wielkości pracy wykonanej przez siłę elektrostatyczną i wynikającej z niej energii potencjalnej

$$V = \frac{-W_{\infty}}{q_0} = \frac{E_{\rm p}}{q_0} \qquad \text{(potencjał elektryczny)}. \tag{24.2}$$

Tak więc potencjał elektryczny odpowiada energii potencjalnej przypadającej na jednostkowy ładunek, gdy dodatni ładunek próbny przenoszony jest z nieskończoności. Pręt wytwarza ten potencjał V w punkcie P bez względu na to, czy znajduje się tam ładunek próbny (czy też cokolwiek innego), czy też nie (rys. 24.2b). Ze wzoru (24.2) wynika, że potencjał V jest wielkością skalarną (ponieważ z energią potencjalną, czy też ładunkiem nie jest związany żaden kierunek) i może być dodatni lub ujemny (ponieważ energia potencjalna i ładunek mają znaki).

Powtarzając tę procedurę, stwierdzamy, że potencjał elektryczny jest wytwarzany przez pole elektryczne naładowanego pręta w każdym punkcie. W istocie każde naładowane ciało, wytwarzając pole elektryczne w danym punkcie, wytwarza tam potencjał V. Jeśli wiemy o punkcie, że istnieje w nim już potencjał elektryczny V, to umieszczając tam cząstkę o ładunku równym powiedzmy q, natychmiast stwierdzamy, że energia potencjalna takiego układu wynosi

elektryczna energia potencjalna

 $= \text{ladunek cząstki} \frac{\text{elektryczna energia potencjalna}}{\text{ladunek jednostkowy}}$ 

lub

$$E_{\rm p} = q V, \qquad (24.3)$$

gdzie ładunek q może być dodatni lub ujemny.

*Dwie uwagi.* 1) (Podjęta dawno temu) decyzja o nazwaniu *V potencjałem* była niefortunna, ponieważ pojęcie to łatwo można pomylić z *energią potencjalną*. Owszem, obie wielkości są ze sobą powiązane (i stąd to podobieństwo), ale także istotnie się różnią i nie można ich używać zamiennie. 2) Potencjał elektryczny jest wielkością skalarną, a nie wektorową. (Docenisz to, przystępując do rozwiązywania zadań).

*Język.* Energia potencjalna jest własnością układu (lub konfiguracji) ciał, jednak czasem możemy pozbyć się tej komplikacji, przypisując ją pojedynczemu ciału. Przykładowo energia grawitacyjna piłki kopniętej na aut jest właściwie grawitacyjną energią potencjalną układu piłka-Ziemia (ponieważ jest związana z siłą działającą pomiędzy tą piłką a Ziemią). Jednak ponieważ tylko piłka w zauważalny sposób się porusza (jej ruch nie wpływa w widoczny sposób na Ziemię), więc energię potencjalną możemy przypisać samej piłce. Podobnie jeśli naładowana cząstka umieszczona jest w polu elektrycznym i nie wpływa w zauważalny sposób na to pole (lub na naładowane ciało, które to pole wytwarza), przypisujemy zwykle energię potencjalną samej cząstce.

*Jednostki.* Zgodnie ze wzorem (24.2) jednostką potencjału w układzie SI jest dżul na kulomb. Taka jednostka pojawia się tak często, że używa się dla niej specjalnej nazwy *wolt* (w skrócie V) i stąd

1 wolt = 1 dzul na kulomb.

Ta nowa jednostka pozwala nam przyjąć także inną jednostkę natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , które dotąd mierzyliśmy w niutonach na kulomb. Po dwóch przekształceniach jednostek otrzymujemy

$$1 \text{ N/C} = \left(1 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \left(\frac{1 \text{ V} \cdot \text{C}}{1 \text{ J/C}}\right) \left(\frac{1 \text{ J}}{1 \text{ N} \cdot \text{m}}\right) = 1 \text{ V/m}.$$

Czynnik przeliczeniowy w drugim nawiasie wynika z naszej, podanej wyżej, definicji wolta, a w trzecim nawiasie — z definicji dżula. Odtąd będziemy wyrażali wartości natężenia pola elektrycznego w woltach na metr, a nie w niutonach na kulomb.

#### Ruch w polu elektrycznym

**Zmiana w potencjale elektrycznym.** Jeśli naładowane ciało przeniesiemy w polu elektrycznym z punktu początkowego p do punktu końcowego k, to potencjał elektryczny zmieni się o

$$\Delta V = V_{\rm k} - V_{\rm p}.$$

Jeśli cząstkę o ładunku q przeniesiemy w polu elektrycznym z punktu początkowego p do punktu końcowego k, to elektryczna energia potencjalna układu (24.3) zmieni się o

$$\Delta E_{\rm p} = q \,\Delta V = q (V_{\rm k} - V_{\rm p}). \tag{24.4}$$

W zależności od znaków q i  $\Delta V$  zmiana ta może być dodatnia lub ujemna. Może też wynosić zero, jeśli pomiędzy punktami p i k nie zmienia się potencjał elektryczny (potencjał w obu punktach jest jednakowy). Ponieważ siła elektryczna jest zachowawcza, zmiana energii potencjalnej  $\Delta E_p$  pomiędzy punktami p i k jest jednakowa dla wszystkich torów ruchu pomiędzy tymi punktami (a więc jest *niezależna od toru cząstek*).

**Praca wykonana przez pole.** Zmianę energii potencjalnej  $\Delta E_p$  możemy powiązać z pracą wykonaną przez siłę elektryczną przy przeniesieniu cząstki z punktu p do k, stosując ogólny związek dla sił zachowawczych (wzór (8.1))

$$W = -\Delta E_{\rm p}$$
 (praca siły zachowawczej). (24.5)

Możemy następnie, korzystając ze wzoru (24.4), powiązać tę pracę ze zmianą potencjału

$$W = -\Delta E_{\rm p} = -q \,\Delta V = -q (V_{\rm k} - V_{\rm p}).$$
 (24.6)

Do tej pory pracę zawsze wiązaliśmy z siłą, teraz jednak możemy też powiedzieć, że W jest pracą wykonaną nad cząstką przez pole elektryczne (ponieważ oczywiście powoduje ono powstanie siły). Praca ta może być dodatnia, ujemna lub zerowa. Ponieważ zmiana energii  $\Delta E_p$  pomiędzy dwoma punktami nie zależy od toru ruchu, więc także praca W wykonana przez pole jest od tego toru niezależna. (Jeśli musisz obliczyć pracę wykonaną na skomplikowanym torze, wybierz tor łatwiejszy – wynik będzie taki sam).

Zachowanie energii. Jeśli naładowana cząstka porusza się w polu elektrycznym bez wpływu dodatkowej siły (poza elektryczną związaną z tym polem), to mechaniczna energia układu jest zachowana. Przypuśćmy, że elektryczną energię potencjalną możemy przypisać wyłącznie tej cząstce. Możemy wtedy zapisać zasadę zachowania energii mechanicznej przy przenoszeniu cząstki z punktu p do punktu k w postaci

$$E_{p,p} + E_{k,p} = E_{p,k} + E_{k,k}$$
(24.7)

lub

$$\Delta E_{\rm k} = -\Delta E_{\rm p}.\tag{24.8}$$

Korzystając ze wzoru (24.4), znajdujemy bardzo użyteczne wyrażenie opisujące zmianę energii kinetycznej cząstki w wyniku pokonania różnicy potencjałów

$$\Delta E_{\rm k} = -q \,\Delta V = -q (V_{\rm k} - V_{\rm p}). \tag{24.9}$$

**Praca wykonana przez siłę zewnętrzną.** Jeśli oprócz siły elektrycznej zostanie przyłożona do cząstki jakaś inna dodatkowa siła, to mówimy, że ta dodatkowa siła jest *siłą zewnętrzną*. Jest ona często utożsamiana z *czynni-kiem zewnętrznym*. Taka zewnętrzna siła może wykonać pracę nad cząstką. Jednak siła zewnętrzna nie musi być zachowawcza i w związku z tym nie zawsze można z nią związać energię potencjalną. Uwzględniamy tę pracę  $W_{\text{zew}}$ , modyfikując wzór (24.7) do postaci

energia początkowa + praca siły zewnętrznej = energia końcowa

lub

$$E_{p,p} + E_{k,p} + W_{zew} = E_{p,k} + E_{k,k}.$$
 (24.10)

Po przekształceniach i skorzystaniu ze wzoru (24.4) możemy ten wzór zapisać także w postaci

$$\Delta E_{\rm k} = -\Delta E_{\rm p} + W_{\rm zew} = -q\,\Delta V + W_{\rm zew}.\tag{24.11}$$

Praca wykonana przez siłę zewnętrzną może być dodatnia, ujemna lub równa zeru, a więc energia potencjalna układu może się zwiększyć, zmniejszyć lub nie ulec zmianie.

W szczególnym przypadku, gdy cząstka pozostaje w spoczynku przed i po zmianie położenia w polu, składniki wzorów (24.10) i (24.11) związane z energią kinetyczną znikają i otrzymujemy wzór

$$W_{\text{zew}} = q \Delta V \qquad (\text{dla } E_{k,p} = E_{k,k}). \tag{24.12}$$

W tym szczególnym przypadku praca  $W_{zew}$  pozwala cząstce pokonać różnicę potencjałów  $\Delta V$ , nie wywołuje jednak zmiany jej energii kinetycznej. Porównując wzory (24.6) i (24.12), widzimy, że w tym szczególnym przypadku praca siły zewnętrznej jest dokładnie przeciwna pracy wykonanej przez pole

$$W_{\text{zew}} = -W$$
 (dla  $E_{k,p} = E_{k,k}$ ). (24.13)

*Elektronowolty.* W fizyce atomowej i subatomowej energie wyrażone w jednostkach układu SI często zawierają wysokie potęgi 10. Znacznie wygodniejszą jednostką (spoza układu SI) jest *elektronowolt* (eV). Jeden elektronowolt jest energią równą pracy potrzebnej do przesunięcia pojedynczego ładunku elementarnego e (np. elektronu lub protonu) między punktami o różnicy potencjałów  $\Delta V$  równej dokładnie jednemu woltowi. Ze wzoru (24.6) wynika, że wartość tej pracy wynosi  $q \Delta V$ , czyli:

$$1 \text{ eV} = e(1 \text{ V}) = (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ J/C}) = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$
 (24.14)

### Sprawdzian 1

Na rysunku przedstawiono proton poruszający się z punktu p do punktu k w jednorodnym polu elektrycznym. Czy praca wykonana nad protonem przez a) pole elektryczne i b) siłę zewnętrzną jest dodatnia, czy ujemna? c) Czy elektryczna energia potencjalna protonu wzrasta, czy maleje? d) Czy energia potencjalna protonu wzrasta, czy maleje w wyniku jego ruchu?



 $\overrightarrow{E}$ 

#### Przykład 24.01. Praca i energia potencjalna w polu elektrycznym

Cząstki promieniowania kosmicznego bezustannie wybijają elektrony z cząsteczek powietrza w atmosferze. Każdy elektron po uwolnieniu doznaje działania siły elektrostatycznej  $\vec{F}$  wskutek istnienia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytwarzanego w atmosferze przez naładowane cząstki, znajdujące się już na Ziemi. W pobliżu powierzchni Ziemi natężenie tego pola elektrycznego ma wartość E = 150 N/C i jest skierowane w dół. Ile wynosi zmiana  $\Delta E_p$  elektrycznej energii potencjalnej uwolnionego elektronu, jeśli siła elektrostatyczna powoduje, że przemieszcza się on pionowo do góry na odległość d = 520 m (rys. 24.3)? Jaką różnicę potencjałów pokonuje wtedy elektron? **Rys. 24.3.** Elektron w atmosferze doznaje przemieszczenia  $\vec{d}$ , skierowanego do góry, pod działaniem siły  $\vec{F}$  związanej z polem elektrycznym o nateżeniu  $\vec{E}$ 

$$\vec{F}$$
  $\vec{d}$ 

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Zmiana  $\Delta E_p$  elektrycznej energii potencjalnej elektronu związana jest z pracą *W*, wykonaną przez pole elektryczne nad elektronem, zgodnie ze wzorem (24.5) (*W* =  $-\Delta E_p$ ).

2) Praca wykonana przez stałą siłę  $\vec{F}$  nad cząstką przesuwającą się o  $\vec{d}$  wynosi

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}.$$

3) Siła elektrostatyczna i natężenie pola elektrycznego są powiązane wzorem  $\vec{F} = q\vec{E}$ , gdzie q jest ładunkiem elektronu równym  $-1.6 \cdot 10^{-19}$  C.

**Obliczenia:** Podstawiając wyrażenie na  $\vec{F}$  do wzoru (25.3) i obliczając iloczyn skalarny, otrzymujemy

$$W = q\vec{E}\cdot\vec{d} = qEd\cos\theta,$$

gdzie  $\theta$  jest kątem między kierunkami  $\vec{E}$  i  $\vec{d}$ . Natężenie pola  $\vec{E}$  jest skierowane w dół, a przemieszczenie  $\vec{d}$ do góry, więc  $\theta = 180^{\circ}$ . Po podstawieniu tej i innych danych otrzymujemy

$$W = (-1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(150 \text{ N/C})(520 \text{ m}) \cos 180^{\circ}$$
  
= 1.2 \cdot 10^{-14} J.

Ze wzoru (24.5) wynika, że:

$$\Delta E_{\rm p} = -W = -1.2 \cdot 10^{-14} \,\mathrm{J} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Zgodnie z tym wynikiem po wzniesieniu się elektronu na wysokość 520 m jego elektryczna energia potencjalna *maleje* o  $1,2 \cdot 10^{-14}$  J.

Aby znaleźć zmianę potencjału elektrycznego, korzystamy ze wzoru (24.4):

$$\Delta V = \frac{\Delta E_{\rm p}}{-q} = \frac{-1.2 \cdot 10^{-14} \,\text{J}}{-1.6 \cdot 10^{-19} \,\text{C}}$$
  
= 7.5 \cdot 10<sup>4</sup> V = 75 kV (odpowiedź).

Wynika z tego, że siła elektrostatyczna wykonuje pracę, przenosząc elektron na *wyższy* potencjał.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

# **24.2.** POWIERZCHNIE EKWIPOTENCJALNE A POLE ELEKTRYCZNE

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 24.09 znaleźć powierzchnię ekwipotencjalną i opisać, jaki jest jej związek z kierunkiem natężenia pola elektrycznego, które jest z nią związane;
- **24.10** znając zależność natężenia pola elektrycznego od położenia, obliczyć zmianę potencjału  $\Delta V$  od punktu początkowego do punktu końcowego poprzez wybranie toru ruchu pomiędzy tymi punktami i scałkowanie iloczynu skalarnego natężenia pola  $\vec{E}$  i elementu długości wzdłuż toru d $\vec{s}$ ;

#### Podstawowe fakty \_\_

• Potencjał pola elektrycznego we wszystkich punktach na powierzchni ekwipotencjalnej jest taki sam. Praca wykonana nad ładunkiem próbnym przy przenoszeniu go z jednej powierzchni na drugą nie zależy od położenia tych punktów na odpowiednich powierzchniach i nie zależy od toru, po jakim przenosi się ten ładunek. Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  jest zawsze skierowane prostopadle do odpowiednich powierzchni ekwipotencjalnych.

 Różnica potencjałów elektrycznych pomiędzy dwoma punktami p i k wynosi

$$V_{\rm k}-V_{\rm p}=-\int\limits_{\rm p}^{\rm K}\vec{E}\cdot{\rm d}\vec{s},$$

- **24.11** dla jednorodnego pola elektrycznego powiązać wartość natężenia pola elektrycznego E z odległością  $\Delta x$  i różnicą potencjałów  $\Delta V$  pomiędzy sąsiednimi powierzchniami ekwipotencjalnymi;
- **24.12** na podstawie wykresu wartości natężenia pola elektrycznego E w funkcji położenia wzdłuż osi, obliczyć zmianę potencjału  $\Delta V$  zachodzącą pomiędzy punktem początkowym a końcowym;
- 24.13 wyjaśnić znaczenie i zastosowanie konfiguracji odniesienia o zerowym potencjale.

gdzie całkowanie następuje wzdłuż dowolnej drogi łączącej te punkty. Jeśli całkowanie wzdłuż jakiejś drogi jest skomplikowane, to można zawsze wybrać inną drogę, dla której całkowanie będzie prostsze.

• Jeśli wybieramy  $V_{\rm p}=0,$  to potencjał w konkretnym punkcie wynosi k

$$V = -\int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{K}} \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{s}.$$

 W jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu E zmiana potencjału z wyższej powierzchni ekwipotencjalnej na niższą, odległa o Δx wynosi

$$\Delta V = -E\Delta x.$$

#### Powierzchnie ekwipotencjalne

Sąsiadujące ze sobą punkty, które mają jednakowy potencjał elektryczny, tworzą **powierzchnię ekwipotencjalną**. Może być ona albo wyimaginowaną, albo rzeczywistą powierzchnią fizyczną. Jeśli cząstka porusza się między dwoma punktami: początkowym i końcowym po tej samej powierzchni ekwipotencjalnej, to pole elektryczne nie wykonuje nad cząstką naładowaną żadnej pracy W. Wynika to ze wzoru (24.6), zgodnie z którym W = 0, jeśli  $V_k = V_p$ . Z niezależności pracy (i stąd energii potencjalnej oraz potencjału) od drogi mamy W = 0 dla *dowolnej* linii łączącej punkty początkowy i końcowy leżące na powierzchni ekwipotencjalnej, bez względu na to, czy tor cząstki leży całkowicie na powierzchni ekwipotencjalnej.

Na rysunku 24.4 przedstawiono *rodzinę* powierzchni ekwipotencjalnych związanych z polem elektrycznym wytworzonym przez pewien rozkład ładunków. Praca wykonywana przez pole elektryczne nad cząstką naładowaną, gdy cząstka porusza się po drogach I i II, jest równa zeru, ponieważ każda z tych dróg zaczyna się i kończy na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej. Praca wykonywana podczas ruchu naładowanej cząstki po drogach III i IV nie jest równa zeru, ale ma taką samą wartość dla obu tych dróg, ponieważ początkowe i końcowe potencjały są dla nich identyczne, czyli drogi III i IV łączą tę samą parę powierzchni ekwipotencjalnych.



Powierzchnie ekwipotencjalne pola wytworzonego przez ładunek punktowy lub sferycznie symetryczny rozkład ładunku są ze względu na symetrię współśrodkowymi sferami. Dla jednorodnego pola elektrycznego powierzchnie ekwipotencjalne są płaszczyznami prostopadłymi do linii pola. Powierzchnie ekwipotencjalne są zawsze prostopadłe do linii pola elektrycznego a zatem i do natężenia  $\vec{E}$ , które jest zawsze styczne do tych linii. Gdyby natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  nie było prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej, to miałoby składową leżącą wzdłuż tej powierzchni. Składowa taka wykonywałaby więc pracę nad cząstką naładowaną przy jej ruchu po powierzchni. Jednak biorąc pod uwagę wzór (24.6), widzimy, że jeśli powierzchnia jest rzeczywiście ekwipotencjalna, to żadna praca nie może być wykonywana; wynika stąd jedyny możliwy wniosek, że natężenie  $\vec{E}$  musi być wszędzie prostopadłe do powierzchni ekwipotencjal-





b)



**Rys. 24.5.** Linie pola elektrycznego (fioletowe) i przekroje powierzchni ekwipotencjalnych (złote) dla: a) pola jednorodnego, b) pola ładunku punktowego, c) pola dipola elektrycznego

nej. Na rysunku 24.5 przedstawiono linie pola elektrycznego i przekroje powierzchni ekwipotencjalnych dla jednorodnego pola elektrycznego, dla pola ładunku punktowego i dla pola dipola elektrycznego.

#### Obliczanie potencjału na podstawie natężenia pola

Różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami: początkowym p i końcowym k w polu elektrycznym możemy obliczyć, jeśli znamy wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  wzdłuż jakiejkolwiek drogi łączącej te punkty. W celu obliczenia różnicy wyznaczamy pracę wykonaną przez pole nad dodatnim ładunkiem próbnym przy przesuwaniu ładunku od punktu początkowego p do punktu końcowego k a następnie stosujemy wzór (24.6).

Rozważmy dowolne pole elektryczne, przedstawione na rysunku 24.6 za pomocą linii pola, i dodatni ładunek próbny  $q_0$ , który porusza się wzdłuż przedstawionej drogi od punktu początkowego p do punktu końcowego k. Dla nieskończenie małego przesunięcia d*s*, w dowolnym punkcie toru na ładunek działa siła elektrostatyczna  $q_0\vec{E}$ . Z rozdziału 7 wiemy, że pracę d*W* wykonaną nad cząstką przez siłę  $\vec{F}$  przy przesunięciu d*s* określa iloczyn skalarny

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}. \tag{24.15}$$

Dla sytuacji z rysunku 24.6  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$  i wzór (24.15) przybiera postać

$$\mathrm{d}W = q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.\tag{24.16}$$

Aby znaleźć całkowitą pracę W, wykonaną nad cząstką przez pole podczas jej ruchu od punktu początkowego do punktu końcowego, sumujemy przez całkowanie prace wykonane nad ładunkiem podczas wszystkich przesunięć d $\vec{s}$  wzdłuż drogi całkowania

$$W = q_0 \int_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}} \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{s}.$$
 (24.17)

Jeśli podstawimy całkowitą pracę W ze wzoru (24.17) do wzoru (24.6), to otrzymamy

$$V_{\rm k} - V_{\rm p} = -\int\limits_{\rm p}^{\rm k} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \qquad (24.18)$$



**Rys. 24.6.** Ładunek próbny  $q_0$  porusza się od punktu początkowego p do punktu końcowego k wzdłuż przedstawionego toru w niejednorodnym polu elektrycznym. W trakcie przesunięcia ds działa na ten ładunek siła elektryczna  $q_0 \vec{E}$ . Siła działa w kierunku linii pola w położeniu ładunku próbnego Stąd różnica potencjałów  $V_k - V_p$  między dowolnymi dwoma punktami początkowym i końcowym w polu elektrycznym jest równa wziętej ze znakiem minus *całce krzywoliniowej* (całce wzdłuż drogi cząstki) z  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ od punktu początkowego do punktu końcowego. Siła elektrostatyczna jest zachowawcza, dlatego też dla każdego toru otrzymujemy ten sam wynik (niezależnie od tego, czy całkę łatwo, czy trudno obliczyć).

Jeśli natężenie pola elektrycznego jest znane w pewnym obszarze, to wzór (24.18) pozwala obliczyć różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami tego obszaru. Jeśli wybierzemy potencjał  $V_p$  w punkcie początkowym równy zeru, to wzór (25.18) przybierze postać

$$V = -\int_{p}^{k} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \qquad (24.19)$$

w której pominęliśmy wskaźnik przy  $V_k$ . Wzór (24.19) daje nam potencjał V w dowolnym punkcie końcowym pola elektrycznego *względem zerowego potencjału* w punkcie początkowym. Jeśli punkt początkowy wybierzemy w nieskończoności, to wzór (24.19) określi potencjał w dowolnym punkcie końcowym względem zerowego potencjału w nieskończoności.

Jednorodne pole elektryczne. Zastosujmy wzór (24.18) do jednorodnego pola, tak jak to pokazano na rysunku 24.7. Zaczynamy w punkcie p na krzywej ekwipotencjalnej o potencjale  $V_p$  i przesuwamy się do puktu k na krzywej ekwipotencjalnej o niższym potencjale  $V_k$ . Odległość między tymi liniami ekwipotencjalnymi równa jest  $\Delta x$ . Przesuniemy się wzdłuż toru, który jest równoległy do kierunku natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ (czyli prostopadłego do krzywych ekwipotencjalnych). Kąt pomiędzy  $\vec{E}$ a ds we wzorze (24.18) równy jest zeru, a więc iloczyn skalarny

$$\vec{E} \cdot ds = E ds \cos 0 = E ds.$$



**Rys. 24.7.** Przemieszczamy się pomiędzy punktami p i k sąsiednich linii ekwipotencjalnych w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , równolegle do linii pola

Ponieważ E jest stałe dla jednorodnego pola, więc wzór (24.18) przybiera postać

$$V_{\rm k} - V_{\rm p} = -E \int_{\rm p}^{\rm k} {\rm d}s.$$
 (24.20)

Całka w tym wyrażeniu odpowiada sumie wszystkich elementów drogi ds od p do k, ale wiemy już, że sumą tą jest długość  $\Delta x$ . Możemy zatem zapisać różnicę potencjałów  $V_k - V_p$  jako

 $\Delta V = -E\Delta x \qquad \text{(pole jednorodne)}. \qquad (24.21)$ 

Jest to zatem zmiana napięcia  $\Delta V$  pomiędzy dwiema krzywymi ekwipotencjalnymi w jednorodnym polu elektrycznym o wartości natężenia *E*, oddalonymi o  $\Delta x$ . Jeśli przesuwamy się w kierunku pola o odległość  $\Delta x$ , potencjał maleje. Jeśli w kierunku przeciwnym, rośnie.

Wektor natężenia pola elektrycznego wskazuje kierunek od wyższego do niższego potencjału.



#### Sprawdzian 2

Na rysunku przedstawiono przekrój zbioru równoległych powierzchni ekwipotencjalnych i pięć torów, wzdłuż których będziemy przesuwać elektron z jednej powierzchni na drugą. a) Jaki jest kierunek natężenia pola elektrycznego na tych powierzchniach? b) Określ dla każdego toru, czy wykonywana praca jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru. c) Uszereguj tory według wykonanej pracy, zaczynając od największej.



#### Przykład 24.02. Obliczanie zmiany potencjału z natężenia pola elektrycznego

**a)** Na rysunku 24.8a przedstawiono dwa punkty początkowy p i końcowy k w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ . Punkty te leżą na tej samej linii pola elektrycznego (niepokazanej na rysunku) i znajdują się w odległości d. Znajdź różnicę potencjałów  $V_k - V_p$ przez przesunięcie dodatniego ładunku próbnego  $q_0$  od punktu p do punktu k wzdłuż przedstawionego toru, który jest równoległy do kierunku natężenia pola.

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Możemy znaleźć różnicę potencjałów między dwoma dowolnymi punktami w polu elektrycznym przez obliczenie całki z  $\vec{E}$  po d $\vec{s}$  wzdłuż linii łączącej te dwa punkty, zgodnie ze wzorem (24.18).

**Obliczenia:** Wyprowadzając wzór (24.21), wykonaliśmy już uprzednio obliczenia dla takiej drogi w kierunku natężenia pola elektrycznego. Wykonując drobne zmiany w zapisie, możemy, korzystając ze wzoru (24.21), napisać

$$V_{\rm k} - V_{\rm p} = -Ed$$
 (odpowiedź).

**b**) Znajdź teraz różnicę potencjałów  $V_k - V_p$  przez przesunięcie dodatniego ładunku próbnego  $q_0$  z punktu

początkowego do punktu końcowego wzdłuż linii pck, przedstawionej na rysunku 24.8b.

**Obliczenia:** Ponownie zastosujemy podstawowy fakt z punktu a), teraz jednak ładunek próbny porusza się wzdłuż drogi składającej się z dwóch linii pc i ck. We wszystkich punktach wzdłuż drogi pc przesunięcie ds ładunku próbnego jest prostopadłe do  $\vec{E}$ . Stąd kąt  $\theta$  między  $\vec{E}$  i d $\vec{s}$  jest równy 90° i iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  wynosi zero. Ze wzoru (24.18) wynika wtedy, że punkty p i c mają ten sam potencjał:  $V_c - V_p = 0$ . Można się było tego spodziewać. Oba punkty znajdują się na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej, która jest prostopadła do kierunku natężenia pola.

Dla toru ck mamy  $\theta = 45^{\circ}$  i ze wzoru (24.18)

$$V_{k} - V_{p} = -\int_{c}^{k} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_{c}^{k} E(\cos 45^{\circ}) ds$$
$$= -E \cdot \cos 45^{\circ} \int_{c}^{k} ds.$$

Całka w tym równaniu jest po prostu długością toru ck i z rysunku 24.8b wynika, że długość ta wynosi

nica potencjałów między dwoma punktami nie zależy od drogi miedzy nimi. Wniosek: gdy chcemy znaleźć różnice potencjałów miedzy dwoma punktami - przez przesunięcie ładunku próbnego między nimi - mo-

żemy zaoszczędzić czas i pracę dzięki wyborowi drogi,

który upraszcza zastosowanie wzoru (24.18).

 $d/\cos 45^\circ$ . Stad:

$$V_{\rm k} - V_{\rm p} = -E(\cos 45^{\circ}) \frac{d}{\cos 45^{\circ}}$$
  
= -Ed (odpowiedź).

Otrzymaliśmy taki sam wynik, jak w punkcie a) – róż-

natężenie pola elektrycznego natężenie pola elektrycznego skierowane jest od wyższego jest prostopadłe do toru pc. potencjału do niższego potencjału potencjał nie ulega zmianie p wyższy potencjał ds p  $q_0$  $\vec{E}$  $q_0$  $d\vec{s}$  $\vec{E}$  $q_0$ 45 **Rys. 24.8.** a) Ładunek próbny  $q_0$ natężenie pola elektrycznego ma składową wzdłuż toru ck, porusza się po linii prostej potencjał ulega zmianie z punktu p do punktu k wzdłuż linii jednorodnego zewnętrznego pola elektrycznego. b) Ładunek niższy potencjał  $q_0$  porusza się wzdłuż toru pck b)

a) w tym samym polu elektrycznym

**LUS** Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

# **24.3.** POTENCJAŁ POLA NAŁADOWANEJ CZĄSTKI

#### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 24.14 dla danego punktu w polu elektrycznym naładowanej cząstki zastosować związek pomiędzy potencjałem elektrycznym V, ładunkiem cząstki q i odległością r od tej cząstki;
- 24.15 zauważyć zależność między algebraicznymi znakami potencjału wytwarzanego przez cząstkę i ładunkiem tej cząstki;
- 24.16 dla punktów na powierzchni sferycznie symetrycznego rozkładu ładunków lub poza nią obliczyć potencjał elektryczny,

#### Podstawowe fakty \_

 Potencjał elektryczny pola pojedynczej naładowanej cząstki w odległości r od tej cząstki wynosi

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

Potencjał V ma taki sam znak jak ładunek q.

tak jakby cały ich ładunek był skoncentrowany na cząstce w środku sferv:

- 24.17 obliczyć w danym punkcie wypadkowy potencjał wielu naładowanych cząstek, zauważając, że korzystamy z sumowania liczb, a nie wektorów;
- 24.18 narysować linie ekwipotencjalne dla naładowanej cząstki.

 Potencjał pola wytworzonego przez układ naładowanych cząstek wynosi

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}.$$

Potencjał taki jest algebraiczną sumą poszczególnych potencjałów i nie uwzględnia żadnych kierunków.



**Rys. 24.9.** Cząstka o ładunku dodatnim gwytwarza pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ i potencjałe elektrycznym V w punkcie P. Potencjał obliczamy, przesuwając ładunek próbny  $q_0$  z punktu P do nieskończoności. Ładunek próbny jest przedstawiony w odległości r od naładowanej cząstki; zaznaczono przemieszczenie d $\vec{s}$ 

#### Potencjał pola naładowanej cząstki

Zastosujemy obecnie wzór (24.18) w celu wyprowadzenia wyrażenia na potencjał elektryczny V w przestrzeni wokół cząstki naładowanej względem potencjału zerowego w nieskończoności. Rozważmy punkt P w odległości R od nieruchomej cząstki o dodatnim ładunku q (rys. 24.9). Aby skorzystać ze wzoru (24.18), wyobraźmy sobie, że przesuwamy dodatni ładunek próbny  $q_0$  z punktu P do nieskończoności. Ponieważ nie jest istotny tor, jaki wybieramy, a więc wybierzmy najprostszy – wzdłuż prostej przechodzącej przez ładunek q i punkt P.

Aby zastosować wzór (24.18), musimy obliczyć iloczyn skalarny

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cos \theta ds. \tag{24.22}$$

Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  na rysunku 24.9 jest skierowane radialnie od wybranej cząstki. Stąd przesunięcie d $\vec{s}$  cząstki próbnej wzdłuż jej toru ma ten sam kierunek co  $\vec{E}$ . Oznacza to, że we wzorze (24.22) kąt  $\theta = 0$ i cos $\theta = 1$ . Tor jest radialny, a więc możemy napisać ds = dr. Następnie podstawiając granice R i  $\infty$ , możemy zapisać wzór (24.18) w postaci

$$V_{\rm k} - V_{\rm p} = -\int_{R}^{\infty} E \,\mathrm{d}r. \tag{24.23}$$

Przyjmijmy teraz  $V_k = 0 \text{ (w }\infty)$  i  $V_p = V \text{ (w odległości } R)$ . Następnie do wzoru na wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie, w którym znajduje się ładunek próbny, podstawimy ze wzoru (22.3)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$
 (24.24)

Po tych zmianach wzór (24.23) przybiera postać

$$0 - V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r}\right]_R^\infty = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}.$$
 (24.25)

Wyznaczając V i zamieniając R na r, otrzymujemy

V

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{24.26}$$

jako wyrażenie na potencjał V pola wytworzonego przez cząstkę o ładunku q w dowolnej odległości r od cząstki.

Chociaż wzór (24.26) wyprowadziliśmy dla cząstki naładowanej dodatnio, to wyprowadzenie jest słuszne także dla cząstki naładowanej ujemnie, tzn. gdy q jest wielkością ujemną. Zauważ, że znak V jest taki sam, jak znak q:

Cząstka dodatnio naładowana wytwarza dodatni potencjał elektryczny. Cząstka ujemnie naładowana wytwarza ujemny potencjał elektryczny.

Na rysunku 24.10 przedstawiono przestrzenny wykres zależności (24.26) dla dodatnio naładowanej cząstki — wartość V jest przedstawiona

na osi pionowej. Zauważ, że wartość potencjału wzrasta, gdy r maleje do zera. W rzeczywistości zgodnie ze wzorem (24.26) potencjał V staje się nieskończony przy r = 0, chociaż na rysunku 24.10 mamy w tym punkcie skończoną dużą wartość.

Wzór (24.26) określa również potencjał elektryczny *poza lub na ze-wnętrznej powierzchni* sferycznie symetrycznego rozkładu ładunku. Możemy to udowodnić, korzystając z jednego z twierdzeń o powłoce z podrozdziałów 21.1 i 23.6 do zastąpienia danego sferycznego rozkładu ładunku przez ładunek całkowity umieszczony w środku. Wtedy możemy powtórzyć wyprowadzenie, prowadzące do wzoru (24.26), jeśli tylko nie rozważamy punktu wewnątrz danego rozkładu.

#### Potencjał pola układu naładowanych cząstek

Wypadkowy potencjał układu ładunków punktowych w jakimś punkcie możemy obliczyć, korzystając z zasady superpozycji. Obliczamy oddzielnie potencjały, pochodzące od każdego ładunku w danym punkcie (przy zastosowaniu wzoru (24.26) z uwzględnieniem znaku ładunku) i następnie sumujemy te potencjały. Dla układu *n* ładunków wypadkowy potencjał wynosi

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \qquad (n \text{ naładowanych cząstek}), \quad (24.27)$$

gdzie  $q_i$  jest ładunkiem *i*-tej cząstki, a  $r_i$  jest odległością danego punktu od *i*-tego ładunku. Suma we wzorze (24.27) jest *sumą algebraiczną*, a nie sumą wektorową, taką jak suma przy obliczaniu natężenia pola elektrycznego dla układu ładunków punktowych. Na tym polega przewaga rachunkowa potencjału nad natężeniem pola elektrycznego: łatwiej jest zsumować kilka wielkości skalarnych niż zsumować kilka wielkości wektorowych, dla których trzeba uwzględniać kierunki i składowe.



**Rys. 24.10.** Komputerowy wykres potencjału elektrycznego V(r) pola cząstki naładowanej dodatnim ładunkiem, znajdującej się w początku płaskiego układu współrzędnych *xy*. Potencjał w punktach tej płaszczyzny jest odłożony na osi pionowej. (Zakrzywione linie dodano dla uzyskania lepszej widoczności wykresu). Nieskończona wartość potencjału *V* przewidywana przez wzór (24.26) dla r = 0 nie została tu zaznaczona

#### Sprawdzian 3

Na rysunku przedstawiono trzy układy, zawierające po dwa protony. Uszereguj te układy według wypadkowego potencjału pola, wytworzonego przez protony w punkcie *P*, zaczynając od największego.



#### Przykład 24.03. Wypadkowy potencjał pola układu cząstek naładowanych

Jaki jest potencjał elektryczny w punkcie P, znajdującym się w środku kwadratu, w którego wierzchołkach umieszczone są ładunki punktowe (rys. 24.11a)? Odległość d wynosi 1,3 m, a ładunki mają wartości:

> $q_1 = +12 \text{ nC},$   $q_3 = +31 \text{ nC},$  $q_2 = -24 \text{ nC},$   $q_4 = +17 \text{ nC}.$

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Potencjał elektryczny V w punkcie P jest algebraiczną sumą potencjałów elektrycznych pochodzących od czterech ładunków punktowych. (Potencjał elektryczny jest skalarem, zatem nie jest ważne, który z ładunków znajduje się w którym wierzchołku).



**Rys. 24.11.** a) Cztery naładowane cząstki znajdują się w wierzchołkach kwadratu. b) Zamknięta krzywa jest przekrojem płaszczyzny rysunku i powierzchni ekwipotencjalnej, zawierającej punkt *P*. (Krzywa jest naszkicowana tylko orientacyjnie).

Obliczenia: Ze wzoru (24.27) mamy

$$V = \sum_{i=1}^{4} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r} + \frac{q_3}{r} + \frac{q_4}{r} \right).$$

Odległość r wynosi 
$$d/\sqrt{2}$$
, czyli 0,919 m, a suma ładun-  
ków jest równa

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = (12 - 24 + 31 + 17) \cdot 10^{-9} \text{ C}$$
  
= 36 \cdot 10^{-9} \cdot C,

zatem

$$V = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \,\mathrm{N \cdot m^2/C^2})(36 \cdot 10^{-9} \,\mathrm{C})}{0,919 \,\mathrm{m}} \approx 350 \,\mathrm{V}$$

(odpowiedź).

W pobliżu każdego z trzech dodatnich ładunków na rysunku 24.11a potencjał ma bardzo duże wartości dodatnie. W pobliżu pojedynczego ładunku ujemnego potencjał ma bardzo duże wartości ujemne. Dlatego we wnętrzu kwadratu powinny znajdować się punkty, które mają taki sam potencjał, jak w punkcie *P*. Krzywa na rysunku 24.11b ilustruje przekrój płaszczyzny rysunku z powierzchnią ekwipotencjalną zawierającą punkt *P*. Dowolny punkt na tej krzywej ma taki sam potencjał, jak punkt *P*.

#### Przykład 24.04. Potencjał nie jest wektorem, nie ma kierunku

a) Na rysunku 24.12a przedstawiono 12 elektronów (o ładunku -e) rozmieszczonych w jednakowych odległościach na okręgu o promieniu *R*. Jaki jest potencjał elektryczny i natężenie pola elektrycznego elektronów w środku *C* okręgu (względem V = 0 w nieskończoności)?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Potencjał elektryczny V w punkcie C jest sumą algebraiczną potencjałów elektrycznych, pochodzących od każdego elektronu. (Potencjał elektryczny jest skalarem, dlatego też miejsca elektronów nie odgrywają żadnej roli). 2) Natężenie pola elektrycznego w punkcie C jest wielkością wektorową, dlatego też w tym przypadku miejsca elektronów *są* ważne.

**Obliczenia:** Elektrony mają takie same ładunki -e i wszystkie są umieszczone w takiej samej odległości R od punktu C, a więc wzór (24.27) daje nam

$$V = -12 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{R} \qquad (\text{odpowied}\acute{z}). (24.28)$$

Ze względu na symetrię ustawienia na rysunku 24.12a wektor natężenia pola elektrycznego w punkcie C od dowolnego danego elektronu znosi się z wektorem natężenia pola od elektronu leżącego na przeciwnym końcu

średnicy i dlatego w punkcie C

$$\dot{E} = 0$$
 (odpowiedź).

**b**) Jeśli elektrony przesuniemy wzdłuż okręgu tak, że zostaną rozłożone nierównomiernie na łuku okręgu o kącie środkowym  $120^{\circ}$  (rys. 24.12b), to jaki będzie wtedy potencjał w punkcie *C*? Jak zmieni się natężenie pola elektrycznego w punkcie *C* (jeśli w ogóle się zmieni)?



**Rys. 24.12.** a) Dwanaście elektronów rozłożono równomiernie na okręgu. b) Tutaj elektrony są rozmieszczone nierównomiernie na łuku tego samego okręgu

**Rozumowanie:** Potencjał jest nadal opisany wzorem (24.28), ponieważ odległość od punktu *C* żadnego z elektronów nie uległa zmianie, a ich ustawienie jest nieistotne. Natężenie pola elektrycznego przestaje być

równe zeru, ponieważ ustawienie elektronów nie jest już symetryczne. Niezerowe wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest teraz skierowane w stronę ładunków.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **24.4.** POTENCJAŁ POLA DIPOLA ELEKTRYCZNEGO

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **24.19** obliczyć potencjał *V* pola dipola elektrycznego w danym punkcie, korzystając z wartości *p* elektrycznego momentu dipolowego lub iloczynu odległości pomiędzy ładunkami dipola *d* i wartości każdego z jego ładunków *q*;
- 24.20 określić obszary pola dipola elektrycznego o dodatnim, ujemnym i zerowym potencjale;
- 24.21 porównać zanik potencjału elektrycznego w funkcji rosnącej odległości dla pola pojedynczej cząstki naładowanej i dipola elektrycznego.

#### Podstawowe fakty \_\_\_\_

• W odległości r od dipola elektrycznego o momencie dipolowym p = qd potencjał elektryczny V wynosi

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2}$$

dla  $r \gg d$ ;  $\theta$  jest kątem pomiędzy osią dipola a odcinkiem łączącym środek dipola z punktem pomiaru.

#### Potencjał pola dipola elektrycznego

Zastosujemy teraz wzór (24.27) w celu obliczenia potencjału dipola elektrycznego w dowolnym punkcie *P* (rys. 24.13a). W punkcie *P* dodatni ładunek punktowy (znajdujący się w odległości  $r_{(+)}$ ) wytwarza potencjał  $V_{(+)}$ , a ujemny ładunek punktowy (w odległości  $r_{(-)}$ ) wytwarza potencjał  $V_{(-)}$ . Wypadkowy potencjał w punkcie *P* zgodnie ze wzorem (24.27) wynosi

$$V = \sum_{i=1}^{2} V_{i} = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left( \frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}} \right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}.$$
(24.29)

Dipole występujące w przyrodzie, na przykład odpowiadające wielu cząsteczkom, są całkiem małe i jesteśmy zwykle zainteresowani tylko punktami znajdującymi się w dużych odległościach od dipola,  $r \gg d$ , gdzie *d* jest odległością między ładunkami, a *r* jest odległością od środka dipola do punktu *P*. W takich warunkach możemy przyjąć, że dwa odcinki łączące punkt *P* z ładunkami dipola są równoległe, a ich różnica jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej *d* pokazanego na



**Rys. 24.13.** a) Punkt *P* znajduje się w odległości *r* od środka *O* dipola. Prosta *O P* tworzy kąt  $\theta$  z osią dipola. b) Jeśli punkt *P* znajduje się daleko od dipola, to odcinki o długościach  $r_{(+)}$  i  $r_{(-)}$  są w przybliżeniu równoległe do odcinka o długości *r* i odcinek czarnej linii przerywanej jest w przybliżeniu prostopadły do odcinka o długości  $r_{(-)}$ 

rysunku 24.13b. Różnica ta jest na tyle mała, że iloczyn ich długości można przybliżyć przez  $r^2$ . Wynika stąd, że

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx d\cos\theta$$
 i  $r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2$ .

Jeśli podstawimy te wielkości do wzoru (24.29), to przybliżona wartość *V* będzie wynosiła

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\cos\theta}{r^2}$$

gdzie kąt  $\theta$  jest mierzony od osi dipola, tak jak pokazano na rysunku 24.13a. Wzór ten możemy teraz zapisać w postaci:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad \text{(dipol elektryczny)}, \tag{24.30}$$

gdzie p = qd jest wartością elektrycznego momentu dipolowego  $\vec{p}$ , zdefiniowanego w podrozdziale 22.3. Wektor  $\vec{p}$  jest skierowany wzdłuż osi dipola od ujemnego do dodatniego ładunku (dlatego też kąt  $\theta$  jest mierzony od kierunku wektora  $\vec{p}$ ). Używamy tego wektora do określania orientacji dipola elektrycznego.

#### Sprawdzian 4

Załóżmy, że wybraliśmy trzy punkty w równych (dużych) odległościach *r* od środka dipola z rysunku 24.13: punkt *a* znajduje się na osi dipola powyżej ładunku dodatniego, punkt *b* znajduje się na osi dipola poniżej ładunku ujemnego i punkt *c* znajduje się w płaszczyźnie prostopadłej do dipola przechodzącej przez środek dipola. Uszereguj punkty według odpowiadających im wartości potencjału elektrycznego dipola, zaczynając od największej dodatniej.

#### Indukowany moment dipolowy

Wiele cząsteczek, na przykład cząsteczka wody, ma *trwały* elektryczny moment dipolowy. Dla innych cząsteczek (zwanych *cząsteczkami niepolarnymi*) i dla każdego odosobnionego atomu środki ładunku dodatniego i ujemnego pokrywają się (rys. 24.14a) i stąd nie powstaje żaden moment dipolowy. Jeśli jednak umieścimy atom lub cząsteczkę niepolarną w zewnętrznym polu elektrycznym, to pole odkształca orbity elektronu i rozsuwa środki ładunku dodatniego i ujemnego (rys. 24.14b). Elektrony są naładowane ujemnie, a więc ulegają przesunięciu w kierunku przeciwnym do kierunku natężenia pola. To przesunięcie prowadzi do powstania momentu

**Rys. 24.14.** a) Atom z dodatnio naładowanym jądrem (kolor zielony) i ujemnie naładowanymi elektronami (kolor złoty cieniowany). Środki ładunków dodatniego i ujemnego pokrywają się. b) Jeśli atom znajdzie się w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$ , to orbity elektronów ulegną takiemu odkształceniu, że środki ładunków dodatniego i ujemnego przestaną się pokrywać. Pojawi się indukowany moment dipolowy  $\vec{p}$ . Odkształcenie zostało tu wyolbrzymione pole elektryczne przesuwa ładunki dodatnie i ujemne, wytwarzając dipol



dipolowego  $\vec{p}$ , skierowanego w kierunku natężenia pola. Taki moment dipolowy nazywamy *indukowanym* przez pole, a o atomie lub cząsteczce mówimy, że jest *spolaryzowany* (spolaryzowana) przez pole (jedna część jest naładowana dodatnio, a druga ujemnie). Gdy usuniemy pole, indukowany moment dipolowy i polaryzacja znikną.

# **24.5.** POTENCJAŁ POLA ŁADUNKU O CIĄGŁYM ROZKŁADZIE

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

**24.22** znaleźć wypadkowy potencjał dla pola ładunku o ciągłym rozkładzie wzdłuż linii lub na powierzchni przez rozdzielenie tego ładunku na elementy i zsumowanie (przez całkowanie) potencjału pola każdego z tych elementów.

#### Podstawowe fakty

Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie znajdujemy:
 1) dzieląc ten ładunek na elementy dq, które mogą być traktowane jak cząstki i 2) sumując potencjał pola każdego z tych elementów przez całkowanie pełnego rozkładu

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}q}{r}.$$

• Aby przeprowadzić to całkowanie, dq zamieniamy na iloczyn liniowej gęstości ładunku  $\lambda$  i elementu długości (takiego jak dx) lub gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma$  i elementu powierzchni (takiego jak dxdy).

• W niektórych przypadkach, gdy ładunek jest rozłożony symetrycznie, całkowanie w dwóch wymiarach można zredukować do całkowania w jednym wymiarze.

#### Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie

Jeśli rozkład ładunku q jest ciągły (jak np. dla jednorodnie naładowanego cienkiego pręta czy tarczy), to nie możemy zastosować sumowania ze wzoru (24.27) w celu obliczenia potencjału V w punkcie P. Zamiast tego musimy wybrać nieskończenie mały element ładunku dq, określić potencjał dV wytworzony przez dq w punkcie P i potem scałkować go po całym rozkładzie ładunku.

Przyjmijmy ponownie, że potencjał jest równy zeru w nieskończoności. Jeśli potraktujemy element ładunku dq jako ładunek punktowy, to możemy skorzystać ze wzoru (24.26), w celu wyrażenia potencjału dV wytworzonego przez dq w punkcie P

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r} \qquad (\text{dodatnie lub ujemne } dq), \qquad (24.31)$$

gdzie r jest odległością między P i dq. W celu znalezienia całkowitego potencjału V w punkcie P obliczamy całkę, aby zsumować potencjały wytworzone przez wszystkie elementy ładunku

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}.$$
 (24.32)

Całkę należy obliczyć po całym rozkładzie ładunku. Zauważ, że nie ma potrzeby rozważania we wzorze (24.32) *żadnych składowych wektora*, gdyż potencjał elektryczny jest skalarem. Zbadamy teraz dwa ciągłe rozkłady ładunku: naładowaną linię i naładowaną tarczę.

#### Naładowana linia

Na rysunku 24.15a przedstawiono cienki, nieprzewodzący pręt o długości *L*, naładowany jednorodnie dodatnio z gęstością liniową  $\lambda$ . Określimy potencjał elektryczny *V* wytworzony przez pręt w punkcie *P*, leżącym na prostej prostopadłej do pręta przechodzącej przez jego lewy koniec i odległym od lewego końca o *d*.

Rozważmy element dx pręta (rys. 24.15b). Ten (i każdy inny) element pręta ma ładunek

$$dq = \lambda dx. \tag{24.33}$$

Wytwarza on potencjał elektryczny dV w punkcie P, który znajduje się w odległości  $r = (x^2 + d^2)^{1/2}$  od tego elementu (rys. 24.15c). Traktując element jak ładunek punktowy, możemy skorzystać ze wzoru (24.31) do napisania potencjału dV w postaci

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + d^2)^{1/2}}.$$
 (24.34)

Ponieważ ładunek w pręcie jest dodatni i wybraliśmy V = 0 w nieskończoności, więc z podrozdziału 24.3 wnioskujemy, że potencjał dV we wzorze (24.34) musi być dodatni.



**Rys. 24.15.** a) Cienki, jednorodnie naładowany pręt wytwarza potencjał elektryczny V w punkcie P. b) Element pręta można traktować jak cząstkę. c) Potencjał w punkcie P związany z tym elementem zależy od odległości r. Musimy zsumować potencjały związane ze wszystkimi elementami od lewej strony (d) do prawej strony (e)
Znajdziemy teraz całkowity potencjał V wytworzony przez pręt w punkcie P przez scałkowanie wzoru (24.34) wzdłuż pręta od x = 0 do x = L(rys. 24.15d i e), stosując całkę 17 z dodatku E. Otrzymujemy

$$V = \int dV = \int_{0}^{L} \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{\lambda}{(x^{2}+d^{2})^{1/2}} dx = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_{0}} \int_{0}^{L} \frac{dx}{(x^{2}+d^{2})^{1/2}}$$
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_{0}} \Big[ \ln (x + (x^{2}+d^{2})^{1/2}) \Big]_{0}^{L} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_{0}} \Big[ \ln (L + (L^{2}+d^{2})^{1/2}) - \ln d \Big].$$

Wynik ten możemy uprościć, stosując związek  $\ln A - \ln B = \ln A/B$ . Ostatecznie otrzymujemy

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \left[ \frac{L + (L^2 + d^2)^{1/2}}{d} \right].$$
 (24.35)

Ponieważ potencjał V jest sumą dodatnich wartości dV, a więc też jest dodatni, zgadza się to z wartością logarytmu, który jest dodatni, gdyż jego argument jest większy od jedności.

### Naładowana tarcza

W podrozdziale 22.5 obliczyliśmy wartość natężenia pola elektrycznego w punktach leżących na osi symetrii, prostopadłej do plastikowej tarczy o promieniu *R*, naładowanej jednorodnie powierzchniowo, z gęstością  $\sigma$ na jednej powierzchni. Wyprowadzimy teraz wyrażenie na potencjał elektryczny *V*(*z*) w dowolnym punkcie leżącym na osi symetrii takiej tarczy. Ponieważ mamy do czynienia z rozkładem ładunku o symetrii walcowej, moglibyśmy zacząć od nieskończenie małego elementu pierścienia o szerokości *dr*, widocznego ze środka tarczy pod kątem d $\theta$ . Musielibyśmy jednak w takim przypadku wykonać całkowanie w dwóch wymiarach. Zróbmy zatem coś prostszego.

Na rysunku 24.16 rozważaliśmy nieskończenie mały element składający się z płaskiego pierścienia o promieniu R' i szerokości radialnej dR'. Ładunek takiego pierścienia wynosi

$$\mathrm{d}q = \sigma(2\pi R')(\mathrm{d}R'),$$

gdzie  $(2\pi R')(dR')$  jest polem górnej powierzchni pierścienia. Wszystkie części tego naładowanego elementu znajdują się w takiej samej odległości r od punktu P na osi tarczy. Korzystając z rysunku 24.16, możemy zastosować wzór (24.31) w celu napisania przyczynku do potencjału elektrycznego w punkcie P, pochodzącego od tego pierścienia

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2 + R'^2}}.$$
 (24.36)

Wypadkowy potencjał w punkcie *P* znajdujemy przez dodanie (scałkowanie) przyczynków od wszystkich pierścieni, od R' = 0 do R' = R

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$
(24.37)



**Rys. 24.16.** Plastikowa tarcza o promieniu R jest jednorodnie naładowana na górnej powierzchni ładunkiem o gęstości powierzchniowej  $\sigma$ . Chcemy znaleźć potencjał V w punkcie P na osi tarczy

Zauważ, że zmienną w drugiej całce we wzorze (24.37) jest R', a nie współrzędna *z*, która pozostaje stała przy całkowaniu po powierzchni tarczy. (Przy obliczaniu całki założyliśmy dodatkowo, że  $z \ge 0$ ).

## **24.6.** Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału

### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 24.23 znając zależność potencjału elektrycznego od położenia wzdłuż danej osi, wyznaczyć natężenie pola elektrycznego wzdłuż tej osi;
- 24.24 znając wykres zależności potencjału pola elektrycznego wzdłuż danej osi, wyznaczyć natężenie pola elektrycznego wzdłuż tej osi;

### Podstawowe fakty.

• Składowa natężenia  $\vec{E}$  w dowolnym kierunku jest wziętą z ujemnym znakiem pochodną potencjału względem przemieszczenia w tym kierunku

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

• Składowe natężenia  $\vec{E}$  w kierunkach *x*, *y* i *z* można wyznaczyć ze wzorów:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

- **24.25** w przypadku jednorodnego pola elektrycznego powiązać wartość natężenia pola E z odległością  $\Delta x$  i różnicą potencjałów  $\Delta V$  pomiędzy sąsiednimi liniami ekwipotencjalnymi;
- **24.26** powiązać kierunek pola elektrycznego z kierunkami, w których potencjał elektryczny rośnie lub maleje.

Dla pola jednorodnego o natężeniu  $\vec{E}$  wzory powyższe mają postać

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s},$$

gdzie *s* jest przesunięciem prostopadle do powierzchni ekwipotencjalnych.

• Natężenie pola elektrycznego w kierunku równoległym do powierzchni ekwipotencjalnej jest równe zero.



**Rys. 24.17.** Ładunek próbny  $q_0$  przesuwa się o d $\vec{s}$  z jednej powierzchni ekwipotencjalnej na drugą. (Odległość między powierzchniami została powiększona dla lepszego efektu). Przemieszczenie d $\vec{s}$  tworzy kąt  $\theta$ z kierunkiem natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ 

### Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału

W podrozdziale 24.2 opisywaliśmy, jak znaleźć potencjał w punkcie końcowym, jeśli znamy natężenie pola elektrycznego wzdłuż toru od punktu odniesienia do punktu końcowego. W tym podrozdziale postąpimy odwrotnie – będziemy obliczać natężenie pola elektrycznego, gdy znamy potencjał elektryczny. Jak pokazano na rysunku 24.5, rozwiązanie graficzne tego problemu jest proste. Jeśli znamy potencjał V we wszystkich punktach w pobliżu układu ładunków, to możemy narysować zbiór powierzchni ekwipotencjalnych. Linie pola elektrycznego naszkicowane prostopadle do tych powierzchni ujawniają zmienność natężenia  $\vec{E}$ . Teraz chcemy znaleźć matematyczny równoważnik tej procedury graficznej.

Na rysunku 24.17 przedstawiono przekrój zbioru leżących blisko siebie powierzchni ekwipotencjalnych o różnicy potencjałów dV między każdą parą sąsiednich powierzchni. Zgodnie z rysunkiem natężenie pola  $\vec{E}$  w dowolnym punkcie *P* jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej, przechodzącej przez punkt *P*.

Załóżmy, że dodatni ładunek próbny  $q_0$  przesuwa się o d $\vec{s}$  z jednej powierzchni ekwipotencjalnej na sąsiednią. Ze wzoru (24.6) wynika, że praca pola elektrycznego nad ładunkiem próbnym podczas takiego przemieszczenia wynosi  $-q_0 dV$ . Ze wzoru (24.16) i rysunku 24.17 wynika, że praca ta może być także zapisana w postaci iloczynu skalarnego  $q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$ , czyli  $q_0 E \cos \theta ds$ . Przyrównując te dwa wyrażenia, otrzymujemy

$$-q_0 \mathrm{d}V = q_0 E \cos\theta \,\mathrm{d}s,\tag{24.38}$$

czyli

$$E\cos\theta = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}.\tag{24.39}$$

Ponieważ  $E \cos \theta$  jest składową natężenia  $\vec{E}$  w kierunku przemieszczenia d*s*, więc wzór (24.39) można zapisać w postaci

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$
 (24.40)

Dodaliśmy tu wskaźnik przy E i przeszliśmy do symboli pochodnej cząstkowej, aby podkreślić, że wzór (24.40) zawiera tylko zmianę potencjału V wzdłuż szczególnej osi (tu osi s) i tylko składową natężenia  $\vec{E}$  wzdłuż tej osi. Wzór (24.40) (który jest w istocie odwrotnością wzoru (24.18)) można wyrazić słowami w następujący sposób:

Składowa natężenia  $\vec{E}$  w dowolnym kierunku jest wziętym ze znakiem minus stosunkiem zmiany potencjału elektrycznego przy przemieszczeniu w tym kierunku do wartości tego przemieszczenia.

Jeśli wybierzemy jako oś s kolejno osie x, y i z, to stwierdzimy, że odpowiadające im składowe natężenia  $\vec{E}$  wynoszą

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$
 (24.41)

Jeśli więc znamy V dla wszystkich punktów w obszarze wokół rozkładu ładunku, czyli jeśli znamy funkcję V(x, y, z), to możemy znaleźć składowe natężenia  $\vec{E}$  (i stąd samo  $\vec{E}$ ) w dowolnym punkcie, przez obliczenie pochodnych cząstkowych potencjału.

W prostym przypadku, gdy pole elektryczne jest jednorodne, wzór (24.40) przybiera postać

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s},\tag{24.42}$$

gdzie oś *s* jest prostopadła do powierzchni ekwipotencjalnych. Składowa natężenia pola elektrycznego jest równa zeru w dowolnym kierunku równoległym do powierzchni ekwipotencjalnych, ponieważ potencjał na powierzchni ekwipotencjalnej jest stały.

### **Sprawdzian 5**

Na rysunku przedstawiono trzy pary równoległych płyt w jednakowej odległości i potencjał każdej płyty. Pole elektryczne między płytami jest jednorodne i jego natężenie jest do nich prostopadłe. a) Uszereguj pary według wartości natężenia pola między płytami, zaczynając od największej. b) Dla której pary natężenie pola elektrycznego jest skierowane w prawo? c) Jeśli w połowie odległości między trzecią parą płyt zostanie uwolniony



elektron, to czy tam pozostanie, będzie poruszał się w prawo ze stałą prędkością, będzie poruszał się w lewo ze stałą prędkością, będzie przyspieszał w prawo, czy będzie przyspieszał w lewo?

### Przykład 24.05. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału

Potencjał elektryczny w dowolnym punkcie na osi symetrii prostopadłej do jednorodnie naładowanej tarczy jest określony wzorem (24.37)

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$

Wychodząc z tego wzoru, wyprowadź wzór na natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie na osi tarczy.

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Chcemy obliczyć natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w zależności od odległości z wzdłuż osi tarczy. Dla dowolnej wartości z natężenie  $\vec{E}$  musi być skierowane wzdłuż tej osi, ponieważ tarcza ma symetrię obrotową względem niej. Wobec tego potrzebujemy obliczyć składową  $E_z$  natężenia  $\vec{E}$  w kierunku osi z. Ta składowa jest wziętą ze znakiem minus pochodną cząstkową potencjału elektrycznego względem odległości z.

**Obliczenia:** Korzystając z ostatniego równania we wzorze (24.41), możemy napisać

$$\begin{split} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (\sqrt{z^2 + R^2} - z) \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \qquad (\mathrm{odpowied} \acute{z}). \end{split}$$

Jest to identyczne wyrażenie, jak wyprowadzone przez całkowanie w podrozdziale 22.5, przy zastosowaniu prawa Coulomba.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **24.7.** ELEKTRYCZNA ENERGIA POTENCJALNA UKŁADU NAŁADOWANYCH CZĄSTEK

### Czego się nauczysz? \_\_\_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 24.27 zauważyć, że całkowita energia potencjalna układu naładowanych cząstek jest równa pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną w celu utworzenia tego układu począwszy od sytuacji, w której te cząstki znajdują się nieskończenie daleko od siebie;
- 24.28 obliczyć energię potencjalną pary naładowanych cząstek;
- 24.29 zauważyć, że jeśli w układzie jest więcej niż jedna para

cząstek, to całkowita energia potencjalna tego układu jest równa sumie energii potencjalnych każdej pary cząstek;

- **24.30** zastosować zasadę zachowania energii mechanicznej w układzie naładowanych cząstek;
- 24.31 obliczyć prędkość ucieczki naładowanej cząstki z układu naładowanych cząstek (minimalną prędkość początkową potrzebną do jej przeniesienia nieskończenie daleko od tego układu).

### Podstawowe fakty.

 Elektryczna energia potencjalna układu naładowanych cząstek jest równa pracy potrzebnej do utworzenia tego układu z cząstek, będących początkowo w nieskończonej odległości od siebie. Dla dwóch cząstek znajdujących się w odległości r

$$E_{\rm p} = W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}.$$

### Elektryczna energia potencjalna układu naładowanych cząstek

W tym podrozdziale obliczymy elektryczną energię potencjalną układu dwóch naładowanych cząstek, a następnie krótko omówimy sposób uogólnienia tego wyniku do układu więcej niż dwóch cząstek. Zaczniemy od sprawdzenia pracy, którą musimy wykonać (działając siłą zewnętrzną), aby zbliżyć dwie naładowane cząstki, które początkowo znajdują się nieskończenie daleko od siebie, a w położeniu końcowym znajdują się blisko siebie pozostając w spoczynku. Jeśli ładunek tych dwóch cząstek ma jednakowy znak, to musimy przy tym pokonać ich wzajemne odpychanie. Wykonana przez nas praca jest dodatnia i jej wynikiem jest dodatnia energia potencjalna końcowego układu dwóch cząstek. Jeśli natomiast dwie cząstki mają ładunki o przeciwnych znakach, to nasza praca jest łatwa ze względu na wzajemne przyciąganie cząstek. Nasza praca jest ujemna, a jej wynikiem jest ujemna energia potencjalna tego układu.

Skorzystajmy z tej procedury, aby stworzyć układ dwóch cząstek przedstawionych na rysunku 24.18: cząstkę 1 (o dodatnim ładunku  $q_1$ ) i cząstkę 2 (o dodatnim ładunku  $q_2$ ): znajdujących się w odległości r. Mimo że obie cząstki są naładowane dodatnio, otrzymany wynik można także stosować w sytuacji, gdy obie cząstki są naładowane ujemnie lub ich ładunki mają przeciwne znaki.

Zacznijmy od układu, na który składa się unieruchomiona cząstka 2 i znajdująca się w nieskończoności cząstka 1. Początkowa energia potencjalna takiego układu dwóch cząstek równa jest  $E_{p,p}$ . Następnie przenosimy cząstkę 1 w jej położenie końcowe, energia potencjalna układu będzie wtedy wynosić  $E_{p,k}$ . Praca jaką wykonujemy nad układem zmienia jego energię potencjalną o  $\Delta E_p = E_{p,k} - E_{p,p}$ .

Korzystając ze wzoru (24.4) ( $\Delta E_p = q \Delta V = q(V_k - V_p)$ ), możemy powiązać zmianę energii  $\Delta E_p$  z różnicą potencjałów, przez którą przenosimy cząstkę 1:

$$E_{\rm p,k} - E_{\rm p,p} = q(V_{\rm k} - V_{\rm p}).$$
 (24.43)

Obliczmy składniki tego wzoru. Początkowa energia potencjalna  $E_{p,p} = 0$ , ponieważ cząstki znajdują się w położeniu odniesienia (jak to omówiliśmy w podrozdziale 24.1). Dwa potencjały we wzorze (24.43) są związane z cząstką 2 i dane są wzorem (24.26)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r}.$$
 (24.44)

Oznacza to, że gdy cząstka 1 znajduje się początkowo w odległości  $r = \infty$ , potencjał w tym punkcie wynosi  $V_p = 0$ . Gdy przenosimy ją w położenie końcowe w odległości r, potencjał w tym punkcie równy jest

$$V_{\rm k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r}.$$
 (24.45)

Podstawiając te wyniki do wzoru (24.43) i opuszczając indeks k, stwierdzamy, że końcowa konfiguracja ma energię potencjalną równą

$$E_{\rm p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \qquad \text{(układ dwóch cząstek).} \tag{24.46}$$

Wzór (24.46) zawiera znaki obu ładunków; Jeśli oba ładunki mają ten sam znak, to energia  $E_p$  jest dodatnia. Jeśli ładunki mają przeciwne znaki, to energia  $E_p$  jest ujemna.

Jeśli teraz dodajemy kolejną cząstkę o ładunku  $q_3$ , powtarzamy nasze rachunki zaczynając od położenia cząstki 3 w nieskończoności, a następnie



**Rys. 24.18.** Dwa unieruchomione ładunki znajdują się w odległości *r* od siebie

przenosząc ją do jej końcowego położenia w odległości  $r_{31}$  od cząstki 1 i  $r_{32}$  od cząstki 2. W tym końcowym położeniu potencjał  $V_k$  w punkcie, gdzie znajduje się cząstka 3, jest algebraiczną sumą potencjału związanego z cząstką 1 i potencjału związanego z cząstką 2. Po wykonaniu rachunków okazuje się, że:

Całkowita energia potencjalna układu cząstek jest sumą energii potencjalnych dla każdej pary cząstek tworzących ten układ.

Wynik powyższy ma zastosowanie dla dowolnej liczby cząstek. Teraz gdy dysponujemy wyrażeniem opisującym energię potencjalną układu cząstek, możemy zastosować zasadę zachowania energii, tak jak to opisuje wzór (24.10). Możemy na przykład, gdy układ składa się z wielu cząstek, rozważać energię kinetyczną (i związaną z nią *prędkość ucieczki*) niezbędną do opuszczenia przez jedną z tych cząstek układu pozostałych cząstek.

### Przykład 24.06. Energia potencjalna układu trzech cząstek naładowanych

Na rysunku 24.19 przedstawiono trzy naładowane cząstki, utrzymywane w swych położeniach przez siły, które nie są pokazane. Jaka jest elektryczna energia potencjalna  $E_p$  tego układu cząstek? Przyjmijmy, że d = 12 cm i że:

$$q_1 = +q, \qquad q_2 = -4q \qquad i \qquad q_3 = 2q,$$

gdzie q = 150 nC.



**Rys. 24.19.** Trzy unieruchomione ładunki znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Jaka jest energia potencjalna tego układu?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Energia potencjalna  $E_p$  układu jest równa pracy, jaką musimy wykonać przy tworzeniu układu, przesuwając każdy ładunek z nieskończoności.

**Obliczenia:** Spróbujmy więc w myśli zbudować układ z rysunku 24.19, zaczynając od jednego z ładunków punktowych, powiedzmy  $q_1$ , na właściwym miejscu

i pozostałych w nieskończoności. Następnie przesuwamy inny ładunek, powiedzmy  $q_2$ , z nieskończoności na odpowiadające mu miejsce. Ze wzoru (24.46), po podstawieniu *d* zamiast *r*, energia potencjalna  $E_{p,12}$ związana z parą ładunków  $q_1$  i  $q_2$  wynosi

$$E_{\mathrm{p},12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d}.$$

Następnie przenosimy ostatni ładunek  $q_3$  z nieskończoności na jego miejsce. Praca, którą musimy wykonać w tym ostatnim kroku, jest równa sumie pracy przy zbliżaniu  $q_3$  do  $q_1$  i pracy przy zbliżaniu  $q_3$  do  $q_2$ . Ze wzoru (24.46), po podstawieniu *d* zamiast *r*, suma ta wynosi

$$W_{13} + W_{23} = E_{p,13} + E_{p,23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2q_3}{d}.$$

Całkowita energia potencjalna  $E_p$  układu trzech ładunków jest sumą energii potencjalnych związanych z trzema parami ładunków. Ta suma (która jest niezależna od kolejności skupiania ładunków) wynosi

$$E_{p} = E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \left( \frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d} \right)$$

$$= -\frac{10q^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}d}$$

$$= -\frac{(8,99 \cdot 10^{9} \text{ N} \cdot \text{m}^{2}/\text{C}^{2})(10)(150 \cdot 10^{-9} \text{ C})^{2}}{0,12 \text{ m}}$$

$$= -1,7 \cdot 10^{-2} \text{ J} = -17 \text{ mJ} \qquad (\text{odpowied} ź).$$

Ujemna energia potencjalna oznacza, że utworzenie układu wymaga wykonania ujemnej pracy w sytuacji, gdy początkowo te trzy ładunki znajdują się nieskończonie daleko od siebie. Mówiąc inaczej, siła zewnętrzna musi wykonać 17 mJ pracy, aby rozdzielić całkowicie układ, kończąc na trzech ładunkach w nieskończonych od siebie odległościach.

Morał płynący z powyższych rachunków jest następujący: Jeśli mamy do czynienia ze zbiorem naładowanych cząstek, to aby znaleźć ich energię potencjalną, należy znaleźć potencjał każdej z możliwych par tych cząstek, a następnie zsumować wyniki.

### Przykład 24.07. Zachowanie energii mechanicznej i elektrycznej energii potencjalnej

Cząstka alfa (dwa protony i dwa neutrony) porusza się w strone jądra atomu złota (79 protonów i 118 neutronów), przecinając przestrzeń wypełnioną elektronami, która otacza to jądro, i kieruje się bezpośrednio w stronę jądra (rys. 24.20). Cząstka alfa zwalnia aż do chwili, w której na moment się zatrzymuje, gdy zbliża się na odległość r = 9,23 fm do środka jądra. Następnie zawraca i podąża drogą, którą przybyła. (Ponieważ jądro złota jest znacznie bardziej masywne niż cząstka alfa, możemy założyć, że jądro się nie porusza.) Jaka była energia kinetyczna  $E_{k,p}$  cząstki alfa, gdy znajdowała się ona nieskończenie daleko od jądra atomu złota? Przyjmijmy założenie, że jedyną siłą działającą pomiędzy cząstką alfa i jadrem atomu złota jest (elektrostatyczna) siła Coulomba i potraktuj oba ciała jak pojedyncze cząstki naładowane.



**Rys. 24.20.** Cząstka alfa poruszająca się dokładnie w kierunku środka jądra atomu złota zatrzymuje się na chwilę (gdy cała jej energia kinetyczna zmienia się w energię potencjalną), a następnie zawraca

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Podczas całego opisanego procesu energia mechaniczna układu składającego się z *cząstki alfa i atomu złota* jest zachowana.

*Rozumowanie:* Gdy cząstka alfa znajduje się poza atomem, początkowa elektryczna energia potencjalna

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

układu  $E_{p,p}$  równa jest zero, ponieważ atom ma jednakową liczbę elektronów i protonów, przez co natężenie wytwarzanego przez ten atom *wypadkowego* pola elektrycznego wynosi zero. Jednak kiedy cząstka alfa przechodzi przez obszar, w którym znajdują się elektrony, pole elektryczne przez nie wytwarzane zanika. Wynika to z faktu, że elektrony działają jak zamknięta kulista powłoka ładunku i natężenie pola elektrycznego wewnątrz takiej powłoki jest równe zeru (jak to omawialiśmy w podrozdziale 23.6). Cząstka alfa wciąż odczuwa pole elektryczne protonów w jądrze, które odpycha protony w cząstce alfa.

Kiedy zbliżająca się cząstka alfa jest spowalniana przez tę odpychającą siłę, jej energia kinetyczna zamienia się w energię potencjalną układu. W chwili gdy cząstka na moment się zatrzymuje, transfer ten jest całkowity, a energia kinetyczna wynosi  $E_{k,k} = 0$ .

*Obliczenia:* Zasada zachowania energii mechanicznej mówi, że

$$E_{k,p} + E_{p,p} = E_{k,k} + E_{p,k}.$$
 (24.47)

Znamy dwie wielkości:  $E_{p,p} = 0$  i  $E_{k,k} = 0$ . Wiemy także, że energia potencjalna  $E_{p,k}$  w punkcie zatrzymania elektronu dana jest przez prawą stronę wzoru (24.46) z  $q_1 = 2e, q_2 = 79e$  (gdzie *e* jest ładunkiem elementarnym 1,6  $\cdot$  10<sup>-19</sup> C, a r = 9,23 fm. Możemy zatem napisać wzór (24.47) w postaci

$$E_{k,p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(2e)(79e)}{9,23 \text{ fm}}$$
  
=  $\frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(158)(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{9,23 \cdot 10^{-15} \text{ m}}$   
=  $3,94 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 24,6 \text{ MeV}$  (odpowiedź).

# **24.8.** POTENCJAŁ IZOLOWANEGO NAŁADOWANEGO PRZEWODNIKA

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 24.32 zauważyć, że ładunek nadmiarowy umieszczony na izolowanym przewodniku (lub na połączonych ze sobą naładowanych przewodnikach) rozłoży się na powierzchni przewodnika tak, żeby wszystkie punkty przewodnika miały taki sam potencjał;
- 24.33 dla izolowanej, przewodzącej powłoki kulistej naszkicować wykresy potencjału i wartości natężenia pola elektrycznego w zależności od odległości od środka, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz tej powłoki;
- 24.34 zauważyć, że natężenie pola elektrycznego wewnątrz izolowanej przewodzącej powłoki kulistej jest równe zeru,

a potencjał elektryczny ma taką samą wartość jak na powierzchni powłoki; na zewnątrz powłoki natężenie pola elektrycznego i potencjał są takie same jak natężenie i potencjał w przypadku całego ładunku przewodnika umieszczonego w środku tej powłoki;

24.35 zauważyć, że natężenie pola elektrycznego wewnątrz izolowanej, przewodzącej powłoki walcowej jest równe zeru, a potencjał elektryczny ma taką samą wartość jak na powierzchni powłoki; na zewnątrz powłoki natężenie pola elektrycznego i potencjał są takie same jak natężenie i potencjał w przypadku całego ładunku przewodnika umieszczonego na osi tej powłoki.

### Podstawowe fakty

 Nadmiarowy ładunek znajdujący się na przewodniku będzie w stanie równowagi położony w całości na jego zewnętrznej powierzchni.

- Cały przewodnik włącznie z punktami znajdującymi się w jego wnętrzu ma jednakowy potencjał.
- Jeśli izolowany naładowany przewodnik umieszczony jest

w zewnętrznym polu elektrycznym, to w każdym wewnętrznym punkcie tego przewodnika pole elektryczne związane z ładunkiem przewodnika znosi zewnętrzne pole elektryczne, które w przeciwnym razie tam by się wytworzyło.

• Wypadkowe pole elektryczne w każdym punkcie na powierzchni przewodnika jest prostopadłe do tej powierzchni.

### Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika

W podrozdziale 23.3 doszliśmy do wniosku, że we wszystkich punktach wewnątrz izolowanego przewodnika natężenie  $\vec{E} = 0$ . Zastosowaliśmy następnie prawo Gaussa, aby udowodnić, że ładunek nadmiarowy na odizolowanym przewodniku znajduje się całkowicie na jego powierzchni. (Jest to prawdą nawet wtedy, gdy przewodnik ma pustą wnękę). Teraz zastosujemy pierwszy z tych faktów, aby udowodnić ogólniejszą postać drugiego:

Nadmiar ładunku umieszczony na izolowanym przewodniku rozkłada się na powierzchni tego przewodnika tak, że wszystkie punkty przewodnika – zarówno wewnątrz, jak i na powierzchni – uzyskują ten sam potencjał. Jest to prawdą nawet wtedy, gdy przewodnik ma wnękę i nawet, jeśli ta wnęka zawiera niezerowy ładunek wypadkowy.

Nasz dowód wynika natychmiast ze wzoru (24.18), który ma postać

$$V_{\rm k} - V_{\rm p} = -\int\limits_{\rm p}^{\rm k} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Ponieważ  $\vec{E} = 0$  dla wszystkich punktów w przewodniku, więc otrzymujemy bezpośrednio  $V_k = V_p$  dla wszystkich możliwych par punktów początkowego i końcowego w przewodniku.

### 24.8. POTENCJAŁ IZOLOWANEGO NAŁADOWANEGO PRZEWODNIKA 129

Na rysunku 24.21a przedstawiono wykres potencjału w zależności od odległości od środka izolowanej, przewodzącej powłoki kulistej o promieniu 1 m i ładunku 1  $\mu$ C. Dla punktów poza powłoką możemy obliczyć V(r) ze wzoru (24.26), ponieważ w zewnętrznych punktach efekt będzie taki, jakby ładunek *q* był skupiony w środku powłoki. Ten wzór jest słuszny aż do powierzchni powłoki. Teraz przesuńmy mały ładunek próbny przez powłokę – zakładając, że istnieje w niej mały otworek – do jej środka. Nie jest potrzebna do tego żadna praca, ponieważ wewnątrz powłoki na ładunek próbny nie działa żadna wypadkowa siła elektrostatyczna. Stąd potencjał we wszystkich punktach wewnątrz powłoki ma taką samą wartość jak na powierzchni, co pokazano na rysunku 24.21a.

Na rysunku 24.21b przedstawiono wykres natężenia pola elektrycznego w zależności od odległości dla tej samej powłoki. Zauważ, że E = 0 w każdym punkcie wewnątrz powłoki. Krzywe z rysunku 24.21b można narysować na podstawie krzywej pokazanej na rysunku 24.21a, różniczkując ją względem r i stosując wzór (24.40) (dla przypomnienia, pochodna dowolnej stałej jest równa zeru). Krzywą z rysunku 24.21a można narysować na podstawie krzywych przedstawionych na rysunku 24.21b, wykonując całkowanie względem r i stosując wzór (24.19).

### Wyładowanie iskrowe z naładowanego przewodnika

Na przewodnikach niesferycznych ładunek powierzchniowy nie rozkłada się jednorodnie na powierzchni przewodnika. Na ostrzach lub krawędziach gęstość powierzchniowa ładunku – i stąd natężenie pola elektrycznego w ich pobliżu, które jest do niej proporcjonalne – może osiągać bardzo duże wartości. Powietrze wokół takich ostrzy może zostać zjonizowane, tworząc wyładowanie koronowe, które golfiści i alpiniści widują na końcach gałązek krzewów, końcach kijów golfowych i szczytach skał, gdy zbliża się burza z piorunami. Takie wyładowania koronowe, podobnie jak podnoszenie się włosów, są często zwiastunami uderzeń piorunów. W takich okolicznościach rozsądnie jest zamknąć się we wnęce wewnątrz przewodzącej powłoki, gdzie zagwarantowane jest zerowe natężenie pola elektrycznego. Samochód (jeśli tylko nie ma plastikowej karoserii lub składanego dachu) jest do tego celu prawie idealny (rys. 24.22).

**Rys. 24.22.** Duża iskra uderza w karoserię samochodu i przechodzi do ziemi przez izolującą oponę (można tam dostrzec błysk). Osoba w samochodzie pozostaje nietknięta (fot. Fox Photos/Getty Images)

### Izolowany przewodnik w zewnętrznym polu elektrycznym

Jeśli izolowany przewodnik umieścimy w *zewnętrznym polu elektrycznym*, tak jak na rysunku 24.23, to wszystkie punkty przewodnika będą miały nadal jednakowy potencjał, bez względu na to, czy przewodnik ma nadmiarowy ładunek. Swobodne elektrony przewodnictwa rozkładają się na powierzchni tak, aby zredukować do zera wypadkowe natężenie pola elek-



**Rys. 24.21.** a) Wykres potencjału V(r)wewnątrz i na zewnątrz naładowanej powłoki sferycznej o promieniu 1 m. b) Wykres natężenia E(r) dla tej samej powłoki



### 130 ROZDZIAŁ 24. POTENCJAŁ ELEKTRYCZNY



trycznego wewnątrz przewodnika. Co więcej, rozkład elektronów powoduje, że wypadkowe natężenie pola elektrycznego we wszystkich punktach na powierzchni jest do niej prostopadłe. Gdyby przewodnik z rysunku 24.23 został w jakiś sposób usunięty, lecz pozostałyby ładunki powierzchniowe, to rozkład natężenia pola elektrycznego pozostałby całkowicie bez zmian, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz.

**Rys. 24.23.** Nienaładowany przewodnik umieszczono w zewnętrznym polu elektrycznym. Swobodne elektrony w przewodniku rozkładają się na powierzchni tak, aby zredukować do zera wypadkowe natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika i wytworzyć wypadkowe natężenie pola na powierzchni, prostopadłe do niej

### Podsumowanie

**Potencjał elektryczny** Potencjał elektryczny *V* w punkcie *P* w polu elektrycznym naładowanego ciała wynosi

$$V = -\frac{W_{\infty}}{q_0} = \frac{E_{\rm p}}{q_0},$$
 (24.2)

gdzie  $W_{\infty}$  jest pracą, wykonaną przez siłę elektrostatyczną nad dodatnim ładunkiem próbnym, przy przesunięciu z nieskończoności do punktu *P*, a  $E_p$  jest energią potencjalną, która zostałaby w takim przypadku zmagazynowana w układzie ładunek próbny-ciało.

**Elektryczna energia potencjalna** Jeśli cząstka o ładunku q zostaje umieszczona w punkcie, w którym potencjał elektryczny naładowanego ciała wynosi V, to elektryczna energia potencjalna  $E_p$  układu cząstka-ciało wynosi

$$E_{\rm p} = q V. \tag{24.3}$$

Jeśli cząstka pokonuje różnicę potencjałów  $\Delta V$ , to zmiana elektrycznej energii potencjalnej wynosi

$$\Delta E_{\rm p} = q \,\Delta V = q (V_{\rm k} - V_{\rm p}). \tag{24.4}$$

**Energia mechaniczna** Jeśli cząstka pokonuje różnicę potencjałów  $\Delta V$  bez działania siły zewnętrznej, to zastosowanie zasady zachowania energii mechanicznej pozwala określić zmianę energii kinetycznej tej cząstki jako

$$\Delta E_{\rm k} = -q \,\Delta V. \tag{24.9}$$

Jeśli natomiast działa na tę cząstkę zewnętrzna siła, wykonując przy tym pracę  $W_{\text{zew}}$ , to zmiana energii kinetycznej cząstki wynosi

$$\Delta E_{\rm k} = -q\,\Delta V + W_{\rm zew}.\tag{24.11}$$

W szczególnym przypadku, gdy  $\Delta E_k = 0$ , praca siły zewnętrznej jest związana tylko z pokonaniem różnicy potencjałów

$$W_{\text{zew}} = q \Delta V \qquad (\text{dla } E_{k,p} = E_{k,k}). \tag{24.12}$$

Powierzchnie ekwipotencjalne Wszystkie punkty na powierzchni ekwipotencjalnej mają taki sam potencjał elektryczny. Praca wykonana nad ładunkiem próbnym przy przesuwaniu go z jednej takiej powierzchni na drugą jest niezależna od położeń punktów początkowego i końcowego na tych powierzchniach i drogi, po której przesunięto ładunek. Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  jest zawsze skierowane prostopadle do powierzchni ekwipotencjalnych.

**Obliczanie** V **na podstawie**  $\vec{E}$ . Różnica potencjałów elektrycznych między dwoma punktami początkowym i końcowym wynosi <sub>k</sub>

$$V_{\rm k} - V_{\rm p} = -\int\limits_{\rm p} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s},\qquad(24.18)$$

gdzie całkę obliczamy po dowolnym torze łączącym te punkty. Jeśli wybierzemy  $V_{\rm p} = 0$ , to dla potencjału w danym punkcie mamy k

$$V = -\int_{\mathbf{p}} \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{s}.$$
 (24.19)

W szczególnym przypadku jednorodnego pola elektrycznego o wartości natężenia E zmiana potencjału pomiędzy dwiema sąsiednimi (równoległymi) liniami ekwipotencjalnymi oddalonymi o  $\Delta s$  wynosi

$$\Delta V = -E\Delta s. \tag{24.21}$$

**Potencjał pola naładowanych cząstek** Potencjał elektryczny pola pojedynczej naładowanej cząstki w odległości *r* od tej cząstki wynosi

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}.$$
 (24.26)

Potencjał V ma taki sam znak, jak ładunek q. Potencjał pola, wytworzonego przez układ naładowanych cząstek wynosi

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}.$$
 (24.27)

**Potencjał pola dipola elektrycznego** W odległości r od dipola elektrycznego o wartości elektrycznego momentu dipolowego p = qd potencjał elektryczny dipola wynosi

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2} \tag{24.30}$$

dla  $r \gg d$ ; kąt  $\theta$  jest zdefiniowany na rysunku 24.13.

Potencjał pola wytworzonego przez ładunek o ciągłym rozkładzie Dla ciągłego rozkładu ładunku wzór (24.27) przybiera postać

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}q}{r},\qquad(24.32)$$

gdzie całkę obliczamy po całym rozkładzie.

**Obliczanie**  $\vec{E}$  na podstawie V Składowa natężenia  $\vec{E}$  w dowolnym kierunku jest wziętą z ujemnym znakiem pochodną potencjału względem przemieszczenia w tym kierunku

$$E_{\rm s} = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$
 (24.40)

Składowe  $E_x$ ,  $E_y$  i  $E_z$  natężenia  $\vec{E}$  można wyznaczyć ze wzorów:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$
 (24.41)

Dla pola jednorodnego o natężeniu  $\vec{E}$  wzór (24.40) upraszcza się do postaci:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s},\tag{24.42}$$

### **Pytania**

1 Na rysunku 24.24 przedstawiono kwadrat, na którego bokach znajduje się osiem naładowanych cząstek, przy czym odległość między sąsiednimi cząstkami wynosi *d*. Jaki jest potencjał elektryczny w punkcie *P* w środku kwadratu, jeśli potencjał elektryczny w nieskończoności wynosi zero?



**2** Na rysunku 24.25 przedstawiono trzy układy przekrojów powierzchni ekwipotencjalnych jednorodnego pola elektrycznego, każdy w takim samym obszarze przestrzeni. Dla każdej powierzchni ekwipotencjalnej wskazana jest wartość potencjału elektrycznego. a) Uszereguj te układy względem wartości natężenia pola elektrycznego w tym obszarze, zaczynając od największej. b) W którym układzie natężenie pola elektrycznego jest skierowane w dół strony?

	Rvs 24 25 Pytanie 2	
(1)	(2)	(3)
100		
80		
60		
40		
20 V		

**Rys. 24.25.** Pytanie 2

gdzie przesunięcie *s* jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych.

**Elektryczna energia potencjalna układu naładowanych cząstek** Elektryczna energia potencjalna układu naładowanych cząstek jest równa pracy potrzebnej do utworzenia tego układu z cząstek, będących początkowo w spoczynku i znajdujących się w nieskończonej odległości od siebie. Dla dwóch cząstek znajdujących się w odległości *r* mamy

$$E_{\rm p} = W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}.$$
 (24.46)

**Potencjał naładowanego przewodnika** Nadmiarowy ładunek, znajdujący się na przewodniku, będzie w stanie równowagi rozłożony w całości na zewnętrznej powierzchni przewodnika. Ładunek rozłoży się w taki sposób, że 1) cały przewodnik, włącznie z punktami, które znajdują się w jego wnętrzu, ma taki sam potencjał, 2) w każdym wewnętrznym punkcie przewodnika pole elektryczne związane z tym ładunkiem znosi zewnętrzne pole elektryczne, które mogłoby się tam wytworzyć, 3) wypadkowe natężenie pola elektrycznego na powierzchni przewodnika jest do niej prostopadłe.

**3** Na rysunku 24.26 przedstawiono cztery pary naładowanych cząstek. Załóż, że potencjał V = 0 w nieskończoności i rozważ wypadkowy potencjał elektryczny  $V_{wyp}$  w punktach na osi x. Dla których par istnieje inny punkt, dla którego  $V_{wyp} = 0$ : a) między cząstkami, b) na prawo od nich? c) Jeśli taki punkt zerowego potencjału istnieje, to czy natężenie wypadkowego pola elektrycznego  $\vec{E}$  wytwarzanego przez cząstki w tym punkcie jest równe zeru? d) Czy dla poszczególnych par istnieją punkty poza osią (oczywiście inne niż w nieskończoności), gdzie V = 0?



**Rys. 24.26.** Pytania 3 i 9

**4** Na rysunku 24.27 przedstawiono wykres potencjału elektrycznego V w zależności od x. a) Uszereguj pięć obszarów według wartości składowej natężenia pola elektrycznego wzdłuż osi x,



zaczynając od największej. Jaki jest kierunek natężenia pola wzdłuż osi *x* w: b) obszarze 2, c) obszarze 4?

**5** Na rysunku 24.28 przedstawiono trzy drogi, wzdłuż których możemy zbliżać dodatnio naładowaną kulę *A* do dodatnio naładowanej kuli *B*, która jest nieruchoma. a) Czy kula *A* jest przesuwana w stronę większego, czy mniejszego po-



**Rys. 24.28.** Pytanie 5

tencjału elektrycznego? Czy praca wykonana: b) przez nas, c) przez pole elektryczne (wytwarzane przez drugą kulę) jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru? d) Uszereguj tory według wykonanej przez nas pracy, zaczynając od największej.

**6** Na rysunku 24.29 przedstawiono cztery układy naładowanych cząstek, znajdujących się w takiej samej odległości od początku układu współrzędnych. Uszereguj układy według wartości wypadkowego potencjału elektrycznego w początku układu współrzędnych, zaczynając od największego dodatniego. Przyjmij, że w nieskończoności potencjał jest równy zeru.



7 Na rysunku 24.30 przedstawiono układ trzech naładowanych cząstek. Jeśli przesuniemy cząstkę o ładunku +qz punktu *A* do punktu *D*, to czy następujące wielkości będą dodatnie, ujemne czy zerowe: a) zmiana elektrycznej energii potencjalnej układu trzech cząstek, b) praca wykonana przez wypadkową siłę elektrostatyczną nad przesuwaną cząstką, c) praca wykonana przez nas? d) Jakie są odpowiedzi dla wielkości od (a) do (c) dla cząstki o ładunku +q przesuwanej z punktu *B* do punktu *C*?



**8** Czy praca wykonana przez nas w sytuacji z pytania 7 jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru, jeśli cząstka o ładunku +q porusza się: a) od *A* do *B*, b) od *A* do *C*, c) od *B* do *D*? d) Uszereguj przemieszczenia (a), (b), (c) według wartości pracy wykonanej przez nas, zaczynając od największej.

**9** Na rysunku 24.26 przedstawiono cztery pary naładowanych cząstek znajdujących się w jednakowej odległości od siebie. a) Uporządkuj te pary według ich elektrycznej energii potencjalnej, zaczynając od największej (dodatniej). b) Czy jeśli zwiększy się odległość między cząstkami w każdej z par, to energia potencjalna pary wzrośnie, czy zmaleje?

**10** a) Ile wynosi potencjał w punkcie P pochodzący od ładunku  $\hat{Q}$  znajdującego się w odległości R od punktu P (rys. 24.31a)? Przyjmij V = 0 w nieskończoności. b) Na rvsunku 24.31b ten sam ładunek O jest rozłożony jednorodnie na łuku okregu o promieniu R i kącie środkowym 40°. Ile wynosi potencjał w środku P krzywizny łuku? c) Na rysunku 24.31c ten sam ładunek Qzostał rozłożony jednorodnie na okregu o promieniu R. Jaki jest potenciał



w środku P okręgu? d) Uszereguj te trzy rozkłady według wartości natężenia pola elektrycznego w punkcie P, zaczynając od największego.

**11** Na rysunku 24.32 przedstawiono cienki jednorodnie naładowany pręt i trzy punkty znajdujące się w jednakowej odległości *d* od tego pręta. Uszereguj wartość potencjału elektrycznego pola wytwarzanego przez ten pręt w pokazanych punktach, zaczynając od największej.





**12** Cząstka przedstawiona na rysunku 24.33 zostaje uwolniona ze swojego punktu spoczynku *A*, aby następnie zostać przyspieszona przez pole elektryczne dokładnie w kierunku punktu *B*. Różnica potencjałów pomiędzy punktami *A* i *B* wynosi 100 V. Który z tych punktów ma wyższy



potencjał elektryczny, jeśli tą cząstką jest a) elektron, b) proton i c) cząstka alfa (jądro helu składające się z dwóch protonów i dwóch elektronów)? Uszereguj energie kinetyczne tych cząstek w punkcie *B*, zaczynając od największej.

### Zadania

GO	Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach <i>WileyPLUS</i> (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
•_•••	Liczba kropek określa stopień trudności zadania
ssm	Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w Student Solutions Manual
www	Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
ilw	Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
	Więcej informacji znajdziesz w książce The Flying Circus of Physics i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

### Podrozdział 24.1. Potencjał elektryczny

•1 ssm Rozważmy akumulator samochodowy o różnicy potencjałów 12 V, który może przesłać całkowity ładunek 84 Ah (amperogodzin) przez obwód z jednego bieguna do drugiego. a) Ilu kulombom jest równy ten ładunek? (*Wskazówka*: Zastosuj wzór (21.3)). b) Jeśli różnica potencjałów jest cały czas równa 12 V, to jak duża energia jest związana z przejściem tego ładunku?

•2 Różnica potencjałów elektrycznych między Ziemią i chmurą podczas pewnej burzy wynosiła 1,2 · 10<sup>9</sup> V. Jaka jest wartość zmiany elektrycznej energii potencjalnej (w elektronowoltach) elektronu poruszającego się między Ziemią i chmurą?

•3 Różnica potencjałów pomiędzy Ziemią i chmurą w przypadku pewnej błyskawicy wynosiła 1 · 10<sup>9</sup> V, a wartość przepływającego ładunku była równa 30 C. a) O ile zmieniła się energia tego ładunku? b) Gdyby można było wykorzystać całą tę energię do przyspieszenia spoczywającego początkowo samochodu o masie 1000 kg, to jaka byłaby końcowa prędkość samochodu?

## Podrozdział 24.2. Powierzchnie ekwipotencjalne a pole elektryczne

•4 Dwie duże, równoległe, przewodzące płyty odległe od siebie o 12 cm mają na powierzchniach wewnętrznych jednakowe ładunki o przeciwnych znakach. Na elektron umieszczony gdziekolwiek między tymi płytami działa siła elektrostatyczna  $3, 9 \cdot 10^{-15}$  N. a) Znajdź natężenie pola elektrycznego w miejscu, w którym znajduje się elektron. b) Jaka jest różnica potencjałów między płytami? (Zaniedbaj efekty brzegowe).

•5 ssm Na obu powierzchniach nieskończonej nieprzewodzącej płyty umieszczony jest ładunek o gęstości powierzch-

niowej 0,10 µC/m<sup>2</sup>. W jakiej odległości od siebie znajdują się powierzchnie ekwipotencjalne, których potencjały różnią się o 50 V?

•6 Gdy elektron porusza się od punktu *A* do punktu *B*, wzdłuż linii pola elektrycznego na rysunku 24.34, pole



**Rys. 24.34.** Zadanie 6

elektryczne wykonuje nad nim pracę  $3,94 \cdot 10^{-19}$  J. Ile wynoszą różnice potencjałów elektrycznych: a)  $V_B - V_A$ , b)  $V_C - V_A$  i c)  $V_C - V_B$ ?

••7 Natężenie pola elektrycznego w pewnym obszarze przestrzeni ma następujące składowe:  $E_y = E_z = 0$  oraz  $E_x = (4 \text{ N/C})x$ . Punkt A znajduje się na osi y i ma współrzędną y = 3 m, a punkt B jest na osi x i ma współrzędną x = 4 m. Ile wynosi różnica potencjałów  $V_B - V_A$ ?

••8 Na rysunku 24.35 przedstawiono wykres wartości natężenia pola elektrycznego w funkcji x w pewnym obszarze przestrzeni. Jednostką skali na osi pionowej tego wykresu jest  $E_{xs} = 20$  N/C. Składowe y i z natężenia pola



elektrycznego w tym obszarze są równe zeru. Jeśli potencjał elektryczny w początku układu współrzędnych wynosi 10 V, to a) jaki jest potencjał elektryczny w punkcie x = 2 m? b) Jaka jest największa możliwa dodatnia wartość potencjału elektrycznego w punktach na osi x, dla których  $0 \le x \le 6 \text{ m}$  i c) dla jakiej wartości x potencjał elektryczny wynosi zero?

••9 Powierzchniowa gęstość ładunku na nieskończonej nieprzewodzącej płaszczyźnie wynosi  $\sigma = +5.8 \text{ pC/m}^2$ . a) Jaką pracę wykonuje pole elektryczne tej płaszczyzny przy przenoszeniu cząstki o ładunku  $q = +1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  z tej płaszczyzny do punktu *P* znajdującego sie w odległości d = 3,56 cm od niej? b) Ile wynosi potencjał elektryczny *V* w punkcie *P*, jeśli przyjmiemy, że potencjał *V* na powierzchni płaszczyzny jest równy zeru?

•••10 Dwie jednorodnie naładowane nieskończone nieprzewodzące płyty są równoległe do płaszczyzny *yz* i znajdują się w punktach x = -50 cm i x = +50 cm. Powierzchniowe gęstości ładunku na tych płytach wynoszą odpowiednio  $-50 \text{ nC/m}^2 \text{ i} + 25 \text{ nC/m}^2$ . Ile wynosi różnica potencjałów pomiędzy początkiem układu współrzędnych i punktem znajdującym się na osi *x* o współrzędnej x = +80 cm? (*Wskazówka*: Skorzystaj z prawa Gaussa).

•••11 Na nieprzewodzącej kuli o promieniu R = 2,31 cm znajduje sie jednorodnie rozłożony ładunek q = +3,5 fC.

Przyjmij, że potencjał elektryczny w środku kuli wynosi  $V_0 = 0$ . Ile wynosi potencjał V w odległościach a) r = 1,45 cm i b) r = R. (*Wskazówka*: Porównaj podrozdział 23.6).

### Podrozdział 24.3. Potencjał pola naładowanej cząstki

•12 Podczas ruchu statku kosmicznego przez rozrzedzony zjonizowany gaz jonosfery ziemskiej potencjał statku w trakcie jednego okrążenia Ziemi zmienia się o -1 V. Oszacuj ładunek zbierany przez statek w tym czasie, zakładając, że jest on kulą o promieniu 10 m.

•13 Jakie są: a) ładunek, b) gęstość ładunku na powierzchni przewodzącej kuli o promieniu 0,15 m, jeśli jej potencjał wynosi 200 V (przy V = 0 w nieskończoności)?

•14 Rozważmy cząstkę o ładunku  $q = 1 \,\mu$ C, punkt A znajdujący się w odległości  $d_1 = 2 \,\mathrm{m}$  od q i punkt B w odległości  $d_2 = 1 \,\mathrm{m}$ . a) Jeśli te punkty znajdują się po przeciwnych stronach cząstki (rys. 24.36a), to jaka jest różnica potencjałów elektrycznych  $V_A - V_B$ ? b) Jaka jest różnica potencjałów elektrycznych, jeśli punkty A i B są położone tak jak na rysunku 24.36b?



Rys. 24.36. Zadanie 14

••15 ssm ilw Kulista kropla wody, obdarzona ładunkiem 30 pC, ma na swej powierzchni potencjał 500 V (przy V = 0 w nieskończoności). a) Jaki jest promień kropli? b) Jeśli dwie takie krople, o takim samym ładunku i promieniu połączą się, tworząc jedną kulistą kroplę, to jaki będzie potencjał na powierzchni nowej kropli?

••16 😳 Na rysunku 24.37 przedstawiono prostokątny układ

unieruchomionych naładowanych cząstek, w którym a =39 cm zaś ładunki są całkowitymi wielokrotnościami  $q_1 = 3,4$  C i  $q_2 = 6$  pC. Jaki jest wypadkowy potencjał elektryczny V w środku prostokąta, jeśli przyjmiemy, że w nieskończoności V=0. (*Wskazówka*: Analiza ustawienia ładunków umożliwia istotną redukcję rachunków).

••17 • Jaki jest wypadkowy potencjał w punkcie Ppola układu czterech ładunków z rysunku 24.38, gdzie q = 5 fC i d = 4 cm, jeśli V = 0 w nieskończoności?



Rys. 24.38. Zadanie 17

••18 ••18 •• Na rysunku 24.39a przedstawione są dwie naładowane cząstki. Unieruchomiona cząstka 1 o ładunku  $q_1$  znajduje się w odległości *d* od początku układu współrzędnych. Cząstka 2 o ładunku  $q_2$  może się poruszać wzdłuż osi *x*. Na rysunku 24.39b przedstawiono wypadkowy potencjał elektryczny obu cząstek *V* w początku układu współrzędnych jako funkcję współrzędnej *x* cząstki 2. Jednostką skali na osi poziomej tego wykresu jest  $x_s = 16$  cm. Wykres ma asymptotę  $V = 5,76 \cdot 10^{-7}$  V dla  $x \to \infty$ . Wyraź ładunek  $q_2$  jako wielokrotność ładunku elementarnego *e*.



**Rys. 24.39.** Zadanie 18

••19 Na rysunku 24.40 przedstawiono dwie cząstki o ładunkach  $q_1 = +5e$  i  $q_2 = -15e$  unieruchomione w odległości d = 24 cm od siebie. Przyjmując, że potencjał elektryczny V = 0 w nieskończoności, znajdź skończone a) dodatnie i b) ujemne wartości x, dla których wypadkowy potencjał elektryczny na osi x wynosi zero.

••20 Na rysunku 24.40 przedstawiono dwie cząstki o ładunkach  $q_1$  i  $q_2$  unieruchomione w odległości d od siebie. Wypadkowe natężenie pola elektrycznego w punkcie



**Rys. 24.40.** Zadania 19 i 20

x = d/4 wynosi zero. Przyjmując, że potencjał elektryczny V = 0 w nieskończoności, znajdź położenie wszystkich punktów na osi x (innych niż nieskończoność), w których potencjał tych dwóch cząstek wynosi zero, i wyraź je jako wielokrotność d.

### Podrozdział 24.4. Potencjał pola dipola elektrycznego

•21 iiw Cząsteczka amoniaku NH<sub>3</sub> ma trwały elektryczny moment dipolowy równy 1,47 D, gdzie 1 D = 1 debaj =  $3,34 \cdot 10^{-30}$  C · m. Oblicz potencjał pola elektrycznego wytworzonego przez cząsteczkę amoniaku na osi dipola, w punkcie odległym o 52 nm (przyjmij V = 0 w nieskończoności).

•22 Na rysunku 24.41a przedstawiono cząstkę o ładunku elementarnym +e, która znajduje się początkowo w punkcie z = 20 nm na osi dipola (odpowiadającej tutaj osi z) po dodatniej stronie tego dipola. (Początek osi z znajduje się w środku dipola). Następnie cząstka porusza się po torze kołowym dookoła tego środka, aż do chwili, gdy znajdzie się w punkcie o współrzędnej z = -20 nm po ujemnej stronie osi dipola. Na rysunku 24.41b przedstawiono wykres pracy  $W_a$  wykonanej przez siłę przesuwającą tę cząstkę jako funkcję kąta  $\theta$  określającego położenie cząstki względem dodatniego kierunku osi z. Jednostką skali na osi pionowej tego wykresu jest  $W_{\rm as} = 4 \cdot 10^{-30}$  J. Ile wynosi wartość momentu dipolowego tego dipola?



**Rys. 24.41.** Zadanie 22

### Podrozdział 24.5. Potencjał pola ładunku o ciągłym rozkładzie

•23 a) Na rysunku 24.42a przedstawiono dodatnio naładowany pręt plastikowy o długości L = 6 cm, naładowany jednorodnie z gęstością liniową  $\lambda = +3,68$  pC/m. Przyjmij V = 0 w nieskończoności i znajdź bez obliczeń na papierze potencjał elektryczny w punkcie P, znajdującym się w odległości d = 8 cm wzdłuż prostopadłej osi symetrii pręta. b) Na rysunku 24.42b przedstawiono identyczny pręt, ale z prawą połową naładowaną ujemnie i lewą – dodatnio; obie połowy mają taką samą wartość jednorodnej gęstości liniowej ładunku  $\lambda = 3,68$  pC/m. Znajdź potencjał elektryczny w punkcie P, jeśli w nieskończoności V = 0.





•24 Na rysunku 24.43 przedstawiono plastikowy pręt jednorodnie naładowany ładunkiem Q = -25,6 C wygięty w łuk okręgu o promieniu R = 3,71 cm i kącie środkowym  $\phi = 120^\circ$ . Przyjmując V = 0 w nieskończoności, oblicz potencjał elektryczny w środku krzywizny P łuku.



**Rys. 24.43.** Zadanie 24

•25 Plastikowy pręt został wygięty w kształcie okręgu o promieniu R = 8,2 cm. Pręt jest na jednej czwartej obwodu jednorodnie naładowany ładunkiem dodatnim  $Q_1 = 4,2$  pC, zaś na reszcie obwodu ładunkiem ujemnym  $Q_2 = -6Q_1$  (rys. 24.44). Przyjmując, że V = 0 w nieskończoności, oblicz potencjały elektryczne: a) w środku *C* okręgu, b) w punkcie *P* na osi symetrii okręgu, w odległości D = 6,71 cm od środka.

••26 S Na rysunku 24.45 przedstawiono cienki pręt z jednorodną gęstością ładunku 2  $\mu$ C/m. Oblicz potencjał elektryczny w punkcie *P*, jeśli d = D = L/4. Przyjmij, że potencjał w nieskończoności wynosi zero.

••27 Na rysunku 24.46 przedstawiono trzy cienkie plastikowe pręty wygięte w kształcie jednej czwartej okręgów ze wspólnym środkiem. Ładunki jednorodnie rozłożone na tych trzech prętach wynoszą, odpowiednio,  $Q_1 = +30$  nC,  $Q_2 = 3Q_1$ i  $Q_3 = -8Q_1$ . Znajdź potencjał pola elektrycznego wytworzonego przez te trzy pręty w środku okręgu.

••28 • Na rysunku 24.47 przedstawiono plastikowy pręt o długości L = 12 cm, umieszczony na osi x, naładowany jednorodnie dodatnim ładunkiem Q = 56,1 fC.









Przyjmując V = 0 w nieskończoności, znajdź potencjał pola elektrycznego na osi *x* w punkcie  $P_1$ , odległym o d = 2,5 cm od jednego z końców pręta.



Rys. 24.48. Zadanie 29

••29 Na rysunku 24.48 przedstawiono łuk okręgu naładowany jednorodnie ładunkiem  $Q_1 = +7,21$  pC i dwie cząstki o ładunkach  $Q_2 = 4Q_1$  oraz  $Q_3 = -2Q_1$ . Jaki jest wypadkowy potencjał pola elektrycznego wytworzonego przez ten układ ładunków w środku okręgu. Promień okręgu wynosi R = 2 m, a kąt zaznaczony na rysunku  $\theta = 20^{\circ}$ .



••**30 C** Uśmiechająca się buźka pokazana na rysunku 24.49 składa się z trzech elementów:

Rys. 24.49. Zadanie 30

- cienkiego pręta w kształcie okręgu o promieniu 6 cm i ładunku -3 μC;
- drugiego cienkiego pręta o ładunku 2 μC, wygiętego w kształcie łuku okręgu o promieniu 4 cm o kącie środkowym 90°, który jest koncentryczny z pierwszym okręgiem;
- dipola elektrycznego o momencie dipolowym prostopadłym do promienia okręgu, któro wartość wynosi 1.28·10<sup>-21</sup> C · m.

Znajdź potencjał pola elektrycznego wytworzonego przez ten układ ładunków w środku okręgu.

••31 ssm www Z plastikowej tarczy o promieniu R =64 cm, po jej jednorodnym naładowaniu z jednej strony z gęstością powierzchniową ładunku  $\sigma = 7,73$  fC/m<sup>2</sup> usunięto trzy ćwiartki. Pozostała ćwiartka jest przedstawiona na rysunku 24.50. Przyjmując V = 0 w nieskończo-



**Rys. 24.50.** Zadanie 31

ności, oblicz potencjał pola wytworzonego przez tę ćwiartkę w punkcie P na osi symetrii tarczy w odległości D = 25,9 cm od jej środka.

•••32 Gęstość niejednorodnego liniowego rozkładu ładunku opisana jest zależnością  $\lambda = bx$ , gdzie *b* jest stałą. Ładunek jest rozłożony wzdłuż osi *x* od *x* = 0 do *x* = 0,2 m. Jeśli *b* = 20 nC/m<sup>2</sup>, a *V* = 0 w nieskończoności, to jakie potencjały pola elektrycznego są a) w początku osi *x* i b) w punkcie *y* = 0,15 m na osi *y*?

•••33 Cienki plastikowy pręt, przedstawiony na rysunku 24.47 ma długość L = 12 cm i jest naładowany niejednorodnie z gęstością liniową  $\lambda = cx$ , gdzie c = 28,9 pC/m<sup>2</sup>. Przyjmując V = 0 w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny na osi w punkcie  $P_1$ , odległym o d = 3 cm od jednego z końców pręta.

### Podrozdział 24.6. Obliczanie natężenia pola na podstawie potencjału

•34 Dwie duże, równoległe, przewodzące płyty są odległe od siebie o 1,5 cm i mają na powierzchniach wewnętrznych jed-

nakowe ładunki o przeciwnych znakach. Przyjmij, że potencjał płyty naładowanej ujemnie wynosi zero. Jakie pole elektryczne panuje pomiędzy płytami, jeśli potencjał w połowie odległości między nimi wynosi +5 V?

•35 Potencjał pola elektrycznego w punktach na płaszczyźnie *xy* dany jest wzorem  $V = (2 \text{ V/m}^2)x^2 - (3 \text{ V/m}^2)y^2$ . Ile wynosi natężenie pola elektrycznego w punkcie o współrzędnych (3 m, 2 m) wyrażone w notacji wektorowej?

•36 Wyrażony w woltach potencjał elektryczny V w przestrzeni pomiędzy dwiema płaskimi równoległymi płytami 1 i 2 dany jest wzorem  $V = 1500x^2$ , gdzie x (w metrach) jest odległością od płyty 1. a) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie x = 1,3 cm? b) Czy natężenie pola w tym punkcie jest skierowane w stronę płyty 1 czy przeciwnie?

••37 ssm Ile wynosi wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie  $(3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$ , jeśli potencjał elektryczny w tym obszarze dany jest wzorem  $V = 2xyz^2$ , gdzie V jest wyrażone w woltach, a współrzędne x, y i z w metrach?

••38 Na rysunku 24.47 przedstawiono plastikowy pręt o długości L = 13,5 cm naładowany jednorodnie dodatnim ładunkiem Q = 43,6 fC. a) Znajdź wyrażenie opisujące potencjał elektryczny w punkcie  $P_1$  w funkcji odległości d. b) Następnie podstaw pod d zmienną x i znajdź wyrażenie na wartość składowej  $E_x$  natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P_1$ . c) Jaki jest kierunek składowej x natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P_1$  względem dodatniego kierunku osi x? d) Jaka jest wartość  $E_x$  w punkcie  $P_1$  dla x = d = 6,2 cm? e) Wyznacz wartość  $E_y$  w punkcie  $P_1$ , korzystając z symetrii na rysunku 24.47.

••39 Na płaszczyźnie xy, na której potencjał elektryczny zmienia się tak, jak to pokazano na rysunku 24.51, umieszczono elektron. Potencjał elektryczny nie zależy od współrzędnej z. Jednostką skali na osi pionowej jest  $V_s = 500$  V. Przedstaw w notacji wektorowej siłę działającą na ten elektron.



•••40 ••• Cienki plastikowy pręt, przedstawiony na rysunku 24.47 ma długość L = 10 cm i jest naładowany niejednorodnie z gęstością liniową  $\lambda = cx$ , gdzie c = 49,9 pC/m<sup>2</sup>. a) Przyjmując V = 0 w nieskończoności, znajdź potencjał elektryczny na osi y w punkcie  $P_2$  o współrzędnej y = D =

3,56 cm. b) Znajdź wartość składowej natężenia pola elektrycznego  $E_y$  w punkcie  $P_2$ . c) Dlaczego korzystając z wyniku z punktu a) nie można wyznaczyć składowej natężenia pola elektrycznego  $E_x$  w punkcie  $P_2$ ?

## Podrozdział 24.7. Elektryczna energia potencjalna układu naładowanych cząstek

•41 Początkowo unieruchomiona cząstka o ładunku +7,5  $\mu$ C znajdująca się na osi x w punkcie x = 60 cm zostaje uwolniona. Cząstka zaczyna się poruszać pod wpływem siły elektrycznej wytwarzanej przez ładunek Q, który pozostał nieruchomy w początku układu współrzędnych. Ile wynosi energia kinetyczna tej cząstki w chwili, w której przebędzie odległość 40 cm, jeśli a) Q = +20  $\mu$ C i b) Q = -20  $\mu$ C?

•42 a) Jaka jest elektryczna energia potencjalna dwóch elektronów znajdujących się w odległości 2 nm od siebie ? b) Czy energia potencjalna wzrasta, czy maleje, jeśli ta odległość wzrasta?

•43 ssm ilw www Znajdź pracę potrzebną do utworzenia konfiguracji czterech ładunków z rysunku 24.52, jeśli q = 2,3 pC, a = 64 cm przy założeniu, że początkowo ładunki są od siebie nieskończenie odległe.

•44 Na rysunku 24.53 przedstawiono siedem unieruchomionych naładowanych cząstek ustawionych wzdłuż obwodu kwadratu o boku długości 4 cm. Jaką pracę należy wykonać, aby cząstkę o ładunku +6e początkowo spoczywającą w nieskończoności umieścić w środku tego kwadratu?



+3e +3e +



••45 ilw Cząstka o ładunku q znajduje się w punkcie P. Druga cząstka o masie m i takim samym ładunku q znajduje się początkowo w odległości  $r_1$  od punktu P, a następnie zostaje uwolniona. Określ jej prędkość, gdy znajdzie się ona w odległości  $r_2$  od punktu P. Przyjmij wartości:  $q = 3,1 \,\mu\text{C}$ ,  $m = 20 \,\text{mg}, r_1 = 0,9 \,\text{mm}$  i  $r_2 = 2,5 \,\text{mm}$ .

••46 W płaszczyźnie yz leży cienki plastikowy pierścień o promieniu 1,5 m, o środku w początku układu, naładowany ładunkiem –9 nC. Na osi x w odległości 3 m od początku układu umieszczono ładunek –6 pC. Oblicz pracę, jaka musi być wykonana nad tą cząstką przez zewnętrzną siłę przy przesuwaniu ładunku punktowego do początku układu.

••47 
<sup>1</sup> Jaka jest *prędkość ucieczki* elektronu znajdującego się początkowo w spoczynku na powierzchni kuli o promieniu 1 cm, która jest jednorodnie naładowana ładunkiem  $1,6 \cdot 10^{-15}$  C? Inaczej ujmując, jaką początkową prędkość musi mieć taki elektron, aby znaleźć się nieskończenie daleko od tej kuli i mieć wtedy energię kinetyczną równą zeru?

••48 Cienka przewodząca powłoka sferyczna o promieniu R znajduje się na izolującej podkładce i jest naładowana do potencjału –125 V. Z punktu P, w odległości r od środka sfery  $(r \gg R)$  wystrzelono w kierunku środka powłoki elektron z początkową prędkością  $v_0$ . Jaka musi być wartość  $v_0$ , aby elektron dotarł do powłoki?

••49 Dwa elektrony znajdują się w odległości 2 cm od siebie. Trzeci elektron, wystrzelony z nieskończoności, zatrzymał się w połowie odległości między nimi. Jaka była początkowa prędkość tego elektronu?

••50 Oblicz pracę potrzebną do przeniesienia wzdłuż przedstawionej na rysunku 24.54 linii przerywanej początkowo nieruchomej cząstki o ładunku +16*e* z nieskończoności w pobliże dwóch nieruchomych cząstek o ładunkach  $q_1 = +4e$  i  $q_2 = -q_1/2$ . Odległość d = 1,4 cm, kąty  $\theta_1 = 43^\circ$  i  $\theta_2 = 60^\circ$ .

••**51** <sup>60</sup> W dwóch wierzchołkach prostokąta przedstawionego na rysunku 24.55, o długościach boków 5 cm

i 15 cm znajdują się ładunki  $q_1 = -5 \ \mu\text{C}$  i  $q_2 = +2 \ \mu\text{C}$ . Przyjmując V = 0 w nieskończoności, oblicz potencjały elektryczne: a) w wierzchołku A, b) w wierzchołku B. c) Jaka praca jest potrzebna do przesunięcia trzeciego ładunku  $q_3 =$  $+3 \ \mu\text{C}$  z punktu B do punktu A wzdłuż przekątnej prostokąta? d) Czy ta praca zwiększa, czy zmniejsza elektryczną energię potencjalną układu trzech ładunków? Czy praca przy przesunięciu ładunku  $q_3$  wzdłuż toru: e) wewnątrz prostokąta, ale nie wzdłuż przekątnej, f) poza prostokątem jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak wzdłuż przekątnej?

••52 Na rysunku 24.56a przedstawiono elektron poruszający się wzdłuż osi dipola elektrycznego w kierunku ujemnego ładunku tego dipola. Dipol jest unieruchomiony. Początkowo elektron będąc bardzo daleko od dipola miał energię kinetyczną 100 eV. Na rysunku 24.56b przedstawiono wykres energii kinety-



**Rys. 24.56.** Zadanie 52

cznej  $E_k$  tego elektronu w funkcji odległości r od środka di-



pola. Jednostką skali na osi poziomej jest  $r_s = 0,1$  m. Jaka jest wartość momentu dipolowego tego dipola?

••53 Dwie niewielkie metalowe kule A i B o masach  $m_A =$ 5 g i  $m_B = 10$  g mają takie same dodatnie ładunki  $q = 5 \,\mu\text{C}$ . Kule połączone są nieprzewodzącym sznurkiem o znikomo małej masie, o długości d = 1 m znacznie wiekszej od ich promieni. a) Oblicz elektryczną energię potencjalną tego układu. b) Jakie jest przyspieszenie każdej z kul w chwili tuż po przecieciu sznurka? c) Jaka jest predkość każdej z kul po długim czasie od przecięcia sznurka?

••54 😳 W kierunku dodatnich wartości x porusza sie z predkościa  $1 \cdot 10^7$  m/s pozyton (cząstka o ładunku +e i masie równej masie elektronu). W punkcie x = 0pozyton zaczyna odczuwać działanie pola elektrycznego skierowanego wzdłuż osi x.



Zależność potencjału elektrycznego tego pola od położenia przedstawiono na rysunku 24.57. Jednostka skali na osi pionowej tego wykresu jest  $V_{\rm s} = 500$  V. a) Czy pozyton opuści obszar pola elektrycznego w punkcie x = 0 cm (co oznacza jego zawrócenie), czy w punkcie x = 50 cm (co odpowiada ruchowi bez zmiany kierunku)? b) Z jaką prędkością pozyton opuści obszar pola?

••55 Z początkową prędkością  $3, 2 \cdot 10^5$  m/s wystrzelono elektron w kierunku nieruchomego protonu. Jeśli początkowo elektron znajdował sie w dużej odległości od protonu, to w jakiej odległości od protonu chwilowa predkość elektronu bedzie dwukrotnie większa od wartości początkowej?





••56 Czastka 1 (o ładunku +5  $\mu$ C) i czastka 2 (o ładunku  $+3 \ \mu\text{C}$ ) odległe od siebie o d = 4 cm zostały unieruchomione na osi x, tak jak to przedstawiono na rysunku 24.58a. Cząstka 3 może się poruszać wzdłuż osi x na prawo od cząstki 2. Na rysunku 24.58b przedstawiono elektryczną energię potencjalną Ep układu trzech cząstek jako funkcję współrzędnej x cząstki 3. Jednostką skali na osi pionowej tego wykresu jest  $E_{p,s} = 5$  J. Jaki jest ładunek cząstki 3?

••57 ssm Identyczne ładunki 50 μC unieruchomiono na osi x w punktach  $\pm 3$  m. W punkcie znajdującym się na dodatniej części osi y zostaje uwolniona cząstka o ładunku  $q = -15 \ \mu\text{C}$ , która uprzednio znajdowała się w spoczynku. Ze względu na symetrie układu cząstka ta porusza się wzdłuż osi y i w momencie, gdy przechodzi przez punkt o współrzednych x = 0, y = 4 m ma energie kinetyczna 1,2 J. a) Jaka jest energia kinetyczna tej cząstki w chwili, gdy przechodzi ona przez poczatek układu współrzednych? b) Dla jakiej ujemnej wartości y cząstka zatrzyma się na chwilę?

••58 😳 Proton w studni potencjału. Na rysunku 24.59 przedstawiono wykres potencjału elektrycznego V wzdłuż osi x. Jednostką skali na osi pionowej jest  $V_s = 10$  V. W punkcie x = 3.5 cm ma zostać uwolniony proton o początkowej energii kinetycznej 4 eV. a) Czy proton osiągnie punkt, w którym zawróci, jeśli porusza się początkowo w stronę ujemnych wartości x. Jeśli tak to podaj współrzędną tego punktu. Jeśli nie i proton opuści przedstawiony na wykresie obszar, to znajdź jego prędkość w punkcie x = 0. b) Czy proton osiągnie punkt, w którym zawróci, jeśli porusza się poczatkowo w stronę dodatnich wartości x. Jeśli tak to podaj współrzędną tego punktu. Jeśli nie i proton opuści przedstawiony na wykresie obszar, to znajdź jego predkość w punkcie x = 6 cm. Jakie sa c) wartość F i d) kierunek względem dodatniego kierunku osi x siły elektrostatycznej działającej na ten proton, gdy porusza się on na lewo od punktu x = 3 cm? Jakie są e) wartość F i f) kierunek względem dodatniego kierunku osi x siły elektrostatycznej działającej na ten proton, gdy porusza sie on na prawo od punktu x = 5 cm?





••59 Na rvsunku 24.60 przedstawiono naładowana cząstkę (elektron lub proton) poruszającą się w prawo pomiędzy dwiema równoległymi naładowanymi płytami odległymi o d = 2 mm. Potencjały płyt wynoszą  $V_1 =$ 70 V i  $V_2 = -50$  V. Czastka



zwalnia od prędkości początkowej 90 km/s, którą ma na lewej płycie. a) Czy cząstka jest elektronem, czy protonem? b) Jaka bedzie jej predkość, gdy dosiegnie płyty 2?

••60 Na rysunku 24.61a przedstawiono elektron, który zostaje przeniesiony z nieskończoności do punktu znajdującego się w odległości R = 8 cm od małej naładowanej kuli. Przeniesienie to wymaga od nas wykonania pracy W = 2,16.  $10^{-13}$  J. a) Jaki jest ładunek *O* zgromadzony na kuli? Na rysunku 24.61b przedstawiono układ, w którym ładunek kuli został podzielony na równe części i rozmieszczony na okręgu

o promieniu 8 cm w punktach odpowiadających położeniom godzin na tarczy zegarowej. Tym razem elektron przeniesiony zostaje z nieskończoności do środka tego okręgu. b) Jaka zmiana energii potencjalnej jest skutkiem dodania elektronu do układu 12 naładowanych cząstek?



•••61 Przypuśćmy, że N elektronów można rozmieścić w jednej z dwóch konfiguracji. W konfiguracji 1 elektrony znajdują się na obwodzie cienkiego pierścienia o promieniu R. Elektrony są rozłożone równomiernie, a więc odległość pomiędzy dwoma sąsiednimi elektronami jest zawsze jednakowa. W konfiguracji 2, N - 1 elektronów jest równomiernie rozłożonych wzdłuż pierścienia, a jeden znajduje się w jego środku. a) Jaka jest najmniejsza wartość N, dla której energia drugiej konfiguracji jest mniejsza niż energia pierwszej. b) Dla takiej wartości N rozważ jeden z elektronów umiesz-czonych na pierścieniu, nazwijmy go  $e_0$ . Ile innych elektronów z pierścienia znajduje się bliżej elektronu  $e_0$  niż elektron z jego środka?

### Podrozdział 24.8. Potencjał izolowanego naładowanego przewodnika

•62 Kula 1 o promieniu  $R_1$  naładowana jest dodatnim ładunkiem q. W dużej odległości od kuli 1 znajduje się początkowo nienaładowana kula 2 o promieniu  $2R_1$ . Następnie połączono kule długim cienkim przewodnikiem, którego ładunek można zaniedbać. a) Czy końcowy potencjał  $V_1$  kuli 1 jest mniejszy, większy czy równy potencjałowi  $V_2$  kuli 2? Jaka część ładunku q znajdzie się na skutek połączenia b) na kuli 1, c) na kuli 2? d) Jaki jest stosunek końcowych gęstości powierzchniowych ładunku  $\sigma_1/\sigma_2$  na kulach?

•63 ssm www Środki dwóch metalowych kul, każda o promieniu 3 cm, oddalone są o 2 m. Na kuli 1 jest ładunek  $+1 \cdot 10^{-8}$  C, a na kuli 2 ładunek  $-3 \cdot 10^{-8}$  C. Przyjmij, że duża odległość kul w stosunku do ich rozmiarów uzasadnia przyjęcie założenia o jednorodnym rozkładzie ładunku na każdej kuli (kule nie oddziałują na siebie nawzajem). Przyjmując V = 0 w nieskończoności, oblicz: a) potencjał w punkcie, znajdującym się w połowie odległości między środkami kul, b) potencjał kuli 1, c) potencjał kuli 2.

•64 Metalowa powłoka kulista ma potencjał +400 V względem ziemi (o potencjale V = 0) i ładunek  $5 \cdot 10^{-9}$  C. Znajdź potencjał elektryczny w środku tej sfery.

•65 ssm Jaki nadmiarowy ładunek znajduje się na przewodzącej kuli o promieniu r = 0,15 m, jeśli potencjał kuli wynosi 1500 V i V = 0 w nieskończoności?

••66 Dwie izolowane, koncentryczne, przewodzące powłoki kuliste mają promienie  $R_1 = 0.5$  m i  $R_2 = 1$  m, jednorodne ładunki  $q_1 = +2 \ \mu\text{C}$  i  $q_2 = +1 \ \mu\text{C}$  i zaniedbywalne grubości. Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego *E* w odległościach: a) r = 4 m, b) r = 0.7 m i c) r = 0.2 m? Przyjmując, że V = 0 w nieskończoności, jaki jest potencjał *V* w odległościach: d) r = 4 m, e) r = 1 m, f) r = 0.7 m, g) r = 0.5 m, h) r = 0.2 m, i) r = 0? j) Narysuj wykresy E(r) i V(r).

••67 Na metalowej kuli o promieniu 15 cm znajduje się niezrównoważony ładunek  $3 \cdot 10^{-8}$  C. a) Jakie jest natężenie pola elektrycznego na powierzchni tej kuli? b) Jaki jest potencjał elektryczny na powierzchni kuli, jeśli przyjmiemy, że V = 0w nieskończoności? c) W jakiej odległości od powierzchni kuli potencjał elektryczny zmniejsza się o 500 V?

### Zadania dodatkowe

**68** Dwie naładowane cząstki znajdujące się na płaszczyźnie *xy* mają następujące ładunki i współrzędne:  $q_1 = +3 \cdot 10^{-6}$  C, x = +3.5 cm, y = +0.5 cm i  $q_2 = -4 \cdot 10^{-6}$  C, x = -2 cm, y = +1.5 cm. Jaką pracę należy wykonać, aby umieścić te ładunki w podanych położeniach, zaczynając od sytuacji, w której są nieskończenie dalekie od siebie?

**69** ssm Promień długiego przewodzącego walca wynosi 2 cm. Natężenie pola elektrycznego na powierzchni tego walca ma wartość 160 N/C i jest skierowne radialnie na zewnątrz walca. Punkty *A*, *B* i *C* znajdują się w odległości odpowiednio 1 cm, 2 cm i 5 cm od osi walca. Ile wynoszą: a) wartość natężenia pola elektrycznego w punkcie *C* oraz różnice potencjałów b)  $V_B - V_C$  i c)  $V_A - V_B$ ?

**70** Tajemnica proszku czekoladowego. Historię rozpoczęliśmy w zadaniu 60 w rozdziale 23. a) Korzystając z odpowiedzi (a) z tego zadania, znajdź wyrażenie na potencjał elektryczny w zależności od odległości r od osi rury. (Potencjał elektryczny jest równy zeru na uziemionej ściance rury). b) Ile wynosi różnica potencjałów elektrycznych między osią rury i jej wewnętrzną ścianką dla typowej objętościowej gęstości ładunku  $\rho = -1, 1 \cdot 10^{-3}$  C/m<sup>3</sup>? (Dalszy ciąg tej historii poznasz w zadaniu 60 w rozdziale 25).

**71** ssm Wyprowadź wyrażenie na natężenie pola elektrycznego dipola elektrycznego w punkcie na osi dipola, zaczynając od wzoru (24.30).

**72** a) Wartość natężenia pola elektrycznego *E* zależy od odległości radialnej *r* zgodnie ze wzorem  $E = A/r^4$ , gdzie *A* jest stałą o jednostce wolt na metr sześcienny. Jaka jest różnica potencjałów pomiędzy punktami o r = 2 m i r = 3 m wyrażona jako wielokrotność *A*? **73** a) Ile wynosi potencjał elektryczny na powierzchni izolowanej przewodzącej kuli o promieniu 10 cm, jeśli znajduje się na niej niezrównoważony ładunek 4  $\mu$ C i przyjmujemy, że V = 0 w nieskończoności. b) Czy taka sytuacja może w rzeczywistości mieć miejsce, jeśli powietrze otaczające tę kulę doznaje przebicia elektrycznego w polu o natężeniu większym niż 3 MV/m?

**74** Trzy cząstki o ładunkach  $q_1 = +10 \ \mu\text{C}, q_2 = -20 \ \mu\text{C}$ i  $q_3 = +30 \ \mu\text{C}$  znajdują się w wierzchołkach trójkąta równoramiennego, co pokazano na rysunku 24.62. Jaką pracę musi wykonać siła zewnętrzna, aby zamienić miejscami ładunki: a)  $q_1 \ i \ q_3$ , b)  $q_1$ i  $q_2$ , jeśli  $a = 10 \ \text{cm}$  i b =6 cm?



**75** W pobliżu powierzchni Ziemi obserwuje się często pole elektryczne o natężeniu równym w przybliżeniu 100 V/m. Ile wynosiłby potencjał na powierzchni Ziemi, gdyby takie pole elektryczne panowało nad całą powierzchnią Ziemi (zakładając, że V = 0 w nieskończoności)?

**76** Sfera Gaussa o promieniu 4 cm jest współśrodkowa z jednorodnie naładowaną kulą o promieniu 1 cm. Całkowity wypadkowy strumień elektryczny przenikający tę powierzchnię Gaussa wynosi  $+5,6\cdot10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ . Jaki jest potencjał pola elektrycznego w odległości 12 cm od środka tej kuli?

77 W doświadczeniu Millikana (podrozdział 22.6) w obszarze pomiędzy dwiema płytkami odległymi o 1,5 cm utrzymywane jest pole elektryczne o natężeniu 1,92 $\cdot$ 10<sup>5</sup> N/C. Znajdź róźnicę potencjałów pomię-

dzy tymi płytkami.

**78** Na rysunku 24.63 przedstawiono trzy nieprzewodzące łuki okręgu o promieniu R =8,5 cm. Ładunki znajdujące się na tych łukach wynoszą  $q_1 = 4,52$  C,  $q_2 = -2q_1$ i  $q_3 = +3q_1$ . Ile wynosi potencjał pola elektrycznego tych łuków w ich wspólnym środku krzywizny, jeśli przyjmiemy, że V = 0 w nieskończoności?



Rys. 24.63. Zadanie 78

**79** Z punktu znajdującego się na osi unieruchomionego dipola elektrycznego złożonego z ładunków e i -e odległych o d = 20 pm zostaje uwolniony uprzednio spoczywający elektron. Punkt ten znajduje się po stronie dodatniego ładunku dipola w odległości 7d od jego środka. Jaka będzie prędkość

elektronu, gdy znajdzie się on w odległości 5*d* od środka dipola?

**80** Na rysunku 24.64 przedstawiono pierścień o zewnętrznym promieniu R = 13 cm,

wewnętrznym promieniu r = 0,2R i jednorodnej gęstości powierzchniowej ładunku  $\sigma = 6,2 \text{ pC/m}^2$ . Znajdź potencjał pola elektrycznego w punkcie *P*, znajdującym się na osi symetrii tego pierścienia w odległości z = 2R od jego środka, przyjmując, że V = 0 w nieskończoności.



81 😳 Elektron w studni potencjału Na rysunku 24.65 przedstawiono wykres potencjału V wzdłuż osi x. Jednostką skali na osi pionowej tego wykresu jest  $V_s = 8$  V. W punkcie x = 4.5 cm ma zostać uwolniony elektron o początkowej energii kinetycznej 3 eV. a) Czy elektron osiągnie punkt, w którym zawróci, jeśli porusza się początkowo w stronę ujemnych wartości x? Jeśli tak, to podaj współrzędna tego punktu. Jeśli nie i elektron opuści przedstawiony na wykresie obszar, to znajdź jego predkość w punkcie x = 0. b) Czy elektron osiągnie punkt, w którym zawróci, jeśli porusza się początkowo w stronę dodatnich wartości x? Jeśli tak, to podaj współrzedna tego punktu. Jeśli nie i elektron opuści przedstawiony na wykresie obszar, to znajdź jego prędkość w punkcie x = 7 cm. Jakie są: c) wartość F i d) kierunek względem dodatniego kierunku osi x siły elektrostatycznej działającej na ten elektron, gdy porusza sie on na lewo od punktu x = 4 cm? Jakie są: e) wartość F i f) kierunek względem dodatniego kierunku osi x siły elektrostatycznej działającej na ten elektron, gdy porusza się on na prawo od punktu x = 5 cm?



82 Jaki byłby potencjał pola elektrycznego Ziemi (przyjmując, że V = 0 w nieskończoności), gdyby cała jej powierzchnia była naładowana ładunkiem o gęstości powierzchniowej 1 elektron/m<sup>2</sup> (co jest założeniem bardzo sztucznym). Jakie byłyby: b) wartość i c) kierunek (w stronę Ziemi czy przeciwnie) natężenia pola elektrycznego tuż ponad powierzchnią tak naładowanej Ziemi?

**83** Na rysunku 24.66 przedstawiono punkt *P* znajdujący się w odległości  $d_1 = 4$  m od cząstki 1 ( $q_1 = -2e$ ) i w odległości  $d_2 = 2$  m od cząstki 2 ( $q_2 = +2e$ ). Obie cząstki są unieruchomione. a) Jaki jest potencjał pola elektrycznego w punkcie *P*,

jeśli przyjmiemy, że V = 0w nieskończoności? Załóżmy, że przenosimy z nieskończoności do punktu P cząstkę o ładunku  $q_3 = +2e$ . b) Jaka prace przy tym wykonujemy? c) Jaka jest energia potencjalna układu tych trzech czastek?



84 Na powierzchni pełnej przewodzącej kuli o promieniu 3 cm rozłożony jest jednorodnie ładunek 30 nC. Niech A bedzie punktem odległym o 1 cm od środka tej kuli, S – punktem na powierzchni kuli, a B – punktem odległym o 5 cm od środka kuli. Znajdź różnice potencjałów: a)  $V_S - V_B$  i b)  $V_A - V_B$ .

85 Na rysunku 24.67 przedstawiono cząstkę o ładunku +2e przenoszona z nieskończoności na oś x. Jaką pracę wykonuje się przy tym? Odległość D = 4 m.

86 Na rysunku 24.68 przedstawiono półkulę jednorodnie naładowana w całej swej objętości ładunkiem 4 µC. Półkula spoczywa na płaszczyźnie xy tak jak połówka grejfruta mogłaby leżeć przekrojoną stroną na kuchennym stole. W odległości 15 cm

półkuli w punkcie P?

od środka krzywizny półkuli, na płaszczyźnie x y znajduje się punkt P. Jaki jest potencjał pola elektrycznego naładowanej

87 ssm Trzy ładunki +0,12 C znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku długości 1,7 m. Ile dni trwałoby przesuwanie jednego z tych ładunków do punktu znajdującego się w połowie odcinka łączącego pozostałe ładunki, jeśli wymagana energia dostarczana byłaby z mocą 0,83 kW?

**88** Dwa ładunki  $q = +2 \,\mu\text{C}$ zostały unieruchomione w odległości d = 2 cm od siebie (rys. 24.69). a) Ile wynosi potencjał pola elektrycznego w punkcie C, jeśli przyjmiemy,  $\dot{z}e V = 0$  w nieskończoności? b) Do punktu C przenosimy z nieskończo-



ności kolejny ładunek  $q = +2 \mu C$ . Jaką wykonujemy przy tym prace? c) Ile wynosi elektryczna energia potencjalna układu trzech ładunków, gdy trzeci z nich znajdzie się na swoim miejscu?

89 Dwa elektrony są początkowo unieruchomione w odległości 2 μm od siebie. Jaką pracę musimy wykonać przenosząc

z nieskończoności trzeci ładunek tak, aby ładunki znajdowały sie w wierzchołkach trójkata równobocznego?

90 W punkcie P znajduje się unieruchomiona cząstka o dodatnim ładunku O. Druga czastka o masie m i ujemnym ładunku -q porusza się ze stałą prędkością po okręgu o promieniu  $r_1$  i środku w punkcie P. Wyprowadź wyrażenie na pracę W, jaką musi wykonać siła zewnętrzna, aby zwiększyć promień orbity tej cząstki do  $r_2$ .

91 Różnica potencjałów pomiędzy dwiema naładowanymi płaskimi płytami oddalonymi od siebie o d = 1 cm wynosi  $\Delta V = 625$  V. Elektron wystrzeliwany jest z powierzchni jednej z nich dokładnie w kierunku drugiej. Jaka jest początkowa predkość elektronu, jeśli zatrzyma się tuż przed powierzchnia drugiej płyty?

92 Na rysunku 24.70 przedstawiono punkt P znajdujący się w środku prostokata. Jaki jest wypadkowy potencjał pola elektrycznego układu sześciu naładowanych cząstek w punkcie P, jeśli przyjmiemy, że V = 0 w nieskończoności,  $q_1 = 5$  fC,  $q_2 = 2$  fC,  $q_3 = 3$  fC i d =2,54 cm?



93 ssm Ładunek +16  $\mu$ C rozłożony jest jednorodnie na cienkim okragłym pierścieniu o środku w początku układu

współrzędnych, który znajduje się na płaszczyźnie xy. Promień pierścienia jest równy 3 cm. Jaka jest różnica potencjałów  $V_B - V_A$ , jeśli punkt A znajduje się w początku układu współrzędnych, a punkt B jest na osi z w punkcie z = 4 cm?

**94** Rozważ cząstkę o ładunku  $1.5 \cdot 10^{-8}$ C i przyjmij V = 0w nieskończoności. a) Jaki jest kształt i rozmiary powierzchni ekwipotencjalnej o potencjale 30 V w polu elektrycznym tej cząstki? b) Czy powierzchnie, których potencjały różnią się o stałą wartość (powiedzmy 1 V), są od siebie równoodległe?

95 ssm Wewnetrzny i zewnętrzny promień grubej powłoki kulistej o ładunku Q i jednorodnej gęstości ładunku  $\rho$  równe są odpowiednio  $r_1$  i  $r_2 > r_1$ . Przyjmując, że V = 0 w nieskończoności, wyraź potencjał pola elektrycznego V jako funkcję odległości r od środka tej powłoki w następujących obszarach: a)  $r > r_2$ , b)  $r_2 > r > r_1$  i c)  $r < r_1$ . d) Czy otrzymane wyniki zgadzają się w punktach granicznych  $r = r_2$  i  $r = r_1$ ? (Wskazówka: Patrz podrozdział 23.6).

**96** Ładunek q jest rozłożony jednorodnie w kulistej objętości o promieniu R. Przyjmijmy, że V = 0 w nieskończoności. Znajdź: a) potencjał pola elektrycznego V w odległości r < R od środka tej kuli, b) różnicę potencjałów pomiędzy punktami r = R i r = 0.

97 ssm Pełna miedziana kula o promieniu 1 cm pokryta jest cienką warstwą niklu. Niektóre atomy niklu są promienio-





Rys. 24.68. Zadanie 86

### 142 ROZDZIAŁ 24. POTENCJAŁ ELEKTRYCZNY

twórcze, każdy z tych atomów rozpadając się, emituje elektron. Połowa tych elektronów trafia do wnętrza kuli, zostawiając tam energię 100 keV. Druga połowa elektronów ucieka, unosząc ze sobą ładunek – e każdy. W warstwie niklu zachodzi  $3,7 \cdot 10^8$  rozpadów promieniotwórczych na sekundę. Kula jest zawieszona na długiej nieprzewodzącej nici i jest izolowana od otoczenia. a) Po jakim czasie potencjał elektryczny kuli wzrośnie o 1000 V? b) Po jakim czasie temperatura kuli wzrośnie w wyniku zmiany energii elektronów w ciepło o 5 K? Objętość cieplna kuli wynosi 14 J/K.

**98** Na rysunku 24.71 przedstawiono metalową powłokę kulistą o ładunku  $q = 5 \mu C$ i promieniu r = 3 cm, która jest współśrodkowa z drugą powłoką kulistą o ładunku  $Q = 15 \mu C$  i promieniu R =6 cm. a) Jaka jest różnica potencjałów pomiędzy tymi powłokami? Jeśli połączymy obie powłoki przewodem, to jaki ładunek zgromadzi się na b) mniejszej powłoce, c) większej powłoce?



Rys. 24.71. Zadanie 98

**99** Korzystając ze wzoru (24.32) pokaż, że potencjał pola elektrycznego w punkcie na osi symetrii cienkiego pierścienia (o ładunku q i promieniu R) w odległości z od jego środka wynosi

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

b) Korzystając z tego wyniku, wyprowadź wyrażenie na wartość natężenia pola elektrycznego E w punktach na osi pierścienia; porównaj swój wynik z obliczeniami E zawartymi w podrozdziale 22.4.

**100** Cząstka alfa (która ma dwa protony) zostaje skierowana bezpośrednio w stronę jądra tarczy zawierającego 92 protony. Początkowa energia kinetyczna cząstki alfa wynosi 0,48 pJ. Jaka jest wartość największego zbliżenia cząstki alfa i jądra tarczy, zakładając, że to drugie jest unieruchomione?

**101** W kwarkowym modelu cząstek elementarnych proton składa się z trzech kwarków: dwóch "górnych", każdy o ładunku +2e/3, i jednego "dolnego", o ładunku -e/3. Przypuśćmy, że te trzy kwarki znajdują się w jednakowych odległościach od siebie. Przyjmijmy, że ta odległość wynosi  $1,32 \cdot 10^{-15}$  m. Oblicz elektryczne energie potencjalne układów a) tylko dwóch kwarków "górnych", b) wszystkich trzech kwarków.

**102** Na izolowanej metalowej kuli o promieniu 16 cm znajduje się ładunek  $1.5 \cdot 10^{-8}$  C. Jaki jest potencjał elektryczny punktów na powierzchni tej kuli, jeśli przyjmiemy, że w nieskończoności V = 0?

**103** Na rysunku 24.72 przedstawiono dwie cząstki o ładunkach  $q_1$  i  $q_2$  unieruchomione na osi x. Jeśli z nieskończoności do punktu P przeniesie





się trzecią cząstkę o ładunku +6  $\mu$ C, to układ trzech cząstek będzie miał taką samą energie potencjalną, jak początkowy układ dwóch cząstek. Jaki jest stosunek ładunków  $q_1/q_2$ ?

# Pojemność elektryczna

Α

Ł

25

Ζ

# **25.1.** POJEMNOŚĆ ELEKTRYCZNA

Czego się nauczysz?

R

0

Ζ

D

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 25.01 naszkicować schemat obwodu elektrycznego z kondensatorem płaskim, baterią i otwartym lub zamkniętym kluczem;
- 25.02 wyjaśnić, co się stanie z elektronami przewodnictwa po zamknięciu obwodu z bateria, otwartym kluczem i rozładowanym kondensatorem;
- Podstawowe fakty
- Kondensator składa się z dwóch izolowanych przewodników (okładek) z ładunkami +q i -q. Jego pojemność zdefiniowana jest jako

q = CU,

adzie U jest różnica potencjałów pomiedzy okładkami kondensatora.

**25.03** zastosować zwiazek pomiedzy wielkościa ładunku *q* na każdej z okładek kondensatora ("ładunkiem na kondensatorze"), różnicą potencjałów pomiędzy okładkami kondensatora U ("napięciem na kondensatorze") i pojemnością C tego kondensatora.

 Gdy obwód z baterią, otwartym kluczem i nienaładowanym kondensatorem zostaje zamknięty w wyniku zamknięcia klucza, elektrony przewodnictwa przesuwaja sie, pozostawiając okładki przeciwnie naładowane.

### 0 fizyce

Jednym z celów fizyki jest wyjaśnianie zasad działania praktycznych urządzeń wytwarzanych przez inżynierów. W tym rozdziale koncentrujemy się na jednym z najbardziej rozpowszechnionych przykładów - kondensatorze. Jest to urządzenie, w którym można magazynować energię elektryczną. Na przykład baterie aparatu fotograficznego magazynują energię w układzie lampy błyskowej, ładując kondensator. Takie baterie mogą dostarczać energię jedynie w umiarkowanym tempie, zbyt wolno, aby wywołać błysk lampy. Jednak naładowany kondensator może po wyzwoleniu lampy błyskowej dostarczać energię w znacznie większym tempie - wystarczająco szybko, aby wywołać impuls jasnego światła wytwarzany przez lampę.

Fizyka kondensatorów może zostać uogólniona na inne urządzenia i do każdej sytuacji związanej z polem elektrycznym. Atmosferyczne pole elektryczne Ziemi jest na przykład modelowane przez meteorologów w postaci ogromnego kondensatora, który się częściowo rozładowuje wytwarzając wyładowanie atmosferyczne. Ładunek zbierany przez narty ślizgające się po powierzchni śniegu można modelować w postaci ładunku magazynowanego w kondensatorze, który się często rozładowuje, emitując przy



**Rys. 25.1.** Zestaw kondensatorów (fot. yurazaga/Shutterstock)



**Rys. 25.2.** Dwa przewodniki odizolowane elektrycznie od siebie i od otoczenia tworzą *kondensator*. Jeśli kondensator jest naładowany, to przewodniki, zwane *okładkami*, mają ładunki o takich samych wartościach *q*, ale o przeciwnych znakach

**Rys. 25.3.** a) Kondensator płaski składa się z dwóch okładek o polu powierzchni *S*, znajdujących się w odległości *d*. Okładki mają na swych wewnętrznych powierzchniach ładunki o takich samych wartościach *q*, ale o przeciwnych znakach. b) Linie pola pokazują, że pole elektryczne wytworzone przez naładowane okładki jest jednorodne w środkowym obszarze między okładkami. Jak widać z wygięcia linii pola przy krawędziach okładek, pole w ich pobliżu jest niejednorodne

tym iskry (często widywane przez narciarzy jeżdżących nocą po suchym śniegu).

Pierwszym krokiem w naszych rozważaniach o kondensatorach będzie określenie, ile ładunku może on zmagazynować. Miarę tej ilości nazywamy pojemnością elektryczną.

### Pojemność elektryczna

Na rysunku 25.1 pokazano niektóre z wielu kondensatorów o różnych wielkościach i kształtach. Na rysunku 25.2 przedstawiono podstawowe składniki *każdego* kondensatora – dwa izolowane przewodniki o dowolnym kształcie. Bez względu na ich geometrię, płaską lub nie, nazywamy te przewodniki *okładkami*.

Na rysunku 25.3a pokazano mniej ogólny, ale bardzo typowy układ, zwany *kondensatorem płaskim*, który składa się z dwóch równoległych, przewodzących okładek o polu powierzchni *S* umieszczonych w odległości *d*. Symbol, którego używamy do oznaczenia kondensatora ( $\dashv\vdash$ ), jest wzorowany na budowie kondensatora płaskiego, lecz stosujemy go do oznaczania kondensatorów o dowolnej geometrii. Założymy na razie, że w obszarze między okładkami nie ma żadnego ośrodka materialnego (np. szkła czy plastiku). W podrozdziale 25.5 zrezygnujemy z tego ograniczenia.

Gdy kondensator jest *naładowany*, jego okładki mają ładunki +q i -q o jednakowych wartościach, lecz przeciwnych znakach. Będziemy jednak przez *ładunek kondensatora* rozumieli q, czyli bezwzględną wartość ładunków na okładkach. (Zauważ, że q nie jest całkowitym ładunkiem na kondensatorze, bo ten wynosi zero).

Okładki są przewodnikami, a więc są powierzchniami ekwipotencjalnymi: wszystkie punkty na okładce mają ten sam potencjał elektryczny. Co więcej, między dwiema okładkami istnieje różnica potencjałów. Odtąd bezwzględną wartość tej różnicy będziemy oznaczać przez U, a nie przez  $\Delta V$ , jak to robiliśmy dotychczas.

Ładunek q i różnica potencjałów U (zwana *napięciem*) dla kondensatora są do siebie proporcjonalne, czyli

$$q = CU. \tag{25.1}$$

Stałą proporcjonalności *C* nazywamy **pojemnością** kondensatora. Jej wartość zależy tylko od geometrii okładek, a *nie* od ich ładunku lub różnicy potencjałów. Pojemność jest miarą ilości ładunku, który należy umieścić na okładkach, aby wytworzyć pewną różnicę potencjałów między nimi: *im większa jest pojemność, tym więcej potrzeba ładunku*.



Jednostką pojemności w układzie SI, wynikającą ze wzoru (25.1), jest kulomb na wolt. Jednostka ta pojawia się tak często, że nadano jej specjalną nazwę *farad* (F)

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ kulomb na wolt} = 1 \text{ C/V}.$$
(25.2)

Jak się przekonasz, farad jest bardzo dużą jednostką. W praktyce bardziej wygodnymi jednostkami są podwielokrotności farada, jak na przykład mikrofarad (1  $\mu$ F = 10<sup>-6</sup> F) lub pikofarad (1 pF = 10<sup>-12</sup> F).

### Ładowanie kondensatora

Jedną z metod ładowania kondensatora jest umieszczenie go w obwodzie elektrycznym zawierającym źródło prądu. *Obwód elektryczny* stanowi drogę, wzdłuż której może przepływać ładunek. *Źródło prądu* jest urządzeniem, które utrzymuje stałą różnicę potencjałów między *biegunami* źródła (punktami, przez które ładunek może wpływać do źródła lub z niego wypływać); zwykle w tym celu wykorzystuje się wewnętrzne reakcje elektrochemiczne, w których siły elektryczne mogą przesuwać wewnętrzne ładunki.

Na rysunku 25.4a obwód tworzą: źródło B, klucz S, nienaładowany kondensator C i przewody łączące te elementy. Ten sam obwód jest przedstawiony na *schemacie* na rysunku 25.4b, gdzie źródło, klucz i kondensator zostały zastąpione symbolami. Źródło utrzymuje różnicę potencjałów U między swymi biegunami. Biegun o wyższym potencjale jest oznaczany znakiem + i zwykle bywa nazywany biegunem *dodatnim*; biegun o niższym potencjale jest oznaczany znakiem – i zwykle bywa nazywany biegunem *ujemnym*.

Obwód przedstawiony na rysunku 25.4 nazywamy *otwartym*, gdyż klucz S jest *otwarty*, czyli nie łączy elektrycznie przewodów do niego przyłączonych. Jeśli klucz zostanie *zamknięty*, łącząc elektrycznie te przewody, to obwód zostaje zamknięty i ładunek może przepływać przez klucz i przewody. Jak mówiliśmy w rozdziale 21, przepływ ładunku przez przewodnik metaliczny polega na przepływie elektronów. Gdy obwód z rysunku 25.4 zostanie zamknięty, pole elektryczne wytworzone w przewodach przez źródło przesuwa elektrony wzdłuż przewodów. W szczególności elektrony z okładki h kondensatora są przesuwane przez pole do dodatniego bieguna źródła i stąd okładka h, tracąc elektrony, staje się naładowana dodatnio. Pole przesuwa także dokładnie tyle samo elektronów z bieguna ujemnego źródła na okładkę l kondensatora i stąd okładka l, gromadząc elektrony, staje się naładowana ujemnie w *takim samym stopniu*, jak okładka h (tracąc elektrony) staje się naładowana dodatnio.

Początkowo, gdy okładki były nienaładowane, różnica potencjałów między nimi wynosiła zero. W miarę jak okładki są przeciwnie ładowane, różnica potencjałów wzrasta, aż osiągnie wartość różnicy potencjałów U między biegunami źródła. Wtedy okładka h i dodatni biegun źródła mają taki sam potencjał i nie ma pola elektrycznego w przewodzie między nimi. Podobnie, okładka l i ujemny biegun źródła mają taki sam potencjał i w przewodzie między nimi nie ma pola elektrycznego. Przy zerowym natężeniu pola nie następuje więc dalszy przepływ elektronów. Mówimy, że kondensator jest wtedy *całkowicie naładowany* i ma różnicę potencjałów U oraz ładunek q, które powiązane są wzorem (25.1).





**Rys. 25.4.** a) Źródło B, klucz S oraz okładki *h* i *l* kondensatora C tworzą po połączeniu obwód. b) Schemat z *elementami obwodu* przedstawionymi za pomocą ich symboli

W tej książce zakładamy, że zarówno podczas ładowania kondensatora, jak i potem ładunek nie może przesunąć się z jednej okładki na drugą przez odstęp między nimi. Będziemy także zakładać, że kondensator może zachować (czy *zmagazynować*) ładunek nieskończenie długo, chyba że zostanie umieszczony w obwodzie, w którym może zostać *rozładowany*.

### Sprawdzian 1

Czy pojemność C kondensatora wzrasta, maleje, czy pozostaje taka sama: a) jeśli ładunek q wzrośnie dwukrotnie, b) jeśli różnica potencjałów U wzrośnie trzykrotnie?

# **25.2.** OBLICZANIE POJEMNOŚCI ELEKTRYCZNEJ

### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

25.04 wyjaśnić, w jaki sposób można wykorzystać prawo Gaussa do znalezienia pojemności elektrycznej kondensatora płaskiego;

### Podstawowe fakty.

• Pojemność konkretnego kondensatora wyznaczamy w następujący sposób: 1) przyjmujemy, że na okładkach znajduje się ładunek q, 2) obliczamy odpowiadające temu ładunkowi natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  między okładkami, 3) obliczamy różnicę potencjałów U między okładkami i 4) obliczamy pojemność C ze wzoru q = CU. Poniżej podane są niektóre z wyników:

• Kondensator płaski o równoległych płaskich okładkach o polu powierzchni *S* odległych o *d* ma pojemność

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

25.05 obliczyć pojemność elektryczną kondensatorów płaskiego, walcowego, kulistego, a także pojemność izolowanej kuli.

 Kondensator walcowy (złożony z dwóch współosiowych powierzchni walcowych) o długości L i promieniach a i b ma pojemność

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

 Kondensator kulisty z dwiema współśrodkowymi okładkami o promieniach a i b ma pojemność

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$

• Izolowana kula o promieniu R ma pojemność

 $C = 4\pi\varepsilon_0 R.$ 

### Obliczanie pojemności elektrycznej

Będziemy teraz obliczać pojemności kondensatorów, znając ich geometrię. Rozważymy różne rodzaje kondensatorów, a więc sensowne jest przedstawienie ogólnego schematu pracy. Nasz plan jest następujący: 1) przyjmujemy, że na okładkach znajduje się ładunek q, 2) korzystając z prawa Gaussa, obliczamy odpowiadające temu ładunkowi natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  między okładkami, 3) znając  $\vec{E}$ , obliczamy różnicę potencjałów U między okładkami ze wzoru (24.18), 4) obliczamy C ze wzoru (25.1).

Przyjmując pewne założenia, możemy uprościć obliczenie zarówno natężenia pola elektrycznego, jak i różnicy potencjałów. Omówimy po kolei obliczanie każdej z tych wielkości.

### Obliczanie natężenia pola elektrycznego

Do powiązania natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  między okładkami kondensatora z ładunkiem q na każdej z okładek będziemy stosować prawo Gaussa

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q,$$
 (25.3)

gdzie q jest ładunkiem obejmowanym przez powierzchnię Gaussa, natomiast  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  jest wypadkowym strumieniem elektrycznym przez tę powierzchnię. We wszystkich rozważanych przez nas przypadkach powierzchnia Gaussa będzie taka, że jeśli przechodzi przez nią strumień elektryczny, to natężenie  $\vec{E}$  ma na niej jednakową wartość i wektory  $\vec{E}$  oraz d $\vec{S}$ są równoległe. Wzór (25.3) przybiera wtedy prostszą postać

$$q = \varepsilon_0 ES$$
 (szczególny przypadek wzoru (25.3)), (25.4)

gdzie *S* jest polem tej części powierzchni Gaussa, przez którą przenika strumień. Dla wygody będziemy zawsze rysować powierzchnię Gaussa w taki sposób, aby obejmowała całkowicie ładunek na dodatniej okładce (zob. np. rys. 25.5).

### Obliczanie różnicy potencjałów

W oznaczeniach z rozdziału 24 (wzór (24.18)) różnica potencjałów między okładkami kondensatora jest związana z natężeniem pola elektrycznego  $\vec{E}$  wzorem

$$V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}} = -\int_{\text{pocz}}^{\text{konc}} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \qquad (25.5)$$

gdzie całkę należy obliczyć po dowolnej drodze, która zaczyna się na jednej okładce i kończy na drugiej. Będziemy zawsze wybierać drogę wzdłuż linii pola elektrycznego, od okładki ujemnej do dodatniej. Dla takiej drogi wektory  $\vec{E}$  i d $\vec{s}$  będą miały przeciwne kierunki i iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ będzie równy -Eds. Prawa strona wzoru (25.5) będzie więc dodatnia. Oznaczając przez U różnicę  $V_{\text{końc}} - V_{\text{pocz}}$ , wzór (25.5) możemy zapisać w postaci

$$U = \int_{-}^{+} E \,\mathrm{d}s \qquad (\text{szczególny przypadek wzoru (25.5)}), \qquad (25.6)$$

gdzie — i + przypominają nam, że droga całkowania zaczyna się na okładce ujemnej i kończy na okładce dodatniej.

Jesteśmy teraz gotowi zastosować wzory (25.4) i (25.6) do pewnych rodzai kondensatorów.

### Kondensator płaski

Założymy, zgodnie z rysunkiem 25.5, że okładki naszego kondensatora płaskiego są tak duże i umieszczone tak blisko siebie, że można zaniedbać zakrzywienie linii pola przy krawędziach okładek i traktować natężenie  $\vec{E}$ jako stałe w całym obszarze między okładkami.



**Rys. 25.5.** Naładowany kondensator płaski. Powierzchnia Gaussa obejmuje ładunek na okładce dodatniej. Całkowanie we wzorze (25.6) wykonujemy wzdłuż odcinka, od okładki ujemnej do okładki dodatniej

Narysujmy powierzchnię Gaussa, obejmującą ładunek q na okładce dodatniej (rys. 25.5). Ze wzoru (25.4) wynika wtedy wyrażenie

$$=\varepsilon_0 ES,\tag{25.7}$$

gdzie S jest polem powierzchni okładki.

Wzór (25.6) przybiera postać

$$U = \int_{-}^{+} E \,\mathrm{d}s = E \int_{0}^{d} \,\mathrm{d}s = E \,d. \tag{25.8}$$

We wzorze (25.8) natężenie E można wyłączyć przed całkę, gdyż jest stałe; druga całka jest równa po prostu odległości d między okładkami.

Jeśli teraz podstawimy q ze wzoru (25.7) i U ze wzoru (25.8) do związku q = CU (wzór (25.1)), to otrzymamy

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$
 (kondensator płaski). (25.9)

Widzisz, że pojemność rzeczywiście zależy tylko od wielkości geometrycznych, a mianowicie pola powierzchni okładki S i odległości d między okładkami. Zauważ, że C wzrasta, jeśli zwiększamy pole powierzchni okładki S lub zmniejszamy odległość d.

Przy okazji podkreślmy, że wzór (25.9) wskazuje jeden z powodów zapisania stałej elektrostatycznej w prawie Coulomba w postaci  $1/(4\pi\varepsilon_0)$ . Jeśli tego nie zrobilibyśmy, to wzór (25.9), który przez inżynierów jest częściej używany niż prawo Coulomba, nie miałby tak prostej postaci. Zauważ dalej, że wzór (25.9) pozwala wyrazić przenikalność  $\varepsilon_0$  w jednostkach bardziej przydatnych w zagadnieniach związanych z kondensatorami, a mianowicie

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} = 8,85 \text{ pF/m}.$$
 (25.10)

Poprzednio tę stałą wyrażaliśmy w innych jednostkach

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{C}^2 / (\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2).$$
 (25.11)

### Kondensator walcowy

Na rysunku 25.6 przedstawiono w przekroju kondensator walcowy o długości *L*, zbudowany z dwóch współosiowych powierzchni walcowych o promieniach *a* i *b*. Założymy, że  $L \gg b$ , co pozwoli nam zaniedbać zakrzywienie linii pola przy końcach powierzchni walcowych. Każda z okładek zawiera ładunek o wartości *q*.

Jako powierzchnię Gaussa wybieramy powierzchnię walca (zamkniętego denkami) o długości L i promieniu r (rys. 25.6). Powierzchnia ta jest współosiowa z powierzchniami walcowymi i zawiera w sobie wewnętrzną powierzchnię walcową, a zatem i ładunek q, który się na niej znajduje. Wzór (25.4) wiąże ten ładunek z wartością natężenia pola E

$$q = \varepsilon_0 E S = \varepsilon_0 E (2\pi r L),$$

gdzie  $2\pi rL$  jest polem zakrzywionej części powierzchni Gaussa. Strumień elektryczny przez denka jest równy zeru. Wyznaczając stąd *E*, otrzymujemy



**Rys. 25.6.** Przekrój długiego kondensatora walcowego pokazujący walcową powierzchnię Gaussa o promieniu *r* (obejmującą dodatnią okładkę) i radialną drogę całkowania, wzdłuż której całkujemy według wzoru (25.6). Rysunek może także służyć jako ilustracja kondensatora kulistego w przekroju

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}.$$
(25.12)

Podstawiając ten wynik do wzoru (25.6), mamy

$$U = \int_{-}^{+} E ds = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_{b}^{a} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (25.13)$$

gdzie zastosowaliśmy równość ds = -dr (całkowaliśmy w kierunku malejącego r). Ze związku C = q/U otrzymujemy ostatecznie

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}$$
 (kondensator walcowy). (25.14)

Widzisz, że pojemność kondensatora walcowego, podobnie jak kondensatora płaskiego, zależy tylko od wielkości geometrycznych, w tym przypadku od długości *L* i promieni *b* i *a*.

### Kondensator kulisty

Rysunek 25.6 może także ilustrować przekrój przez środek kondensatora złożonego z dwóch współśrodkowych powłok sferycznych o promieniach a i b. Jako powierzchnię Gaussa wybieramy sferę o promieniu r, współśrodkową z dwiema powłokami i wtedy ze wzoru (25.4) mamy

$$q = \varepsilon_0 E S = \varepsilon_0 E (4\pi r^2),$$

gdzie  $4\pi r^2$  jest polem sferycznej powierzchni Gaussa. Wyznaczając z tego wzoru *E*, otrzymujemy

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2},\tag{25.15}$$

w czym rozpoznajemy wyrażenie na natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek o rozkładzie sferycznym (wzór (23.15)).

Jeśli podstawimy to wyrażenie do wzoru (25.6), otrzymamy

$$U = \int_{-}^{+} E ds = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{b}^{a} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{b-a}{ab},$$
(25.16)

gdzie znów podstawiliśmy -dr zamiast ds. Jeśli teraz wstawimy wzór (25.16) do wzoru (25.1) i obliczymy *C*, to otrzymamy

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$
 (kondensator kulisty). (25.17)

### Izolowana kula

Pojemność możemy też przypisać *pojedynczej* izolowanej kuli (lub sferze) przewodzącej o promieniu *R*, zakładając, że druga okładka kondensatora jest sferą przewodzącą o nieskończonym promieniu. Linie pola opuszczające powierzchnię dodatnio naładowanego izolowanego przewodnika muszą się przecież gdzieś kończyć; ściany pokoju, w którym znajduje się przewodnik, mogą efektywnie służyć za naszą sferę o nieskończonym promieniu.

W celu obliczenia pojemności izolowanego przewodnika napiszemy najpierw wzór (25.17) w postaci

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1 - a/b}$$

Jeśli następnie przejdziemy z  $b \rightarrow \infty$  i podstawimy *R* za *a*, to otrzymamy

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$
 (izolowana kula). (25.18)

Zauważ, że zarówno ten wzór, jak i inne wyprowadzone tu wzory na pojemność (wzory (25.9), (25.14) i (25.17)) zawierają stałą  $\varepsilon_0$  pomnożoną przez wielkość o wymiarze długości.

### Sprawdzian 2

Czy ładunek zmagazynowany na kondensatorach naładowanych przez to samo źródło wzrasta, maleje, czy pozostaje taki sam w każdej z następujących sytuacji: a) odległość między okładkami kondensatora płaskiego wzrasta, b) promień wewnętrznej powierzchni walcowej kondensatora walcowego wzrasta, c) promień zewnętrznej powłoki sferycznej kondensatora kulistego wzrasta?

### Przykład 25.01. Ładowanie okładek kondensatora płaskiego

Na rysunku 25.7a klucz S jest zamknięty, łącząc nienaładowany kondensator o pojemności  $C = 0.25 \,\mu\text{F}$  z baterią o różnicy potencjałów U = 12 V. Dolna okładka kondensatora ma grubość L = 0.5 cm, pole powierzchni  $S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  i jest wykonana z miedzi, w której gęstość elektronów przewodnictwa wynosi  $n = 8,49 \cdot 10^{28}$ elektronów/m<sup>3</sup>. Jaka jest grubość warstwy miedzi *d* (rys. 25.7b), z której elektrony przepływają na powierzchnię okładki, gdy kondensator się naładuje?



**Rys. 25.7.** a) Obwód elektryczny z kondensatorem i baterią. b) Dolna okładka kondensatora

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Ładunek zgromadzony na okładce kondensatora jest związany z jego pojemnością i różnicą potencjałów pomiędzy obiema okładkami wzorem (25.1) (q = CU). **Obliczenia:** Ponieważ dolna okładka jest podłączona do ujemnego bieguna baterii, więc elektrony przewodnictwa przesuwają się na jej powierzchnię. Ze wzoru (25.1) wynika, że całkowity ładunek, który się tam zgromadzi wynosi

$$q = CU = (0.25 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{F})(12 \,\mathrm{V}) = 3 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{C}.$$

Po podzieleniu tego wyniku przez e uzyskujemy liczbę elektronów przewodnictwa N, które zbierają się na powierzchni okładki

$$N = \frac{q}{e} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{C}}{1,602 \cdot 10^{-19} \,\mathrm{C}} = 1,873 \cdot 10^{13} \,\mathrm{elektronów.}$$

Elektrony te pochodzą z objętości będącej iloczynem pola powierzchni okładki *S* i grubości *d*, której szukamy. Zatem znając gęstość elektronów przewodnictwa (liczba przez objętość), możemy napisać

$$n = \frac{N}{Sd},$$

lub

d = N	$1,873 \cdot 10^{13}$ e	elektronów
$a = \frac{1}{Sn}$	$\frac{1}{(2 \cdot 10^{-4} \mathrm{m}^2)(8,49 \cdot 1)}$	$0^{28}$ elektronów/m <sup>3</sup> )
$= 1, 1 \cdot$	$10^{-12} \mathrm{m} = 1,1 \mathrm{pm}$	(odpowiedź).

Zwykle mówimy, że elektrony przesuwają się z baterii na ujemną powierzchnię okładki, ale w zasadzie bateria wytwarza w przewodach i okładkach takie pole elektryczne, że elektrony bliskie powierzchni okładki przesuwają się na jej ujemną powierzchnię.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **25.3.** KONDENSATORY POŁĄCZONE RÓWNOLEGLE I SZEREGOWO

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 25.06 narysować schematy obwodów z baterią i a) trzema kondensatorami połączonymi równolegle i b) trzema kondensatorami połączonymi szeregowo;
- 25.07 zauważyć, że kondensatory połączone równolegle mają taką samą różnicę potencjałów, która jest identyczna z różnicą potencjałów na kondensatorze równoważnym;
- 25.08 obliczyć pojemność kondensatora równoważnego kondensatorom połączonym równolegle;
- 25.09 zauważyć, że całkowity ładunek kondensatorów połączonych równolegle jest sumą ładunków zgromadzonych na każdym z nich;
- 25.10 zauważyć, że ładunek kondensatorów połączonych szeregowo jest jednakowy i identyczny z ładunkiem kondensatora równoważnego;
- 25.11 obliczyć pojemność kondensatora równoważnego kondensatorom połączonym szeregowo;

### Podstawowe fakty \_

 Pojemności równoważne C<sub>rw</sub> układów pojedynczych kondensatorów połączonych równolegle i szeregowo określone są wzorami:

$$C_{\rm rw} = \sum_{j=1}^{n} C_j$$
 (*n* kondensatorów połączonych równolegle)

- 25.12 zauważyć, że różnica potencjałów przyłożona do kondensatorów połączonych szeregowo jest równa sumie różnic potencjałów na każdym z nich;
- 25.13 uprościć w kolejnych krokach obwód z baterią, kilkoma kondensatorami połączonymi równolegle i kilkoma kondensatorami połączonymi szeregowo, znajdując kondensatory równoważne, aż będzie można znaleźć ładunek i napięcie końcowego kondensatora równoważnego, a następnie odwrócić kolejność kroków, aby znaleźć ładunek i napięcie na poszczególnych kondensatorach;
- 25.14 wyznaczyć ilość ładunku przepływającego po zamknięciu klucza przez dowolny punkt obwodu z baterią, otwartym kluczem i jednym nienaładowanym kondensatorem lub więcej;
- 25.15 wyznaczyć ładunek i różnicę potencjałów na każdym kondensatorze po osiągnięciu warunków równowagi w obwodzie, w którym naładowany kondensator jest łączony równolegle z jednym nienaładowanym kondensatorem lub więcej.

 $\frac{1}{C_{\rm rw}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \quad (n \text{ kondensatorów połączonych szeregowo}).$ 

Pojemności równoważnych można używać do obliczania pojemności bardziej skomplikowanych układów kondensatorów połączonych szeregowo i równolegle.

### Kondensatory połączone równolegle i szeregowo

Jeśli w obwodzie występuje układ kondensatorów, to nieraz możemy zastąpić ten układ **kondensatorem równoważnym**, czyli pojedynczym kondensatorem o takiej samej pojemności, jak pojemność całego układu. Możemy w ten sposób uprościć obwód, otrzymując prostsze rozwiązania dla nieznanych wielkości w obwodzie. Omówimy tu dwa podstawowe układy kondensatorów, które umożliwiają takie zastąpienie.



**Rys. 25.8.** a) Trzy kondensatory podłączone równolegle do źródła B. Źródło zapewnia różnicę potencjałów U na swych biegunach i na *każdym* kondensatorze. b) Równoważny kondensator o pojemności  $C_{rw}$  zastępuje układ kondensatorów połączonych równolegle

### Kondensatory połączone równolegie

Na rysunku 25.8a przedstawiono obwód elektryczny, w którym trzy kondensatory są podłączone równolegle do źródła B. Nazwa ta ma mało wspólnego z tym, jak zostały narysowane okładki kondensatorów. W rzeczywistości "równolegle" oznacza, że połączono przewodami bezpośrednio jedne okładki kondensatorów i podobnie drugie okładki, oraz że różnica potencjałów U jest przyłożona do tych dwóch połączonych przewodami okładek. Na każdym kondensatorze jest więc ta sama różnica potencjałów U, która wytwarza ładunek na kondensatorze. (Na rysunku 25.8a przyłożony potencjał U jest stały dzięki źródłu). Inaczej mówiąc:

Jeśli różnica potencjałów U jest przyłożona do kilku kondensatorów połączonych równolegle, to taka sama różnica potencjałów U występuje na każdym kondensatorze. Całkowity ładunek q zgromadzony w układzie jest sumą ładunków zgromadzonych na poszczególnych kondensatorach.

Jeśli analizujemy obwód z kondensatorami połączonymi równolegle, to możemy go uprościć w następujący sposób:

Kondensatory połączone równolegle można zastąpić kondensatorem równoważnym o takim samym całkowitym ładunku q i takiej samej różnicy potencjałów U, jak dla kondensatorów układu.

Na rysunku 25.8b przedstawiono kondensator równoważny (o równoważnej pojemności  $C_{rw}$ ), którym zastąpiono trzy kondensatory (o pojemnościach  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ ) z rysunku 25.8a. Aby wyprowadzić wyrażenie na  $C_{rw}$  z rysunku 25.8b, zastosujemy najpierw wzór (25.1) w celu obliczenia ładunku na każdym z trzech kondensatorów

$$q_1 = C_1 U, \qquad q_2 = C_2 U \qquad i \qquad q_3 = C_3 U.$$

Całkowity ładunek w układzie połączonych równolegle kondensatorów z rysunku 25.8a wynosi więc

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U.$$

Równoważna pojemność o takim samym jak w układzie całkowitym ładunku i takiej samej przyłożonej różnicy potencjałów *U* wynosi więc

$$C_{\rm rw} = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + C_3,$$

co możemy łatwo rozszerzyć na dowolną liczbę n kondensatorów

$$C_{\rm rw} = \sum_{j=1}^{n} C_j$$
 (*n* kondensatorów połączonych równolegle). (25.19)

W celu obliczenia równoważnej pojemności układu kondensatorów połączonych równolegle dodajemy więc po prostu ich pojemności.

### Kondensatory połączone szeregowo

Na rysunku 25.9a przedstawiono trzy kondensatory podłączone *szeregowo* do źródła B. Nazwa ta ma mało wspólnego z tym, jak kondensatory zostały

narysowane. W rzeczywistości "szeregowo" oznacza, że kondensatory są łączone ze sobą w szereg, jeden za drugim, i że różnica potencjałów U jest przyłożona do dwóch końców szeregu. (Na rysunku 25.9a ta różnica potencjałów jest utrzymywana przez źródło B). Różnice potencjałów, które pojawiają się na kondensatorach w szeregu, wytwarzają na nich jednakowe ładunki q.

Jeśli różnica potencjałów U jest przyłożona do kilku kondensatorów połączonych szeregowo, to kondensatory mają identyczne ładunki q. Suma różnic potencjałów na wszystkich kondensatorach jest równa przyłożonej różnicy potencjałów U.

Możesz sobie wyobrazić, że kondensatory uzyskują identyczne ładunki w wyniku *ciągu* zdarzeń, w którym ładowanie każdego kondensatora powoduje ładowanie następnego. Zaczniemy od kondensatora 3 i będziemy się przesuwać do kondensatora 1. Gdy źródło zostaje podłączone do kondensatorów połączonych szeregowo, wytwarza ładunek -q na dolnej okładce kondensatora 3. Ten ładunek odpycha wtedy ładunek ujemny z górnej okładki kondensatora 3 (pozostaje ładunek +q). Odepchnięty ładunek ujemny przesuwa się do dolnej okładki kondensatora 2 (dając jej ładunek -q). Ładunek na dolnej okładce kondensatora 2 odpycha wtedy ładunek ujemny z górnej okładki kondensatora 2 (zostaje ładunek +q) do dolnej okładki kondensatora 1 (dając jej ładunek -q). Na koniec ładunek na dolnej okładce kondensatora 1 powoduje przesunięcie ujemnego ładunku z górnej okładki kondensatora 1 do źródła, pozostawiając górną okładkę z ładunkiem +q.

Oto dwa istotne fakty dotyczące kondensatorów połączonych szeregowo:

- 1. Jeśli ładunek przesuwa się z jednego kondensatora na drugi w kondensatorach połączonych szeregowo, to może się poruszać tylko po jednej linii, takiej jak na przykład z kondensatora 3 do kondensatora 2 na rysunku 25.9a. Jeśli istnieją dodatkowe połączenia przewodzące, to kondensatory nie są połączone szeregowo.
- 2. Źródło wytwarza bezpośrednio ładunki tylko na tych dwóch okładkach, z którymi jest połączone (na dolnej okładce kondensatora 3 i górnej okładce kondensatora 1, na rysunku 25.9a). Ładunki wytwarzane na innych okładkach powstają w wyniku przesunięć ładunków tam istniejących. Na przykład na rysunku 25.9a część obwodu otoczona linią przerywaną jest elektrycznie odizolowana od reszty obwodu. Stąd ładunek wypadkowy tej części nie może zostać zmieniony przez źródło — ładunek w tej części może mieć tylko zmieniony rozkład.

Gdy analizujemy obwód z kondensatorami połączonymi szeregowo, możemy go uprościć w następujący sposób:

Kondensatory połączone szeregowo można zastąpić równoważnym kondensatorem, który ma taki sam ładunek q i taką samą *całkowitą* różnicę potencjałów U, jak kondensatory połączone szeregowo.



**Rys. 25.9.** a) Trzy kondensatory podłączone szeregowo do źródła B. Źródło zapewnia różnicę potencjałów U między najwyższą i najniższą okładką układu kondensatorów połączonych szeregowo. b) Równoważny kondensator o pojemności C<sub>rw</sub> zastępuje układ kondensatorów połączonych szeregowo Na rysunku 25.9b przedstawiono kondensator równoważny (o równoważnej pojemności  $C_{rw}$ ), którym zastąpiono trzy kondensatory (o pojemnościach  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ ) z rysunku 25.9a.

W celu obliczenia wyrażenia na  $C_{rw}$  z rysunku 25.9b skorzystamy najpierw ze wzoru (25.1) i znajdziemy różnicę potencjałów na każdym z kondensatorów

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \qquad U_2 = \frac{q}{C_2} \qquad i \qquad U_3 = \frac{q}{C_3}$$

Całkowita różnica potencjałów U, wytworzona przez źródło jest sumą tych trzech różnic potencjałów. Stąd

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right).$$

Równoważna pojemność wynosi więc

$$C_{\rm rw} = \frac{q}{U} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3},$$

czyli:

$$\frac{1}{C_{\rm rw}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Możemy łatwo rozszerzyć ten wynik na dowolną liczbę *n* kondensatorów:

$$\frac{1}{C_{\rm rw}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \qquad (n \text{ kondensatorów połączonych szeregowo).} (25.20)$$

Korzystając ze wzoru (25.20), można pokazać, że równoważna pojemność układu kondensatorów połączonych szeregowo jest zawsze *mniejsza* od najmniejszej pojemności rozważanego układu.

### Sprawdzian 3

Źródło o różnicy potencjałów U dostarczyło ładunek q układowi dwóch identycznych kondensatorów. Jaka jest różnica potencjałów i ładunek na każdym kondensatorze, jeśli kondensatory są połączone: a) równolegle, b) szeregowo?

### Przykład 25.02. Kondensatory połączone równolegle i szeregowo

a) Oblicz równoważną pojemność dla przedstawionego na rysunku 25.10a układu kondensatorów, do którego przyłożono różnicę potencjałów U. Przyjmij

$$C_1 = 12 \,\mu\text{F}, \qquad C_2 = 5,3 \,\mu\text{F} \qquad \text{i} \qquad C_3 = 4,5 \,\mu\text{F}.$$

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Dowolne kondensatory połączone szeregowo można zastąpić kondensatorem równoważnym. Podobnie dowolne kondensatory połączone równolegle można zastąpić równoważnym im kondensatorem. Dlatego powinniśmy najpierw sprawdzić, czy na rysunku 25.10a jakieś kondensatory są połączone równolegle lub szeregowo.

**Znajdowanie pojemności równoważnej:** Kondensatory 1 i 3 są połączone jeden za drugim, ale czy są połączone szeregowo? Nie. Różnica potencjałów U przyłożona do kondensatorów wytwarza ładunek na dolnej okładce kondensatora 3. Ten ładunek powoduje przesunięcie ładunku z górnej okładki kondensatora 3. Zauważ jednak, że przesuwany ładunek może poruszać się do dolnych okładek zarówno kondensatora 1, jak i kondensatora 2.



**Rys. 25.10.** (a)–(d) Trzy kondensatory redukowane do jednego kondensatora równoważnego. (e)–(i) Procedura odwrotna służąca wyznaczeniu ładunków

Istnieje więcej niż jedna droga dla przesuwanego ładunku, a więc kondensator 3 *nie* jest połączony szeregowo z kondensatorem 1 (czy kondensatorem 2).

Czy kondensatory 1 i 2 są połączone równolegle? Tak. Ich górne okładki są bezpośrednio połączone przewodem i ich dolne okładki są bezpośrednio połączone przewodem, a różnica potencjałów jest przyłożona między parę górnych okładek i parę dolnych okładek. Stąd kondensator 1 i kondensator 2 są połączone równolegle i ze wzoru (25.19) wynika, że równoważna pojemność  $C_{12}$  dla tej pary wynosi

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12 \,\mu\text{F} + 5.3 \,\mu\text{F} = 17.3 \,\mu\text{F}.$$

Na rysunku 25.10b zastąpiliśmy kondensatory 1 i 2 równoważnym im kondensatorem, nazwijmy go kondensatorem 12 ("jeden dwa"). (Połączenia w punktach A i B są dokładnie takie same na rys. 25.10a i 25.10b). Czy kondensator 12 jest połączony szeregowo z kondensatorem 3? Stosując ponownie test dla kondensatorów połączonych szeregowo, dostrzeżesz, że ładunek przesuwany z górnej okładki kondensatora 3 musi przejść w całości na dolną okładkę kondensatora 12. Stąd kondensatory 12 i 3 są połączone szeregowo i możemy je zastąpić równoważnym im kondensatorem o pojemności  $C_{123}$  z rys. 25.10c. Ze wzoru (25.20) otrzymujemy

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{17,3\,\mu\text{F}} + \frac{1}{4,5\,\mu\text{F}} = 0,28\,\mu\text{F}^{-1},$$
skąd

$$C_{123} = \frac{1}{0,28\,\mu\mathrm{F}^{-1}} = 3,57\,\mu\mathrm{F}$$
 (odpowiedź).

**b**) Różnica potencjałów, przyłożona do zacisków wejściowych na rysunku 25.10a wynosi U = 12,5 V. Jaki jest ładunek na kondensatorze 1?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

W celu obliczenia ładunku na konkretnym kondensatorze musimy cofnąć się do tego kondensatora, zaczynając od kondensatora równoważnego. Mamy dwie techniki takiej odwrotnej procedury. 1) Kondensatory połączone szeregowo mają taki sam ładunek jak kondensator równoważny. 2) Różnica potencjałów na kondensatorach połączonych równolegle jest taka sama jak różnica potencjałów na kondensatorze równoważnym.

**Procedura odwrotna:** Aby znaleźć ładunek  $q_1$  na kondensatorze 1 musimy zastosować procedurę odwrotną, zaczynając od kondensatora 123. Podana różnica potencjałów U = 12,5 V jest przyłożona do układu trzech kondensatorów z rysunku 25.10a, a więc jest także przyłożona do kondensatora 123 z rysunków 25.10d i e. Stąd wzór (25.1) (q = CU) daje nam

 $q_{123} = C_{123}U = (3,57 \,\mu\text{F}) \cdot (12,5 \,\text{V}) = 44,6 \,\mu\text{C}.$ 

Połączone szeregowo kondensatory 12 i 3 z rysunku 25.10b mają taki sam ładunek jak równoważny im kondensator 123 (rys. 25.10f). Stąd kondensator 12 ma ładunek 
$$q_{12} = q_{123} = 44,6 \,\mu$$
C. Ze wzoru (25.1) i rysunku 25.10g różnica potencjałów na kondensatorze 12 musi wynosić

$$U_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44.6\,\mu\text{C}}{17.3\,\mu\text{F}} = 2,58\,\text{V}.$$

Różnica potencjałów na połączonych równolegle kondensatorach 1 i 2 jest taka sama, jak na równoważnym im kondensatorze 12 (rys. 25.10h). Stąd różnica potencjałów na kondensatorze 1  $U_1 = U_{12} = 2,58$  V. Ze wzoru (25.1) ładunek kondensatora 1 musi więc wynosić

$$q_1 = C_1 U_1 = (12 \,\mu\text{F})(2,58 \,\text{V})$$
  
= 31  $\mu\text{C}$  (odpowiedź).

### Przykład 25.03. Jeden kondensator ładujący drugi kondensator

Kondensator 1 o pojemności  $C_1 = 3,55 \,\mu\text{F}$  został naładowany do różnicy potencjałów  $U_0 = 6,3 \,\text{V}$  przy użyciu źródła o takiej różnicy potencjałów. Następnie zostaje odłączone źródło, a przyłączony nienaładowany kondensator 2 o pojemności  $C_2 = 8,95 \,\mu\text{F}$  (rys. 25.11). Gdy klucz S zostaje zamknięty, ładunek przepływa między kondensatorami. Znajdź ładunek zgromadzony na każdym z kondensatorów po ustaleniu stanu równowagi.

**Rys. 25.11.** Do kondensatora 1 przyłożono różnicę potencjałów  $U_0$  i po naładowaniu kondensatora odłączono źródło. Następnie zamknięto klucz S i ładunek na kondensatorze 1 rozdzielił się między kondensatory 1 i 2



#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Obecna sytuacja różni się od opisanej w poprzednim przykładzie tym, że układ *nie zawiera* źródła, które utrzymywałoby stałą różnicę potencjałów. Tuż po zamknięciu klucza S różnica potencjałów przyłożona do kondensatora 2 pochodzi od kondensatora 1, a z czasem maleje. W takim przypadku przedstawionym na rysunku 25.11 nie możemy mówić ani o *szeregowym*, ani o *równoległym* połączeniu kondensatorów, chociaż na schemacie są one narysowane równolegle.

W miarę jak różnica potencjałów na kondensatorze 1 maleje, różnica potencjałów na kondensatorze 2 rośnie. Stan równowagi zostanie osiągnięty, gdy obie różnice potencjałów będą sobie równe. Gdy pomiędzy połączonymi ze sobą okładkami kondensatorów nie ma różnicy potencjałów, wówczas będzie istniało w przewodach pole elektryczne, które mogłoby przesuwać elektrony przewodnictwa.

**Obliczenia:** Początkowo, gdy kondensator 1 jest podłączony do baterii, zgromadzony na nim ładunek zgodnie ze wzorem (25.1) wynosi

$$q_0 = C_1 U_0 = (3,55 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{F})(6,3 \,\mathrm{V}) = 22,365 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{C}.$$

Po zamknięciu klucza S na rysunku 25.11 kondensator 1 zaczyna ładować kondensator 2, różnica potencjałów i ładunek na kondensatorze 1 zmniejszają się, a na kondensatorze 2 zwiększają się aż do chwili, gdy

$$U_1 = U_2$$
 (równowaga).

Korzystając ze wzoru (25.1), możemy przepisać ten wynik w postaci

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \qquad \text{(równowaga)}.$$

Ponieważ całkowity ładunek nie może się w magiczny sposób zmienić, suma ładunków po tym transferze musi
być równa

6

$$q_1 + q_2 = q_0$$
 (zachowanie ładunku),

czyli

$$q_2 = q_0 - q_1.$$

To drugie równanie równowagi możemy teraz przepisać w postaci

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_0 - q_1}{C_2}.$$

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

Po rozwiązaniu tego równania i podstawieniu danych znajdujemy wartość  $q_1$ :

$$q_1 = 6,35\,\mu\text{C}$$
 (odpowiedź).

Pozostała część ładunku początkowego (część  $q_0 = 22,365 \,\mu\text{C}$ ) musi się znajdować na kondensatorze 2

$$q_2 = 16,0\,\mu\text{C}$$
 (odpowiedź).

## **25.4.** ENERGIA ZMAGAZYNOWANA W POLU ELEKTRYCZNYM

### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 25.16 wyjaśnić, jak praca potrzebna do naładowania kondensatora zamienia się w energię potencjalną tego kondensatora;
- **25.17** zastosować związek pomiędzy energią potencjalną  $E_{\rm p}$ , pojemnością *C* i różnicą potencjałów *U* w kondensatorze;
- 25.18 zastosować związek pomiędzy energią potencjalną, objętością wewnętrzną i gęstością energii wewnętrznej;

### Podstawowe fakty \_

• Energia potencjalna Ep naładowanego kondensatora,

$$E_{\rm p} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2$$

jest równa pracy niezbędnej do naładowania kondensatora. Energię tą można powiązać z natężeniem pola elektrycznego  $\vec{E}$ , które panuje w tym kondensatorze.

- 25.19 zastosować związek pomiędzy gęstością energii potencjalnej u pola elektrycznego i wartością natężenia pola elektrycznego E;
- 25.20 wyjaśnić niebezpieczeństwo, jakie niosą iskry w powietrzu, w którym unosi się pył.

• W każdym polu elektrycznym, czy to w kondensatorze, czy w innym urządzeniu zmagazynowana jest energia. W próżni gęstość tej energii *u* (energia potencjalna na jednostkę objętości) w polu elektrycznym o natężeniu *E* wynosi

 $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$ 

### Energia zmagazynowana w polu elektrycznym

Aby naładować kondensator, konieczne jest wykonanie pracy przez siłę zewnętrzną. Możesz sobie wyobrazić wykonanie tej pracy samemu, przenosząc jeden po drugim elektrony z jednej okładki kondensatora na drugą. W trakcie zbierania ładunku na okładkach kondensatora rośnie natężenie pola elektrycznego pomiędzy nimi. Pole to przeciwdziała dalszemu przenoszeniu elektronów. W efekcie przy dalszym przenoszeniu elektronów musimy wykonywać coraz większą pracę. W rzeczywistości praca ta jest dla nas wykonywana przez źródło, kosztem zmagazynowanej w nim energii chemicznej. Możemy wyobrazić sobie, że praca ta zostaje zmagazynowana w postaci elektrycznej energii potencjalnej pola elektrycznego istniejącego pomiędzy okładkami kondensatora.

Załóżmy, że w pewnej chwili ładunek przeniesiony z jednej płytki kondensatora na drugą wynosił q'. Różnica potencjałów U' między okładkami była wtedy równa q'/C. Jeśli przeniesiemy następnie dodatkowy ładunek dq', to zgodnie ze wzorem (24.6) praca przy tym wykonana wyniesie

$$\mathrm{d}W = U'\mathrm{d}q' = \frac{q'}{C}\mathrm{d}q'.$$

Praca potrzebna do przeniesienia całkowitego ładunku q kondensatora jest równa

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int_{0}^{q} q' dq' = \frac{q^2}{2C}.$$

Praca ta jest zmagazynowana jako energia potencjalna  $E_{\rm p}$  w kondensatorze i stąd

$$E_{\rm p} = \frac{q^2}{2C}$$
 (energia potencjalna). (25.21)

Stosując wzór (25.1), możemy tę energię zapisać także w postaci

$$E_{\rm p} = \frac{1}{2}CU^2$$
 (energia potencjalna). (25.22)

Wzory (25.21) i (25.22) są poprawne bez względu na geometrię kondensatora.

Aby zrozumieć, na czym polega magazynowanie energii, rozważmy dwa płaskie kondensatory, które są identyczne poza tym, że w kondensatorze 1 odległość między okładkami jest dwa razy większa niż w kondensatorze 2. Wtedy kondensator 1 ma dwa razy większą objętość obszaru między okładkami i, zgodnie ze wzorem (25.9), dwa razy mniejszą pojemność niż kondensator 2. Ze wzoru (25.4) wynika, że jeśli na obydwu kondensatorach znajdują się takie same ładunki *q*, to natężenia pól elektrycznych między ich okładkami są identyczne. Ze wzoru (25.21) wynika, że energia potencjalna zmagazynowana w kondensatorze 1 jest dwa razy większa niż w kondensatorze 2. Dla dwóch prawie identycznych kondensatorów o takim samym ładunku i takim samym natężeniu pola kondensator o dwa razy większej objętości między okładkami ma więc zmagazynowaną dwa razy większą energię potencjalną. Takie argumenty potwierdzają nasze wcześniejsze założenie:

Energia potencjalna naładowanego kondensatora jest zmagazynowana w polu elektrycznym między okładkami kondensatora.

### Eksplozje pyłu unoszącego się w powietrzu

W podrozdziale 24.8 wspominaliśmy, że kontakt z pewnymi obiektami, takimi jak: ubranie, dywany, a nawet zjeżdżalnia na placu zabaw, może znacznie podwyższyć twój potencjał elektryczny. Możesz to sobie boleśnie uświadomić, gdy pomiędzy tobą a jakimś uziemionym ciałem, na przykład kranem, przeskoczy gwałtownie iskra elektryczna. W wielu dziedzinach przemysłu, w których produkuje się oraz transportuje pyły i proszki, na przykład w przemyśle kosmetycznym czy spożywczym, taka iskra może mieć katastrofalne skutki. Mimo że takie substancje w formie objętościowej mogą wcale nie być palne, to w formie małych drobinek unoszonych w powietrzu i otoczonych w ten sposób cząsteczkami tlenu płoną tak gwałtownie, że palenie chmury takich ziarenek przybiera formę eksplozji. Specjaliści od bezpieczeństwa nie potrafią wyeliminować wszystkich możliwych źródeł iskrzenia w tych dziedzinach przemysłu. Zamiast tego próbują ograniczać ilość energii dostępnej w iskrach poniżej wartości progowej  $E_t$  ( $\approx 150$  mJ) wymaganej typowo do zapalenia drobinek unoszących się w powietrzu.

Przypuśćmy, że spacerujący człowiek, otoczony powietrzem wypełnionym unoszącym się pyłem ładuje się elektrycznie na skutek kontaktu z różnymi powierzchniami. Przybliżonym modelem takiego człowieka może być kulisty kondensator o promieniu R = 1,8 m. Ze wzorów (25.18) ( $C = 4\pi\epsilon_0 R$ ) i (25.22) ( $E_p = \frac{1}{2}CU^2$ ) wynika, że energia takiego kondensatora równa jest

$$E_{\rm p} = \frac{1}{2} (4\pi\varepsilon_0 R) U^2$$

Widać z tego wzoru, że energia progowa odpowiada potencjałowi

$$U = \sqrt{\frac{2E_{\rm t}}{4\pi\varepsilon_0 R}} = \sqrt{\frac{2(150\cdot10^{-3}\,{\rm J})}{4\pi(8,85\cdot10^{-12}\,{\rm C}^2/{\rm N}\cdot{\rm m}^2)(1,8\,{\rm m})}} = 3.9\cdot10^4\,{\rm V}.$$

Specjaliści od bezpieczeństwa starają się utrzymać potencjał pracowników poniżej tego poziomu, stosując na przykład przewodzące podłogi, przez które może spływać ładunek zgromadzony na ludziach.

### Gęstość energii

W kondensatorze płaskim, przy zaniedbaniu efektów brzegowych, natężenie pola elektrycznego ma taką samą wartość we wszystkich punktach między okładkami. Stąd **gęstość energii** *u*, czyli energia potencjalna na jednostkę objętości między okładkami, powinna także być stała. Możemy znaleźć *u*, dzieląc całkowitą energię potencjalną przez objętość *Sd* obszaru między okładkami. Po zastosowaniu wzoru (25.22) otrzymujemy

$$u = \frac{E_{\rm p}}{Sd} = \frac{CU^2}{2Sd}.$$
(25.23)

Po podstawieniu  $C = \varepsilon_0 S/d$  zgodnie ze wzorem (25.9), powyższe równanie przybiera postać

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2.$$
 (25.24)

Jak wynika ze wzoru (24.42) ( $E = -\Delta V / \Delta s$ ) wielkość U/d jest równa wartości natężenia pola elektrycznego E, czyli

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$
 (gęstość energii). (25.25)

Chociaż wzór ten wyprowadziliśmy dla szczególnego przypadku kondensatora płaskiego, to jest on prawdziwy bez względu na źródło pola elektrycznego. Jeśli w jakimś punkcie przestrzeni istnieje pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , to możemy z tym punktem wiązać elektryczną energię potencjalną, a jej ilość na jednostkę objętości jest dana wzorem (25.25).

### Przykład 25.04. Energia potencjalna i gęstość energii pola elektrycznego

Izolowana kula przewodząca o promieniu R = 6,85 cm ma ładunek q = 1,25 nC.

a) Jaka energia potencjalna jest zmagazynowana w polu elektrycznym tego naładowanego przewodnika?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Izolowana kula ma pojemność daną przez wzór (25.18) ( $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ ). 2) Energia  $E_p$  zmagazynowana w kondensatorze zależy zgodnie ze wzorem (25.21) od ładunku q na kondensatorze i pojemności C tego kondensatora ( $E_p = q^2/2C$ ).

**Obliczenia:** Podstawiając wyrażenie  $C = 4\pi\varepsilon_0 R$  do wzoru (25.21), otrzymujemy

$$E_{\rm p} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$
  
=  $\frac{(1,25 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{(8\pi)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(0,0685 \text{ m})}$   
= 1,03 \cdot 10^{-7} J = 103 nJ (odpowiedź).

b) Jaka jest gęstość energii przy powierzchni kuli?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Gęstość energii *u* zmagazynowanej w polu elektrycznym zależy od wartości *E* natężenia pola, zgodnie ze wzorem (25.25) ( $u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ ).

**Obliczenia:** Musimy najpierw znaleźć *E* przy powierzchni kuli. Wartość ta jest dana wzorem (23.15)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2}.$$

Gęstość energii wynosi więc:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}$$
  
=  $\frac{(1,25 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{(32\pi^2)(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))(0,0685 \text{ m})^4}$   
= 2,54 \cdot 10^{-5} J/m^3 = 25,4 \muJ/m^3 (odpowiedź).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **25.5.** KONDENSATOR Z DIELEKTRYKIEM

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 25.21 zauważyć, że jeżeli przestrzeń pomiędzy okładkami kondensatora zostanie wypełniona dielektrykiem, to jego pojemność wzrośnie;
- 25.22 obliczyć pojemność kondensatora z dielektrykiem i bez;
- **25.23** zauważyć, że w obszarze wypełnionym dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_r$  wszystkie równania elektrostatyki, które zawierają  $\varepsilon_0$ , modyfikowane są przez pomnożenie tej stałej przez względną przenikalność elektryczną  $\varepsilon_r \varepsilon_0$ ;
- 25.24 nazwać niektóre popularne dielektryki;
- 25.25 rozróżnić skutki wprowadzenia dielektryka do naładowanego kondensatora w przypadku kondensatora a) podłączonego do baterii i b) niepodłączonego do baterii;
- 25.26 rozróżnić dielektryki polarne i niepolarne;
- 25.27 wyjaśnić, co się dzieje z polem elektrycznym pomiędzy okładkami kondensatora po wypełnieniu dielektrykiem naładowanego kondensatora, odnosząc się do zachowania atomów w dielektryku.

### Podstawowe fakty

• Jeśli przestrzeń pomiędzy okładkami kondensatora jest całkowicie wypełniona materiałem dielektrycznym, to pojemność tego kondensatora *C* wziększa sie w stosunku do jego pojemności w próżni (lub efektywnie w powietrzu) o czynnik równy względnej przenikalności elektrycznej tego materiału  $\varepsilon_r$ , która jest liczbą większą od 1.

• W obszarze całkowicie wypełnionym dielektrykiem wszystkie równania elektrostatyki zawierające stałą elektryczną  $\varepsilon_0$  muszą być zmodyfikowane przez zamianę  $\varepsilon_0$  na  $\varepsilon_r \varepsilon_0$ .

 Gdy materiał dielektryczny umieszczany jest w zewnętrznym polu elektrycznym, powstaje w nim wewnętrzne pole elektryczne, które jest skierowane przeciwnie do pola zewnętrznego, co redukuje wartość natężenia pola elektrycznego wewnątrz tego materiału.

• Gdy materiał dielektryczny umieszczany jest w kondensatorze o ustalonym ładunku na okładkach, wypadkowe pole elektryczne pomiędzy jego okładkami maleje.

### Kondensator z dielektrykiem

Co stanie się z pojemnością kondensatora, jeśli przestrzeń między jego okładkami wypełnimy dielektrykiem, czyli materiałem izolującym, na przykład olejem mineralnym lub plastikiem? Pierwszy przeanalizował ten problem w 1837 roku Michael Faraday, któremu w dużym stopniu zawdzięczamy pojęcie pojemności i na cześć którego jednostkę pojemności w układzie SI nazwano faradem. Korzystając z prostych przyrządów, pokazanych na rysunku 25.12, Faraday odkrył, że pojemność kondensatora wzrasta o czynnik liczbowy  $\varepsilon_r$ , który nazywamy przenikalnością elektryczną względną materiału izolującego. W tabeli 25.1 podano wartości przenikalności elektrycznych dla kilkunastu materiałów dielektrycznych. Przenikalność elektryczna próżni jest z definicji równa jedności. Ponieważ powietrze jest prawie pustą przestrzenią, więc jej przenikalność elektryczna jest tylko odrobinę większa niż jeden. Nawet zwykły papier może znacznie zwiększyć pojemność kondensatora, a niektóre materiały, takie jak tytanian strontu, potrafią zwiększyć pojemność kondensatora więcej niż dwa rzędy wielkości.

Inną konsekwencją wprowadzenia dielektryka jest konieczność ograniczenia różnicy potencjałów, jaka może być przyłożona do okładek, do pewnej wartości  $U_{\text{max}}$ , zwanej *napięciem przebicia*. Jeśli tę wartość istotnie przekroczymy, to nastąpi przebicie materiału dielektrycznego i między okładkami powstanie przewodząca ścieżka. Każdy materiał dielektryczny ma charakterystyczną *wytrzymałość na przebicie*, która jest maksymalną

**Rys. 25.12.** Prosta aparatura elektrostatyczna używana przez Faradaya. Złożony przyrząd (drugi od lewej) jest kondensatorem kulistym, składającym się z zewnętrznej mosiężnej powłoki i znajdującej się wewnątrz mosiężnej kuli. W przestrzeni między kulą i powłoką Faraday umieszczał materiały dielektryczne (dzięki uprzejmości The Royal Institute, England/Bridgeman Art Library/NY)



 Tabela 25.1.
 Niektóre właściwości

 dielektryków <sup>a</sup>
 1000 m

Matarial	Przenikalność	Wytrzymałość
Material	elektryczna	na przebicie
	względna $\varepsilon_r$	[kV/mm]
Powietrze (1	atm) 1,00054	3
Polistyren	2,6	24
Papier	3,5	16
Olej trans-		
formatorov	vy 4,5	
Pyreks	4,7	14
Mika	5,4	
Porcelana	6,5	
Krzem	12	
German	16	
Etanol	25	
Woda (20° C)	) 80,4	
Woda (25° C)	) 78,5	
Ceramika		
tytanowa	130	
Tytanian strontu 310		8
I	Dla próżni $\varepsilon_{\rm r} =$	: 1

<sup>a</sup> mierzone (poza wodą) w temperaturze pokojowej.

wartością natężenia pola elektrycznego, jakie dielektryk może wytrzymać bez przebicia. Kilka takich wartości podano w tabeli 25.1.

Zgodnie z dyskusją przy wzorze (25.18), pojemność dowolnego kondensatora można wyrazić wzorem

$$C = \varepsilon_0 \mathcal{L}, \tag{25.26}$$

gdzie  $\mathcal{L}$  ma wymiar długości i np. dla kondensatora płaskiego  $\mathcal{L} = S/d$ . Odkrycie Faradaya polegało na tym, że po *całkowitym* wypełnieniu dielektrykiem obszaru między okładkami kondensatora wzór (25.26) przybiera postać

$$C = \varepsilon_{\rm r} \varepsilon_0 \mathcal{L} = \varepsilon_{\rm r} C_{\rm pow}, \qquad (25.27)$$

gdzie  $C_{pow}$  jest wartością pojemności dla kondensatora z powietrzem (ściślej próżnią) między okładkami. Przykładowo, jeśli wypełnimy kondensator tytanianem strontu o względnej przenikalności elektrycznej 310, jego pojemność wzrośnie 310 razy.

Analiza rysunku 25.13 pozwala zrozumieć doświadczenia Faradaya. Na rysunku 25.13a bateria zapewnia stałą różnicę potencjałów U między okładkami kondensatora. Gdy między okładki włożymy płytę dielektryczną, ładunek q na okładkach zwiększy się o czynnik  $\varepsilon_r$ ; dodatkowy ładunek do okładek kondensatora zostaje dostarczony przez źródło prądu. Na rysunku 25.13b nie ma źródła i dlatego ładunek q musi pozostać stały przy wsuwaniu płyty dielektrycznej; różnica potencjałów U między okładkami maleje więc o czynnik  $\varepsilon_r$ . Obie te obserwacje są zgodne (wiemy, że q = CU) ze wzrostem pojemności, spowodowanym przez dielektryk.

Porównanie wzorów (25.26) i (25.27) wskazuje, że wpływ dielektryka można podsumować następująco:

W obszarze wypełnionym całkowicie materiałem dielektrycznym o względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_r$  wszystkie równania elektrostatyki zawierające przenikalność elektryczną próżni  $\varepsilon_0$  należy zmodyfikować, zastępując  $\varepsilon_0$  iloczynem  $\varepsilon_r \varepsilon_0$ .

Wartość natężenia pola elektrycznego wytwarzanego przez ładunek punktowy wewnątrz dielektryka dana jest zmodyfikowaną formą wzoru (23.15)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$
 (25.28)



**Rys. 25.13.** a) Jeśli różnica potencjałów między okładkami kondensatora jest utrzymywana, na przykład przez źródło B, to wsunięcie dielektryka zwiększa ładunek na okładkach. b) Jeśli ładunek na okładkach kondensatora jest stały (tak jak w tej sytuacji), to wsunięcie dielektryka zmniejsza różnicę potencjałów między okładkami. Pokazana skala jest skalą *woltomierza*, czyli przyrządu używanego do pomiaru różnicy potencjałów (w tym przypadku między okładkami). Kondensator nie może rozładować się przez woltomierz

Wyrażenie na natężenie pola elektrycznego przy powierzchni izolowanego przewodnika, otoczonego dielektrykiem (zob. wzór (23.11)) wynosi wtedy

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\rm r} \varepsilon_0}.$$
 (25.29)

Ponieważ  $\varepsilon_r$  jest zawsze większe od jedności, więc obydwa te równania pokazują, że *dla ustalonego rozkładu ładunków wpływ dielektryka polega na zmniejszeniu natężenia pola elektrycznego* w stosunku do sytuacji bez dielektryka.

### Przykład 25.05. Praca i energia związana z wsuwaniem dielektryka do kondensatora

Kondensator płaski, którego pojemność *C* wynosi 13,5 pF, został naładowany przez źródło do różnicy potencjałów między okładkami U = 12,5 V. Po odłączeniu źródła między okładki kondensatora wsunięto porcelanową płytę ( $\varepsilon_r = 6,5$ ).

**a**) Jaka jest energia potencjalna układu kondensatorpłyta przed wsunięciem płyty?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Energię potencjalną  $E_{p,p}$  kondensatora możemy powiązać z pojemnością C i z różnicą potencjałów U (wzór (25.22)) albo z ładunkiem q (wzór (25.21))

$$E_{\rm p,p} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{q^2}{2C}.$$

**Obliczenia:** Znamy początkową różnicę potencjałów U = 12,5 V, więc ze wzoru (25.22) znajdziemy początkową energię, zmagazynowaną w kondensatorze

$$E_{p,p} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \cdot 13,5 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot (12,5 \text{ V})^2$$
  
= 1,055 \cdot 10^{-9} J  
= 1055 pJ \approx 1100 pJ (odpowiedź).

**b**) Jaka jest końcowa energia potencjalna kondensatora po włożeniu płyty?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Ponieważ źródło zostało odłączone, więc ładunek na kondensatorze nie może ulec zmianie przy wsuwaniu dielektryka. *Zmianie ulega* natomiast różnica potencjałów.

**Obliczenia:** Musimy więc teraz użyć wzoru (25.21) (zawierającego q), aby wypisać wzór na końcową energię potencjalną  $E_{p,k}$ . Teraz w kondensatorze znajduje się płyta, a więc jego pojemność wynosi  $\varepsilon_r C$ . Otrzymujemy więc

$$E_{p,k} = \frac{q^2}{2\varepsilon_r C} = \frac{E_{p,p}}{\varepsilon_r} = \frac{1055 \text{ pJ}}{6.5}$$
  
= 162 pJ \approx 160 pJ (odpowiedź).

Po wsunięciu płyty energia potencjalna maleje o czynnik  $\varepsilon_r$ .

Źródło "brakującej" energii jest oczywiste dla osoby, która wsuwała płytę. Kondensator wciągał lekko płytę i wykonał nad nią pracę

$$W = E_{p,p} - E_{p,k} = (1055 - 162) \text{ pJ} = 893 \text{ pJ}.$$

Gdyby nie przytrzymywać płyty między okładkami, to płyta oscylowałaby między nimi tam i z powrotem ze stałą energią mechaniczną 893 pJ i energia ta zmieniałaby się okresowo z energii kinetycznej poruszającej się płyty na energię potencjalną zmagazynowaną w polu elektrycznym.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

### Dielektryki: obraz mikroskopowy

Co się dzieje z atomami i cząsteczkami, gdy włożymy dielektryk w pole elektryczne? Są dwie możliwości, zależne od rodzaju cząsteczek.



**Rys. 25.14.** a) Cząsteczki obdarzone elektrycznym momentem dipolowym, gdy nie ma zewnętrznego pola elektrycznego, mają przypadkowe ustawienia. b) Przyłożenie pola elektrycznego prowadzi do częściowego uporządkowania dipoli. Całkowitemu uporządkowaniu przeszkadza ruch termiczny

- 1. Dielektryki polarne. Cząsteczki pewnych dielektryków, np. wody, mają trwałe elektryczne momenty dipolowe. W takich materiałach (zwanych dielektrykami polarnymi) dipole elektryczne mają tendencję do ustawiania się wzdłuż zewnętrznego pola elektrycznego, tak jak na rysunku 25.14. Wskutek swego przypadkowego ruchu termicznego cząsteczki ciągle się potrącają nawzajem, a więc uporządkowanie nie jest całkowite, ale staje się coraz pełniejsze wraz ze wzrostem wartości natężenia przyłożonego pola (lub zmniejszeniem temperatury, a stąd liczby zderzeń). Uporządkowane dipole elektryczne wytwarzają pole elektryczne o natężeniu skierowanym przeciwnie do przyłożonego pola i mniejszej wartości.
- 2. Dielektryki niepolarne. Bez względu na to, czy cząsteczki mają trwałe elektryczne momenty dipolowe, czy też nie, po umieszczeniu w zewnętrznym polu elektrycznym zyskują indukowane momenty dipolowe. W podrozdziale 24.4 (zob. rys. 24.14) pokazaliśmy, że dzieje się tak, ponieważ zewnętrzne pole ma tendencję do "rozciągania" cząsteczek i przesuwa nieco środki ładunku dodatniego i ujemnego.

Na rysunku 25.15a przedstawiono płytę z niepolarnego dielektryka, bez zewnętrznego pola elektrycznego. Następnie przyłożono pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}_0$  przez umieszczenie płyty w kondensatorze, którego okładki były naładowane (rys. 25.15b). W wyniku tego nastąpiło w płycie niewielkie przesunięcie środków rozkładów ładunku dodatniego i ujemnego, co doprowadziło do pojawienia się ładunku dodatniego na jednej ścianie płyty (wskutek występowania tam dodatnich końców dipoli) i ładunku ujemnego na przeciwnej ścianie (wskutek występowania tam ujemnych końców di-



przyłożone pole elektryczne porządkuje atomowe momenty dipolowe



natężenie pola uporządkowanych atomów jest przeciwne do natężenia pola zewnętrznego



**Rys. 25.15.** a) Płyta z niepolarnego dielektryka. Koła przedstawiają elektrycznie obojętne atomy w płycie. b) Przyłożenie pola elektrycznego przez naładowanie okładek kondensatora; pole częściowo rozciąga atomy, rozsuwając środki dodatniego i ujemnego ładunku. c) Rozsunięcie wytwarza ładunki powierzchniowe na ścianach płyty. Ładunki te wytwarzają pole o natężeniu  $\vec{E'}$ , które jest skierowane przeciwnie do natężenia przyłożonego pola  $\vec{E_0}$ . Wypadkowe natężenie pola  $\vec{E}$  wewnątrz dielektryka (suma wektorowa natężeń  $\vec{E_0}$  i  $\vec{E'}$ ) ma ten sam kierunek co wektor  $\vec{E_0}$ , ale mniejszą wartość

poli). Płyta jako całość pozostała obojętna, a wewnątrz niej nie ma nadmiarowego ładunku w żadnym makroskopowym elemencie objętości.

Na rysunku 25.15c pokazano, że indukowane ładunki powierzchniowe na ścianach płyty wytwarzają pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}'$ , skierowanym przeciwnie do natężenia przyłożonego pola elektrycznego  $\vec{E}_0$ . Wypadkowe natężenie pola  $\vec{E}$  wewnątrz dielektryka (suma wektorowa natężeń  $\vec{E}_0$ i  $\vec{E}'$ ) ma kierunek natężenia  $\vec{E}_0$ , ale ma mniejszą wartość.

Zarówno natężenie pola  $\vec{E}'$  wytworzonego przez ładunki powierzchniowe na rysunku 25.15c, jak i natężenie pola wytworzonego przez trwałe dipole elektryczne z rysunku 25.14 jest tak samo skierowane — ma ono kierunek przeciwny do natężenia przyłożonego pola  $\vec{E}_0$ . Stąd zarówno w dielektrykach polarnych, jak i w niepolarnych natężenie dowolnego przyłożonego do nich pola maleje, podobnie jak między okładkami kondensatora.

# **25.6.** DIELEKTRYKI I PRAWO GAUSSA

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 25.28 odróżniać ładunek swobodny od ładunku indukowanego w kondensatorze z dielektrykiem;
- 25.29 w kondensatorze całkowicie lub częściowo wypełnionym dielektrykiem znajdować ładunek swobodny, ładunek indu-

### Podstawowe fakty

 Wstawienie dielektryka do kondensatora powoduje pojawienie się na jego powierzchni indukowanego ładunku i zmniejszenie natężenia pola elektrycznego istniejącego pomiędzy jego okładkami.

- Ładunek indukowany jest mniejszy niż ładunek swobodny na okładkach kondensatora.
- Dla dielektryka prawo Gaussa w obecności dielektryka

### Dielektryki i prawo Gaussa

W naszej dyskusji prawa Gaussa w rozdziale 23 założyliśmy, że ładunki znajdują się w próżni. Teraz zobaczysz, jak zmodyfikować i uogólnić to prawo, gdy mamy do czynienia z materiałami dielektrycznymi, np. podanymi w tabeli 25.1. Na rysunku 25.16 przedstawiono płaski kondensator z okładkami o polu powierzchni *S*, zarówno z dielektrykiem, jak i bez niego. Załóżmy, że ładunek q na okładkach kondensatora jest w obydwu przypadkach taki sam. Pole między okładkami indukuje ładunki na ścianach dielektryka w jeden z dwóch sposobów, opisanych w podrozdziale 25.5.

Dla przypadku przedstawionego na rysunku 25.16a, czyli bez dielektryka, natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}_0$  między okładkami możemy znaleźć tak, jak zrobiliśmy to na rysunku 25.5: otaczamy ładunek +q na górnej okładce powierzchnią Gaussa i następnie stosujemy prawo Gaussa. Jeśli  $E_0$  oznacza wartość natężenia pola, to

kowany, natężenie pola elektrycznego pomiędzy okładkami (jeśli w przestrzeni między okładkami istnieje przerwa, to jest więcej niż jedna wartość natężenia pola) i różnicę potencjałów pomiędzy okładkami takiego kondensatora.

można uogólnić do postaci

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_{\rm r} \vec{E} \cdot {\rm d}\vec{S} = q,$$

gdzie q jest ładunkiem swobodnym. Indukowany ładunek powierzchniowy jest uwzględniony przez wstawienie względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_r$  pod znak całki.

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E_0 S = q,$$
 (25.30)

czyli

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 S}.$$
(25.31)

Na rysunku 25.16b, czyli z dielektrykiem między okładkami, możemy stosując tę samą powierzchnię Gaussa, znaleźć natężenie pola elektrycznego między okładkami (czyli wewnątrz dielektryka). Teraz jednak powierzchnia ta obejmuje również ładunek indukowany -q' na górnej ścianie dielektryka. Ładunek na płycie przewodzącej nazywamy *ładunkiem swobodnym*, ponieważ może się on przesunąć, jeśli zmienimy potencjał elektryczny okładki; ładunek indukowany na powierzchni dielektryka nie jest swobodny, bo nie może opuścić tej powierzchni.

Całkowity ładunek, otoczony przez powierzchnię Gaussa na rysunku 25.16b wynosi q - q' i prawo Gaussa daje teraz

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 ES = q - q',$$
 (25.32)

czyli

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 S}.$$
(25.33)

Obecność dielektryka powoduje zmniejszenie wartości natężenia przyłożonego pola  $E_0$  o czynnik  $\varepsilon_r$ , czyli możemy napisać

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_{\rm r}} = \frac{q}{\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0 S}.$$
(25.34)

Z porównania wzorów (25.33) i (25.34) widać, że

$$q - q' = \frac{q}{\varepsilon_{\rm r}}.\tag{25.35}$$

Wzór (25.35) określa poprawnie, że wartość q' indukowanego ładunku powierzchniowego jest mniejsza od wartości ładunku swobodnego q i jest równa zeru, gdy nie ma dielektryka (wtedy  $\varepsilon_r = 1$  we wzorze (25.35)).

Po podstawieniu do wzoru (25.32) wyrażenia na q-q' ze wzoru (25.35) możemy zapisać prawo Gaussa w postaci

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$$
 (prawo Gaussa w dielektryku). (25.36)

To ważne równanie, wyprowadzone przez nas dla płaskiego kondensatora, jest najogólniejszą postacią, w jakiej można zapisać prawo Gaussa. Zauważ, że:



**Rys. 25.16.** Kondensator płaski: a) bez płyty, b) z wsuniętą płytą dielektryczną. Ładunek *q* na okładkach jest z założenia taki sam w obydwu przypadkach

- **1.** Całka strumienia zawiera obecnie  $\varepsilon_r \vec{E}$ , a nie tylko  $\vec{E}$ . (Wektor  $\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$  jest nieraz nazywany *indukcją elektryczną*  $\vec{D}$  i wzór (25.36) można wtedy zapisać w postaci  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$ ).
- 2. Ładunek q otoczony przez powierzchnię Gaussa jest teraz *tylko ładunkiem swobodnym*. Indukowany ładunek powierzchniowy pomijamy z prawej strony wzoru (25.36), biorąc go pod uwagę przez wprowadzenie przenikalności elektrycznej względnej  $\varepsilon_r$  z lewej strony.
- 3. Wzór (25.36) różni się od wzoru (23.7), naszego pierwotnego sformułowania prawa Gaussa, tylko tym, że stała  $\varepsilon_0$  w tym ostatnim równaniu została zastąpiona iloczynem  $\varepsilon_r \varepsilon_0$ . Pozostawiliśmy  $\varepsilon_r$  pod całką we wzorze (25.36), aby uwzględnić przypadki, gdy wielkość  $\varepsilon_r$  nie jest stała na całej powierzchni Gaussa.

### Przykład 25.06. Dielektryk częściowo wypełniający obszar między okładkami kondensatora

Na rysunku 25.17 przedstawiono kondensator płaski o polu powierzchni okładki *S* i odległości między okładkami *d*. Do okładek przyłożono różnicę potencjałów  $U_0$ . Następnie odłączono źródło i między okładki wsunięto płytę o grubości *b* i przenikalności elektrycznej względnej  $\varepsilon_r$ , jak pokazano na rysunku. Przyjmijmy *S* = 115 cm<sup>2</sup>, *d* = 1,24 cm,  $U_0$  = 85,5 V, *b* = 0,78 cm,  $\varepsilon_r$  = 2,61.



**Rys. 25.17.** Kondensator płaski z płytą dielektryczną, która tylko częściowo wypełnia obszar między okładkami

**a**) Ile wynosi pojemność  $C_0$  kondensatora przed włożeniem płyty dielektrycznej?

Obliczenie: Ze wzoru (25.9) mamy

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{(8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(115 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)}{1.24 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$
  
= 8.21 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 8.21 \text{ pF} (odpowiedź).

**b**) Jaki ładunek swobodny znajduje się na okładkach?

### Obliczenie: Ze wzoru (25.1) mamy

$$q = C_0 U_0 = (8,21 \cdot 10^{-12} \text{ F})(85,5 \text{ V})$$
  
= 7,02 \cdot 10^{-10} C = 702 pC (odpowiedź).

Ponieważ źródło zostało odłączone przed wsunięciem

płyty, a więc ładunek swobodny pozostaje niezmieniony przy wsuwaniu płyty.

c) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego  $E_0$  w szczelinach między okładkami i płytą dielektryczną?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Należy zastosować prawo Gaussa w postaci wzoru (25.36) do powierzchni Gaussa I na rysunku 25.17.

**Obliczenia:** Powierzchnia ta przechodzi przez szczelinę i otacza *tylko* ładunek swobodny na górnej okładce kondensatora. Dla części powierzchni, od której pochodzi niezerowy wkład do całki, wektor powierzchni d $\vec{S}$ i wektor natężenia pola  $\vec{E}_0$  są obydwa skierowane w dół, a więc iloczyn skalarny we wzorze (25.26) wynosi

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = E_0 \, dS \cos 0^\circ = E_0 \, dS.$$

Wzór (25.36) przybiera postać

$$\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}E_0\int\mathrm{d}S=q.$$

Całka daje nam po prostu powierzchnię *S* okładki i dlatego otrzymujemy

czyli

$$\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}E_0S=q,$$

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\rm r} S}.$$

Aby obliczyć  $E_0$ , musimy podstawić  $\varepsilon_r = 1$ , ponieważ powierzchnia Gaussa I nie przechodzi przez dielektryk. Mamy stąd

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(1)(115 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)}$$
  
= 6900 V/m = 6,9 kV/m (odpowiedź).

Zauważ, że wartość  $E_0$  nie zmienia się przy wprowadzaniu płyty, ponieważ ilość ładunku otoczonego powierzchnią Gaussa I na rysunku 25.17 się nie zmienia.

**d**) Ile wynosi natężenie pola elektrycznego  $E_1$  w płycie dielektrycznej?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Należy zastosować prawo Gaussa w postaci (25.36) do powierzchni Gaussa II z rysunku 25.17.

**Obliczenia:** We wzorze (25.36) pojawia się tylko ładunek swobodny -q, znajdujemy więc

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_{\rm r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\varepsilon_0 \varepsilon_{\rm r} E_1 S = -q.$$
 (25.37)

Pierwszy znak minus w tym wzorze pochodzi z iloczynu skalarnego  $\vec{E}_1 \cdot d\vec{S}$ , ponieważ teraz natężenie pola  $\vec{E}_1$  jest skierowane w dół, a wektor powierzchni d $\vec{S}$ (skierowany zawsze na zewnątrz powierzchni Gaussa) jest skierowany do góry. Kąt pomiędzy tymi wektorami jest równy 180°, a więc ich iloczyn skalarny jest ujemny. Teraz  $\varepsilon_{\rm r} = 2,61$ . Wzór (25.37) daje nam

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{6.9 \text{ kV/m}}{2.61} = 2.64 \text{ kV/m}$$
(odpowiedź

**e**) Ile wynosi różnica potencjałów *U* między okładkami kondensatora po wsunięciu płyty?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Różnicę potencjałów *U* znajdujemy przez scałkowanie natężenia wzdłuż odcinka prostej prostopadłej do okładek, od dolnej do górnej okładki.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

### Podsumowanie

**Kondensator, pojemność Kondensator** składa się z dwóch odizolowanych przewodników (*okładek*) o ładunkach +q i -q. Jego **pojemność** *C* jest zdefiniowana wzorem

$$q = CU, \tag{25.1}$$

gdzie U jest różnicą potencjałów (napięciem) między okładkami.

**Obliczanie pojemności** Pojemność kondensatora o określonej konfiguracji obliczamy w następujący sposób: 1) zakładamy, że na okładkach umieszczono ładunek q, 2) znajdujemy natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , wytworzonego przez **Obliczenie:** W dielektryku długość odcinka prostej wynosi *b*, a natężenie pola jest równe  $E_1$ . W dwóch szczelinach powyżej i poniżej dielektryka długość odcinka prostej wynosi łącznie d-b, a natężenie pola jest równe  $E_0$ . Wzór (25.6) daje zatem

$$U = \int_{-}^{+} E ds = E_0(d - b) + E_1 b$$
  
= (6900 V/m)(0,0124 m - 0,0078 m)  
+ (2640 V/m)(0,00780 m)  
= 52,3 V (odpowiedź),

czyli różnica potencjałów jest mniejsza od początkowej różnicy potencjałów 85,5 V.

**f**) Ile wynosi pojemność kondensatora z płytą dielektryczną między okładkami?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Pojemność C jest związana z ładunkiem swobodnym q i różnicą potencjałów U wzorem (25.1).

**Obliczenie:** Biorąc q z punktu (b) i U z punktu (e), otrzymujemy

$$C = \frac{q}{U} = \frac{7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C}}{52,3 \text{ V}}$$
  
= 1,34 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 13,4 \text{ pF} (odpowiedź).

Pojemność kondensatora z dielektrykiem jest więc większa niż początkowa pojemność 8,21 pF.

ten ładunek, 3) obliczamy różnicę potencjałów U, 4) wyznaczamy C ze wzoru (25.1). Oto kilka szczególnych wyników.

Kondensator płaski o płaskich równoległych okładkach, o polu powierzchni S i odległości d między nimi ma pojemność  $\varepsilon_0 S$ 

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$
 (25.9)

*Kondensator walcowy* w postaci dwóch długich współosiowych powierzchni walcowych o długości *L* i promieniach *a* i *b* ma pojemność

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln\left(b/a\right)}.$$
 (25.14)

*Kondensator kulisty* o współśrodkowych sferycznych okładkach o promieniach *a* i *b* ma pojemność

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}.$$
 (25.17)

Izolowana kula o promieniu R ma pojemność

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{25.18}$$

Kondensatory połączone równolegle i szeregowo Pojemności równoważne  $C_{rw}$  układów kondensatorów połączonych równolegle i szeregowo można obliczyć ze wzorów

$$C_{\rm rw} = \sum_{j=1}^{n} C_j$$
 (*n* kondensatorów połączonych równolegle)  
(25.19)

i  $\frac{1}{C_{\rm rw}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j}$  (*n* kondensatorów połączonych szeregowo). (25.20)

Pojemności równoważne można zastosować także do obliczenia pojemności bardziej skomplikowanych połączeń szeregowo-równoległych.

### Energia potencjalna i gęstość energii Elektryczna energia potencjalna $E_p$ naładowanego kondensatora

$$E_{\rm p} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 \tag{25.21, 25.22}$$

jest równa pracy potrzebnej do jego naładowania. Energię tę można powiązać z natężeniem pola elektrycznego  $\vec{E}$  w kon-

### Pytania

1 Na rysunku 25.18 przedstawiono zależność ładunku od różnicy potencjałów dla trzech kondensatorów płaskich, których pola powierzchni okładek i odległości miedzy nimi zostały poda-



Rys. 25.18. Pytanie 1

ne w tabeli. Które wykresy odpowiadają którym kondensatorom?

Kondensator	Pole powierzchni	Odległość
1	S	d
2	2S	d
3	S	2d

**2** Jaka jest pojemność równoważna  $C_{rw}$  dla trzech kondensatorów, każdy o pojemności C, jeśli są one podłączone do źródła: a) szeregowo, b) równolegle? c) Na którym kondensatorze równoważnym jest większy ładunek?

**3** a) Czy na rysunku 25.19a kondensatory  $C_1$  i  $C_3$  są połączone szeregowo? b) Czy kondensatory  $C_1$  i  $C_2$  na tym

densatorze i wyciągnąć stąd wniosek, że jest ona magazynowana w polu elektrycznym. W próżni **gęstość energii** *u*, czyli energia potencjalna na jednostkę objętości, w obszarze pola elektrycznego o wartości natężenia *E* wynosi

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2. \tag{25.25}$$

**Kondensator z dielektrykiem** Jeśli przestrzeń między okładkami kondensatora zostaje całkowicie wypełniona materiałem dielektrycznym, to pojemność *C* kondensatora jest większa o czynnik  $\varepsilon_r$  zwany **przenikalnością elektryczną** względną, który charakteryzuje materiał. W obszarze całkowicie wypełnionym dielektrykiem wszystkie równania elektrostatyki, które zawierają  $\varepsilon_0$ , muszą być zmodyfikowane przez zastąpienie  $\varepsilon_0$  iloczynem  $\varepsilon_r \varepsilon_0$ .

Efekt dodania dielektryka można zrozumieć, analizując działanie pola elektrycznego na trwałe lub indukowane dipole elektryczne w dielektryku. Powstają wtedy indukowane ładunki na powierzchniach dielektryka, prowadzące przy ustalonym ładunku swobodnym na okładkach do osłabienia pola w dielektryku.

**Prawo Gaussa w dielektryku** Dla dielektryka prawo Gaussa można uogólnić do postaci

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_{\rm r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q,$$
 (25.36)

gdzie q jest ładunkiem swobodnym; cały indukowany ładunek powierzchniowy jest uwzględniony przez wstawienie względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_r$  do całki.

samym rysunku są połączone równolegle? c) Uszereguj pojemności równoważne czterech obwodów na rysunku 25.19, zaczynając od największej.



**Rys. 25.19.** Pytanie 3

**4** Na rysunku 25.20 przedstawiono trzy obwody, każdy składający się z klucza i dwóch kondensatorów naładowanych początkowo tak jak na rysunku (górna okładka jest naładowana dodatnio). W którym obwodzie (może w żadnym) po zamknięciu klucza ładunek na lewym kondensatorze: a) wzrośnie, b) zmaleje, c) pozostanie taki sam?



**Rys. 25.20.** Pytanie 4

**5** Początkowo do źródła podłączony jest kondensator o pojemności  $C_1$ . Następnie zostaje dołączony kondensator o pojemności  $C_2$  i oba kondensatory są połączone równolegle. Czy: a) różnica potencjałów na kondensatorze  $C_1$ , b) ładunek  $q_1$  na kondensatorze  $C_1$  są teraz większe, mniejsze, czy takie same jak poprzednio? c) Czy pojemność równoważna  $C_{12}$ dla kondensatorów  $C_1$  i  $C_2$  jest większa, mniejsza czy równa pojemności  $C_1$ ? d) Czy całkowity ładunek zgromadzony na kondensatorach  $C_1$  i  $C_2$  razem jest większy, mniejszy czy równy ładunkowi zmagazynowanemu poprzednio na kondensatorze  $C_1$ ?

**6** Odpowiedz na pytania 5, jeśli kondensator  $C_2$  dołączono szeregowo, a nie równolegle.

**7** Czy kondensatory w obwodach na rysunku 25.21 są połączone szeregowo, równolegle, czy w inny sposób?



8 Na rysunku 25.22 przedstawiono obwód z otwartym kluczem, źródłem o różnicy potencjałów *U*, amperomierzem A i trzema jednakowymi nienaładowanymi kondensatorami o pojemności *C*. Jeśli zamkniemy klucz i obwód osiągnie stan równowagi, to jakie beda:

a) różnica potencjałów na każdym kondensatorze, b) ładunek na lewej okładce każdego kondensatora? c) Jaki wypadkowy ładunek przepływa przez amperomierz podczas ładowania?





**9** Kondensator płaski podłączony jest do źródła o różnicy potencjałów *U*. Czy po zmniejszeniu odległości pomiędzy okładkami kondensatora płaskiego jego: a) pojemność, b) różnica potencjałów, c) ładunek, d) energia potencjalna, e) wartość natężenia pola elektrycznego pomiędzy okładkami, f) gęstość energii zmagazynowanej w kondensatorze wzrosną, zmaleją, czy pozostaną takie same?

**10** Czy po włożeniu płyty dielektrycznej między okładki jednego z dwóch identycznych kondensatorów na rysunku 25.23:

a) pojemność, b) ładunek, c) różnica potencjałów, d) energia potencjalna tego kondensatora wzrosną, zmaleją, czy pozostaną takie same? e) Czy i jak zmienią się wymienione wyżej wielkości drugiego kondensatora?



**11** Do źródła podłączamy kondensatory o pojemnościach  $C_1$ i  $C_2$ ,  $C_1 > C_2$ , najpierw pojedynczo, potem szeregowo i następnie równolegle. Uszereguj te układy ze względu na zmagazynowany ładunek, zaczynając od największego.

### Zadania

Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
 Liczba kropek określa stopień trudności zadania
 Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual* Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
 Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
 Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

### Podrozdział 25.1. Pojemność elektryczna

•1 Dwa metalowe przedmioty na rysunku 25.24 mają całkowite ładunki +70 pC i -70 pC, co prowadzi do różnicy potencjałów 20 V między nimi. a) Jaka jest pojem-



Rys. 25.24. Zadanie 1

ność układu? b) Jeśli ładunki zmienimy na +200 pC i -200 pC, to jaka będzie pojemność? c) Jaka będzie różnica potencjałów?

•2 Kondensator na rysunku 25.25 ma pojemność 25μF



**Rys. 25.25.** Zadanie 2

i jest początkowo nienaładowany. Bateria ma różnicę potencjałów 120 V. Jaki ładunek przepłynie przez przełącznik S po jego zamknięciu?

### Podrozdział 25.2. Obliczanie pojemności elektrycznej

•3 ssm Kondensator płaski ma kołowe okładki o promieniu 8,2 cm umieszczone w odległości 1,3 mm od siebie. a) Oblicz jego pojemność. b) Jaki ładunek znajdzie się na okładkach, jeśli przyłożymy do nich różnicę potencjałów 120 V?

•4 Okładki kondensatora kulistego mają promienie 38 mm i 40 mm. a) Oblicz jego pojemność. b) Jakie jest pole powierzchni okładek kondensatora płaskiego o takiej samej odległości okładek i takiej samej pojemności?

•5 Jaka jest pojemność kropli powstałej, gdy dwie kuliste krople rtęci o promieniu R = 2 mm połączą się w jedną większą kroplę?

•6 Masz dwie płaskie okładki metalowe, każda o polu powierzchni 1 m<sup>2</sup> i chcesz zbudować z nich kondensator płaski. a) Jeśli pojemność kondensatora ma wynosić 1 F, to jaka musi być odległość między okładkami? b) Czy taki kondensator można w rzeczywistości zbudować?

•7 Jeśli nienaładowany kondensator płaski o pojemności *C* podłączymy do źródła różnicy potencjałów, to jedna z jego okładek zostanie naładowana ujemnie na skutek przepływu elektronów na jej powierzchnię o polu *S*. Na rysunku 25.26 przedstawiono wykres głębokości *d*, z której elektrony przenoszą się na powierzchnię okładki, w funkcji różnicy potenciałów *U* na źródle



Rys. 25.26. Zadanie 7

różnicy potencjałów U na źródle. Gęstość elektronów przewodnictwa miedzi wynosi  $8,49 \cdot 10^{28}$  elektronów/m<sup>3</sup>. Jednostką skali na osi pionowej tego wykresu jest  $d_s = 1$  pm, a na osi poziomej  $U_s = 20$  V. Ile wynosi stosunek C/S?

### Podrozdział 25.3. Kondensatory połączone równolegle i szeregowo

 •8 Ile kondensatorów o pojemności 1 μF trzeba połączyć równolegle, aby po przyłożeniu różnicy potencjałów 110 V zmagazynować ładunek 1 C?



Rys. 25.27. Zadanie 9

9 Każdy z nienaładowanych kondensatorów na rysunku
 25.27 ma pojemność 25 μF. Po zamknięciu klucza pojawiła

się na nich różnica potencjałów 4200 V. Jaki ładunek przepłynął przez amperomierz A?

•10 Znajdź pojemność równoważną układu kondensatorów przedstawionego na rysunku 25.28. Przyjmij  $C_1 = 10 \,\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5 \,\mu\text{F} \,\text{i} \, C_3 = 4 \,\mu\text{F}$ .



Rys. 25.28. Zadania 10 i 34

•11 iiw Znajdź pojemność równoważną układu kondensatorów przedstawionego na rysunku 25.29. Przyjmij  $C_1 = 10 \,\mu\text{F}, C_2 = 5 \,\mu\text{F}$  i  $C_3 = 4 \,\mu\text{F}.$ 



Rys. 25.29. Zadania 11, 17 i 38

••12 Dwa kondensatory płaskie o pojemności 6  $\mu$ C każdy połączone są równolegle ze źródłem różnicy potencjałów 10 V. Jeden z tych kondensatorów zostaje następnie ściśnięty tak, że odległość pomiędzy jego okładkami maleje o 50% wartości początkowej. a) Jaki dodatkowy ładunek przepłynie na te kondensatory ze źródła i b) jaki jest wzrost całkowitego ładunku zgromadzonego na tych kondensatorach w wyniku tego ściśnięcia?

••13 ssm ilw Kondensator o pojemności 100 pF naładowano do różnicy potencjałów 50 V, a następnie odłączono źródło. Kondensator ten połączono równolegle z drugim (początkowo nienaładowanym) kondensatorem. Jaka jest pojemność drugiego kondensatora, jeśli różnica potencjałów na pierwszym kondensatorze zmalała do 35 V?

••14 00 Na rysunku 25.30 bateria ma różnicę potencjałów 10 V, a każdy z pięciu kondensatorów ma pojemność 10  $\mu$ F. Jaki jest ładunek na: a) kondensatorze 1, b) kondensatorze 2?



**Rys. 25.30.** Zadanie 14

••15 •• Na rysunku 25.31 bateria o różnicy potencjałów 20 V podłączona jest do układu kondensatorów o pojemnościach  $C_1 = C_6 = 3 \ \mu\text{F}$  i  $C_3 = C_5 = 2C_2 = 2C_4 = 4 \ \mu\text{F}$ . Znajdź: a) równoważną pojemność wszystkich kondensatorów  $C_{rw}$ , b) ładunek zmagazynowany na kondensatorze równoważnym. Oblicz c) różnicę potencjałów  $U_1$  i d) ładunek  $q_1$ na kondensatorze 1; e) różnicę potencjałów  $U_2$  i f) ładunek  $q_2$ na kondensatorze 2; g) różnicę potencjałów  $U_3$  i h) ładunek  $q_3$  na kondensatorze 3.



Rys. 25.31. Zadanie 15

••16 Wykres 1 na rysunku 25.32a przedstawia zależność ładunku q, który może być zgromadzony na kondensatorze 1, od przyłożonej do niego różnicy potencjałów U. Jednostką skali na osi pionowej jest  $q_s = 16 \mu$ C, a na osi poziomej  $U_s = 2$  V. Wykresy 2 i 3 odpowiadają podobnej zależności dla kondensatorów 2 i 3. Na rysunku 25.32b przedstawiono obwód elektryczny z tymi trzema kondensatorzmi i baterią 6 V. Jaki ładunek jest zgromadzony na kondensatorze 2 w tym obwodzie?



**Rys. 25.32.** Zadanie 16

•17 S Na rysunku 25.29 różnica potencjałów U = 100 V przyłożona jest do układu kondensatorów o pojemnościach  $C_1 = 10 \,\mu\text{F}, C_2 = 5 \,\mu\text{F} \text{ i } C_3 = 4 \,\mu\text{F}.$  Jeśli kondensator 3 doznaje przebicia elektrycznego i staje się równoważny przewodowi elektrycznemu, to jaki jest wzrost a) ładunku na kondensatorze 1 i b) różnicy potencjałów na kondensatorze 1?

••18 Na rysunku 25.33 przedstawiono przekrój układu czterech kondensatorów powietrznych, które są podłączone do większego obwodu. Wykres umieszczony poniżej tego przekroju przedstawia zależność różnicy potencjałów U(x) od położenia x w dolnej gałęzi obwodu, w której znajduje się kondensator 4. Wykres umieszczony powyżej przekroju ilustruje podobną zależność dla górnej gałęzi obwodu, w której znajdują się kondensatory 1, 2 i 3. Kondensator 3 ma pojemność 0,8 µF. Jakie są pojemności: a) kondensatora 1 i b) kondensatora 2?



Rys. 25.33. Zadanie 18

••19 • Na rysunku 25.34 bateria ma różnicę potencjałów U = 9 V, kondensatory pojemności  $C_2 = 3 \mu \text{F} \text{ i } C_4 = 4 \mu \text{F}$ , a wszystkie kondensatory są początkowo nienaładowane. Po zamknięciu klucza S przez punkt *a* przepływa całkowity ładunek 12  $\mu$ C, a przez punkt *b* całkowity ładunek 8  $\mu$ C. Znajdź pojemności: a)  $C_1$  i b)  $C_3$ .





••20 Na rysunku 25.35 przedstawiono kondensator powietrzny o zmiennej pojemności ustawianej ręcznie. Okładki kondensatora są połączone na przemian ze sobą, jedna grupa okładek jest unieruchomiona, a druga może się obracać. Rozważ konden-



Rys. 25.35. Zadanie 20

sator złożony z n = 8 okładek o naprzemiennej polaryzacji, każda o powierzchni S = 1,25 cm<sup>2</sup>, które są odległe od siebie o d = 3,4 mm. Jaka jest maksymalna pojemność takiego urządzenia?

••21 ssm www Na rysunku 25.36 kondensatory o pojemnościach  $C_1 = 1 \mu F$ i  $C_2 = 3 \mu F$  naładowano do różnicy potencjałów o wartości U = 100 V, ale przeciwnym znaku, co zaznaczono na rysunku. Następnie zamknięto klucze S<sub>1</sub> i S<sub>2</sub>.



Rys. 25.36. Zadanie 21

a) Jaka jest teraz różnica potencjałów między punktami a i b? Jakie sa teraz ładunki na kondensatorach: b) 1, c) 2?

••22 Na rysunku 25.37 U =10 V,  $C_1 = 10 \,\mu\text{F}$ , a  $C_2 =$  $C_3 = 20 \,\mu\text{F}$ . Klucz S przełożony jest najpierw w lewo, aż kondensator 1 osiąga równowage. Nastepnie klucz S zostaje przełożony na prawo.

równowagi?

••23 Kondensatory na rysunku 25.38 nie sa poczatkowo naładowane. Pojemności tych kondensatorów wynoszą  $C_1 = 4 \,\mu\text{F}, C_2 = 8 \,\mu\text{F}$ i  $C_3 = 12 \,\mu\text{F}$ , a różnica potencjałów baterii U = 12 V. Ile



Rvs. 25.37. Zadanie 22 Jaki ładunek znajdzie się na kondensatorze 1 po osiagnięciu





elektronów przepłynie przez a) punkt a, b) punkt b, c) punkt c i d) punkt d, gdy klucz S zostanie zamknięty? Czy na rysunku elektrony przełyną w góre, czy w dół przez: e) punkt b, f) punkt *c*?

••24 😳 Na rysunku 25.39 przedstawiono schemat dwóch powietrznych kondensatorów walcowych połączonych szeregowo ze źródłem różnicy potecjałów 10 V. Promień wewnętrznej okładki konden-



Rys. 25.39. Zadanie 24

satora 1 wynosi 5 mm, promień okładki zewnetrznej to 1,5 cm, a jego długość jest równa 5 cm. Promień wewnętrznej okładki kondensatora 2 wynosi 2,5 mm, promień okładki zewnętrznej jest równy 1 cm, a długość kondensatora 2 to 9 cm. Zewnętrzna okładka kondensatora 2 jest przewodzącą membraną organiczną, którą można rozciągnąć, a kondensator można napompować, aby zwiększyć odległość między jego okładkami. Jeśli promień zewnetrznej okładki kondensatora 2 zostanie zwiększony w taki sposób do 2,5 cm, to a) ile elektronów przepłynie przez punkt P i b) czy przepłyną one w kierunku źródła czy przeciwnie?

••25 😳 Na rysunku 25.40 przedstawiono dwa powietrzne kondensatory płaskie podłączone do baterii. Kondensator 1 ma okładki o polu powierzchni 1,5 cm<sup>2</sup>,



Rys. 25.40. Zadanie 25

a natężenie pola elektrycznego pomiędzy jego okładkami ma wartość 2000 V/m. Kondensator 2 ma okładki o polu powierzchni 0,7 cm<sup>2</sup>, a nateżenie pola elektrycznego pomiedzy jego okładkami ma wartość 1500 V/m. Jaki jest całkowity ładunek zgromadzony na tych kondensatorach?

•••26 • Kondensator 3 na rysunku 25.41a jest kondensatorem zmiennym (jego pojemność  $C_3$  można zmieniać). Na rysunku 25.41b przedstawiona jest zależność różnicy potencjałów  $U_1$  na kondensatorze 1 od pojemności  $C_3$ . Jednostką skali na osi poziomej jest  $C_{3s} = 12 \,\mu\text{F}$ . Gdy  $C_3 \rightarrow \infty$ , różnica potencjałów  $U_1$  dąży asymptotycznie do U = 10 V. Jakie sa: a) różnica potencjałów U na źródle, b) pojemność  $C_1$ , c) pojemność  $C_2$ ?



Rvs. 25.41. Zadanie 26

🐽 27 😳 Na 🛛 rysunku 25.42 przedstawiono baterie utrzymującą różnicę potencjałów 12 V i cztery nienaładowane kondensatory o pojemnościach  $C_1 = 1 \,\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \,\mu\text{F}, C_3 = 3 \,\mu\text{F}$ i  $C_4 = 4 \,\mu$ F. Znajdź ładunek na kondensatorach: a) 1, b) 2, c) 3 i d) 4 po zamknięciu tylko klu-



Rys. 25.42. Zadanie 27

cza S<sub>1</sub>, Znajdź ładunek na kondensatorach: e) 1, f) 2, g) 3 i h) 4 po zamknieciu także klucza S<sub>2</sub>.

•••28 😳 Na rysunku 25.43 przedstawiono baterie dostarczającą różnicę potencjałów 10 V i trzy nienaładowane kondensatory o pojemnościach  $C_1 = 4 \,\mu\text{F}, C_2 = 6 \,\mu\text{F}$ i  $C_3 = 3 \mu F$ . Klucz S zostaje przesunięty na lewo, aż okładki kondensatora 1 zosta-



Rys. 25.43. Zadanie 28

ją całkowicie naładowane. Następnie klucz zostaje przesunięty w prawo. Jakie są końcowe ładunki na: a) kondensatorze 1, b) kondensatorze 2 i c) kondensatorze 3?

### Podrozdział 25.4. Energia zmagazynowana w polu elektrycznym

•29 Jaka pojemność jest potrzebna do zmagazynowania energii 10 kWh, gdy różnica potencjałów wynosi 1000 V?

•30 Ile jest energii zmagazynowanej w metrze sześciennym powietrza przy dobrej pogodzie w polu elektrycznym o wartości nateżenia 150 V/m?

•31 ssm Kondensatory o pojemnościach  $2 \mu F$  i  $4 \mu F$  są połączone równolegle i jest do nich przyłożona różnica potencjałów 300 V. Oblicz całkowitą energię zmagazynowaną w kondensatorach.

•32 Płaski kondensator powietrzny o polu powierzchni okładek 40 cm<sup>2</sup> i odległości między nimi 1 mm jest naładowany do różnicy potencjałów 600 V. Znajdź: a) pojemność, b) wartość ładunku na każdej okładce, c) zmagazynowaną energię, d) natężenie pola elektrycznego między okładkami, e) gęstość energii między okładkami.

••33 Izolowana naładowana kula metalowa o średnicy 10 cm ma potencjał 8000 V względem U = 0 w nieskończoności. Oblicz gęstość energii w polu elektrycznym przy powierzchni kuli.

••34 Na rysunku 25.28 różnica potencjałów U = 100 V przyłożona jest do układu kondensatorów z pojemnościami  $C_1 = 10 \ \mu\text{F}, C_2 = 5 \ \mu\text{F} \text{ i } C_3 = 4 \ \mu\text{F}.$  Znajdź: a) ładunek  $q_3$ , b) różnicę potencjału  $U_3$  i c) energię  $E_{\text{p},3}$  zmagazyowaną w kondensatorze 3; d)  $q_1$ , e)  $U_1$  i f)  $E_{\text{p},1}$  dla kondensatora 1; g)  $q_2$ , h)  $U_2$  i i)  $E_{\text{p},2}$  dla kondensatora 2.

••35 Przypuśćmy, że nieruchomy elektron jest ładunkiem punktowym. Jaka jest gęstość energii u pola elektrycznego w odległościach: a) r = 1 mm, b)  $r = 1 \mu$ m, c) r = 1 nm i d) r = 1 pm od tego ładunku? e) Jaka jest graniczna wartość u dla  $r \rightarrow 0$ ?

••36 Jako specjalista do spraw bezpieczeństwa pracy musisz ocenić praktykę przechowywania łatwopalnych przewodzących cieczy w nieprzewodzących zbiornikach. Firma dostarczająca pewną ciecz używa w tym





celu pekatych walcowych plastikowych zbiorników o promieniu r = 0,2 m. Zbiorniki wypełniane są do wysokości h = 10 cm, co nie jest ich całkowitą wysokością (rys. 25.44). Twoje badania wykazały, że w trakcie procesów technologiczych przeprowadzanych w tej firmie zewnętrzna powierzchnia zbiornika zwykle zbiera ładunek ujemny o (w przybliżeniu jednorodnej) gestości  $2 \mu C/m^2$ . Ponieważ ciecz jest przewodząca, więc ładunek na powierzchni zbiornika powoduje rozdzielenie ładunku wewnatrz cieczy. a) Jaki jest ładunek ujemny indukowany w środku cieczy? b) Przypuśćmy, że pojemność środkowej części cieczy względem uziemienia wynosi 35 pF. Jaka jest energia potencjalna związana z ujemnym ładunkiem tego efektywnego kondensatora? c) Jeśli pomiędzy ziemią a środkową częścią cieczy przeskoczy (przez otwór w zbiorniku) iskra, ta energia potencjalna może się przekształcić w energie iskry. Minimalna energia iskry potrzebna do zapłonu cieczy wynosi 10 mJ. Czy w takiej sytuacji iskra zapali ciecz w pojemniku?

•37 ssm ilw www Równoległe okładki w kondensatorze powietrznym o polu powierzchni 8,5 cm<sup>2</sup>, które są odległe o d = 3 mm zostały naładowane baterią o różnicy potencjałów 6 V. Następnie odłączono je od baterii i oddalono od siebie na odległość 8 mm. Zaniedbując efekty brzegowe, znajdź: a) różnicę potencjałów pomiędzy tymi okładkami, b) początkową energię zmagazynowaną w kondensatorze, c) końcową energię zmagazynowaną w kondensatorze i d) pracę potrzebną do rozsunięcia okładek.

••38 Na rysunku 25.29 różnica potencjałów U = 100 V jest przyłożona do układu kondensatorów o pojemnościach  $C_1 = 10 \,\mu\text{F}, C_2 = 5 \,\mu\text{F} \text{ i } C_3 = 15 \,\mu\text{F}.$  Znajdź: a) ładunek  $q_3$ , b) różnicę potencjałów  $U_3$  i c) zmagazynową energię  $E_{\text{p},3}$  dla kondensatora 3; d)  $q_1$ , e)  $U_1$  i f)  $E_{\text{p},1}$  dla kondensatora 1; g)  $q_2$ , h)  $U_2$  i i)  $E_{\text{p},2}$  dla kondensatora 2.

••39 Solution Na rysunku 25.45,  $C_1 = 10 \,\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 20 \,\mu\text{F}$ i  $C_3 = 25 \,\mu\text{F}$ . Jeśli żaden kondensator nie może wytrzymać bez awarii różnicy potencjałów większej niż 100 V, to jaka jest a) największa wartość różnicy potencjałów pomiędzy punktami A i B i b) największa energia, która może być zgromadzona w tym układzie trzech kondensatorów?



Rys. 25.45. Zadanie 39

### Podrozdział 25.5. Kondensator z dielektrykiem

 •40 Płaski kondensator powietrzny ma pojemność 1,3 pF.
 Odległość między płytkami zwiększono dwukrotnie i włożono między nie wosk. Nowa pojemność wynosi 2,6 pF.
 Znajdź względną przenikalność elektryczną wosku.

•41 ssm Kabel koncentryczny (współosiowy) używany w linii przesyłowej ma promień wewnętrzny 0,1 mm i promień zewnętrzny 0,6 mm. Oblicz pojemność kabla, przypadającą na metr jego długości. Załóż, że przestrzeń między przewodnikami jest wypełniona polistyrenem.

•42 Płaski kondensator powietrzny ma pojemność 50 pF. a) Ile wynosi odległość między okładkami, jeśli każda z nich ma pole powierzchni 0,35 m<sup>2</sup>? b) Jaka będzie jego pojemność, jeśli obszar między okładkami zostanie wypełniony materiałem o  $\varepsilon_r = 5,6$ ?

•43 Mając kondensator powietrzny o pojemności 7,4 pF, chcesz przekształcić go w kondensator mogący zmagazynować energię do 7,4 μJ przy maksymalnej różnicy potencjałów 652 V. Którego dielektryka z tabeli 25.1 mógłbyś użyć do wypełnienia przestrzeni w kondensatorze, nie pozostawiając sobie żadnego marginesu błędu?

••44 Masz za zadanie skonstruować kondensator o pojemności około 1 nF i napięciu przebicia ponad 10 000 V. Zamierzasz użyć ścianek wysokiej szklanki z pyreksu jako dielektryka, pokrywając boczne ścianki wewnątrz i na zewnątrz folią aluminiową, i w ten sposób otrzymać okładki. Szklanka ma wysokość 15 cm, promień wewnętrzny 3,6 cm i zewnętrzny 3,8 cm. Jakie są: a) pojemność, b) napięcie przebicia tego kondensatora?

••45 Pewien kondensator płaski jest wypełniony dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_r = 5,5$ . Pole powierzchni każdej z okładek wynosi 0,034 m<sup>2</sup>, a odległość między nimi jest równa 2 mm. Kondensator ulega zniszczeniu (zwiera się i spala), gdy natężenie pola elektrycznego pomiędzy okładkami przekracza 200 kN/C. Jaka jest największa energia, którą można zmagazynować w tym kondensatorze?

••46 Jaki ładunek jest gromadzony na okładkach kondensatorów płaskich na rysunku 25.46 przez baterię 12 V? Jeden z kondensatorów jest wypełniony powietrzem, a drugi dielektrykiem, dla którego  $\varepsilon_{\rm r} = 3$ . Oba konden-



Rys. 25.46. Zadanie 46

satory mają okładki o polu powierzchni 5  $\cdot \, 10^{-3} \, \text{m}^2$  odległe o 2 mm.

••47 ssm ilw Pewna substancja ma względną przenikalność elektryczną równą 2,8 i wytrzymałość na przebicie 18 MV/m. Jeśli użyjesz jej jako materiału dielektrycznego w kondensatorze płaskim, to jakie minimalne pole powierzchni muszą mieć okładki tego kondensatora, aby jego pojemność wynosiła  $7 \cdot 10^{-2} \,\mu\text{F}$  i mógł on wytrzymać różnicę potencjałów 4 kV?

••48 Na rysunku 25.47 przedstawiono kondensator płaski o polu powierzchni okładek  $S = 5,56 \text{ cm}^2$  i odległości między nimi d =5,56 mm. Lewa połowa kondensatora jest wypełniona di-



Rys. 25.47. Zadanie 48

elektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_{r1} = 7$ , a prawa dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_{r2} = 12$ . Znajdź pojemność tego kondensatora.

••49 Na rysunku 25.48 przedstawiono kondensator płaski o polu powierzchni okładek  $S = 7,89 \text{ cm}^2$  i odległości między nimi d =4,62 mm. Górna połowa kondensatora jest wypełniona dielektrykiem o względnej prze-



Rys. 25.48. Zadanie 49

nikalności elektrycznej  $\varepsilon_{r1} = 11$ , a dolna dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_{r2} = 12$ . Znajdź pojemność tego kondensatora.

••50 • Na rysunku 25.49 przedstawiono kondensator płaski o polu powierzchni okładek  $S = 10.5 \text{ cm}^2$  i odległości między nimi 2d = 7,12 mm. Lewa połowa kondensatora jest wypełniona dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_{r1} =$ 21, górna część prawej połowy dielektrykiem o względnej przenikalności dielektrycznej  $\varepsilon_{r2} =$  42, a dolna część prawej połowy dielek-



trykiem o względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_{r3} = 58$ . Znajdź pojemność tego kondensatora.

#### Podrozdział 25.6. Dielektryki i prawo Gaussa

•51 ssm www Kondensator płaski ma pojemność 100 pF, pole powierzchni okładek 100 cm<sup>2</sup> i szczelinę między okładkami, wypełnioną całkowicie miką ( $\varepsilon_r = 5,4$ ). Dla różnicy potencjałów 50 V oblicz: a) wartość natężenia pola elektrycznego *E* w mice, b) wartość ładunku swobodnego na okładkach, c) wartość indukowanego ładunku powierzchniowego w mice.

•52 Załóż w układzie z rysunku 25.17, że bateria pozostaje podłączona podczas wkładania płyty dielektrycznej. Oblicz: a) pojemność, b) ładunek na okładkach kondensatora, c) natężenie pola elektrycznego w pustej przestrzeni między okładkami, d) natężenie pola elektrycznego w płycie po jej włożeniu.

••53 Kondensator płaski ma okładki o polu powierzchni  $0,12 \text{ m}^2$  odległe od siebie o 1,2 cm. Bateria ładuje te okładki do różnicy potencjałów 120 V, a potem zostaje odłączona. Następnie symetrycznie względem tych okładek umieszczona zostaje płyta z dielektryka o grubości 4 mm i względnej przenikalności elektrycznej 4,8. a) Jaka jest pojemność kondensatora przed wprowadzeniem płyty? b) Jaka jest pojemność kondensatora po wprowadzeniu płyty? Jaki jest swobodny ładunek q c) przed i d) po wprowadzeniu płyty? Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego e) w przestrzeni pomiędzy okładkami kondensatora i dielektrykiem, f) w samym dielektryku? g) Jaka jest różnica potencjałów pomiędzy okładkami kondensatora po wprowadzeniu dielektryka? h) Jaka praca zewnętrzna jest związana z wprowadzaniem dielektryka do kondensatora?

••54 Na równoległych płytkach o polu powierzchni 100 cm<sup>2</sup> znajdują się ładunki o jednakowej wartości  $8,9 \cdot 10^{-7}$  C, ale o przeciwnych znakach. Natężenie pola elektrycznego w materiale dielektrycznym wypełniającym przestrzeń między płytkami ma wartość  $1,4 \cdot 10^6$  V/m. a) Oblicz względną przenikalność elektryczną materiału. b) Oblicz wartość ładunku indukowanego na każdej powierzchni tego dielektryka.

••55 Przestrzeń między dwiema współśrodkowymi przewodzącymi powłokami kulistymi o promieniach b = 1,7 cm i a = 1,2 cm jest wypełniona substancją o względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_r = 23,5$ . Między wewnętrzną i zewnętrzną powłoką istnieje różnica potencjałów U = 73 V. Oblicz: a) pojemność układu, b) ładunek swobodny q na wewnętrznej powłoce, c) ładunek q' indukowany przy powierzchni wewnętrznej powłoki.

### Zadania dodatkowe

**56** Na rysunku 25.50 różnica potencjałów U na baterii wynosi 10 V, a każdy z siedmiu kondensatorów ma pojemność 10  $\mu$ F. Jaki jest ładunek na a) kondensatorze 1 i b) kondensatorze 2?

57 ssm Na rysunku 25.51 U = 9 V,  $C_1 = C_2 = 30 \,\mu\text{F}$ , a  $C_3 = C_4 = 15 \,\mu\text{F}$ . Jaki jest ładunek na kondensatorze 4?

**58** a) Jeśli na rysunku 25.52  $C = 50 \,\mu\text{F}$ , to jaka jest pojemność równoważna pomiędzy punktami A i B? (Wskazówka: Wyobraź sobie najpierw, że bateria jest podłączona do tych dwóch punktów). b) Powtórz tą analizę dla punktów A i D.

**59** Na rysunku 25.53 U = 12 V,  $C_1 = C_4 = 2 \mu$ F,  $C_2 = 4 \mu$ F i  $C_3 = 1 \mu$ F. Jaki jest ładunek na kondensatorze 4?

**60** *Tajemnica proszku czekoladowego.* Jest to dalszy ciąg historii, którą zaczęliśmy opisywać w zadaniu 60 w rozdziale 23. Podczas badania przyczyn wybuchu w fabryce herbatników zmierzono potencjały elektryczne robotników pracujących przy opróżnianiu worków z proszkiem czekoladowym do luku



Rys. 25.50. Zadanie 56



Rys. 25.51. Zadanie 57



 $A \bullet$ 



Rys. 25.52. Zadanie 58



Rys. 25.53. Zadanie 59

ładowni, gdy wokół nich powstawała chmura pyłu. Każdy robotnik miał potencjał elektryczny około 7 kV względem ziemi, dla której przyjęto potencjał równy zeru. a) Zakładając, że każdy robotnik stanowił efektywnie kondensator o typowej pojemności 200 pF, znajdź energię zmagazynowaną w tym efektywnym kondensatorze. Jeśli pojedyncza iskra między robotnikiem i jakimkolwiek uziemionym przewodnikiem zneutralizowałaby robotnika, to energia ta zostałaby uwolniona za pośrednictwem iskry. Iskra, która mogłaby zapalić chmurę proszku czekoladowego i spowodować eksplozję, zgodnie z pomiarami musiałaby mieć energię przynajmniej 150 mJ. b) Czy iskra, pochodząca od robotnika, mogła spowodować eksplozję chmury proszku w luku ładowni? (Dalszy ciąg tej historii znajdziesz w zadaniu 60 w rozdziale 26).

**61** Na rysunku 25.54 pokazano kondensator 1  $(C_1 = 8 \mu F)$ , kondensator 2  $(C_2 = 6 \mu F)$ i kondensator 3  $(C_3 = 8 \mu F)$  połączone z baterią 12 V. Zamknięcie



klucza S powoduje połączenie z tym układem nienaładowanego kondensatora 4 ( $C_4 = 6 \,\mu$ F). a) Jaki ładunek przepływa wtedy z baterii przez punkt *P* i b) jaki ładunek pojawia się na kondensatorze 4? c) Wyjaśnij różnicę pomiędzy tymi dwoma wynikami.

**62** Dwa płaskie kondensatory powietrzne mają zostać podłączone do baterii 10 V, najpierw pojedynczo, potem szeregowo, a w końcu równolegle. W układach tych energia zmagazynowana w kondensatorach okazuje się przyjmować następujące wartości wymienione od najmniejszej do największej: 75 µJ, 100 µJ, 300 µJ i 400 µJ. Który z tych kondensatorów ma a) mniejszą, a który b) większą pojemność?

**63** Dwa kondensatory płaskie o pojemności 6  $\mu$ F każdy są połączone szeregowo z baterią 10 V. Jeden z tych kondensatorów zostaje następnie ściśnięty tak, że odległość między jego okładkami zmniejsza się do połowy. W wyniku tego ściśnięcia a) jaki dodatkowy ładunek zostaje przeniesiony na te kondensatory z baterii i b) jaki jest wzrost *całkowitego* ładunku zgromadzonego w kondensatorach (ładunek na dodatniej okładce jednego kondensatora i ładunek na dodatniej okładce drugiego kondensatora)?

**64 ••** Na rysunku 25.55  $U = 12 \text{ V}, C_1 = C_5 = C_6 = 6 \mu\text{F}, \text{ a } C_2 = C_3 = C_4 = 4 \mu\text{F}.$  Wyznacz: a) całkowity ładunek zgromadzony na kondensatorach i b) ładunek na kondensatorze 4.

**65** ssm Na rysunku 25.56 kondensator płaski o polu powierzchni okładek  $2 \cdot 10^{-2}$  m<sup>2</sup> wypełniony jest dwiema płytami z dielektryka o grubości 2 mm każda. Jedna płyta ma względną przenikalność elektryczną 3, a druga 4. Jaki ładunek zgromadzi na tym kondensatorze bateria 7 V?





**Rys. 25.56.** Zadanie 65

**66** Kondensator walcowy ma okładki o promieniach *a* i *b* pokazane na rysunku 25.6. Pokaż, że połowa energii zmagazynowanej w tym kondensatorze mieści się wewnątrz walca o promieniu  $r = \sqrt{ab}$ . **67** Kondensator o pojemności  $C_1 = 6 \,\mu\text{F}$  jest połączony szeregowo z kondensatorem o pojemności  $C_2 = 4 \,\mu\text{F}$ , a do obu przyłożona jest różnica potencjałów 200 V. a) Oblicz pojemność równoważną. Znajdź b) ładunek  $q_1$  i c) różnicę potencjałów  $U_1$  na kondensatorze 1, d) ładunek  $q_2$  i e) różnicę potencjałów  $U_2$  na kondensatorze 2.

**68** Powtórz zadanie 67 dla dwóch kondensatorów połączonych równolegle.

**69** Pewien kondensator naładowano do różnicy potencjałów U. O ile procent musisz zwiększyć U, jeśli chcesz zwiększyć energię w nim zmagazynowaną o 10%?

**70** Miedziana płyta o grubości 2 mm zostaje umieszczona w kondensatorze płaskim o polu powierzchni okładek  $S = 2,4 \text{ cm}^2$  i odległości między nimi równej d =5 mm, tak jak to pokazano na rysunku 25.57. Płyta znajduje się dokładnie w połowie odległości pomiędzy okładkami



Rys. 25.57. Zadanie 70 i 71

kondensatora. a) Znajdź pojemność kondensatora po wprowadzeniu płyty. b) Jaki jest stosunek energii zmagazynowanej w kondensatorze przed i po włożeniu płyty, jeśli na okładkach kondensatora utrzymywany jest ładunek  $q = 3,4 \mu$ C? c) Jaką pracę należy wykonać przy wkładaniu płyty? d) Czy płyta zostanie wciągnięta do kondensatora, czy trzeba ją tam wpychać?

**71** Powtórz zadanie 70, zakładając że zamiast ładunku utrzymywana jest stała różnica potencjałów U = 80 V.

**72** Do dwóch kondensatorów  $C_1 = 2 \mu F$  i  $C_2 = 8 \mu F$ połączonych szeregowo przyłożona jest różnica potencjałów 300 V. Znajdź a) ładunek  $q_1$  i b) różnicę potencjałów  $U_1$  na kondensatorze 1 oraz c) ładunek  $q_2$  i d) różnicę potencjałów  $U_2$  na kondensatorze 2. *Naładowane* kondensatory zostają następnie rozłączone i odłączone od baterii. Następnie okładki kondensatorów o ładunkach *jednakowego* znaku zostają połączone ze sobą (bateria nie zostaje podłączona). Znajdź e)  $q_1$ , f)  $U_1$ , g)  $q_2$  i h)  $U_2$ ? Przypuśćmy *dla odmiany*, że kondensatory naładowane w punkcie a) połączone zostają okładkami o *przeciwnych* znakach. Znajdź w tym przypadku i)  $q_1$ , j)  $U_1$ , k)  $q_2$  i l)  $U_2$ .

**73** Na rysunku 25.58 przedstawiono układ czterech kondensatorów, który jest podłączony w punktach A i B do większego obwodu. Pojemności kondensatorów wynoszą  $C_1 = 10 \,\mu\text{F}$  i  $C_2 =$ 



Rys. 25.58. Zadanie 73

 $C_3 = C_4 = 20 \,\mu\text{F}$ . Ładunek zgromadzony na kondensatorze 1 wynosi 30  $\mu\text{C}$ . Ile wynosi różnica potencjałów  $V_A - V_B$ ?

74 Dysponujesz dwiema płytkami z miedzi, warstwą miki (o grubości 0,1 mm,  $\varepsilon_r = 5,4$ ), warstwą szkła (o grubości 2 mm,  $\varepsilon_r = 7$ ) i płytką z parafiny (o grubości 1 cm,  $\varepsilon_r = 2$ ). Który materiał umieścić należy pomiędzy miedzianymi okładkami, aby tak zbudowany kondensator miał największą pojemność?

**75** Kondensator o nieznanej pojemności *C* naładowany jest do różnicy potencjałów *U* i połączony z początkowo nienaładowanym kondensatorem o pojemności 60  $\mu$ F. Znajdź pojemność *C*, jeśli końcowa różnica potencjałów na kondensatorze 60  $\mu$ F wynosi 40 V.

**76** *n* kondensatorów połączonych szeregowo o pojemności  $2 \mu F$  każdy podłączonych jest do baterii 10 V. Znajdź *n*, jeśli całkowita energia zmagazynowana w tych kondensatorach wynosi 25  $\mu$ J.

**77 ssm** Na rysunku 25.59 dwa kondensatory płaskie *A* i *B* są połączone równolegle ze źródłem różnicy potencjałów 600 V. Każda okładka ma pole powierzchni 80 cm<sup>2</sup>,



Rys. 25.59. Zadanie 77

a odległość między okładkami wynosi 3 mm. Kondensator *A* jest wypełniony powietrzem, a kondensator *B* dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej  $\varepsilon_r = 2,6$ . Znajdź wartość natężenia pola elektrycznego w a) dielektryku z kondensatora *B*, b) powietrzu z kondensatora *A*. Jaka jest powierzchniowa gęstość ładunku swobodnego  $\sigma$  na okładce o wyższym potencjale c) kondensatora *A* i d) kondensatora *B*? e) Jaka jest powierzchniowa gęstość ładunku indukowanego  $\sigma'$  na górnej powierzchni dielektryka?

**78** Masz do dyspozycji wiele kondensatorów o pojemności  $2 \mu$ F, z których każdy może wytrzymać różnicę potencjałów 200 V bez przebicia (po którym przewodzą ładunek, a nie go magazynują). W jaki sposób zestawiłbyś układ kondensatorów o pojemności równoważnej a) 0,4  $\mu$ F i b) 1,2  $\mu$ F, który byłby w stanie wytrzymać różnicę potencjałów 1000 V?

**79** Kondensator płaski ma ładunek q i pole powierzchni okładek S. a) Wyznacz siłę działającą pomiędzy okładkami tego kondensatora, znajdując pracę niezbędną do zwiększenia odległości pomiędzy nimi z x do x + dx. (*Wskazówka*: patrz wzór 8.22). b) Pokaż następnie, że siła działająca na jednostkę powierzchni (*ciśnienie elektryczne*) każdej z okładek jest równa gęstości energii  $\varepsilon_0 E^2/2$  zgromadzonej pomiędzy nimi.

**80** Kondensator jest ładowany aż energia w nim zmagazynowana osiąga wartość 4 J. Następnie zostaje z nim połączony równolegle drugi kondensator. a) Jaka jest całkowita energia zmagazynowana w polach elektrycznych, jeśli ładunek rozkłada się równomiernie? b) Gdzie podziała się reszta energii?

# Prąd elektryczny i opór elektryczny

Ζ

Α

Ł

# **26.1.** PRĄD ELEKTRYCZNY

Ζ

D

0

### Czego się nauczysz?

R

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **26.01** zastosować definicję prądu elektrycznego jako szybkości, z jaką ładunek elektryczny przepływa przez pewną powierzchnię, a także obliczać ładunek przepływający przez tę powierzchnię w jednostce czasu;
- 26.02 zauważyć, że prąd elektryczny jest wynikiem ruchu elektronów przewodnictwa pod wpływem pól elektrycznych (takich jak te wytwarzane w przewodzie przez baterię);
- 26.03 znaleźć w obwodzie węzeł i skorzystać z faktu, że (jak to wynika z zasady zachowania ładunku) całkowity prąd wpływający do węzła musi być równy całkowitemu prądowi wypływającemu z węzła;
- 26.04 wyjaśnić, jak na schemacie obwodu rysuje się strzałki reprezentujące kierunek przepływu prądu, i zauważyć, że te strzałki nie są wektorami.

### Podstawowe fakty

 Natężenie prądu elektrycznego I płynącego w przewodniku jest zdefiniowane jako stosunek gdzie dq jest ilością dodatniego ładunku, który przepływa w czasie dt.

 Kierunek płynącego prądu zgodnie z przyjętą umową jest kierunkiem przepływu ładunku dodatniego, chociaż zwykle tylko elektrony przewodnictwa mogą się poruszać.

### 0 fizyce

26

W poprzednich pięciu podrozdziałach mówiliśmy o elektrostatyce fizyce ładunków stacjonarnych. W tym i w następnym podrozdziale będziemy mówić o fizyce **prądów elektrycznych**, a więc o ładunkach w ruchu.

Wszędzie dookoła płyną prądy elektryczne. Mają z nimi do czynienia przedstawiciele różnych zawodów. Meteorologów interesują wyładowania atmosferyczne i mniej dramatyczny powolny przepływ ładunku przez atmosferę. Biologowie, fizjologowie i inżynierowie pracujący nad technologiami medycznymi są zainteresowani prądami płynącymi w neuronach, które kontrolują ruch mięśni. W szczególności interesuje ich sposób odtworzenia tych prądów po uszkodzeniach rdzenia kręgowego. Elektrycy zajmują się różnymi układami elektrycznymi, takimi jak systemy zasilania, instalacje odgromowe, systemy przechowywania informacji i syntezatory dźwięku. Specjaliści od technologii kosmicznych monitorują i badają przepływ naładowanych cząstek ze Słońca, ponieważ strumień takich cząstek może uszkodzić systemy telekomunikacyjne na orbicie, a nawet instalacje

 $I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},$ 

przesyłowe na Ziemi. Dodatkowo, prawie każdy aspekt codziennego życia — od handlu na giełdzie do obsługi bankomatów i od rozrywki do sieci społecznościowych — zależy dziś od informacji przenoszonej przez prądy elektryczne.

W niniejszym podrozdziale omówimy podstawy fizyki prądów elektrycznych, a także powiemy, dlaczego w jednych materiałach mogą one płynąć, a w innych nie. Zaczniemy od definicji prądu elektrycznego.

### Prąd elektryczny

Chociaż prąd elektryczny jest strumieniem poruszających się ładunków, to nie wszystkie poruszające się ładunki tworzą prąd elektryczny. Jeśli przez daną powierzchnię ma przepływać prąd elektryczny, to musi nastąpić wypadkowy przepływ ładunku przez tę powierzchnię. Podane niżej dwa przykłady wyjaśniają, co mamy tu na myśli.

- 1. Elektrony swobodne (elektrony przewodnictwa) w izolowanym kawałku przewodnika miedzianego poruszają się chaotycznie z prędkościami rzędu 10<sup>6</sup> m/s. Jeśli poprowadzimy umowną płaszczyznę przez taki przewodnik, to elektrony przewodnictwa przechodzą przez nią w *obydwu kierunkach* i stąd w przewodniku nie występuje *wypadkowy przepływ ładunku* i *nie ma prądu elektrycznego*. Jeśli jednak podłączymy końce przewodnika do źródła, to zakłócimy nieco przepływ w jednym kierunku i w wyniku tego nastąpi wypadkowy przepływ ładunku, czyli przepływ prądu elektrycznego w przewodniku.
- 2. Przepływ wody przez wąż ogrodowy jest ukierunkowanym przepływem ładunku dodatniego (protonów w cząsteczkach wody), zachodzącym z szybkością rzędu kilku milionów kulombów na sekundę. Nie występuje tu jednak wypadkowy przepływ ładunku, ponieważ jednocześnie ma miejsce przepływ ładunku ujemnego (elektronów w cząsteczkach wody) o tej samej wartości, poruszającego się w tym samym kierunku.

W tym rozdziale ograniczymy się głównie do zbadania, w ramach fizyki klasycznej, *stałych* prądów *elektronów przewodnictwa*, poruszających się w *metalicznych przewodnikach*, np. w drutach miedzianych.

Rysunek 26.1a przypomina nam, że izolowana ramka przewodząca ma wszędzie taki sam potencjał, bez względu na to, czy ma nadmiarowy ładunek. Żadne pole elektryczne nie może istnieć w jej wnętrzu lub wzdłuż jej powierzchni. Chociaż występują w niej elektrony przewodnictwa, to nie działa na nie wypadkowa siła elektryczna i dlatego nie występuje przepływ prądu.

Jeśli do ramki podłączymy baterię (rys. 26.1b), to przewodząca ramka przestanie mieć stały potencjał. Wewnątrz materiału ramki pojawi się pole elektryczne, które zacznie oddziaływać siłami elektrostatycznymi na elektrony przewodnictwa i spowoduje ich ruch, wywołując przepływ prądu elektrycznego. Po krótkiej chwili przepływ prądu ustala się i mamy do czynienia z prądem *stałym* (nie zmieniającym się w czasie).

Na rysunku 26.2 przedstawiono przekrój przewodnika (części przewodzącej ramki), w którym płynie prąd elektryczny. Jeśli ładunek dq przechodzi przez umowną płaszczyznę (np. aa') w czasie dt, to natężenie prądu Iprzepływającego przez tę płaszczyznę jest zdefiniowane wzorem



**Rys. 26.1.** a) Ramka miedziana w równowadze elektrostatycznej. Cała ramka ma taki sam potencjał i we wszystkich punktach w miedzi natężenie pola elektrycznego jest równe zeru. b) Dodanie źródła wprowadza różnicę potencjałów między końcami ramki, połączonymi z biegunami źródła. Źródło wytwarza więc pole elektryczne w ramce, a pole powoduje ruch ładunków wzdłuż ramki. Ten ruch ładunków odpowiada prądowi o natężeniu *I* 



**Rys. 26.2.** Natężenie prądu *I* w przewodniku ma taką samą wartość dla płaszczyzn *aa'*, *bb'* i *cc'* 

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$
 (definicja natężenia prądu). (26.1)

Ładunek przepływający przez płaszczyznę w przedziale czasu od 0 do *t* możemy znaleźć przez całkowanie

$$q = \int \mathrm{d}q = \int_{0}^{t} I \,\mathrm{d}t, \qquad (26.2)$$

przy czym natężenie prądu I może się zmieniać w czasie.

Dla prądu stałego natężenie prądu jest takie samo dla płaszczyzn aa', bb' i cc' i dla wszystkich płaszczyzn przecinających całkowicie przewodnik, bez względu na ich położenie i orientację. Wynika to z zasady zachowania ładunku. W stanie ustalonym pewien elektron musi przejść przez płaszczyznę aa', jeśli inny elektron przechodzi przez płaszczyznę cc'. Podobnie dla ustalonego przepływu wody przez wąż ogrodowy kropla wody musi opuścić końcówkę węża, jeśli inna kropla weszła do węża na drugim końcu. Ilość wody w wężu jest wielkością stałą.

Jednostką natężenia prądu w układzie SI jest *amper* (A), czyli kulomb na sekundę

$$1 \text{ amper} = 1 \text{ A} = 1 \text{ kulomb na sekundę} = 1 \text{ C/s}.$$

Definicja ampera zostanie przedstawiona w rozdziale 29.

Natężenie prądu, zdefiniowane wzorem (26.1), jest skalarem, ponieważ w tym wzorze zarówno ładunek, jak i czas są skalarami. Jednak, aby pokazać ruch ładunku, często prąd przedstawiamy, używając strzałki, tak jak na rysunku 26.1b. Takie strzałki nie odpowiadają jednak wektorom i dlatego przy dodawaniu natężeń prądu nie stosujemy reguł dodawania wektorowego. Na rysunku 26.3a przedstawiono przewodnik z prądem o natężeniu  $I_0$ , rozdzielającym się w węźle na dwie gałęzie. Ładunek jest zachowany, a więc suma wartości natężeń prądów w gałęziach musi być równa natężeniu prądu w głównym przewodniku, czyli

$$I_0 = I_1 + I_2. (26.3)$$

Zgodnie z rysunkiem 26.3b zagięcie czy zmiana ułożenia przewodników nie wpływa na słuszność wzoru (26.3). Strzałki pokazują tylko kierunek przepływu wzdłuż przewodnika, a nie kierunek w przestrzeni.

### Kierunek prądu elektrycznego

Na rysunku 26.1b zaznaczyliśmy strzałki prądu w kierunku, w którym w ramce pod działaniem pola elektrycznego poruszałyby się cząstki naładowane dodatnio. Takie dodatnie *nośniki ładunku*, jak często się je nazywa, poruszałyby się od dodatniego do ujemnego bieguna baterii. W rzeczywistości nośnikami ładunku w ramce miedzianej na rysunku 26.1b są elektrony, czyli cząstki naładowane ujemnie. Pole elektryczne wymusza ich ruch w kierunku przeciwnym do kierunku strzałek prądu, od ujemnego do dodatniego bieguna. Z historycznych względów używamy jednak następującej umowy:



nateżenie prądu wpływającego

**Rys. 26.3.** Związek  $I_0 = I_1 + I_2$  jest słuszny w węźle *a* bez względu na ustawienia trzech przewodów w przestrzeni. Natężenia prądu są skalarami, a nie wektorami

Strzałka prądu jest narysowana w kierunku, w którym poruszałyby się dodatnio naładowane nośniki, nawet jeśli rzeczywiste nośniki ładunku są ujemne i poruszają się w przeciwnym kierunku.

Możemy przyjąć tę umowę, ponieważ w *większości* sytuacji przyjęty ruch dodatnio naładowanych nośników w jednym kierunku daje taki sam efekt jak rzeczywisty ruch ujemnie naładowanych nośników w przeciwnym kierunku. (Jeżeli efekt nie jest taki sam, to oczywiście odstępujemy od tej umowy i opisujemy ruch rzeczywisty).

### Sprawdzian 1

Na rysunku przedstawiono wycinek obwodu. Jaka jest wartość natężenia *I* i kierunek prądu w dolnym przewodniku z prawej strony?



### Przykład 26.01. Natężenie prądu jest szybkością, z jaką ładunek przepływa przez powierzchnię

Przez wąż ogrodowy przepływa strumień objętościowy wody  $dV/dt = 450 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Ile wynosi natężenie prądu ładunku ujemnego?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Natężenie prądu *I* ładunku ujemnego pochodzi od elektronów w cząsteczkach wody poruszających się wzdłuż węża. Natężenie prądu jest równe ilości ujemnego ładunku, przepływającego w jednostce czasu przez dowolną płaszczyznę przecinającą całkowicie wąż.

**Obliczenia:** Możemy więc powiązać natężenie prądu z liczbą cząsteczek, które przepływają przez taką płaszczyznę w ciągu sekundy

I = (ładunek elektronu)

- × (liczba elektronów w cząsteczce)
- × (liczba cząsteczek na sekundę),

czyli

$$I = (e)(10)\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}.$$

Liczba elektronów w cząsteczce wynosi 10, ponieważ cząsteczka wody  $(H_2O)$  zawiera 8 elektronów w atomie tlenu i po 1 elektronie w każdym z dwóch atomów wodoru.

Liczbę cząsteczek przepływających w jednostce czasu dN/dt możemy wyrazić za pomocą strumienia objętościowego

(liczba cząsteczek na sekundę)

= (liczba cząsteczek w molu)

- $\times$  (liczba moli w jednostce masy)
- × (masa w jednostce objętości)
- × (objętość na sekundę).

Liczba cząsteczek w molu jest liczbą Avogadra  $N_{\rm A}$ . Liczba moli w jednostce masy jest odwrotnością masy przypadającej na mol, czyli masy molowej M wody. Masa na jednostkę objętości jest gęstością  $\rho_{\rm mas}$  wody. Objętość na sekunę jest to strumień objętościowy dV/dt. Mamy więc

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N_{\mathrm{A}}\left(\frac{1}{M}\right)\rho_{\mathrm{mas}}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{N_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{mas}}}{M}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}.$$

Po podstawieniu tej wielkości do wzoru na *I* otrzymujemy

$$I = 10e N_{\rm A} M^{-1} \rho_{\rm mas} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

Liczba Avogadra to  $N_{\rm A} = 6.02 \cdot 10^{23}$  cząsteczek, a z tabeli 15.1 możemy znaleźć, że gęstość wody  $\rho_{\rm mas}$  w normalnych warunkach wynosi 1000 kg/m<sup>3</sup>. Masę molową wody możemy obliczyć z mas molowych, podanych w dodatku F: dodajemy masę molową tlenu (16 g/mol) do podwojonej masy molowej wodoru (1 g/mol), otrzymując 18 g/mol = 0,018 kg/mol. Natężenie prądu ładunków ujemnych związanych z elektronami w wodzie wynosi więc

 $I = (10)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})$  $\cdot (0,018 \text{ kg/mol})^{-1}(1000 \text{ kg/m}^3) \cdot (450 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s})$ 

$$= 2,41 \cdot 10^7 \text{ C/s} = 2,41 \cdot 10^7 \text{ A}$$
  
= 24,1 MA (odpowiedź).

Ten prąd ładunku ujemnego jest dokładnie skompensowany przez prąd ładunku dodatniego, związanego z jądrami trzech atomów, które tworzą cząsteczkę wody. Zatem przez wąż nie przepływa wypadkowy ładunek.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

### **26.2.** GĘSTOŚĆ PRĄDU ELEKTRYCZNEGO

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 26.05 określić gęstość prądu i wektor gęstości prądu;
- 26.06 znaleźć wektor elementu powierzchni dš w przypadku prądu płynącego przez element powierzchni przekroju przez przewodnik (na przykład przewód);
- 26.07 znaleźć natężenie prądu płynącego przez przekrój przewodnika, całkując iloczyn skalarny wektorów gęstości prądu *J* i elementu powierzchni d*S* po całym przekroju;
- **26.08** zastosować związek pomiędzy natężeniem prądu *I*, wartością gęstości prądu *J* i polem powierzchni *S*;

### Podstawowe fakty.

• Natężenie prądu I (wielkość skalarna) jest związane z gęstością prądu  $\vec{J}$  (wielkością wektorową) relacją

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

gdzie  $d\vec{S}$  jest wektorem prostopadłym do elementu powierzchni o polu powierzchni dS, a całka jest obliczana po powierzchni dowolnego przekroju przez przewodnik. Gęstość prądu  $\vec{J}$  ma taki sam kierunek jak prędkość poruszających się nośników, 26.09 zdefiniować linie prądu;

- 26.10 wyjaśnić ruch elektronów przewodnictwa, posługując się pojęciem ich prędkości unoszenia;
- 26.11 rozróżniać prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa od prędkości ich ruchu przypadkowego, a także określić, jaki jest stosunek tych dwóch prędkości;
- 26.12 zdefiniować gęstość nośników ładunku n;
- **26.13** zastosować związek pomiędzy gęstością prądu J, gęstością nośników ładunku n i prędkością unoszenia nośników ładunku  $v_d$ .

jeśli są one dodatnie; w przypadku nośników naładowanych ujemnie kierunek jest przeciwny.

• Gdy w przewodniku wytwarzane jest pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , nośniki ładunku (w założeniu dodatnie) nabierają prędkości unoszenia  $v_d$  w kierunku  $\vec{E}$ .

• Prędkość unoszenia  $\vec{v}_{\rm d}$  jest związana z gęstością prądu zależnością

$$J = (ne)\vec{v}_{\rm d},$$

gdzie ne jest gęstością ładunku nośników.

### Gęstość prądu

Czasami interesuje nas tylko natężenie prądu I w konkretnym przewodniku. Nieraz analizujemy sytuację lokalnie i badamy przepływ ładunku przez przekrój przewodnika w jakimś wybranym punkcie. Do takiego opisu możemy zastosować **gęstość prądu elektrycznego**  $\vec{J}$ , która ma taki sam kierunek, jak prędkość poruszających się ładunków, jeśli są dodatnie, i przeciwny kierunek, jeśli są ujemne. Dla każdego elementu przekroju wartość J jest równa natężeniu prądu, przepływającego przez ten element, przypadającego na jednostkę pola jego powierzchni. Natężenie prądu przez element możemy zapisać w postaci  $\vec{J} \cdot d\vec{S}$ , gdzie  $d\vec{S}$  jest wektorem prostopadłym do elementu powierzchni. Całkowite natężenie prądu przepływającego przez powierzchnię wynosi więc

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$
 (26.4)

Jeśli przepływ prądu przez powierzchnię jest stały i zachodzi prostopadle do d $\vec{S}$ , to gęstość prądu  $\vec{J}$  jest także stała i równoległa do d $\vec{S}$ . Wtedy wzór (26.4) przybiera postać

$$I = \int J dS = J \int dS = JS,$$
  
$$J = \frac{I}{S},$$
 (26.5)

czyli

gdzie *S* jest całkowitym polem powierzchni. Ze wzorów (26.4) i (26.5) wynika, że jednostką gęstości prądu elektrycznego w układzie SI jest amper na metr kwadratowy ( $A/m^2$ ).

W rozdziale 22 pokazaliśmy, że pole elektryczne możemy przedstawiać za pomocą linii pola elektrycznego. Na rysunku 26.4 pokazano, jak gęstość prądu elektrycznego można przedstawić za pomocą podobnego układu linii, które będziemy nazywać *liniami prądu*. Prąd, który na rysunku 26.4 przepływa w prawo, przechodzi z szerszego przewodnika z lewej strony do węższego przewodnika z prawej. Ładunek jest przy tym przejściu zachowany, a więc ilość ładunku, a stąd i natężenie prądu nie może się zmienić. Zmienia się jednak gęstość prądu elektrycznego — jest ona większa w węższym przewodniku. Odstęp między liniami prądu zawiera informację o wartości gęstości prądu — jeśli linie są bliżej siebie, to gęstość prądu jest większa.

### Prędkość unoszenia

Gdy w przewodniku nie płynie prąd elektryczny, elektrony przewodnictwa poruszają się w nim przypadkowo i brak jest uporządkowanego ruchu w jakimkolwiek kierunku. Gdy przez przewodnik płynie prąd, elektrony w rzeczywistości nadal poruszają się przypadkowo, ale teraz *przemieszczają się* z **prędkością unoszenia (dryfu)**  $v_d$  w kierunku przeciwnym do natężenia przyłożonego pola elektrycznego, które wywołuje przepływ prądu. Prędkość unoszenia jest bardzo mała w porównaniu z prędkościami w ruchu przypadkowym, np. w miedzianych przewodnikach domowej sieci elektrycznej prędkości unoszenia elektronu wynoszą około  $10^{-5}$  czy  $10^{-4}$  m/s, a prędkości ruchu przypadkowego około  $10^6$  m/s.

Korzystając z rysunku 26.5, powiążemy prędkość unoszenia  $v_d$  elektronów przewodnictwa prądu płynącego wzdłuż przewodnika z wartością gęstości prądu J w przewodniku. Dla uproszczenia, na rysunku 26.5 przedstawiono równoważne przesunięcie nośników o ładunku *dodatnim* w kierunku natężenia  $\vec{E}$  przyłożonego pola elektrycznego. Załóżmy, że wszystkie nośniki ładunku poruszają się z jednakową prędkością unoszenia  $v_d$ i że gęstość prądu J jest jednorodna w przekroju przewodnika o polu powierzchni S. Liczba nośników ładunku w przewodniku o długości L wynosi *nSL*, gdzie *n* jest liczbą nośników na jednostkę objętości. Całkowity



**Rys. 26.4.** Linie prądu odzwierciedlają gęstość prądu przy jego przepływie przez zwężający się przewodnik

umownym kierunkiem przepływu prądu jest kierunek ruchu nośników ładunku dodatniego przyspieszanych przez pole elektryczne



**Rys. 26.5.** Nośniki ładunku dodatniego przemieszczają się z prędkością  $v_d$  w kierunku natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ . Kierunek gęstości prądu  $\vec{J}$  i strzałka prądu są zwykle rysowane w tym samym kierunku

ładunek nośników, z których każdy ma ładunek *e*, w przewodniku o długości *L* wynosi więc

$$q = (nSL)e.$$

Wszystkie nośniki poruszają się wzdłuż przewodnika z prędkością  $v_d$ , dlatego też cały ten ładunek przepływa przez dowolny przekrój przewodnika w przedziale czasu

$$t = \frac{L}{v_{\rm d}}$$

Ze wzoru (26.1) wynika, że natężenie prądu I jest równe stosunkowi ładunku, przepływającego przez przekrój, do czasu, czyli

$$I = \frac{q}{t} = \frac{nSLe}{L/v_{\rm d}} = nSev_{\rm d}.$$
(26.6)

Wyznaczając stąd  $v_d$  i uwzględniając wzór (26.5) (J = I/S), otrzymujemy

$$v_{\rm d} = \frac{I}{nSe} = \frac{J}{ne}$$

czyli po przejściu do postaci wektorowej

$$\vec{J} = (ne)\vec{v}_{\rm d}.\tag{26.7}$$

We wzorze tym iloczyn *ne*, którego jednostką w układzie SI jest kulomb na metr sześcienny (C/m<sup>3</sup>), jest *gęstością ładunku nośników*. Dla dodatnich nośników iloczyn *ne* jest dodatni i zgodnie ze wzorem (26.7) wielkości  $\vec{J}$  i  $\vec{v}_d$  mają taki sam kierunek. Dla ujemnych nośników iloczyn *ne* jest ujemny i wtedy  $\vec{J}$  i  $\vec{v}_d$  mają kierunki przeciwne.

### Sprawdzian 2

Na rysunku przedstawiono elektrony przewodnictwa, poruszające się w przewodniku w lewo. Czy: a) natężenie prądu I, b) gęstość prądu J, c) natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  są skierowane w lewo, czy w prawo?



### Przykład 26.02. Gęstość prądu, jednorodna i niejednorodna

a) Gęstość prądu w przewodniku w kształcie walca o promieniu R = 2 mm jest jednakowa na całym przekroju przewodnika i równa  $J = 2 \cdot 10^5$  A/m<sup>2</sup>. Ile wynosi natężenie prądu przepływającego przez zewnętrzną warstwę przewodnika w obszarze między odległościami radialnymi R/2 i R (rys. 26.6a)?

### PODSTAWOWE FAKTY

Ze względu na jednorodność gęstości prądu na całym przekroju przewodnika gęstość prądu J, natężenie prądu I i pole przekroju S są powiązane wzorem (26.5) (J = I/S). **Obliczenia:** Chcemy jednak obliczyć natężenie prądu, płynącego tylko przez powierzchnię przekroju o mniejszym polu S' (a nie przez cały przekrój), gdzie

$$S' = \pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$$
  
=  $\pi \left(\frac{3R^2}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} (0,002 \text{ m})^2$   
= 9,424 \cdot 10^{-6} m^2.

Napiszemy teraz wzór (26.5) w postaci

I = JS'



**Rys. 26.6.** a) Przekrój poprzeczny przewodnika o promieniu *R*. Jeśli gęstość prądu jest jednorodna i prostopadła do tego przekroju, to natężenie prądu jest iloczynem wartości gęstości prądu i pola powierzchni. b)-e) Jeśli prąd nie jest jednorodny, musimy najpierw znaleźć natężenie prądu przepływającego przez wąski pierścień, a następnie zsumować (całkując) natężenia prądów we wszystkich pierścieniach tworzących daną powierzchnię

i po podstawieniu danych otrzymamy

$$I = (2 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2)(9,424 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)$$
  
= 1,9 A (odpowiedź)

**b)** Załóżmy teraz, że gęstość prądu płynącego przez powierzchnię przekroju zależy od odległości radialnej *r* zgodnie ze wzorem  $J = ar^2$ , gdzie  $a = 3 \cdot 10^{11}$  A/m<sup>4</sup> i *r* wyrażone jest w metrach. Ile wynosi obecnie natężenie prądu przepływającego przez tę samą zewnętrzną warstwę przewodnika?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Ze względu na niejednorodność gęstości prądu w całym przekroju przewodnika musimy powrócić do wzoru (26.4) ( $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$ ) i scałkować gęstość prądu po części przekroju przewodnika, od r = R/2 do r = R.

**Obliczenia:** Wektor gęstości prądu  $\vec{J}$  (wzdłuż przewodnika) i wektor powierzchni d $\vec{S}$  (prostopadły do przekroju przewodnika) mają taki sam kierunek. Stąd

$$J \cdot \mathrm{d}S = J \,\mathrm{d}S \,\cos 0 = J \,\mathrm{d}S.$$

Musimy teraz zastąpić pole powierzchni d*S* czymś, co będziemy całkować w granicach od r = R/2 do r = R. Najprostszym podstawieniem (ze względu na zależność *J* tylko od *r*) jest pole  $2\pi r$  d*r* wąskiego pierścienia o obwodzie  $2\pi r$  i szerokości d*r* (rys. 26.6b). Obliczamy następnie całkę, w której *r* jest zmienną całkowania, i zgodnie ze wzorem (26.4) otrzymujemy

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int J dS = \int_{R/2}^{R} ar^2 2\pi r dr$$

$$= 2\pi a \int_{R/2}^{R} r^{3} dr = 2\pi a \left[ \frac{r^{4}}{4} \right]_{R/2}^{R}$$
$$= \frac{\pi a}{2} \left[ R^{4} - \frac{R^{4}}{16} \right] = \frac{15}{32} \pi a R^{4}$$
$$= \frac{15}{32} \pi (3 \cdot 10^{11} \text{ A/m}^{4}) (0,002 \text{ m})^{4}$$
$$= 7,1 \text{ A} \qquad (\text{odpowied} \acute{z})$$

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

### Przykład 26.03. Elektrony przewodnictwa tworzące prąd poruszają się bardzo wolno

Ile wynosi prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa w przewodniku miedzianym o promieniu r = 900 µm, w którym płynie stały prąd o natężeniu I = 17 mA? Przyjmij, że każdy atom miedzi dostarcza jeden elektron przewodnictwa, a gęstość prądu jest stała na całym przekroju drutu.

### **PODSTAWOWE FAKTY**

- 1. Prędkość unoszenia  $v_d$  jest związana z gęstością prądu  $\vec{J}$  i liczbą *n* elektronów przewodnictwa na jednostkę objętości wzorem (26.7), który dla wartości wektorów przybiera postać  $J = nev_d$ .
- **2.** Gęstość prądu jest stała, a więc wartość *J* jest związana z podanym natężeniem prądu *I* i rozmiarami przewodnika wzorem (26.5) (J = I/S, gdzie *S* jest polem przekroju przewodnika).
- **3.** Przyjęliśmy, że na każdy atom przypada jeden elektron przewodnictwa, więc liczba *n* elektronów przewodnictwa w jednostce objętości jest taka sama, jak liczba atomów w jednostce objętości.

Obliczenia: Zacznijmy od trzeciego punktu:

- n = (liczba atomów w jednostce objętości)
  - = (liczba atomów w molu)
    - $\times$  (liczba moli w jednostce masy)
    - × (masa na jednostkę objętości).

Liczba atomów w molu jest po prostu liczbą Avogadra  $N_{\rm A} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Liczba moli w jednostce masy jest odwrotnością masy na mol, czyli masy molowej *M* miedzi. Masa na jednostkę objętości jest gęsto-

ścią  $\rho_{\rm mas}$  miedzi. Stąd

$$n = N_{\rm A} \left(\frac{1}{M}\right) \rho_{\rm mas} = \frac{N_{\rm A} \rho_{\rm mas}}{M}$$

Odczytując masę molową M i gęstość  $\rho_{mas}$  z dodatku F, otrzymujemy (po zamianie jednostek)

$$n = \frac{(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})(8,96 \cdot 10^{3} \text{ kg/m}^{3})}{63,54 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}}$$
  
= 8,49 \cdot 10^{28} elektronów/m<sup>3</sup>,

czyli

$$n = 8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Następnie skorzystamy z dwóch pierwszych punktów, pisząc

$$\frac{I}{S} = nev_{\rm d}.$$

Podstawiając  $S = \pi r^2 (= 2,54 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)$  i wyznaczając  $v_d$ , mamy

$$v_{\rm d} = \frac{I}{ne(\pi r^2)}$$
  
=  $\frac{17 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{(8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(2,54 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)}$   
= 4,9 \cdot 10^{-7} m/s (odpowiedź).

czyli elektrony przemieszczają się z prędkością zaledwie 1,8 mm/h, czyli wolniej niż ślimak.

Jak szybko zapala się światło: Nasuwa się więc pytanie: Jeśli elektrony przemieszczają się tak wolno, to dlaczego światło w pokoju zapala się tak szybko po włączeniu przełącznika? Nieporozumienie wynika tu z nierozróżniania prędkości przemieszczania się elektronów i prędkości, z jaką *zmiany* konfiguracji pola elektrycznego rozchodzą się wzdłuż przewodów. Ta ostatnia prędkość jest bliska prędkości światła — elektrony w którymkolwiek punkcie przewodnika, włącznie z żarówkami, zaczynają przemieszczać się prawie natychmiast. Podobnie, jeśli otworzymy zawór przy wężu ogrodowym napełnionym wodą, to fala ciśnienia przesuwa się wzdłuż węża z prędkością dźwięku w wodzie. Prędkość przepływu samej wody w wężu (możemy ją zmierzyć przez zabarwienie w jakimś miejscu) jest znacznie mniejsza.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

# **26.3.** OPÓR ELEKTRYCZNY I OPÓR ELEKTRYCZNY WŁAŚCIWY

### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **26.14** zastosować związek pomiędzy różnicą potencjałów *U* przyłożoną do ciała, oporem tego ciała *R* i wynikającym z tego natężeniem prądu *I*, jaki popłynie pomiędzy punktami, do których przyłożona jest różnica potencjałów;
- 26.15 rozpoznać opornik;
- **26.16** zastosować związek pomiędzy wartością natężenia pola elektrycznego E, wytworzonego w punkcie danego materiału, opornością tego materiału  $\rho$  i wartością wynikającej z tego gęstości prądu J w tym punkcie;
- 26.17 w przypadku jednorodnego pola elektrycznego wytworzonego w przewodzie zastosować związek pomiędzy warto-

### Podstawowe fakty \_\_\_\_

Opór elektryczny (rezystancja) *R* przewodnika zdefiniowany jest wzorem

$$R = \frac{U}{I}$$

gdzie U jest różnicą potencjałów na końcach przewodnika, a I natężeniem prądu.

Opór właściwy (rezystywność) ρ i przewodność właściwa (konduktywność) σ materiału są związane relacją

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J}$$

gdzie *E* jest wartością natężenia przyłożonego pola elektrycznego.

 Natężenie pola elektrycznego i gęstość prądu związane są z oporem właściwym

$$\vec{E} = \rho \vec{J}.$$

ścią natężenia pola elektrycznego E, różnicą potencjałów U pomiędzy dwoma końcami tego przewodu i jego długością L;

- 26.18 zastosować związek między oporem właściwym ρ i przewodnością właściwą σ;
- **26.19** zastosować związek między oporem danego ciała R, oporem właściwym materiału, z jakiego jest ono wykonane  $\rho$ , jego długością L i polem powierzchni przekroju S;
- **26.20** zastosować przybliżony wzór opisujący zależność oporu właściwego przewodnika  $\rho$  od temperatury T;
- **26.21** narysować wykres zależności oporu właściwego  $\rho$  od temperatury *T* dla metalu.

• Opór *R* przewodnika o długości *L* i jednorodnym przekroju poprzecznym wynosi

$$R = \rho \frac{L}{S},$$

gdzie *S* jest polem przekroju poprzecznego.

• Opór właściwy  $\rho$  dla większości materiałów zmienia się wraz z temperaturą. Dla wielu materiałów, także dla metali, związek między  $\rho$  i temperaturą T ma w przybliżeniu postać

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0),$$

gdzie  $T_0$  jest temperaturą odniesienia,  $\rho_0$  jest oporem właściwym w temperaturze  $T_0$ , a  $\alpha$  jest współczynnikiem temperaturowym oporu właściwego materiału.

### Opór elektryczny i opór elektryczny właściwy

Jeśli przyłożymy tę samą różnicę potencjałów do końców prętów miedzianych i szklanych o podobnych kształtach, to w tych prętach popłyną prądy o bardzo różnych natężeniach. Ma to związek z charakterystyczną właściwością przewodnika zwaną **oporem elektrycznym** (rezystancją). Opór elektryczny między dwoma dowolnymi punktami przewodnika określamy przez przyłożenie różnicy potencjałów U między tymi punktami i pomiar natężenia powstałego prądu I. Opór elektryczny R jest określony wzorem

$$R = \frac{I}{I} \qquad (\text{definicja oporu } R). \tag{26.8}$$

Jednostką oporu elektrycznego w układzie SI, wynikającą ze wzoru (26.8), jest wolt na amper. Taka kombinacja występuje często, dlatego też wprowadzono dla niej specjalną nazwę **om** (symbol  $\Omega$ ), czyli

$$1 \text{ om} = 1 \Omega = 1 \text{ wolt na amper} = 1 \text{ V/A.}$$
 (26.9)

Element obwodu, którego rolą jest zapewnienie określonego oporu, nazywamy **opornikiem** (rezystorem) (rys. 26.7). Na schemacie obwodu opornik o określonym oporze przedstawiamy za pomocą symbolu  $\checkmark$ . Jeśli wzór (26.8) zapiszemy w postaci

$$I = \frac{U}{R}$$

to widzimy, że im większy jest opór przy przepływie prądu dla danej różnicy potencjałów, tym mniejsze jest natężenie prądu.

Opór przewodnika zależy od sposobu, w jaki przyłożono do niego różnicę potencjałów. Na rysunku 26.8 przedstawiono dwa różne sposoby przyłożenia pewnej różnicy potencjałów do tego samego przewodnika. Linie prądu wskazują, że w tych dwóch przypadkach natężenia prądu, a stąd i mierzone opory, będą różne. Jeśli specjalnie tego nie zaznaczono, będziemy zakładać, że dana różnica potencjałów jest przyłożona jak na rysunku 26.8b.

Podobnie, jak w wielu innych sytuacjach, chcemy często rozważyć ogólny problem i zająć się nie poszczególnymi ciałami, ale materiałami. Skupimy się dlatego nie na różnicy potencjałów U na określonym oporniku, ale na natężeniu pola elektrycznego  $\vec{E}$  w jakimś punkcie materiału przewodnika. Podobnie zamiast natężenia prądu I płynącego przez przewodnik, rozważymy gęstość prądu  $\vec{J}$  w rozważanym punkcie. Zamiast oporu R rozważymy **opór elektryczny właściwy** (rezystywność)  $\rho$  materiału

$$\rho = \frac{E}{J}$$
 (definicja oporu właściwego  $\rho$ ). (26.10)

(Porównaj ten wzór ze wzorem (26.8)).



**Rys. 26.8.** Dwa sposoby przyłożenia różnicy potencjałów do przewodzącego pręta. Niebieskie złącza mają z założenia znikomo mały opór. W sytuacji (a) mierzony opór jest większy niż w sytuacji (b)



**Rys. 26.7.** Różne oporniki. Paski na nich namalowane tworzą specjalny kod paskowy identyfikujący ich opór (fot. Deserg/Shutterstock)

Zgodnie ze wzorem (26.10) jednostką oporu właściwego  $\rho$  w układzie SI jest om razy metr  $(\Omega \cdot m)$ 

$$\frac{\text{jednostka}(E)}{\text{jednostka}(J)} = \frac{V/m}{A/m^2} = \frac{V}{A}m = \Omega \cdot m.$$

W tabeli 26.1 podano opory właściwe kilkunastu materiałów. Wzór (26.10) możemy zapisać w postaci wektorowej jako

$$\vec{E} = \rho \vec{J}.\tag{26.11}$$

Wzory (26.10) i (26.11) są prawdziwe tylko dla materiałów izotropowych, czyli materiałów, których właściwości elektryczne są takie same we wszystkich kierunkach.

Czesto mówimy o przewodności elektrycznej właściwej (konduktywności)  $\sigma$  materiału. Jest ona po prostu odwrotnością jego oporu właściwego, czyli:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$
 (definicja przewodności właściwej  $\sigma$ ). (26.12)

Jednostką przewodności właściwej w układzie SI jest simens (1 S =  $1/(\Omega \cdot m)$ ). Definicja przewodności właściwej  $\sigma$  pozwala napisać wzór (26.11) w innej postaci

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}.$$
 (26.13)

### Obliczanie oporu elektrycznego na podstawie oporu elektrycznego właściwego

Dokonaliśmy ważnego rozróżnienia:

Opór elektryczny jest właściwością ciała. Opór elektryczny właściwy jest właściwością materiału.

Jeśli znamy opór właściwy substancji, np. miedzi, to możemy obliczyć opór przewodnika miedzianego. Załóżmy, że S jest polem przekroju poprzecznego przewodnika, L jego długością, a U różnicą potencjałów na końcach przewodnika (rys. 26.9). Jeśli linie prądu są rozłożone jednorodnie w przewodniku, to natężenie pola elektrycznego i gęstość prądu będą stałe we wszystkich punktach przewodnika i na podstawie wzorów (24.42) i (26.5) możemy obliczyć ich wartości

$$E = U/L$$
 i  $J = I/S$ . (26.14)

Ze wzorów (26.10) i (26.14) otrzymujemy wtedy

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{U/L}{I/S}.$$
(26.15)

Tabela 26.1. Opór elektryczny właściwy dla niektórych substancji w temperaturze pokojowej (20°C)

	Opór	Współczynnik
	elektryczny	temperaturowy
Materiał	właściwy $\rho$	oporu
	$[\Omega \cdot m]$	właściwego $\alpha$
		$[K^{-1}]$
T	ypowe metal	e
Srebro	$1,62 \cdot 10^{-8}$	$4, 1 \cdot 10^{-3}$
Miedź	$1,69 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$
Złoto	$2,35 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$
Glin	$2,75 \cdot 10^{-8}$	$4, 4 \cdot 10^{-3}$
Manganin <sup>a</sup>	$4,82 \cdot 10^{-8}$	$0,002 \cdot 10^{-3}$
Wolfram	$5,25 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
Żelazo	$9,68 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$
Platyna	$10,6 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Туроч	ve półprzewo	dniki
Czysty krzem	$2.5 \cdot 10^{3}$	$-70 \cdot 10^{-3}$
Krzem typu n <sup>b</sup>	$8.7 \cdot 10^{-4}$	
Krzem typu p <sup>c</sup>	$2,8 \cdot 10^{-3}$	
Ty	powe izolato	ry
Szkło	$10^{10} - 10^{14}$	
Stopiony kwarc	$\sim 10^{16}$	

<sup>a</sup> Specjalnie przygotowany stop o małej wartości współczynnika temperaturowego  $\alpha$ .

<sup>b</sup> Czysty krzem domieszkowany fosforem do otrzymania koncentracji nośników ładunku  $10^{23} \text{ m}^{-3}$ .

<sup>c</sup> Czysty krzem domieszkowany glinem do otrzymania koncentracji nośników ładunku  $10^{23} \text{ m}^{-3}$ .



**Rys. 26.9.** Różnica potencjałów U została przyłożona do końców przewodnika o długości L i polu przekroju poprzecznego S, wytwarzając prąd o natężeniu I

Wielkość U/I jest oporem R, co pozwala napisać wzór (26.15) w postaci

$$R = \rho \frac{L}{S}.$$
 (26.16)

Wzór (26.16) można stosować tylko do jednorodnego izotropowego przewodnika o stałym przekroju poprzecznym, jeśli przyłożono do niego różnicę potencjałów, tak jak na rysunku 26.8b.

Wielkości makroskopowe U, I i R są najbardziej interesujące wtedy, gdy dokonujemy pomiarów elektrycznych na konkretnych przewodnikach. Są to wielkości, których wartości odczytujemy bezpośrednio na miernikach. Do wielkości mikroskopowych E, J i  $\rho$  przechodzimy wtedy, gdy jesteśmy zainteresowani podstawowymi właściwościami elektrycznymi materiałów.

### Sprawdzian 3

Na rysunku przedstawiono trzy walcowe przewodniki miedziane o podanych przekrojach poprzecznych i długościach. Uszereguj je według wartości natężenia prądu płynącego przez nie po przyłożeniu tej samej różnicy potencjałów U do ich podstaw, zaczynając od wartości największej.



### Zależność od temperatury

Wiele wielkości fizycznych zmienia się wraz z temperaturą i opór właściwy nie stanowi tu wyjątku. Na rysunku 26.10 przedstawiono na przykład zmiany oporu właściwego miedzi w szerokim zakresie temperatury. Zależność oporu właściwego od temperatury dla miedzi — i ogólnie dla metali — jest w przybliżeniu liniowa w szerokim zakresie temperatury. Dla takich liniowych zależności możemy napisać przybliżony wzór empiryczny, wystarczająco poprawny dla większości zastosowań technicznych

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0), \qquad (26.17)$$

gdzie  $T_0$  jest wybraną temperaturą odniesienia i  $\rho_0$  jest oporem właściwym w tej temperaturze. Zwykle wybieramy  $T_0 = 293$  K (co odpowiada temperaturze pokojowej) i wtedy dla miedzi  $\rho_0 = 1,69 \cdot 10^{-8} \ \Omega \cdot m$ .

We wzorze (26.17) występuje tylko różnica temperatury, a więc nie ma znaczenia, czy używamy w tym wzorze skali Celsjusza, czy Kelvina, gdyż różnice temperatur w stopniach dla tych skal są identyczne. Wielkość  $\alpha$ we wzorze (26.17), zwana *współczynnikiem temperaturowym oporu właściwego*, jest tak dobrana, aby wzór był zgodny z doświadczeniem dla wybranego zakresu temperatury. W tabeli 26.1 podano wartości  $\alpha$  dla kilku metali.



**Rys. 26.10.** Opór właściwy miedzi w zależności od temperatury. Kropka na krzywej odpowiada wygodnemu punktowi odniesienia przy temperaturze  $T_0 = 293$  K i oporze właściwym  $\rho_0 = 1,69 \cdot 10^{-8} \ \Omega \cdot m$ 

### Przykład 26.04. Materiał ma opór właściwy, próbka materiału ma opór elektryczny

Prostopadłościenna sztabka żelazna ma wymiary 1,2 cm  $\times$  1,2 cm  $\times$  15 cm. Do dwóch równoległych ścian przyłożono różnicę potencjałów tak, że ściany te są powierzchniami ekwipotencjalnymi (rys. 26.8b). Ile wynosi opór sztabki, jeśli tymi dwiema równoległymi ścianami są: 1) kwadratowe podstawy (o wymiarach 1,2 cm  $\times$  1,2 cm), 2) prostokątne ściany (o wymiarach 1,2 cm  $\times$  15 cm)?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Opór *R* ciała zależy od sposobu przyłożenia do niego różnicy potencjałów. W szczególności zależy od stosunku *L/S*, zgodnie ze wzorem (26.16) ( $R = \rho L/S$ ), gdzie *S* jest polem powierzchni, do których przyłożono różnicę potencjałów, a *L* jest odległością między tymi powierzchniami.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

# **26.4. PRAWO OHMA**

### Czego się nauczysz? \_\_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 26.22 rozróżnić ciała, w których spełnione jest prawo Ohma, od tych, w których nie jest spełnione;
- **26.23** rozróżnić *materiały*, w których spełnione jest prawo Ohma, od tych, w których nie jest spełnione;
- 26.24 opisać ruch elektronów przewodnictwa tworzących prąd;

### Podstawowe fakty \_\_\_\_

• Dane ciało (przewodnik, opornik lub inny element obwodu) spełnia *prawo Ohma*, jeśli jego opór R = U/I jest niezależny od przyłożonej różnicy potencjałów U.

• Dany *materiał* spełnia prawo Ohma, jeśli jego opór właściwy  $\rho = E/J$  jest niezależny od wartości i kierunku natężenia przyłożonego pola elektrycznego  $\vec{E}$ .

 Zakładając, że elektrony przewodnictwa w metalu są swobodne i mogą poruszać się jak cząsteczki gazu, możemy wyObliczenia: W przypadku 1 mamy

$$L = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$$
 i  $S = (1,2 \text{ cm})^2 = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Podstawiając te wartości i opór właściwy  $\rho$  z tabeli 26.1, otrzymujemy w przypadku 1

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{(9,68 \cdot 10^{-8} \ \Omega \cdot m)(0,15 \ m)}{1,44 \cdot 10^{-4} \ m^2}$$
  
= 1 \cdot 10^{-4} \Omega = 100 \mu \Omega (odpowiedź).

Podobnie w przypadku 2, podstawiając odległość L = 1,2 cm i pole powierzchni S = (1,2 cm)(15 cm), otrzymujemy

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{(9,68 \cdot 10^{-8} \ \Omega \cdot m)(1,2 \cdot 10^{-2} \ m)}{1,8 \cdot 10^{-3} \ m^2}$$
  
= 6,5 \cdot 10^{-7} \Omega = 0,65 \mu \Omega (odpowiedź).

- 26.25 wyjaśnić związek pomiędzy średnim czasem swobodnym τ elektronów przewodnictwa w przewodniku, ich prędkością efektywną i ich (chaotycznym) ruchem termicznym;
- **26.26** zastosować związek pomiędzy oporem właściwym  $\rho$ , koncentracją elektronów przewodnictwa i średnim czasem swobodnym  $\tau$  tych elektronów.

prowadzić wyrażenie na opór właściwy metalu

$$\rho = \frac{m}{e^2 n\tau}$$

gdzie n jest liczbą elektronów swobodnych w jednostce objętości i  $\tau$  jest średnim czasem między zderzeniami elektronu z atomami metalu.

• Metale spełniają prawo Ohma, ponieważ czas  $\tau$  jest prawie niezależny od wartości natężenia *E* pola elektrycznego, przyłożonego do metalu.



**Rys. 26.11.** a) Po przyłożeniu różnicy potencjałów U do zacisków badanego elementu powstaje prąd o natężeniu I. b) Wykres natężenia prądu I w zależności od przyłożonej różnicy potencjałów U, gdy elementem obwodu jest opornik o oporze 1000  $\Omega$ . c) Podobny wykres, gdy elementem obwodu jest dioda półprzewodnikowa ze złączem p-n

### Prawo Ohma

Jak już wcześniej mówiliśmy, opornik jest przewodnikiem o określonym oporze elektrycznym. W tym przypadku opór nie zależy od wartości i kierunku (*polaryzacji*) przyłożonej różnicy potencjałów. Inne ciała przewodzące (np. niektóre przyrządy) mogą mieć opory zależne od przyłożonej różnicy potencjałów.

Na rysunku 26.11a przedstawiono sposób rozróżniania takich ciał. Do badanego elementu obwodu przykładamy różnicę potencjałów U i mierzymy natężenie I prądu, powstałego w elemencie, zmieniając wartość i polaryzację wielkości U. Polaryzację U przyjmujemy z umowy za dodatnią, jeśli lewy zacisk ciała ma większy potencjał niż prawy zacisk. Kierunkowi powstałego prądu (z lewej strony na prawą) przypisujemy umownie znak plus. Odwrotna polaryzacja różnicy potencjałów U (o większym potencjałe na prawym zacisku) jest wtedy ujemna; natężeniu powstałego prądu przypisujemy znak minus.

Na rysunku 26.11b przedstawiono wykres natężenia I w zależności od U dla pewnego elementu obwodu. Wykres jest linią prostą, przechodzącą przez początek układu współrzędnych, czyli stosunek I/U (nachylenie linii prostej) jest taki sam dla wszystkich wartości U. Oznacza to, że opór R = U/I tego elementu jest niezależny od wartości i polaryzacji przyłożonej różnicy potencjałów U.

Na rysunku 26.11c przedstawiono wykres dla innego elementu przewodzącego. Prąd przez ten element może płynąć tylko wtedy, gdy polaryzacja różnicy potencjałów U jest dodatnia, a przyłożona różnica potencjałów jest większa od około 1,5 V. Zależność natężenia I płynącego prądu od U jest nieliniowa i stosunek I/U zależy od przyłożonej różnicy potencjałów U.

Te dwa rodzaje przewodników rozróżniamy mówiąc, że w pierwszym przypadku spełnione jest prawo Ohma, a w drugim nie.

**Prawo Ohma** brzmi: natężenie prądu płynącego przez przewodnik jest *zawsze* wprost proporcjonalne do różnicy potencjałów przyłożonej do przewodnika.

(Mimo że stwierdzenie to jest słuszne tylko w pewnych sytuacjach, to z powodów historycznych używamy określenia "prawo"). Element obwodu z rysunku 26.11b — który jest opornikiem o oporze 1000  $\Omega$  — spełnia prawo Ohma. Element obwodu z rysunku 26.11c — który jest złączem p-n (diodą) — nie spełnia prawa Ohma.

Element obwodu spełnia prawo Ohma, gdy jego opór nie zależy od wartości i polaryzacji przyłożonej różnicy potencjałów.

Często spotykamy się ze stwierdzeniem, że wzór U = IR wyraża prawo Ohma. Nie jest to prawda! Wzór ten jest definicją oporu i stosuje się do wszystkich przewodników niezależnie od tego, czy spełniają prawo Ohma, czy nie. Jeśli zmierzymy różnicę potencjałów U przyłożoną do dowolnego ciała (nawet do diody ze złączem p-n) i natężenie I powsta-
łego w ciele prądu, to możemy obliczyć opór R = U/I przy tej wartości różnicy potencjałów U. Istotą prawa Ohma jest jednak to, że wykres natężenia I w zależności od U jest liniowy, czyli że opór R nie zależy od U. Prawo Ohma możemy uogólnić dla materiałów przewodzących, korzystając ze wzoru (26.11) ( $\vec{E} = \rho \vec{J}$ ):

Materiał przewodzący spełnia prawo Ohma, gdy opór właściwy materiału nie zależy od wartości i kierunku przyłożonego pola elektrycznego.

Wszystkie jednorodne materiały, niezależnie od tego, czy są przewodnikami tak jak miedź, czy półprzewodnikami tak jak czysty krzem lub krzem z odpowiednimi domieszkami, spełniają prawo Ohma w pewnym zakresie wartości natężenia pola elektrycznego. Jeśli jednak natężenie pola jest dostatecznie duże, to zawsze pojawiają się odstępstwa od prawa Ohma.



W tabeli podano natężenie prądu I (w amperach) dla kilku wartości różnicy potencjałów U (w woltach) przyłożonej do dwóch elementów obwodu. Określ na podstawie tych danych, który element nie spełnia prawa Ohma.

Elem	ent 1	Element 2			
U I		U	Ι		
2,00	4,50	2,00	1,50		
3,00	6,75	3,00	2,20		
4,00	9,00	4,00	2,80		

# Prawo Ohma — obraz mikroskopowy

Wyjaśnienie, *dlaczego* pewne materiały spełniają prawo Ohma, wymaga szczegółowego zbadania procesu przewodzenia na poziomie atomowym. Rozważymy tu przewodzenie tylko w takich metalach, jak miedź. Nasza analiza opiera się na *modelu elektronów swobodnych*, w którym zakładamy, że elektrony przewodnictwa w metalu mogą poruszać się swobodnie w całej objętości próbki, podobnie jak cząsteczki w gazie w zamkniętym zbiorniku. Założymy także, że elektrony zderzają się tylko z atomami metalu, a nie z innymi elektronami.

Zgodnie z fizyką klasyczną, elektrony powinny mieć maxwellowski rozkład prędkości, podobnie jak cząsteczki w gazie (zob. podrozdział 19.6), a więc wartość średniej prędkości elektronu zależy od temperatury. Ruchem elektronów rządzą jednak prawa fizyki kwantowej, a nie fizyki klasycznej. Okazuje się, że założeniem dużo bliższym rzeczywistości jest przyjęcie, że elektrony przewodnictwa w metalu poruszają się efektywnie z jednakową prędkością  $v_{ef}$  i że ta prędkość w zasadzie nie zależy od temperatury. Dla miedzi  $v_{ef} \approx 1,6 \cdot 10^6$  m/s.

Gdy do próbki metalu przyłożymy pole elektryczne, elektrony zmieniają nieco swoje ruchy przypadkowe i przesuwają się bardzo powoli w kierunku przeciwnym do kierunku natężenia pola — ze średnią prędkością unoszenia  $v_d$ . Wartość prędkości unoszenia w typowym przewodniku metalicznym wynosi około  $5 \cdot 10^{-7}$  m/s i jest o wiele rzędów wiel-



**Rys. 26.12.** Szare linie ilustrują ruch elektronu od punktu *A* do punktu *B* z sześcioma zderzeniami po drodze. Zielone linie pokazują, jak mógłby wyglądać tor w obecności przyłożonego pola elektrycznego o natężeniu  $\vec{E}$ . Zauważ stałe przesunięcie w kierunku  $-\vec{E}$ . (W rzeczywistości zielone linie byłyby nieco zakrzywione, przypominałyby odcinki parabol, po których elektrony poruszają się między zderzeniami pod wpływem pola elektrycznego)

kości mniejsza od wartości prędkości efektywnej  $(1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s})$ . Na rysunku 26.12 można dostrzec związek między tymi dwiema wartościami prędkości. Szare linie ilustrują tory elektronu możliwe, gdy nie ma zewnętrznego pola; elektron przemieszcza się z punktu *A* do punktu *B*, doznając na swej drodze sześciu zderzeń. Linie zielone ilustrują wyniki tych samych zdarzeń, które nastąpiłyby, *gdyby* przyłożono pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ . Widzimy, że elektron przesuwa się stale w prawo, kończąc swoją drogę w punkcie *B'*, a nie w punkcie *B*. Na rysunku 26.12 przyjęto, że  $v_d \approx 0,02v_{ef}$ . Przesunięcie na rysunku jest wyolbrzymione, gdyż rzeczywista wartość prędkości unoszenia wynosi  $v_d \approx (10^{-13})v_{ef}$ .

Ruch elektronów przewodnictwa w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  jest więc złożeniem ruchu wynikającego z przypadkowych zderzeń i ruchu wywołanego polem  $\vec{E}$ . Gdy rozważymy wszystkie elektrony swobodne, ich przemieszczenia przypadkowe uśredniają się do zera i nie dają wkładu do prędkości unoszenia. Prędkość unoszenia jest wynikiem oddziaływania pola elektrycznego na elektrony.

Jeśli elektron o masie m znajdzie się w polu elektrycznym o wartości natężenia E, to dozna przyspieszenia, określonego przez drugą zasadę dynamiki Newtona

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}.$$
(26.18)

Natura zderzeń elektronów przewodnictwa jest taka, że po typowym zderzeniu każdy elektron, można powiedzieć, traci całkowicie swą pamięć o poprzedniej prędkości unoszenia. Każdy elektron po każdym zderzeniu "zaczyna wszystko od nowa", poruszając się w przypadkowym kierunku. W średnim czasie  $\tau$  między zderzeniami elektron uzyska średnio prędkość unoszenia  $v_d = a\tau$ . Co więcej, jeśli zmierzylibyśmy wartości prędkości unoszenia wszystkich elektronów w dowolnej chwili, to ich średnia wartość prędkości unoszenia okazałaby się także równa  $a\tau$ . Średnio, w dowolnej chwili, wartości prędkości unoszenia elektronów wynoszą zatem  $v_d = a\tau$ . Ze wzoru (26.18) otrzymujemy wtedy

$$e_{\rm d} = a\tau = \frac{eE\tau}{m}.$$
(26.19)

Korzystając ze wzoru (26.7) ( $\vec{J} = ne\vec{v}_d$ ), możemy napisać, że dla wartości wektorów mamy

ι

$$v_{\rm d} = \frac{J}{ne} = \frac{eE\tau}{m},\tag{26.20}$$

co można zapisać w postaci

$$E = \left(\frac{m}{e^2 n\tau}\right) J. \tag{26.21}$$

Porównując ten wynik ze wzorem (26.11) dla wartości wektorów ( $\vec{E} = \rho \vec{J}$ ), otrzymujemy

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau}.$$
(26.22)

Wzór (26.22) można uważać za potwierdzenie, że dla metali spełnione jest prawo Ohma, jeśli udowodnimy, że ich opór właściwy  $\rho$  jest stały, czyli

niezależny od natężenia przyłożonego pola elektrycznego  $\vec{E}$ . Spójrzmy na wielkości występujące we wzorze (26.22). Rozsądne jest przyjęcie, że *n*, czyli koncentracja elektronów przewodnictwa nie zależy od natężenia pola elektrycznego, także *m* i *e* są stałe. Wystarczy więc wykazać, że średni czas między zderzeniami  $\tau$  (*średni czas swobodny*) jest stały, niezależny od natężenia przyłożonego pola elektrycznego. Wielkość  $\tau$  można rzeczywiście uważać za stałą, ponieważ wartość prędkości unoszenia  $v_d$ , która jest wywołana polem, jest o rzędy wielkości elektronu — a stąd i  $\tau$  — przez pole jest niezauważalna. Tak więc prawa strona wzoru (26.22) nie zależy od natężenia pola elektrycznego, zatem metale spełniają prawo Ohma.

#### Przykład 26.05. Średni czas swobodny i średnia droga swobodna

**a**) Ile wynosi średni czas swobodny  $\tau$  między zderzeniami dla elektronów przewodnictwa w miedzi?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Średni czas swobodny  $\tau$  dla miedzi jest w przybliżeniu stały i nie zależy od pola elektrycznego przyłożonego do próbki miedzi. Nie musimy więc rozważać żadnej szczególnej wartości natężenia przyłożonego pola elektrycznego. Zauważ jednak, że opór właściwy  $\rho$  miedzi zależy od  $\tau$ , zatem średni czas swobodny możemy znaleźć ze wzoru (26.22) ( $\rho = m/(e^2n\tau)$ ).

Obliczenia: Zgodnie z tym wzorem

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}.$$
 (26.23)

Wartość *n*, liczby elektronów przewodnictwa na jednostkę objętości w miedzi, wynosi  $8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Wartość  $\rho$  znajdujemy w tabeli 26.1. Mianownik przyjmuje wartość

$$(8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2(1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})$$
  
= 3,67 \cdot 10^{-17} \cdot 2^2 \cdot \Omega/m^2  
= 3,67 \cdot 10^{-17} \kg/s,

gdzie dokonaliśmy następującego przekształcenia jednostek

$$\frac{C^2 \cdot \Omega}{m^2} = \frac{C^2 \cdot V}{m^2 \cdot A} = \frac{C^2 \cdot J/C}{m^2 \cdot C/s} = \frac{kg \cdot m^2/s^2}{m^2/s} = \frac{kg}{s}.$$

Korzystając z tych wyników i podstawiając wartość masy elektronu *m*, otrzymujemy

$$\tau = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{3.67 \cdot 10^{-17} \text{ kg/s}} = 2.5 \cdot 10^{-14} \text{ s} \text{ (odpowiedź)}.$$

b) Średnia droga swobodna  $\lambda$  elektronów przewodnictwa w przewodniku jest średnią odległością, którą przebywa przez elektron między zderzeniami. (Definicja ta jest analogiczna do przedstawionej w podrozdziale 19.5 definicji średniej drogi swobodnej cząsteczek w gazie). Jaka jest wartość  $\lambda$  dla elektronów przewodnictwa w miedzi, jeśli wartość ich prędkości efektywnej  $v_{\rm ef}$  wynosi 1,6 · 10<sup>6</sup> m/s?

#### PODSTAWOWE FAKTY

Droga d, jaką przebywa cząstka o stałej prędkości v, w pewnym czasie t wynosi d = vt.

Obliczenia: Dla elektronów w miedzi otrzymujemy stąd

$$\lambda = v_{ef}\tau$$
(26.24)  
= (1,6 \cdot 10<sup>6</sup> m/s)(2,5 \cdot 10<sup>-14</sup> s)  
= 4 \cdot 10<sup>-8</sup> m = 40 nm (odpowiedź),

co jest równe około 150 odległościom między leżącymi najbliżej siebie atomami miedzi w sieci. Średnio więc każdy elektron przewodnictwa mija wiele atomów miedzi, zanim w końcu uderzy w jeden z nich.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **26.5.** MOC W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH, PÓŁPRZEWODNIKI, NADPRZEWODNIKI

#### Czego sie nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału bedziesz umiał...

- 26.27 wyjaśnić, w jaki sposób elektrony przewodnictwa płynace w obwodzie elektrycznym tracą energie w oporniku;
- 26.28 określić moc jako przypadającą na jednostkę czasu ilość energii, która z jednej formy zamieniana jest w inna forme;
- 26.29 zastosować w przypadku opornika związek pomiędzy moca P, nateżeniem pradu I, napieciem U i oporem R;

#### Podstawowe fakty \_

• Moc elektryczna P, czyli ilość energii przenoszonej w jednostce czasu w danym przewodniku, na którym utrzymuje sie przyłożona różnica potencjałów U, wynosi

$$P = IU.$$

Dla opornika powyższy wzór można też zapisać w postaci

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

W oporniku elektryczna energia potencjalna zamienia się

- 26.30 zastosować w przypadku baterii związek pomiędzy mocą P, natężeniem prądu I oraz różnicą potencjałów U;
- 26.31 zastosować zasade zachowania energii do obwodu elektrycznego ze źródłem i opornikiem, aby wyjaśnić procesy przekazu energii zachodzące w tym obwodzie;
- 26.32 rozróżnić przewodniki, półprzewodniki i nadprzewodniki.

na energię wewnętrzną w wyniku zderzeń między nośnikami ładunku i atomami.

 Półprzewodniki są materiałami z małą liczbą elektronów przewodnictwa, ale mogą stać się przewodnikami, gdy są domieszkowane innymi atomami, które dostarczaja swobodnych elektronów.

• Nadprzewodniki są materiałami, dla których opór elektryczny zanika w niskich temperaturach. Odkryto także wiele materiałów, które są nadprzewodzące nawet w temperaturze ciekłego azotu.



# ? B



Rys. 26.13. Źródło B wytwarza prąd o natężeniu I w obwodzie z nieznanym elementem przewodzącym

## Moc w obwodach elektrycznych

Na rysunku 26.13 przedstawiono obwód składający się ze źródła B połączonego przewodnikami o znikomo małym oporze z pewnym przewodzącym elementem obwodu. Element ten może być opornikiem, akumulatorem (baterią odnawialną), silnikiem lub jakimś urządzeniem elektrycznym. Źródło utrzymuje różnicę potencjałów o wartości U między biegunami, a więc i (za pośrednictwem przewodów) na zaciskach elementu. Zacisk a ma wyższy potencjał niż zacisk b.

Istnienie drogi przewodzącej między biegunami źródła i podtrzymywanie przez źródło różnicy potencjałów powodują, że w obwodzie powstaje stały prąd o natężeniu I, skierowany od zacisku a do zacisku b. Ilość ładunku dq przeniesiona między tymi zaciskami w przedziale czasu dt wynosi Idt. Ruchowi ładunku dq towarzyszy spadek potencjału o wartości U i stąd wartość elektrycznej energii potencjalnej maleje o

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = \mathrm{d}q \ U = I \mathrm{d}t U. \tag{26.25}$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii, zmniejszaniu się elektrycznej energii potencjalnej przy przesunięciu ładunku od a do b towarzyszy jej zamiana w inny rodzaj energii. Moc P związana z tym przekazem energii jest równa  $dE_p/dt$  i wynosi zgodnie ze wzorem (26.25)

#### P = IU (energia elektryczna przekazana w jednostce czasu). (26.26)

Moc *P* jest także równa ilości energii przekazanej ze źródła do rozważanego elementu w jednostce czasu. Jeśli tym elementem jest silnik połączony z jakimś urządzeniem mechanicznym, to energia ta jest zamieniana na energię mechaniczną. Jeśli elementem jest akumulator, który jest ładowany, to energia jest zamieniana na energię chemiczną w akumulatorze. Jeśli elementem jest opornik, to energia jest zamieniana na energię wewnętrzną, co prowadzi do wzrostu temperatury opornika (mówimy też, że wydziela się ciepło Joule'a).

Jednostką mocy, która wynika ze wzoru (26.26), jest wolt razy amper  $(V \cdot A)$ . Jednostka ta jest równa watowi (W), gdyż

$$1 \operatorname{V} \cdot \operatorname{A} = \left(1 \frac{\operatorname{J}}{\operatorname{C}}\right) \left(1 \frac{\operatorname{C}}{\operatorname{s}}\right) = 1 \frac{\operatorname{J}}{\operatorname{s}} = 1 \operatorname{W}.$$

Elektron porusza się w oporniku ze stałą prędkością unoszenia. Uśredniona energia kinetyczna elektronu pozostaje stała, a tracona przez elektron elektryczna energia potencjalna pojawia się w postaci energii wewnętrznej (termicznej) w oporniku i jego otoczeniu. Na poziomie mikroskopowym energia ta jest przekazywana podczas zderzeń elektronu z cząsteczkami opornika, co prowadzi do wzrostu temperatury opornika. Energia mechaniczna zamieniona na energię termiczną jest tracona (ulega *rozproszeniu*), bo tego przekazu energii nie można odwrócić.

Dla opornika lub innego ciała o oporze R możemy połączyć wzory (26.8) (R = U/I) i (26.26). Otrzymamy wtedy wzór na moc, czyli ilość energii ulegającej rozproszeniu w jednostce czasu

$$P = I^2 R$$
 (rozpraszanie energii w oporniku) (26.27)

lub

$$P = \frac{U^2}{R}$$
 (rozpraszanie energii w oporniku). (26.28)

**Uwaga**: Musimy być ostrożni i odróżniać powyższe wzory od wzoru (26.26); wzór P = IU stosuje się do dowolnych przekazów energii elektrycznej; wzory  $P = I^2 R$  i  $P = U^2/R$  możemy stosować tylko do zamiany elektrycznej energii potencjalnej na energię termiczną w przewodniku o określonym oporze.

### Sprawdzian 5

Różnica potencjałów U przyłożona do elementu przewodzącego o oporze R powoduje przepływ prądu o natężeniu I przez ten element. Uszereguj następujące zmiany szybkości rozpraszania energii wskutek istnienia oporu, gdy: a) wartość U zostaje podwojona bez zmiany R, b) wartość I zostaje podwojona bez zmiany R, c) wartość R zostaje podwojona bez zmiany U, d) wartość R zostaje podwojona bez zmiany I, zaczynając od największej.

#### Przykład 26.06. Znaczenie rozpraszania energii w przewodzie z prądem

Kawałek jednorodnego drutu grzejnego ze stopu nikielchrom-żelazo, zwanego chromonikieliną, ma opór R = 72  $\Omega$ . Oblicz szybkość rozpraszania energii w każdej sytuacji: 1) różnica potencjałów 120 V jest przyłożona do całej długości drutu, 2) drut został przecięty na pół i różnica potencjałów 120 V jest przyłożona do każdej połówki?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Prąd w materiale z oporem zamienia energię mechaniczną na termiczną; szybkość tej zamiany jest określona wzorami (26.26)–(26.28).

**Obliczenia:** Znamy różnicę potencjałów U i opór R, więc używamy wzoru (26.28), który w sytuacji 1 daje

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(120 \text{ V})^2}{72 \Omega} = 200 \text{ W}$$
 (odpowiedź).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# Półprzewodniki

W sytuacji 2 opór każdej połówki drutu wynosi (72  $\Omega$ )/2, czyli 36  $\Omega$ . Szybkość rozpraszania energii dla każdej połówki wynosi więc

$$P' = \frac{(120 \text{ V})^2}{36 \Omega} = 400 \text{ W}$$

i dla dwóch połówek otrzymujemy

$$P = 2P' = 800 \text{ W}$$
 (odpowiedź),

czyli szybkość cztery razy większą niż dla całej długości drutu. Można by więc wnioskować, że można kupić spiralę grzejną, przeciąć ją na połowy i po podłączeniu uzyskać cztery razy większą moc. Dlaczego jest to nierozsądne? (Jak zmieni się natężenie prądu w spirali?)

Przyrządy półprzewodnikowe stanowią podstawę rewolucji mikroelektronicznej, która wprowadziła nas w wiek informacji. W tabeli 26.2 porównano właściwości krzemu — typowego półprzewodnika — i miedzi — typowego przewodnika metalicznego. Widzimy, że krzem ma dużo mniej nośników ładunku, dużo większy opór właściwy oraz duży i ujemny współczynnik temperaturowy oporu właściwego. Opór właściwy miedzi rośnie więc wraz z temperaturą, a opór czystego krzemu maleje.

Tabela 26.2. Niektóre właściwości elektryczne miedzi i krzemu

Właściwość	Miedź	Krzem
Typ materiału	metal	półprzewodnik
Koncentracja nośników ładunku, m <sup>-3</sup>	$8,49 \cdot 10^{28}$	$1 \cdot 10^{16}$
Opór właściwy, $\Omega \cdot m$	$1,69 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{3}$
Współczynnik temperaturowy oporu właściwego, K <sup>-1</sup>	$+4,3 \cdot 10^{-3}$	$-70 \cdot 10^{-3}$

Czysty krzem ma tak duży opór właściwy, że jest praktycznie izolatorem i dlatego też nie ma dużego zastosowania w obwodach mikroelektronicznych. Jednak opór właściwy krzemu można znacznie zmniejszyć w kontrolowany sposób, dodając do niego niewiele określonych atomów domieszkowych w procesie zwanym *domieszkowaniem*. W tabeli 26.1 podano typowe wartości oporu właściwego krzemu przed domieszkowaniem i po domieszkowaniu fosforem oraz glinem.

Różnice w oporze właściwym (a stąd i w przewodności właściwej) między półprzewodnikami, izolatorami i przewodnikami metalicznymi możemy z grubsza wyjaśnić, rozważając energie ich elektronów. (Bardziej szczegółowe wyjaśnienie wymaga zastosowania fizyki kwantowej). W przewodnikach metalicznych, takich jak drut miedziany, większość elektronów jest na stałe związanych w cząsteczkach i potrzebna byłaby duża energia, aby po uwolnieniu mogły się poruszać i uczestniczyć w przepływie prądu elektrycznego. Jednak istnieją także elektrony słabo związane, które wymagają małej energii, aby stać się elektronami swobodnymi. Energia ta może pochodzić zarówno od energii termicznej, jak i od przyłożonego do przewodnika pola elektrycznego. Pole może nie tylko uwolnić te słabo związane elektrony, ale także wprawić je w ruch wzdłuż przewodnika — pole pozwala kierować prądem przepływającym przez przewodnik.

W izolatorze potrzebna jest znacznie większa energia do uwolnienia elektronów, aby mogły się poruszać w materiale. Energia termiczna nie jest wystarczająca, nie może tego także dokonać przyłożone do izolatora pole elektryczne o umiarkowanej wartości natężenia. Nie ma więc żadnych elektronów, które mogłyby poruszać się przez izolator, i stąd nie pojawia się żaden prąd, nawet po przyłożeniu pola elektrycznego.

Półprzewodnik jest podobny do izolatora z tym *wyjątkiem*, że energia potrzebna do uwolnienia niektórych elektronów nie jest tak duża. Co ważniejsze, domieszkowanie może dostarczyć elektronów lub dodatnich nośników ładunku, które są słabo związane i można je łatwo uwolnić. Co więcej, przez odpowiednie domieszkowanie półprzewodnika możemy wpływać na koncentrację nośników ładunku, które mogą mieć wpływ na przepływ prądu, i wobec tego otrzymywać pożądane właściwości elektryczne półprzewodnika. Większość przyrządów półprzewodnikowych, takich jak tranzystory i diody złączowe, wytwarza się przez selektywne domieszkowanie różnych obszarów krzemu atomami domieszek różnego rodzaju.

Spójrzmy ponownie na wzór (26.22) określający opór właściwy przewodnika

$$\rho = \frac{m}{e^2 n\tau},\tag{26.29}$$

gdzie *n* jest liczbą nośników ładunku przypadających na jednostkę objętości, a  $\tau$  jest średnim czasem między zderzeniami nośników ładunku. Wzór ten można stosować także do półprzewodników. Rozważmy, jak wielkości *n* i  $\tau$  zmieniają się wraz ze wzrostem temperatury.

W przewodniku wartość *n* jest duża i w bardzo dobrym przybliżeniu stała przy zmianie temperatury. Wzrost oporu właściwego wraz ze wzrostem temperatury dla metali (rys. 26.10) wynika ze wzrostu liczby zderzeń nośników ładunku, co we wzorze (26.29) ujawnia się w zmniejszaniu się średniego czasu między zderzeniami  $\tau$ .

W półprzewodniku wartość *n* jest mała, ale rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem temperatury, gdyż dzięki większej energii ruchu termicznego liczba dostępnych nośników ładunku jest większa. Ten fakt powoduje *zmniejszenie* oporu właściwego wraz ze wzrostem temperatury, co ujawnia się w postaci ujemnego współczynnika temperaturowego oporu właściwego dla krzemu (tab. 26.2). Dla półprzewodników występuje także taki sam wzrost liczby zderzeń, jak dla przewodników, ale jego wpływ jest niewielki ze względu na szybszy wzrost liczby nośników ładunku.



Rys. 26.14. Opór rtęci maleje do zera przy temperaturze około 4 K



Walcowy magnes unosi sie nad materiałem nadprzewodzącym schłodzonym do temperatury ciekłego azotu (fot. kts design/Shutterstock)

## **Nadprzewodniki**

W 1911 roku holenderski fizyk Heike Kamerlingh Onnes odkrył, że opór właściwy rteci znika całkowicie przy temperaturze mniejszej niż 4 K (rys. 26.14). To zjawisko nadprzewodnictwa ma ogromne potencjalne znaczenie w technice, ponieważ oznacza, że ładunek może płynać przez nadprzewodnik bez strat w postaci energii termicznej. Prady wytworzone w pierścieniu nadprzewodzącym mogą więc płynąć przez wiele lat bez zmniejszenia się ich nateżenia; elektrony, powodujące przepływ pradu, wymagaja siły i źródła energii tylko w chwili poczatkowej, ale nie potem.

Przed rokiem 1986 zastosowanie nadprzewodnictwa w technice było utrudnione przez wysokie koszty wytwarzania bardzo niskich temperatur, koniecznych do uzyskania tego efektu. W 1986 roku odkryto jednak nowe materiały ceramiczne, które stają się nadprzewodnikami w wyraźnie wyższych temperaturach. Być może kiedyś okaże się w końcu możliwe wykorzystanie elementów nadprzewodzących w temperaturze pokojowej.

Nadprzewodnictwo jest zjawiskiem bardzo różnym od przewodnictwa. Okazuje się, że najlepsze przewodniki, takie jak srebro i miedź, nie mogą stać się nadprzewodnikami w żadnej temperaturze, a nowe nadprzewodniki ceramiczne są w normalnych warunkach dobrymi izolatorami.

Nadprzewodnictwo wyjaśniamy zwykle w następujący sposób. Elektrony tworzace prad poruszaja sie w skorelowanych parach. Jeden z elektronów pary podczas swego ruchu zaburza elektrycznie strukturę cząsteczkową materiału nadprzewodzącego, wytwarzając w swym otoczeniu chwilowo ładunek dodatni. Drugi elektron pary jest wtedy przyciągany do tego dodatniego ładunku. Zgodnie z teoria, taka korelacja miedzy elektronami zabezpiecza je przed zderzeniami z cząsteczkami materiału i dlatego eliminuje opór elektryczny. Teoria ta dobrze wyjaśnia zjawisko nadprzewodnictwa zachodzące w niskich temperaturach (znane przed 1986 r.), zawodzi jednak w przypadku nadprzewodników wysokotemperaturowych.

# **Podsumowanie**

#### Natężenie prądu elektrycznego Natężenie prądu elek**trycznego** I w przewodniku jest zdefiniowane wzorem

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},\tag{26.1}$$

gdzie dq jest ilością ładunku (dodatniego) przepływającego w czasie dt przez powierzchnię przekroju poprzecznego przewodnika. Kierunek pradu elektrycznego wybieramy umownie jako kierunek, w którym poruszałyby się dodatnie nośniki ładunku. Jednostką natężenia prądu elektrycznego w układzie SI jest amper (A): 1 A = 1 C/s.

Gęstość prądu elektrycznego Natężenie prądu elektrycznego (skalar) jest powiazane z gestościa pradu elektrycz**nego**  $\vec{J}$  (wektorem) wzorem

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}, \qquad (26.4)$$

gdzie  $d\vec{S}$  jest wektorem prostopadłym do elementu powierzchni o polu dS, a całkę obliczamy po dowolnej powierzchni przekroju poprzecznego przewodnika. Wektor  $\vec{J}$ ma taki sam kierunek, jak prędkość poruszających się ładunków, jeśli sa one dodatnie, i przeciwny do ich predkości, jeśli sa ujemne.

Prędkość unoszenia nośników ładunku Gdy w przewodniku istnieje pole elektryczne o nateżeniu E, nośniki ładunku uzyskują **prędkość unoszenia** v<sub>d</sub> w kierunku natężenia pola  $\vec{E}$ , jeśli są dodatnie (lub w przeciwnym kierunku, jeśli są ujemne); prędkość  $\vec{v}_d$  jest powiązana z gęstością prądu wzorem

$$J = n e \vec{v}_{\rm d}, \tag{26.7}$$

gdzie ne jest koncentracją nośników ładunku.

Opór elektryczny przewodnika Opór elektryczny (rezystancja) R przewodnika zdefiniowany jest wzorem

$$R = \frac{U}{I}$$
 (definicja oporu  $R$ ), (26.8)

gdzie U jest różnicą potencjałów na końcach przewodnika, a I natężeniem prądu. Jednostką oporu w układzie SI jest om  $(\Omega)$ 

200

1  $\Omega = 1$  V/A. Analogiczne wzory definiują **opór właściwy** (rezystywność)  $\rho$  i **przewodność właściwą** (konduktywność)  $\sigma$  materiału

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J} \qquad \text{(definic je } \rho \text{ i } \sigma\text{)}, \qquad (26.12, 26.10)$$

gdzie *E* jest wartością natężenia przyłożonego pola elektrycznego. Jednostką oporu właściwego w układzie SI jest om razy metr ( $\Omega \cdot m$ ). Wzór (26.10) odpowiada wzorowi wektorowemu

$$\vec{E} = \rho \vec{J}, \qquad (26.11)$$

Opór *R* przewodnika o długości *L* i jednorodnym przekroju poprzecznym wynosi

$$R = \rho \frac{L}{S}, \qquad (26.16)$$

gdzie S jest polem przekroju poprzecznego.

Zależność oporu właściwego  $\rho$  od temperatury Opór właściwy  $\rho$  dla większości materiałów zmienia się wraz z temperaturą. Dla wielu materiałów, także dla metali, związek między  $\rho$  i temperaturą T ma w przybliżeniu postać

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0), \qquad (26.17)$$

gdzie  $T_0$  jest temperaturą odniesienia,  $\rho_0$  — oporem właściwym w temperaturze  $T_0$ , a  $\alpha$  współczynnikiem temperaturowym oporu właściwego materiału.

**Prawo Ohma** Dane ciało (przewodnik, opornik lub inny element obwodu) spełnia *prawo Ohma*, jeśli jego opór *R*, zdefiniowany wzorem (26.8) (R = U/I), jest niezależny od przyłożonej różnicy potencjałów *U*. Dany *materiał* spełnia prawo Ohma, jeśli jego opór właściwy, zdefiniowany wzorem (26.10), jest niezależny od wartości i kierunku natężenia przyłożonego pola elektrycznego  $\vec{E}$ .

#### Pytania

1 Na rysunku 26.15 przedstawiono przekroje poprzeczne i ich wymiary dla trzech przewodników o tej samej długości, wykonanych z tego samego materiału. Przewodnik *B* mieści się dokładnie wewnątrz przewodnika *A*, a przewodnik *C* mieści się dokładnie wewnątrz przewodnika *B*. Uszereguj te przewodniki i ich układy A + B (*B* wewnątrz *A*), B + C (*C* wewątrz *B*) i A + B + C (*C* wewnątrz *B* wewnątrz *A*) zgodnie z ich oporami, od końca do końca, zaczynając od największego.



Rys. 26.15. Pytanie 1

**Opór właściwy metalu** Zakładając, że elektrony przewodnictwa w metalu są swobodne i mogą poruszać się jak cząsteczki gazu, możemy wyprowadzić wyrażenie na opór właściwy metalu

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau},\tag{26.22}$$

gdzie *n* jest liczbą elektronów swobodnych w jednostce objętości i  $\tau$  jest średnim czasem między zderzeniami elektronu z atomami metalu. Metale spełniają prawo Ohma, ponieważ czas  $\tau$  jest prawie niezależny od wartości natężenia *E* pola elektrycznego, przyłożonego do metalu.

**Moc elektryczna** Moc *P*, czyli ilość energii przenoszonej w jednostce czasu w danym przewodniku, na którym utrzymuje się przyłożona różnica potencjałów *V*, wynosi

$$P = IU$$
 (moc elektryczna). (26.26)

**Rozproszenie energii w oporniku** Dla opornika możemy zapisać wzór (26.26) w postaci:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$
 (moc w oporniku). (26.27, 26.28)

W oporniku elektryczna energia potencjalna zamienia się na energię wewnętrzną w wyniku zderzeń między nośnikami ładunku i atomami.

**Półprzewodniki** *Półprzewodniki* są materiałami z małą liczbą elektronów przewodnictwa, ale mogą stać się przewodnikami, gdy są *domieszkowane* innymi atomami, które dostarczają swobodnych elektronów.

**Nadprzewodniki** *Nadprzewodniki* są materiałami, których opór elektryczny zanika przy niskich temperaturach. Niektóre z nich są nadprzewodzące w zaskakująco wysokich temperaturach.

**2** Na rysunku 26.16 przedstawiono przekroje poprzeczne trzech przewodników o jednakowej długości wykonanych z tego samego materiału. Podano także długość każdego boku ich przekrojów wyrażoną w milimetrach. Uszereguj przewodniki zgodnie z ich oporami (dla prądów płynących wzdłuż długości przewodnika, od końca do końca), zaczynając od największego.



**3** Na rysunku 26.17 przedstawiono prostopadłościenny przewodnik o długościach krawędzi L, 2L i 3L. Pewną różnicę potencjałów U przyłożono między pary leżących naprzeciwko

ścian przewodnika (rys. 26.8b). (Różnica potencjałów przyłożono między całą ścianą po jednej stronie i całą ścianą po drugiej). Najpierw różnicę potencjałów U przyłożono pomiędzy lewą i prawą, następnie górną i dolną i w końcu pomiędzy przednią i tylną ścianą przewodnika. Uszereguj te pary zgodnie z: a) wartością natężenia pola elektrycznego w prze-

wodniku, b) gęstością prądu w przewodniku, c) natężeniem prądu przepływającego przez przewodnik, d) prędkością unoszenia elektronów w przewodniku, zaczynając od największej wartości.



Rys. 26.17. Pytanie 3

**4** Na rysunku 26.18 przedstawiono wykresy natężenia prądu *I* płynącego przez przewodnik o pewnym przekroju poprzecznym w czterech różnych przedziałach czasu. Uszereguj te przedziały zgodnie z wartością wypadkowego ładunku, który w danym przedziale przepływa przez przekrój poprzeczny przewodnika, zaczynając od największej.



Rys. 26.18. Pytanie 4

**5** Na rysunku 26.19 przedstawiono cztery sytuacje, w których w pewnym obszarze poruszają się poziomo dodatnie i ujemne ładunki elektryczne. Podano wartości ładunków przepływających w jednostce czasu. Uszereguj te sytuacje, zgodnie z efektywnym natężeniem prądu przepływającego przez te obszary, zaczynając od największego.



6 Na rysunku 26.20 przedstawiono przewód składający się z trzech części o różnych promieniach, przez który płynie prąd elektryczny. Uszereguj części przewodu według następujących wielkości, zaczynając od najwiekszej: a) natę-



żenie prądu, b) wartość gęstości prądu i c) wartość natężenia pola elektrycznego.

7 Na rysunku 26.21 przedstawiony jest wykres zależności potencjału elektrycznego V(x) od współrzędnej x określającej położenie wzdłuż miedzianego przewodu, w którym płynie płynie prąd elektryczny. Przewód składa się z trzech części o różnych promieniach. Uszereguj części przewodu według następujących wielkości: a) natężenia pola elektrycznego, b) wartości gęstości prądu i c) prędkości unoszenia elektronów w częściach przewodu, zaczynając od największej.



**8** W tabeli poniżej podano długości trzech miedzianych prętów, ich średnice i różnice potencjałów między ich końcami. Uszereguj pręty zgodnie z wartościami: a) natężenia pola elektrycznego, b) gęstości prądu, c) prędkości unoszenia elektronów w prętach, zaczynając od największej.

Pręt	Długość	Średnica	Różnica potencjałów
1	L	3 <i>d</i>	U
2	2L	d	2U
3	3L	2d	2U

**9** Na rysunku 26.22 przedstawiono wykres prędkości unoszenia elektronów przewodnictwa w przewodzie miedzianym w funkcji położenia *x* wzdłuż przewodu składającego sie z trzech cześci o róż-



nych promieniach. Uszereguj części przewodu według następujących wielkości: a) promienia, b) liczby elektronów przewodnictwa przypadających na metr sześcienny, c) wartości natężenia pola elektrycznego i d) przewodności właściwej, zaczynając od największej.

**10** Trzy przewody o jednakowej średnicy podłączono po kolei między dwa punkty o ustalonej różnicy potencjałów. Opory właściwe i długości przewodów wynoszą  $\rho$  i *L* (przewód *A*), 1,2 $\rho$  i 1,2*L* (przewód *B*) oraz 0,9 $\rho$  i *L* (przewód *C*). Uszereguj przewodniki w zależności od szybkości rozpraszania w nich energii termicznej, zaczynając od największej.

**11** Na rysunku 26.23 przedstawiono wykresy wartości gęstości prądu J(r) w funkcji promienia r mierzonego od środka okrągłego przekroju przez przewód. Wszystkie przewody wykonane są z tego samego materiału. Uszereguj te przewody według wartości





natężenia pola elektrycznego: a) w środku, b) w odległości od środka równej połowie promienia, c) na powierzchni przewodu, zaczynając od największej.

# Zadania

<b>GO</b>	Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach <i>WileyPLUS</i> (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
•_•••	Liczba kropek określa stopień trudności zadania
ssm	Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w Student Solutions Manual
www	Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
ilw	Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
T	Więcej informacji znajdziesz w książce The Flying Circus of Physics i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

#### Podrozdział 26.1. Natężenie prądu elektrycznego

•1 Ile a) kulombów ładunku i b) elektronów przewodnictwa przepływa w ciągu 4 minut przez każdy przekrój przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu 5 A?

••2 Izolowana kula przewodząca ma promień 10 cm. Jednym przewodem dopływa do niej prąd o natężeniu 1,000002 A. Innym przewodem odpływa z niej prąd o natężeniu 1,000000 A. Po jakim czasie kula zwiększy swój potencjał o 1000 V?

••3 Naładowany pas o szerokości 50 cm przesuwa się z prędkością 30 m/s między źródłem ładunku i pewną kulą. Pas przenosi na kulę ładunek z natężeniem 100 μA. Oblicz gęstość powierzchniową ładunku na pasie.

#### Podrozdział 26.2. Gęstość prądu elektrycznego

•4 W tabeli podano fragment Narodowej Normy Elektrycznej z USA, która ustala maksymalne natężenia bezpiecznych prądów dla przewodów miedzianych o różnych średnicach. Wykreśl gęstość bezpiecznego prądu w zależności od średnicy. Który przewód ma największą bezpieczną gęstość prądu?

Kaliber Średnica, $10^{-3}$ cala	4 204	6 162	8 129	10 102	12 81	14 64	16 51	18 40
Bezpieczne natężenie								
prądu, A	70	50	35	25	20	15	6	3

•5 ssm www Wiązka zawiera  $2 \cdot 10^8$  podwójnie naładowanych jonów dodatnich w centymetrze sześciennym, które poruszają się na północ z prędkością  $1 \cdot 10^5$  m/s. Jaka jest a) wartość i b) kierunek gęstości prądu  $\vec{J}$ ? c) Jaka dodatkowa informacja jest potrzebna, aby obliczyć całkowite natężenie prądu I w tej wiązce jonów?

•6 W pewnym walcowym przewodniku płynie prąd elektryczny. Na rysunku 26.24a przedstawiono okrąg o promieniu *r*, współosiowy z tym przewodnikiem. Na rysun-



**Rys. 26.24.** Zadanie 6

ku 26.24b przedstawiono wykres natężenia prądu *I*, który płynie wewnątrz tego okręgu w funkcji kwadratu jego promienia  $r^2$ . Jednostką skali na pionowej osi tego wykresu jest  $I_s = 1$  mA, a na poziomej osi wykresu  $r_s^2 = 4$  mm<sup>2</sup>. a) Czy gęstość prądu w tym przewodniku jest jednorodna? b) Jeśli tak, to jaka jest jej wartość?

•7 Bezpiecznik w obwodzie elektrycznym jest drutem, który dobiera się tak, aby stopił się i otworzył obwód, gdy natężenie prądu przekroczy określoną wartość. Załóżmy, że materiał zastosowany w bezpieczniku topi się, gdy gęstość prądu osiąga wartość 440 A/cm<sup>2</sup>. Jaka powinna być średnica walcowego drutu dla bezpiecznika, który ogranicza prąd do natężenia 0,5 A?

•8 W miedzianym przewodzie o średnicy 2,5 mm płynie niewielki, ale mierzalny prąd o natężeniu  $1,2 \cdot 10^{-10}$  A. Liczba nośników ładunku przypadająca na jednostkę objętości w tym przewodzie wynosi  $8,49 \cdot 10^{28}$  m<sup>-3</sup>. Przyjmując, że prąd jest jednorodny, oblicz: a) wartość gęstości prądu i b) prędkość unoszenia elektronów.

••9 Wartość J(r) gęstości prądu płynącego w pewnym walcowym przewodniku jest funkcją odległości od osi walca J(r) = Br, gdzie r jest wyrażone w metrach, J w amperach na metr kwadratowy, a  $B = 2 \cdot 10^5 \text{ A/m}^3$ . Funkcja ta jest określona aż do promienia przekroju walca równego 2 mm. Ile wynosi natężenie prądu płynącego wewnątrz cienkiej powłoki walcowej o grubości 10 µm i promieniu 1,2 mm, która jest współosiowa z przewodnikiem?

••10 Wartość gęstości prądu *J* płynącego w pewnym przewodzie laboratoryjnym, którego przekrój jest kołem o promieniu R = 2 mm dana jest wzorem  $J = (3 \cdot 10^8)r^2$ , gdzie *J* jest wyrażone w amperach na metr kwadratowy, a radialna odległość od środka przewodu *r* w metrach. Jakie jest natężenie prądu płynącego przez zewnętrzną część tego przewodu ograniczoną przez r = 0.9R i r = R?

••11 Jakie jest natężenie prądu płynącego w przewodzie o promieniu R = 3,4 mm, jeśli wartość gęstości prądu dana jest wzorem: a)  $J_a = J_0 r/R$  i b)  $J_b = J_0(1 - r/R)$ , gdzie r jest odległością od osi walca, zaś  $J_0 = 5,5 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2$ ? c) W którym przypadku wartość gęstości prądu jest największa w pobliżu powierzchni przewodu?

••12 W pobliżu Ziemi koncentracja protonów w wietrze słonecznym (strumieniu cząstek ze Słońca) wynosi 8,7 cm<sup>-3</sup>, a ich prędkość to 470 km/s. a) Znajdź gęstość prądu tych protonów. b) Gdyby pole magnetyczne Ziemi nie odchylało tych protonów, to uderzałyby one w nią. Ile wynosiłoby całkowite natężenie prądu dopływającego do Ziemi?

••13 1 Po jakim czasie elektrony z akumulatora samochodowego docierają do rozrusznika? Przyjmij, że natężenie prądu wynosi 300 A, a elektrony poruszają się w przewodzie miedzianym o polu przekroju poprzecznego 0,21 cm<sup>2</sup> i długości 0,85 m. Liczba nośników ładunku przypadających na jednostkę objętości wynosi 8,49  $\cdot$  10<sup>28</sup> m<sup>-3</sup>.

# Podrozdział 26.3. Opór elektryczny i opór elektryczny właściwy

•14 Człowiek może zostać porażony nawet przez tak słaby prąd, jak prąd o natężeniu 50 mA, jeśli przepływa on blisko serca. Elektryk, pracujący ze spoconymi rękami ma dobry kontakt z dwoma przewodnikami, trzymanymi po jednym w każdej ręce. Jeśli jego opór wynosi 2000  $\Omega$ , to ile wynosi śmiertelna różnica potencjałów?

•15 ssm Nawijając na walcowym rdzeniu o promieniu 12 cm w jednej warstwie 250 zwojów izolowanego drutu miedzianego o średnicy 1,3 mm, utworzono spiralę. Ile wynosi opór spirali? Możesz zaniedbać grubość izolacji. (Skorzystaj z tabeli 26.1).

•16 Jako materiał do wykonania linii transmisyjnej wysokiego napięcia, w której będzie płynął prąd o natężeniu 60 A rozważa się miedź i aluminium. Opór przypadający na jednostkę długości musi być równy 0,15  $\Omega$ /km. Gęstości miedzi i aluminium wynoszą odpowiednio 8960 i 2600 kg/m<sup>3</sup>. Oblicz: a) wartość gęstości prądu *J* i b) masę przypadającą na jednostkę długości  $\lambda$  dla przewodu miedzianego oraz c) wartość gęstości prądu *J* i d) masę przypadającą na jednostkę długości  $\lambda$  dla przewodu aluminiowego.

•17 W drucie chromonikielinowym (czyli wykonanym ze stopu nikiel-chrom-żelazo używanego powszechnie w elementach grzejnych) o długości 1 m i polu przekroju poprzecznego 1 mm<sup>2</sup> przy różnicy potencjałów 2 V przyłożonej do jego końców płynie prąd o natężeniu 4 A. Oblicz przewodność właściwą  $\sigma$  chromonikieliny.

•18 Przewód o długości 4 m i średnicy 6 mm ma opór 15 mΩ. Do końców przewodu przyłożono różnicę potencjałów 23 V. a) Ile wynosi natężenie prądu w przewodzie? b) Ile wynosi wartość gęstości prądu? c) Korzystając z tabeli 26.1 zidentyfikuj materiał przewodu, obliczając jego opór właściwy.

•**19** ssm Ile wynosi opór właściwy przewodu o średnicy 1 mm, długości 2 i oporze 50 mΩ?

•20 Pewien przewód ma opór *R*. Ile wynosi opór drugiego przewodu, wykonanego z tego samego materiału, o dwukrotnie mniejszej długości i dwukrotnie mniejszej średnicy?

••21 ilw W żarówce latarki płynie (podczas jej działania) prąd 0,3 A przy różnicy potencjałów 2,9 V. Jeśli opór włókna żarówki w temperaturze pokojowej (20°C) wynosi 1,1  $\Omega$ , to jaka jest temperatura włókna świecącej żarówki? Włókno jest wykonane z wolframu.

••22 finierć w czasie burzy. Opowieść głosząca, że Benjamin Franklin puszczał latawce, gdy zbliżała się burza jest tylko legendą. Franklin nie był głupi, nie miał też skłonności samobójczych. Przypuśćmy, że sznur latawca ma promień 2 mm, rozciąga się pionowo w górę na wysokość 0,8 km i jest pokryty warstewką wody o grubości 0,5 mm, której opór właściwy wynosi 150  $\Omega \cdot m$ . Jakie jest natężenie prądu płynącego przez tę warstewkę wody, jeśli różnica potencjałów pomiędzy dwoma końcami sznura wynosi 160 MV? W istocie niebezpieczeństwo nie wiąże się z tym prądem, ale z prawdopodobieństwem ściągnięcia przez ten sznur wyładowania atmosferycznego, w którym natężenie prądu może osiągać wartość nawet 500 000 A (co znacznie przekracza natężenie prądu o skutkach śmiertelnych).

••23 Gdy między końcami przewodu o długości 10 m i promieniu 0,3 mm przyłożono różnicę potencjałów 115 V, wartość gęstości prądu wyniosła 1,4  $\cdot$  10<sup>4</sup> A/m<sup>2</sup>. Znajdź opór właściwy przewodnika.

••24 Solution Na rysunku 26.25a przedstawiono wykres wartości natężenia pola elektrycznego E(x) wytwarzanego przez baterię w oporowym pręcie o długości 9 mm (rys. 26.25b). Jednostką na skali pionowej jest  $E_s = 4 \cdot 10^3$  V/m. Pręt składa się z trzech części wykonanych z tego samego materiału, ale mających różne średnice. (Schemat na rysunku 26.25b nie odzwierciedla tej zmiany promienia). Średnica części 3 pręta wynosi 2 mm. Jakie są promienie: a) części 1 i b) części 2?



••25 ssm ilw Przewód o oporze 6  $\Omega$  rozciągnięto za pomocą gwintownika, tak że jego nowa długość jest trzy razy większa niż długość początkowa. Znajdź opór wydłużonego przewodu, przyjmując, że opór właściwy i gęstość materiału nie uległy zmianie.

••26 Na rysunku 26.26a przedstawiono baterię 9 V podłączoną do oporowego paska składającego się z trzech części o jednakowych polach powierzchni przekroju, ale o różnych wartościach przewodności właściwej. Na rysunku 26.26b przedstawiono wykres potencjału elektrycznego V(x) w funkcji położenia x wzdłuż tego paska. Przewodność właściwa części 3 wynosi  $3 \cdot 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$ . Ile wynoszą przewodności właściwe: a) części 1 i b) części 2?



Rys. 26.26. Zadanie 26

••27 ssm www Dwa przewodniki wykonane z takiego samego materiału mają jednakową długość. Przewodnik A jest drutem o średnicy 1 mm. Przewodnik B jest rurką o średnicy zewnętrznej 2 mm i średnicy wewnętrznej 1 mm. Ile wynosi stosunek oporów  $R_A/R_B$ , mierzonych między końcami przewodników?

••28 • Na rysunku 26.27 przedstawiono wykres potencjału elektrycznego V(x)wzdłuż miedzianego drutu, w którym płynie jednorodny prąd elektryczny od punktu x = 0 o wyższym potencjale  $V_s = 12 \,\mu$ V do punktu  $x_s = 3$  m o zerowym potencjale. Średnica drutu wynosi



Rys. 26.27. Zadanie 28

2 mm. Jakie jest natężenia prądu płynącego w tym drucie?

••29 Pomiędzy końcami miedzianego drutu o długości 2 cm i średnicy 2 mm panuje różnica potencjałów 3 nV. Jaki ładunek przepływa przez przekrój tego drutu w ciągu 3 ms?

••30 Jeśli kaliber drutu wzrasta o 6, to jego średnica maleje dwukrotnie; jeśli kaliber drutu wzrasta o 1, to średnica maleje o czynnik  $2^{1/6}$  (zob. tabelę w zadaniu 4). Wiedząc o tym i wiedząc, że 300 m drutu miedzianego kalibru 10 ma w przybliżeniu opór 1  $\Omega$ , oszacuj opór drutu miedzianego kalibru 22 o długości 7,5 m.

••31 Przewód elektryczny składa się ze 125 żyłek wykonanych z cienkiego drutu, każda o oporze 2,65  $\mu\Omega$ . Między końcami wszystkich żyłek została przyłożona jednakowa różnica potencjałów, powodując przepływ prądu o całkowitym natężeniu 0,75 A. a) Ile wynosi natężenie prądu płynącego w każdej żyłce? b) Ile wynosi przyłożona różnica potencjałów? c) Ile wynosi opór przewodu?

••32 Dolna warstwa atmosfery Ziemi zawiera ujemne i dodatnie jony, wytwarzane przez promieniowanie kosmiczne i pierwiastki promieniotwórcze znajdujące się w glebie. W pewnym obszarze natężenie pola elektrycznego w atmosferze wynosi 120 V/m i jest skierowane pionowo w dół. Pole to powoduje, że pojedynczo naładowane jony dodatnie o koncentracji 620 cm<sup>-3</sup> przemieszczają się w dół, a pojedynczo naładowane jony ujemne o koncentracji 550 cm<sup>-3</sup> przemieszczają się w górę (rys. 26.28). Mierzona przewodność właściwa powietrza w tym obszarze wynosi  $2,7 \cdot 10^{-14} (\Omega \cdot m)^{-1}$ . Oblicz: a) wartość gęstości prądu i b) prędkość unoszenia jonów (przy założeniu, że jest ona taka sama dla jonów dodatnich i ujemnych).



Rys. 26.28. Zadanie 32

••33 Prostopadłościenny klocek ma pole przekroju 3,5 cm<sup>2</sup>, długość 15, 8 cm i opór 935  $\Omega$ . Materiał, z którego wykonano klocek, ma 5,33 · 10<sup>22</sup> elektronów przewodnictwa na m<sup>3</sup>. Między przednią i tylną ścianą utrzymywana jest różnica potencjałów 35,8 V. a) Ile wynosi natężenie prądu w klocku? b) Jeśli gęstość prądu jest stała, to jaka jest jej wartość? c) Ile wynosi prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa? d) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w klocku?

•••34 • Na rysunku 26.29 przedstawiono przewód składający się z części 1 o średnicy  $D_1 = 4R$  i części 2 o średnicy  $D_2 = 2R$  połączonych częścią o zmiennej średnicy. Przewód, w którym płynie prąd elektryczny został wykonany z miedzi. Przypuśćmy, że prąd płynący przez każdy przekrój tego przewodu jest jednorodny. Zmiana potencjału elektrycznego *U* zachodząca na długości L = 2 m w pokazanym na rysunku

miejscu części 2 przewodu wynosi  $10 \,\mu$ V. Liczba nośników przypadająca na jednostkę objętości miedzi wynosi 8,49  $\cdot$   $10^{28} \,\text{m}^{-3}$ . Ile wynosi prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa w części 1 przewodu?



Rys. 26.29. Zadanie 34



Rys. 26.30. Zadanie 35

•••35 • Opornik przedstawiony na rysunku 26.30 ma kształt ściętego stożka obrotowego i jest wykonany z materiału o oporności właściwej 731  $\Omega \cdot m$ . Promień lewej podstawy wynosi a = 2,0 mm, a prawej b = 2,3 cm, zaś wysokość L = 1,94 cm. Załóżmy, że wartość gęstości prądu jest stała w każdym przekroju poprzecznym stożka, prostopadłym do jego osi. Oblicz opór tego opornika.

•••36 😳 🗯 Pływanie w czasie burzy. Na rysunku 26.31 przedstawiono pływaka znajdującego się w odległości D =35 m od miejsca na powierzchni wody, w które uderzył piorun przenoszacy prad o nateżeniu I = 78 kA. Opór właściwy wody wynosi 30  $\Omega \cdot m$ , szerokość pływaka liczona wzdłuż radialnej osi łaczacej go z punk-

tem uderzenia pioruna jest równa 0,7 m, a jego opór wzdłuż tej szerokości wynosi 4 kΩ. Załóżmy, że prąd płynacy przez wodę rozprzestrzenia sie prostopadle do powierzchni półsfery o środku w punkcie, w który trafił piorun. Wyznacz natężenie prądu, który przepłynie przez pływaka.



Rys. 26.31. Zadanie 36

#### Podrozdział 26.4. Prawo Ohma

••37 Pokaż, że zgodnie z modelem elektronów swobodnych dla przewodnictwa w metalach i fizyka klasyczna, opór właściwy metali powinien być proporcjonalny do  $\sqrt{T}$ , gdzie T jest temperatura bezwzgledna. (Zob. wzór (19.31)).

#### Podrozdział 26.5. Moc w obwodach elektrycznych, półprzewodniki, nadprzewodniki

•38 Na rysunku 26.32a przedstawiono opornik 20  $\Omega$  połączony z baterią. Na rysunku 26.32b pokazano, jak rośnie energia termiczna  $E_{\rm th}$  wydzielona na tym oporniku w funkcji czasu t. Jednostką skali na pionowej osi przedstawionego wykresu jest  $E_{\text{th,s}} = 2,5 \text{ mJ}$ , a na osi poziomej  $t_{\text{s}} = 4 \text{ s}$ . Wyznacz różnicę potencjałów panującą na elektrodach tej baterii.



Rys. 26.32. Zadanie 38

•39 Zasadą działania pewnego urządzenia do przygotowywania hot dogów jest przyłożenie do przeciwnych końców hot doga różnicy potencjałów 120 V, pozwalające na jego ugotowanie dzięki wydzielonej w ten sposób energii termicznej. Natężenie płynacego pradu wynosi 10 A, a energia niezbędna do ugotowania jednego hot doga równa jest 60 kJ. Jak dlugo trwa jednoczesne przygotowanie trzech hot dogów, jeśli szybkość, z jaką dostarczana jest energia nie ulega zmianie?

•40 W oporniku, przez który płynie prąd o natężeniu 3 A, rozprasza się energia termiczna z moca 100 W. Ile wynosi jego opór?

•41 ssm Do ogrzewacza pokojowego, którego opór — gdv jest goracy — wynosi 14  $\Omega$ , przyłożono różnice potencjałów 120 V. a) Z jaka moca energia elektryczna jest zamieniana na energie termiczna? b) Jaki jest koszt działania ogrzewacza w ciagu 5 h, gdy cena wynosi 0,3 zł/kWh?

•42 Na rysunku 26.33 przedstawiono źródło pradu o różnicy potencjałów U = 12 Vpołączone Z opornikiem o oporze  $R = 6 \Omega$ . Gdy elektron przesuwa się od jednego do drugiego końca opornika: a) w która strone na rysunku





odbywa się ten ruch, b) jaka praca wykonywana jest nad elektronem przez pole elektryczne i c) jaka energia zamieniana jest na ciepło podczas przepływu tego elektronu przez opornik?

•43 ilw Nieznany opornik podłaczono do biegunów źródła pradu o różnicy potencjałów 3 V. Energia rozprasza się w nim z szybkością 0,54 W. Ten sam opornik podłączono następnie do biegunów źródła pradu o różnicy potencjałów 1,5 V. Z jaka szybkością rozprasza się teraz energia?

•44 Student słuchał ustawionego na pełną głośność radia o mocy 7 W, zasilanego ze źródła o różnicy potencjałów 9 V od 9.00 wieczorem do 2.00 w nocy. Jaki ładunek przepłynął w tym czasie przez radio?

•45 ssm ilw Ogrzewacz promiennikowy o mocy 1250 W przystosowano do pracy przy 115 V. a) Ile wynosi natężenie prądu w ogrzewaczu? b) Ile wynosi opór spirali grzejnej? c) Ile energii termicznej wytwarza ogrzewacz w ciągu 1 h?

••46 😳 W przewodzie miedzianym o polu przekroju poprzecznego  $2 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup> i długości 4 m płynie przez cały przekrój stały prad o natężeniu 2 A. a) Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w przewodzie? b) Jaka ilość energii elektrycznej zamienia się w energię termiczną w ciągu 30 minut?

••47 Element grzejny, podłączony do źródła o różnicy potencjałów 75 V, wykonano z drutu chromonikielinowego o polu przekroju poprzecznego  $2,6 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>. Opór właściwy chromonikieliny wynosi  $5 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$ . a) Ile wynosi długość elementu, jeśli wytwarza on energię termiczną z mocą 5000 W? b) Jaka musiałaby być długość elementu, gdyby do wytwarzania energii termicznej z tą mocą użyć różnicy potencjałów 100 V?

••48 *Eksplodujace obuwie*. Wilgotne buty moga wybuchnać na nogach człowieka, jeśli płynacy w ziemi prad wywołany przez pobliskie uderzenie pioruna spowoduje gwałtowne odparowanie wody. Gwałtowna zamiana wody w parę

wodną powoduje dramatyczny wzrost objętości, który może rozerwać buty na strzępy. Woda ma gęstość 1000 kg/m<sup>3</sup> i wymaga do odparowania energii 2256 kJ/kg. Jeśli trwający 2 ms przepływ prądu napotyka obiekt wypełniony wodą o oporze właściwym 150  $\Omega$ ·m, długości 12 cm i polu powierzchni przekroju poprzecznego  $15 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>, to jakie natężenie prądu jest konieczne do wyparowania tej wody?

••49 Żarówkę o mocy 100 W podłączono do gniazdka sieci elektrycznej 120 V. a) Jaki jest miesięczny (trzydziestojednodniowy) koszt używania tej żarówki, jeśli świeci ona bez przerwy? Cenę energii elektrycznej przyjmij równą 0,3 zł/kWh. b) Ile wynosi opór żarówki? c) Ile wynosi natężenie prądu płynącego w żarówce?

••50 • Natężenie prądu płynącego w obwodzie przedstawionym na rysunku 26.34a wynosi 2 A. W obu opornikach energia niesiona przez prąd elektryczny zamienia się w energię termiczną  $E_{\text{th}}$ . Krzywe 1 i 2 przedstawione na rysunku 26.34b są wykresami ciepła  $E_{\text{th}}$  w funkcji czasu *t* dla oporników odpowiednio 1 i 2. Jednostką skali na osi pionowej jest  $E_{\text{th,s}} = 40$  mJ, a na osi poziomej  $t_{\text{s}} = 5$  s. Jaka jest moc elektryczna baterii?



Rys. 26.34. Zadanie 50

••51 🐨 ssm www Części *C* i *D* przewodu elektrycznego przedstawionego na rysunku 26.35 wykonane są z różnych materiałów i mają długość  $L_C = L_D = 1$  m. Opór właściwy i średnica części *C* wynoszą, odpowiednio,



 $2 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot m i 1 mm.$  Opór właściwy i średnica części *D* to, odpowiednio,  $1 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot m i 0,5 mm.$  Przez przewód płynie prąd elektryczny o natężeniu 2 A. Ile wynosi różnica potencjałów pomiędzy a) punktami 1 i 2 oraz b) punktami 2 i 3? Z jaką szybkością wydzielane jest ciepło pomiędzy c) punktami 1 i 2 oraz d) punktami 2 i 3?

••52 • Wartość gęstości prądu w pewnym przewodzie o przekroju kołowym wynosi  $J = (2,57 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^4)r^2$ , gdzie r jest odległością od środka przewodu i przyjmuje wartości aż do promienia przewodu, który wynosi 3 mm. Różnica potencjałów przyłożona do końców przewodu wynosi 60 V. Ile

energii zamieni się w ciepło w tym przewodzie w ciągu 1 godziny?

••53 Ogrzewacz pokojowy podłączony do różnicy potencjałów 120 V wytwarza energię termiczną z mocą 500 W. a) Ile wynosi opór ogrzewacza podczas jego działania? b) Ile elektronów przepływa w jednostce czasu przez dowolny przekrój poprzeczny elementu grzejnego ogrzewacza?

•••54 • Na rysunku 26.36a przedstawiono pręt wykonany z materiału oporowego. Opór jednostki długości tego pręta rośnie w dodatnim kierunku osi x. W dowolnym punkcie x wzdłuż pręta, opór dR wąskiego (różniczkowego) elementu pręta o szerokości dx dany jest wzorem dR = 5xdx, gdzie dR wyrażone jest w omach, a x w metrach. Na rysunku 26.36b przedstawiono taki wąski element. Twoim zadaniem jest odcięcie części pręta znajdującej

się pomiędzy x = 0 a pewnym punktem x = L i połączenie tej części ze źródłem różnicy potencjałów U =5 V (rys. 26.36c). Chcesz, aby prąd płynący w tej części pręta powodował wydzielenie energii termicznej z mocą 200 W. W jakim punkcie x = Lnależy przeciąć ten pręt?



#### Zadania dodatkowe

**55** ssm Chromonikielinowy ogrzewacz wydziela energię termiczną z mocą 500 W, jeśli zastosowana różnica potencjałów wynosi 110 V, a temperatura drutu jest równa 800°C. Jaka byłaby moc wytwarzania energii termicznej, jeśli drut byłby utrzymywany w temperaturze 200°C przez zanurzenie go w oleju? Zastosowana różnica potencjałów pozostaje bez zmian, a  $\alpha$  dla chromonikieliny przy 800°C wynosi  $4 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$ .

**56** Różnica potencjałów 1,2 V zostaje przyłożona do miedzianego drutu o długości 33 m i kalibrze 18 (średnicy 1 mm). Oblicz: a) natężenie prądu, b) wartość gęstości prądu, c) wartość natężenia pola elektrycznego w tym drucie i d) moc, z jaką wytwarzana jest w nim energia termiczna.

**57** Do urządzenia o mocy 18 W przyłożona jest różnica potencjałów 9 V. Oblicz ładunek przepływający przez to urządzenie w czasie 4 godzin.

**58** Aluminiowy pręt ma długość 1,3 m i przekrój w kształcie kwadratu o boku 5,2 mm. a) Jaki jest opór tego pręta mierzony między jego końcami? b) Jaka musiałaby być średnica miedzianego przewodu o długości 1,3 m i okrągłym przekroju, aby jego opór był taki sam jak opór aluminiowego pręta?

**59** Okrągły metalowy pręt ma 1,6 m długości i 5,5 mm średnicy. Opór mierzony w temperaturze 20°C pomiędzy końcami tego pręta wynosi  $1,09 \cdot 10^{-3} \Omega$ . a) Z jakiego materiału wykonany jest ten pręt? b) Z tego samego materiału wykonano okrągłą tarczę o średnicy 2 cm i grubości 1 mm. Jaki jest opór tej tarczy mierzony pomiędzy jej okrągłymi powierzchniami przy założeniu, że powierzchnie te są ekwipotencjalne?

**60** Tajemnica proszku czekoladowego. Jest to ciąg dalszy historii z zadania 60 w rozdziale 23, kontynuowanej w rozdziałach 24 i 25. Proszek czekoladowy przesypywano do silosu rurą o promieniu *R* ze stałą prędkością *v* i stałą gęstością ładunku  $\rho$ . a) Znajdź wyrażenie na natężenie prądu *I* przepływającego przez przekrój poprzeczny rury. b) Oblicz *I* dla warunków występujących w fabryce: promień rury R = 5 cm, prędkość v = 2 m/s i gęstość ładunku  $\rho = 1, 1 \cdot 10^{-3}$  C/m<sup>3</sup>.

Gdyby proszek poruszał się w obszarze o różnicy potencjałów U, to energia pola mogłaby zostać przekazana iskrze z mocą P = IU. c) Czy występuje taki przekaz w rurze, w związku z radialną różnicą potencjałów, omawianą w zadaniu 70 z rozdziału 24?

Gdy proszek dotarł rurą do silosu, potencjał elektryczny proszku się zmienił. Wielkość tej zmiany była równa przynajmniej radialnej różnicy potencjałów w rurze (zgodnie z obliczeniami w zadaniu 70 w rozdziale 24). d) Przyjmując te wartości różnicy potencjałów i natężenia prądu, które zostały znalezione wyżej w punkcie b), znajdź moc, z jaką energia mogłaby być przekazywana od proszku do iskry, gdy proszek opuszcza rurę. e) Ile energii zostałoby przekazane iskrze, jeśli iskra pojawiłaby się przy wylocie rury i trwała 0,2 s (co wydaje się rozsądnym założeniem)? Przypomnij sobie z zadania 60 w rozdziale 23, że do wywołania eksplozji potrzebny jest przekaz energii minimum 150 mJ. f) Gdzie najprawdopodobniej wystąpił wybuch proszku: w chmurze proszku przy rozładunku (co rozważaliśmy w zadaniu 60 w rozdziale 25), w rurze, czy przy wylocie rury w silosie?

**61** ssm Z wiązką cząstek alfa (q = +2e) poruszających się ze stałą energią kinetyczną 20 MeV związany jest prąd elektryczny o natężeniu 0,25 µ.A. a) Jeśli wiązka jest skierowana prostopadle do płaskiej powierzchni, to ile cząstek alfa uderzy w tę powierzchnię w ciągu 3 s? b) Ile cząstek alfa znajduje się w każdej chwili w odcinku wiązki o długości 20 cm? c) Jaką różnicą potencjałów należy przyspieszyć cząstki alfa od stanu spoczynku do energii kinetycznej 20 MeV?

**62** Opornik, na którym panuje różnica potencjałów 200 V, przekształca energię elektryczną w energię termiczną z mocą 3000 W. Jaki jest opór tego opornika?

**63** Element grzejny suszarki o mocy 2 kW ma długość 80 cm. Jaka będzie moc tego elementu, jeśli usunie się z niego część o długości 10 cm i przyłoży do niego różnicę potencjałów 120 V?

**64** Walcowy opornik o promieniu 5 mm i długości 2 cm wykonany jest z materiału o oporze właściwym  $3.5 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot m$ . Jakie są: a) wartość gęstości prądu i b) różnica potencjałów jeśli moc, z jaką jest w nim rozpraszana energia, wynosi 1 W?

**65** Różnica potencjałów *U* przyłożona jest do przewodu o polu powierzchni przekroju *S*, długości *L* i oporze właściwym  $\rho$ . Chcesz zmienić przyłożoną różnicę potencjałów i rozciągnąć drut tak, aby moc rozpraszania energii wzrosła 30 razy, a natężenie prądu zwiększyło się 4 razy. Przyjmując, że gęstość materiału w drucie nie ulega zmianie, znajdź: a) stosunek nowej długości do *L* i b) stosunek nowego pola powierzchni przekroju do *S*.

66 Reflektory poruszającego się samochodu wymagają prądu o natężeniu około 10 A, którego dostarcza alternator 12 V napędzany przez silnik. Przyjmij, że sprawność alternatora wynosi 80% (wyjściowa energia elektryczna stanowi 80% wejściowej energii mechanicznej) i oblicz, jaką moc musi zapewnić silnik, żeby reflektory były włączone.

**67** Grzejnik o mocy 500 W jest zaprojektowany do pracy z przyłożoną różnicą potencjałów 115 V. a) O jaki ułamek zmniejszy się jego moc cieplna, jeśli przyłożona różnica potencjałów zmaleje do 110 V? Przyjmij, że opór grzejnika nie ulega zmianie. b) Jeśli weźmie się pod uwagę zmianę oporu z temperaturą, to czy prawdziwy spadek mocy będzie większy, czy mniejszy niż ten znaleziony w punkcie a)?

**68** Kiedy silnik nie pracuje, to w w temperaturze 20°C jego miedziane uzwojenie ma opór 50  $\Omega$ . Po wielu godzinach pracy silnika opór tego uzwojenia rośnie do 58  $\Omega$ . Jaka jest wtedy temperatura uzwojenia? Zaniedbaj zmiany rozmiarów uzwojenia i skorzystaj z tabeli 26.1

**69** Jaka energia elektryczna jest przekształcana w energię termiczną w ciągu 2 godzin w oporniku o oporze 400  $\Omega$ , do którego przyłożona jest różnica potencjałów 90 V?

**70** W miedzianym drucie bez izolacji o średnicy 5,2 mm płynie jednorodny prąd o natężeniu 12 A. Po drucie w kierunku, w którym w jego wnętrzu unoszone są elektrony, porusza się dżdżownica o długości 4 cm. a) Ile wynosi różnica potencjałów pomiędzy dwoma końcami dżdżownicy? b) Czy potencjał tylnej części jej ciała jest dodatni, czy ujemny w stosunku do potencjału części głowowej? c) Ile czasu zabierze jej pokonanie 1 cm, jeśli poruszałaby się z prędkością unoszenia elektronów w drucie? (Liczba nośników przypadających na jednostkę objętości wynosi 8,49  $\cdot$  10<sup>28</sup> m<sup>-3</sup>).

**71 ssm** a) W jakiej temperaturze opór miedzianego przewodnika zwiększyłby swoją wartość dwukrotnie w stosunku do oporu w temperaturze 20°C? Użyj temperatury 20°C jako temperatury odniesienia we wzorze (26.17) i porównaj swoją odpowiedź z rysunkiem 26.10. b) Czy taka sama temperatura "podwojenia" ma zastosowanie do wszystkich miedzianych przewodników niezależnie od ich kształtu czy rozmiaru?

**72** Stalowa szyna tramwajowa ma przekrój o polu powierzchni 56 cm<sup>2</sup>. Jaki jest opór szyny o długości 10 km? Opór właściwy stali wynosi  $3 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$ . **73** Cewka wykonana z chromonikieliny zanurzona jest w cieczy. (Chromonikielina jest stopem chromu, niklu i żelaza używanym powszechnie w elementach grzejnych). Gdy do cewki przyłożona jest różnica potencjałów 12 V, przez cewkę płynie prąd o natężeniu 5,2 A, ciecz paruje z szybkością 21 mg/s. Oblicz ciepło parowania cieczy (porównaj podrozdział 18.4).

**74 ••** Gęstość prądu w drucie jest jednorodna i ma wartość  $2 \cdot 10^6$  A/m<sup>2</sup>, długość drutu wynosi 5 m, a gęstość elektronów przewodnictwa równa jest 8,49  $\cdot 10^{28}$  m<sup>-3</sup>. Ile czasu, średnio zabiera elektronowi pokonanie tego drutu?

**75** W pewnej lampie rentgenowskiej płynie prąd o natężeniu 7 mA, przy różnicy potencjałów 80 kV. Ile wynosi jej moc wyrażona w watach?

**76** Gdy pomiędzy elektrodami rury wyładowczej przyłożona jest odpowiednio duża różnica potencjałów, ustala się w niej przepływ prądu. Gaz w rurze ulega jonizacji: elektrony poruszają się w kierunku elektrody dodatniej, a pojedynczo naładowane jony dodatnie poruszają się w kierunku elektrody ujemnej. a) Jakie jest natężenie prądu płynącego w lampie wyładowczej z wodorem, w której w ciągu każdej sekundy przez dowolny jej przekrój przepływa w przeciwne strony  $3, 1 \cdot 10^{18}$  elektronów i  $1, 1 \cdot 10^{18}$  protonów? b) Czy gęstość prądu  $\vec{J}$  jest skierowana w kierunku ujemnej elektrody, czy przeciwnie?

77 Na rysunku 26.37 przedstawiono cewkę oporową umieszczoną wewnątrz izolowanego termicznie pojemnika z tłokiem poruszającym się bez tarcia. Pojemnik zawiera gaz doskonały, a cewka jest połączona z zewnętrzną baterią. Przez cewkę płynie prąd o natężeniu I = 240 mA, a jej opór wynosi  $R = 550 \Omega$ . Jaka jest graniczna prędkość, z którą tłok o masie





m = 12 kg będzie się poruszał w górę, jeśli temperatura gazu pozostaje stała?

**78** Izolujący pas o szerokości 50 cm porusza się z prędkością 30 m/s. Przenosi on ładunek elektryczny do pewnego doświadczalnego urządzenia z szybkością odpowiadającą prądowi o natężeniu 100 μA. Jaka jest powierzchniowa gęstość ładunku zgromadzonego na tym pasie?

**79** W hipotetycznym laboratorium syntezy termojądrowej znajdujące się w wysokiej temperaturze atomy helu są całkowicie zjonizowane: każdy z nich jest rozdzielony na dwa swobodne elektrony i dodatnio naładowane jądro zwane cząstką alfa. Pole elektryczne w reaktorze powoduje unoszenie cząstek alfa na wschód z predkością 25 m/s, a elektronów na zachód z prędkością 88 m/s. Gęstość cząstek alfa wynosi  $2,8 \cdot 10^{15}$  cm<sup>-3</sup>. Jakie są: a) wartość wypadkowej gęstości prądu i b) kierunek prądu?

**80** Gdy podgrzewa się metalowy pręt, zmienia się nie tylko jego opór, ale także długość i pole powierzchni przekroju. Wzór  $R = \rho L/S$  sugeruje, że mierząc opór wlaściwy  $\rho$  w różnych temperaturach, należy wziąć pod uwagę wszystkie trzy czynniki. Jeśli temperatura zmienia się o 1°C, to o jaki procent zmieni się: a) długość *L*, b) pole powierzchni *S* i c) opór *R* miedzianego przewodnika? d) Jaki wynika z tego wniosek? Współczynik rozszerzalności cieplnej miedzi wynosi  $1,7 \cdot 10^{-5}$  K<sup>-1</sup>.

**81** Wiązka deuteronów o energii 16 MeV z cyklotronu uderza w blok miedzi. Wiązka jest równoważna prądowi o natężeniu 15  $\mu$ A. a) Jak często deuterony uderzają w miedź? b) Z jaką szybkością wytwarzana jest w miedzi energia termiczna?

82 Akcelerator liniowy wytwarza impulsowo wiązkę elektronów. W czasie impulsu trwającego 0,1  $\mu$ s natężenie prądu wynosi 0,5 A. a) Ile elektronów jest przyspieszanych podczas jednego impulsu? b) Ile wynosi średnie natężenie prądu dla akceleratora pracującego przy 500 impulsach/s? c) Ile wynosi średnia i maksymalna moc akceleratora, jeśli elektrony są przyspieszane do energii 50 MeV?

**83** Ogrzewanie grzałką wody znajdującej się w dobrze izolowanym naczyniu do pewnej temperatury zabiera zwykle 100 minut. Następnie termostat wyłącza jej zasilanie. Pewnego dnia, ze względu na przeciążenie sieci w laboratorium napięcie zasilające grzałkę spadło o 6%. Ile czasu będzie teraz trwało ogrzanie wody? Przyjmij, że opór grzejnika nie ulega zmianie.

**84** Grzałka o mocy 400 W umieszczona jest w naczyniu zawierającym 2 litry wody o temperaturze 20°C. a) Ile czasu zabierze podgrzanie wody do temperatury wrzenia, jeśli przyjmiemy, że 80% dostępnej energii jest pochłaniane przez wodę? b) Po jakim czasie od zagotowania wyparuje połowa wody z naczynia?

**85** Kondensator o pojemności  $30\mu$ F połączony jest z programowalnym zasilaczem. W przedziale czasu od t = 0do t = 3 s napięcie wyjściowe zasilacza dane jest wzorem  $U(t) = 6 + 4t - 2t^2$  woltów. Znajdź w chwili t = 0, 5 s: a) ładunek zgromadzony na kondensatorze, b) natężenie prądu płynącego w układzie i c) moc wyjściową zasilacza.

# **Obwody elektryczne**

Ζ

Α

Ł

27



# **27.1.** OBWODY ELEKTRYCZNE O JEDNYM OCZKU

#### Czego się nauczysz? \_

R

0

Ζ

D

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 27.01 zrozumieć działanie źródła SEM w odniesieniu do wykonywanej przez nie pracy;
- 27.02 w przypadku doskonałego źródła SEM zastosować związek pomiędzy siłą elektromotoryczną, natężeniem prądu i mocą (szybkością przekazywania energii) elektryczną;
- 27.03 narysować schemat obwodu o jednym oczku zawierający baterię i trzy oporniki;
- 27.04 zastosować drugie prawo Kirchhoffa do napisania równania wiążącego różnice potencjałów na elementach obwodu dookoła (pełnego) oczka;
- 27.05 zastosować regułę oporu przy przechodzeniu wzdłuż opornika;
- 27.06 zastosować regułę SEM przy przechodzeniu przez źródło SEM;
- 27.07 zauważyć, że natężenie prądu płynącego w opornikach połączonych szeregowo jest takie samo jak natężenie prądu płynącego w każdym z nich;
- 27.08 obliczyć opór równoważny układu oporników połączonych szeregowo;

#### Podstawowe fakty \_

Źródło SEM wykonuje pracę nad ładunkami, aby utrzymać różnicę potencjałów między biegunami źródła. Jeśli dW jest pracą wykonaną przez źródło przy przesuwaniu dodatniego ładunku dq od ujemnego do dodatniego bieguna, to siła elektromotoryczna — SEM źródła (praca na jednostkę ładunku) wynosi

$$\mathcal{E} = rac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}$$
 (definicja SEM).

 Doskonałym źródłem SEM jest źródło, które nie ma żadnego oporu wewnętrznego podczas ruchu ładunku przez ogniwo. Różnica potencjałów między biegunami doskonałego źródła SEM jest równa SEM źródła.

- 27.09 zauważyć, że różnica potencjałów przyłożona do oporników połączonych szeregowo jest równa sumie różnic potencjałów na każdym z nich;
- 27.10 obliczyć różnicę potencjałów pomiędzy dowolnymi punktami obwodu elektrycznego;
- 27.11 odróżnić baterię rzeczywistą od doskonałej i zamienić baterię rzeczywistą w obwodzie elektrycznym na baterię doskonałą oraz dodatkowy opornik;
- 27.12 w obwodzie z baterią rzeczywistą obliczyć różnicę potencjałów pomiędzy jej biegunami dla prądu płynącego w kierunku strzałki SEM oraz przeciwnie;
- **27.13** stwierdzić, co znaczy uziemienie obwodu elektrycznego i narysować schemat takiego uziemienia;
- 27.14 zauważyć, że uziemienie obwodu nie wpływa na natężenie prądu, który w nim płynie;
- 27.15 obliczyć szybkość zamiany energii elektrycznej na energię termiczną w rzeczywistym źródle;
- 27.16 obliczyć wypadkową szybkość przekazywania energii w baterii rzeczywistej dla prądu płynącego w kierunku strzałki SEM oraz przeciwnie.
- Rzeczywiste źródło SEM ma opór wewnętrzny. Różnica potencjałów między biegunami źródła jest równa SEM tylko wtedy, gdy nie płynie przez nie prąd.
- Zmiana potencjału przy przechodzeniu przez opornik R w kierunku przepływu prądu wynosi -IR, a w przeciwnym kierunku +IR.
- Zmiana potencjału przy przechodzeniu przez doskonałe źródło SEM w kierunku strzałki SEM wynosi  $+\mathcal{E}$ , a w przeciwnym  $-\mathcal{E}$ .
- Z zasady zachowania energii wynika drugie prawo Kirchhoffa: Drugie prawo Kirchhoffa. Algebraiczna suma zmian potencjałów przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zeru.

Z zasady zachowania ładunku wynika pierwsze prawo Kirchhoffa (rozdz. 26):

Pierwsze prawo Kirchhoffa. Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.

 Jeśli rzeczywiste źródło o SEM równej *E* i wewnętrznym oporze *r* wykonuje pracę nad nośnikami ładunku przepływającego przez nie prądu o natężeniu *I*, to moc źródła (szybkość przekazywania energii nośnikom ładunku) wynosi

P = IU,

gdzie U jest różnicą potencjałów między biegunami źródła.

## 0 fizyce

Jesteśmy otoczeni obwodami elektrycznymi. Mógłbyś być dumny z liczby urządzeń elektrycznych, które sam posiadasz i z łatwością stworzyć listę takich, które chciałbyś mieć. Każde z tych urządzeń, tak jak sieć elektryczna, która dostarcza energię do twojego domu, jest efektem nowoczesnej elektrotechniki. Nie jest łatwo oszacować aktualną wartość finansową produktów elektrotechniki, ale można być pewnym, że z roku na rok systematycznie rośnie, gdyż coraz więcej zadań realizowanych jest elektrycznie. Współczesne radia strojone są elektroniczną, nie korzystając z klasycznych usług pocztowych. Czasopisma naukowe są czytane zwykle w wersji elektronicznej na komputerze, a nie w zacisznym gmachu biblioteki. Publikacje w tych czasopismach są kopiowane i przechowywane elektronicznie, a nie jak dawniej powielane i składane na półkach. Jest całkiem prawdopodobne, że także tę książkę czytasz w wersji elektronicznej.

Naukową podstawą elektrotechniki jest fizyka. W tym rozdziale powiemy o fizyce obwodów elektrycznych, na które składają się oporniki i baterie (a w podrozdziale 27.4 także kondensatory). Nasze rozważania ograniczymy do obwodów, w których prąd płynie w jednym kierunku, a które zwane są *obwodami prądu stałego*. Zaczniemy od pytania: w jaki sposób wywołać przepływ ładunku?

# "Pompowanie" ładunków

Jeśli chcemy wywołać przepływ nośników ładunku przez opornik, to musimy wytworzyć różnicę potencjałów między końcami opornika. Jednym ze sposobów jest podłączenie każdego z końców opornika do okładek naładowanego kondensatora. Kłopot powstający przy takim rozwiązaniu polega na tym, że przepływ ładunku powoduje rozładowanie kondensatora i doprowadza szybko okładki do tego samego potencjału. Gdy do tego dochodzi, znika pole elektryczne w oporniku i ustaje przepływ ładunku.

Aby wytworzyć stały przepływ ładunku, potrzebujemy "pompy ładunku" — urządzenia, które wykonując pracę nad nośnikami ładunku, utrzymuje różnicę potencjałów między parą swych zacisków. Urządzenie takie nazywamy źródłem siły elektromotorycznej (źródłem SEM); powiedzenie, że źródło dostarcza siły elektromotorycznej  $\mathcal{E}$  oznacza, że

• Moc  $P_r$  zamiany energii na energię termiczną w źródle wynosi  $P_r = I^2 r.$ 

Szybkość zmiany energii chemicznej P<sub>SEM</sub> w źródle wynosi

$$P_{\text{SEM}} = I\mathcal{E}$$

 Jeśli oporniki są połączone szeregowo, to płynie przez nie prąd o tym samym natężeniu. Opór równoważny, który zastępuje układ połączonych szeregowo oporników, wynosi

 $R_{\rm rw} = \sum_{j=1}^{n} R_j$  (*n* oporników połączonych szeregowo).



Coraz więcej energii jest pozyskiwane w elektrowniach słonecznych. Na zdjęciu: akumulatory ołowiowe ładowane w elektrowni słonecznej w Kaw, Gujana. Bateria liczy 567 akumulatorów i jest jedną z największych instalacji fotowoltaicznych na świecie (Matties/Science Foto Library/Indigo)



**Rys. 27.1.** Obwód elektryczny o jednym oczku, w którym urządzenie o SEM  $\mathcal{E}$  wykonuje pracę nad nośnikami ładunku i utrzymuje stacjonarny prąd o natężeniu *I*, który płynie przez opornik *R* 

wykonuje ono pracę nad nośnikami ładunku. Określenie *siła elektromotoryczna*, czy w skrócie *SEM*, wprowadzono zanim uczeni dokładnie zrozumieli działanie źródła siły elektromotorycznej.

W rozdziale 26 omawialiśmy ruch nośników ładunku wzdłuż obwodu pod wpływem pola elektrycznego wytworzonego w obwodzie — pole wytwarza siły, które wprawiają w ruch nośniki ładunku. W tym rozdziale zajmiemy się innym podejściem: omówimy ruch nośników ładunku, stosując pojęcie energii — źródło SEM wykonując pracę, dostarcza ładunkom energii.

Powszechnie stosowanym źródłem SEM jest ogniwo elektryczne (bateria elektryczna) używane do zasilania wielu różnych urządzeń, od zegarków ręcznych do okrętów podwodnych. Źródłem SEM, które najbardziej wpływa na nasze życie codzienne, jest prądnica elektryczna, która dzięki połączeniom elektrycznym (przewodom) z elektrownią wytwarza różnicę potencjałów w naszych domach i miejscach pracy. Źródła SEM zwane ogniwami słonecznymi, znane od dawna w postaci paneli (podobnych do skrzydeł) na statkach kosmicznych i pojawiają się także w naszym otoczeniu. Mniej znanymi źródłami SEM są ogniwa paliwowe, które zasilają statki kosmiczne, i termoogniwa, które dostarczają pokładowej energii elektrycznej statkom kosmicznym, stacjom badawczym między innymi na Antarktydzie. Źródło SEM nie musi być przyrządem — układy biologiczne, od strętw zwanych popularnie węgorzami elektrycznymi i istot ludzkich po rośliny mają fizjologiczne źródła SEM.

Chociaż wymienione źródła SEM różnią się zasadą działania, to wszystkie spełniają tę samą podstawową funkcję — wykonują pracę nad nośnikami ładunku i wobec tego utrzymują różnicę potencjałów między swymi zaciskami (biegunami).

## Praca, energia i SEM

Na rysunku 27.1 przedstawiono źródło SEM (np. ogniwo) jako część prostego obwodu, zawierającego dodatkowo pojedynczy opornik o oporze *R* (symbolem oporu i opornika jest  $\neg \lor \lor$ . Jeden zacisk źródła SEM (zwany biegunem dodatnim i oznaczany zwykle przez +) ma większy potencjał niż drugi zacisk (zwany biegunem ujemnym i oznaczany przez –). SEM źródła możemy przedstawić za pomocą strzałki skierowanej od bieguna ujemnego do bieguna dodatniego (tak jak na rysunku 27.1). Małe kółko na początku strzałki odróżnia ją od strzałek wskazujących kierunek przepływu prądu.

Gdy źródło SEM nie jest włączone w obwód, jego wewnętrzne procesy chemiczne nie powodują w nim żadnego wypadkowego przepływu nośników ładunku. Gdy jednak jest włączone w obwód, tak jak na rysunku 27.1, wewnętrzne procesy chemiczne powodują w nim wypadkowy przepływ dodatnich nośników ładunku, od ujemnego do dodatniego bieguna w kierunku strzałki SEM. Ten przepływ jest częścią prądu, powstającego wzdłuż obwodu i płynącego w tym samym kierunku (zgodnie z ruchem wskazówek zegara na rysunku 27.1).

Wewnątrz źródła SEM dodatnie nośniki ładunku przemieszczają się z obszaru małego potencjału — małej elektrycznej energii potencjalnej (przy biegunie ujemnym) do obszaru o większym potencjale elektrycznym i większej elektrycznej energii potencjalnej (przy biegunie dodatnim). Kierunek tego ruchu jest dokładnie przeciwny do kierunku, w którym natężenie pola elektrycznego między biegunami (skierowane od bieguna dodatniego do bieguna ujemnego) powodowałoby przepływ nośników ładunku.

W źródle SEM musi więc istnieć pewne źródło energii, które wykonuje pracę nad ładunkami przez wymuszenie ich odpowiedniego ruchu. Źródło energii może być chemiczne, jak w baterii czy ogniwie paliwowym. Może wykorzystywać siły mechaniczne, jak w prądnicy elektrycznej. Różnice temperatury mogą także dostarczyć energii, jak w termoogniwie. Może też jej dostarczyć Słońce, jak w ogniwie słonecznym.

Przeanalizujmy obwód z rysunku 27.1 z punktu widzenia pracy i przekazu energii. W dowolnym przedziale czasu *t* ładunek *q* przechodzi przez dowolny przekrój poprzeczny, np. aa' tego obwodu. Ta sama ilość ładunku musi wejść do źródła SEM przy biegunie o mniejszym potencjale i wyjść przy biegunie o większym potencjale. Źródło musi wykonać pracę d*W* nad ładunkiem, aby zmusić go do takiego ruchu. Korzystając z tej pracy, definiujemy siłę elektromotoryczną źródła SEM:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}$$
 (definicja SEM). (27.1)

Można to wyrazić następująco: siła elektromotoryczna źródła SEM jest pracą, przypadającą na jednostkę ładunku, którą wykonuje źródło, przenosząc ładunek z bieguna o mniejszym potencjale do bieguna o większym potencjale. Jednostką siły elektromotorycznej w układzie SI jest dżul na kulomb; w rozdziale 24 jednostkę tę zdefiniowaliśmy jako *wolt* (V).

**Doskonałym źródłem SEM** jest źródło, które nie wykazuje żadnego oporu wewnętrznego podczas ruchu ładunku przez ogniwo od bieguna do bieguna. Różnica potencjałów między biegunami doskonałego źródła SEM jest równa SEM źródła, na przykład doskonała bateria o SEM 12 V ma zawsze między biegunami różnicę potencjałów 12 V.

**Rzeczywiste źródło SEM**, takie jak dowolna rzeczywista bateria, wykazuje wewnętrzny opór podczas ruchu ładunku przez ogniwo. Gdy rzeczywiste źródło SEM nie jest włączone w obwód, a zatem nie płynie przez nie prąd, wtedy różnica potencjałów między biegunami baterii jest równa jej SEM. Gdy jednak przez źródło płynie prąd, różnica potencjałów między jej biegunami różni się od jej SEM. Takie rzeczywiste baterie omówimy pod koniec tego podrozdziału.

Jeśli źródło SEM jest włączone w obwód, to przekazuje ono energię przechodzącym przez nie nośnikom ładunku. Ta energia może zostać potem przekazana przez nośniki ładunku innym elementom obwodu, na przykład może wywołać świecenie żarówki. Na rysunku 27.2a przedstawiono obwód zawierający dwie doskonałe odnawialne baterie (*akumulatory*) A i B, opornik o oporze R i silnik elektryczny M, który może podnieść jakieś ciało, korzystając z energii, jaką otrzymuje od nośników ładunku w obwodzie. Zauważ, że baterie są połączone tak, że dążą do wysyłania ładunków wzdłuż obwodu w przeciwnych kierunkach. Rzeczywisty kierunek prądu w obwodzie jest określony przez baterię o większej SEM, którą jest bateria B, tak że energia chemiczna w baterii B maleje, gdy energia jest przekazywana przechodzącym przez nią nośnikom ładunku. Jednak energia che-



**Rys. 27.2.** a) W obwodzie  $\mathcal{E}_{B} > \mathcal{E}_{A}$ , a więc kierunek prądu jest wyznaczony przez źródło B. b) Przemiany energii w obwodzie





**Rys. 27.3.** Obwód o jednym oczku, w którym opornik o oporze R połączony jest ze źródłem B o SEM równej  $\mathcal{E}$ . Prąd ma takie samo natężenie I wzdłuż całego obwodu miczna w baterii A wzrasta, ponieważ prąd jest skierowany od dodatniego bieguna do ujemnego bieguna. Dlatego też bateria B ładuje baterię A. Bateria B dostarcza także energii silnikowi M i energii ulegającej rozproszeniu (zamianie na energię termiczną) w oporniku o oporze *R*. Na rysunku 27.2b przedstawiono wszystkie trzy procesy przekazywania energii z baterii B; każdy z tych procesów zmniejsza energię chemiczną tej baterii.

## Obliczanie natężenia prądu w obwodzie o jednym oczku

Omówimy teraz dwa równoważne sposoby obliczania natężenia prądu w prostym obwodzie *o jednym oczku* z rysunku 27.3; pierwsza metoda oparta jest na rozważeniu zasady zachowania energii, a druga na pojęciu potencjału. Obwód składa się z doskonałej baterii B o SEM  $\mathcal{E}$ , opornika o oporze *R* i dwóch łączących je przewodów. (Jeśli nie powiedziano inaczej, zakładamy, że przewody w obwodach mają znikomo mały opór. Ich funkcją jest więc tylko zapewnienie dróg, wzdłuż których mogą się poruszać nośniki ładunku).

#### Metoda energetyczna

Zgodnie ze wzorem (26.27) ( $P = I^2 R$ ), w przedziale czasu dt w oporniku z rysunku 27.3 energia  $I^2 R$  zamienia się na energię termiczną. (Zakładamy, że przewody mają znikomo mały opór, a więc nie występuje w nich rozpraszanie energii). W tym samym czasie ładunek o wartości dq = I dtprzepłynie przez baterię B i praca, wykonana przez baterię nad tym ładunkiem wynosi zgodnie ze wzorem (27.1)

$$\mathrm{d}W = \mathcal{E}\mathrm{d}q = \mathcal{E}I\mathrm{d}t.$$

Z zasady zachowania energii wynika, że praca wykonana przez (doskonałą) baterię musi być równa energii termicznej wytworzonej w oporniku

$$\mathcal{E}Idt = I^2 Rdt.$$

Otrzymujemy stąd

$$\mathcal{E} = IR$$

SEM  $\mathcal{E}$  jest energią, przypadającą na jednostkę ładunku, przekazaną przez baterię poruszającym się ładunkom. Wielkość *I R* jest energią przypadającą na jednostkę ładunku, przekazaną przez poruszające się ładunki na rzecz energii wewnętrznej w oporniku. Wzór ten oznacza więc, że energia na jednostkę ładunku przekazana poruszającym się ładunkom jest równa energii na jednostkę ładunku, przekazanej przez te ładunki. Wyznaczając *I*, otrzymujemy

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$
 (27.2)

#### Analiza potencjałów

Załóżmy, że wychodząc z jakiegoś punktu obwodu z rysunku 27.3 przesuwamy się w myśli wzdłuż obwodu w dowolnym kierunku, dodając algebraicznie napotykane różnice potencjałów. Gdy powrócimy do punktu wyjściowego, musimy powrócić także do wyjściowego potencjału. Sformułujemy najpierw ten wniosek w postaci prawa, które jest słuszne nie tylko dla obwodu o jednym oczku, takiego jak na rysunku 27.3, ale także dla dowolnego pełnego oczka w obwodzie z wieloma oczkami, które będziemy omawiać w podrozdziale 27.2:

5.7

**Drugie prawo Kirchhoffa**. Algebraiczna suma zmian potencjałów napotykanych przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zeru.

Nazwa tego prawa pochodzi od nazwiska niemieckiego fizyka Gustava Roberta Kirchhoffa. Prawo to jest równoważne stwierdzeniu, że każdy punkt na zboczu góry ma tylko jedną wartość wysokości nad poziomem morza. Jeśli wyjdziemy z jakiegoś punktu i powrócimy do niego po obejściu góry, to algebraiczna suma zmian pokonywanych wysokości musi być równa zeru.

Zacznijmy na rysunku 27.3 od punktu *a* o potencjale  $V_a$  i przejdźmy w myśli wzdłuż obwodu, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, zwracając uwagę na napotykane zmiany potencjału. Nasz punkt startowy odpowiada małemu potencjałowi ujemnego bieguna baterii. Bateria jest doskonała, a więc różnica potencjałów między jej biegunami wynosi  $\mathcal{E}$ . Gdy przejdziemy przez baterię do bieguna dodatniego (o większym potencjale), wówczas zmiana potencjału wyniesie  $+\mathcal{E}$ .

Idąc wzdłuż przewodu do górnego końca opornika, nie napotykamy żadnej zmiany potencjału, ponieważ przewód ma znikomo mały opór; ma on zatem ten sam potencjał, co dodatni biegun baterii i górny koniec opornika. Gdy przejdziemy przez opornik, potencjał ulegnie zmianie zgodnie ze wzorem (27.8) (który możemy zapisać w postaci U = IR). Co więcej, potencjał musi zmaleć, ponieważ poruszamy się od końca opornika o wyż-szym potencjałe. Zmiana potencjału wynosi więc -IR.

Powracamy do punktu *a*, przesuwając się wzdłuż dolnego przewodu. Ponieważ przewód ten ma także znikomo mały opór, więc nie napotkamy żadnej zmiany potencjału. Po dotarciu do punktu *a* napotykamy znów potencjał  $V_a$ . Obeszliśmy pełne oczko, a więc początkowy potencjał, po uwzględnieniu zmian potencjału wzdłuż drogi, musi być równy potencjałowi końcowemu, czyli

$$V_a + \mathcal{E} - IR = V_a.$$

Wartość  $V_a$  redukuje się w tym równaniu i otrzymujemy

$$\mathcal{E} - IR = 0.$$

Wyznaczając z tego wzoru *I*, otrzymujemy ten sam wynik  $I = \mathcal{E}/R$ , jak przy zastosowaniu metody energetycznej (wzór (27.2)).

Jeśli drugie prawo Kirchhoffa zastosujemy do pełnego przejścia wzdłuż oczka w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to otrzymamy

$$-\mathcal{E} + IR = 0$$

i ponownie znajdujemy, że  $I = \mathcal{E}/R$ . Drugie prawo Kirchhoffa możemy stosować przy obchodzeniu oczka w dowolnym kierunku.

W celu przygotowania się do obwodów bardziej złożonych niż na rysunku 27.3, wypiszmy dwie reguły znajdowania różnic potencjałów napotykanych przy obchodzeniu obwodu: **Reguła oporu**. Gdy przemieszczamy się (w myśli) wzdłuż opornika w kierunku przepływu prądu, zmiana potencjału wynosi -IR, a przy ruchu w przeciwną stronę wynosi +IR.

**Reguła SEM**. W doskonałym źródle SEM zmiana potencjału wynosi  $+\mathcal{E}$ , gdy poruszamy się (w myśli) zgodnie z kierunkiem strzałki SEM, a przy ruchu w przeciwną stronę wynosi  $-\mathcal{E}$ .

#### Sprawdzian 1

Na rysunku zilustrowano przepływ prądu o natężeniu I w obwodzie o jednym oczku, ze źródłem B i opornikiem o oporze R (oraz przewodem o znikomo małym oporze). a) Czy strzałkę SEM w baterii B trzeba narysować w lewo, czy w prawo? Uszereguj wartości: b) natężenia prądu, c) potencjału elektrycznego, d) elektrycznej energii potencjalnej nośników ładunku, w punktach a, b i c zaczynając od największych.



#### Inne obwody o jednym oczku

W tym podrozdziale rozszerzymy prosty obwód z rysunku 27.3 na dwa sposoby.

#### Opór wewnętrzny

Na rysunku 27.4a przedstawiono rzeczywistą baterię o oporze wewnętrznym r połączoną przewodami z opornikiem elektrycznym o oporze R. Wewnętrzny opór baterii jest oporem elektrycznym jej elementów i nieodłączną cechą baterii. Na rysunku 27.4a narysowaliśmy jednak baterię tak, jakby można było podzielić ją na doskonałe źródło o SEM równej  $\mathcal{E}$  i na opornik o oporze r. Kolejność, w której te symbole są narysowane, nie odgrywa roli.



**Rys. 27.4.** a) Obwód o jednym oczku, zawierający rzeczywiste źródło o oporze wewnętrznym *r* i SEM równej  $\mathcal{E}$ . b) Ten sam obwód przedstawiony jako linia. Na wykresie pokazano potencjały, które napotykamy obchodząc obwód w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara i rozpoczynając od punktu *a*. Potencjałowi  $V_a$  przypisaliśmy umownie wartość zero, a pozostałe potencjały w obwodzie zostały narysowane względem  $V_a$ 

Jeśli zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa obchodząc obwód w kierunku ruchu wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu *a*, to otrzymamy *zmiany* potencjału

$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0, \tag{27.3}$$

skąd natężenie prądu

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$
(27.4)

Zauważ, że wzór ten redukuje się do wzoru (27.2) dla źródła doskonałego, gdy r = 0.

Na rysunku 27.4b przedstawiono graficznie zmiany potencjału elektrycznego wzdłuż obwodu. (Aby lepiej powiązać rysunek 27.4b z *zamkniętym obwodem* z rysunku 27.4a, możemy w myśli nawinąć wykres na walec tak, aby punkt *a* z lewej strony pokrył się z punktem *a* z prawej strony). Zwróć uwagę, że ruch wzdłuż obwodu przypomina spacer po górze i powrót do punktu wyjściowego, czyli zarazem do początkowej wysokości.

W tej książce, jeśli tego wyraźnie nie podkreślimy, np. przez zaznaczenie oporu wewnętrznego na schemacie obwodu, będziemy zawsze przyjmować, że źródło jest doskonałe. W rzeczywistości źródła są zawsze niedoskonałe i mają opór wewnętrzny.

#### Oporniki połączone szeregowo

Na rysunku 27.5a przedstawiono trzy oporniki połączone **szeregowo** i podłączone do doskonałego źródła o SEM  $\mathcal{E}$ . Określenie połączenia ma mało wspólnego z tym, jak narysowane są opory. W rzeczywistości "szeregowo" oznacza, że oporniki ustawione jeden za drugim są połączone przewodami, a różnica potencjałów U jest przyłożona do dwóch końców szeregu. Na rysunku 27.5a połączono opory ustawione jeden za drugim między punktami *a* i *b*, a różnica potencjałów między punktami *a* i *b* jest utrzymywana przez źródło. Różnice potencjałów, które istnieją na oporach w szeregu, wytwarzają w nich prądy o jednakowym natężeniu *I*.

Jeśli różnica potencjałów U jest przyłożona do oporników połączonych szeregowo, to przez oporniki płyną prądy o jednakowym natężeniu I. Suma różnic potencjałów na opornikach jest równa przyłożonej różnicy potencjałów U.

Zauważ, że ładunek w opornikach połączonych szeregowo może poruszać się tylko jedną drogą. Jeśli są dodatkowe drogi, czyli prądy w różnych opornikach mają różne natężenia, to oporniki nie są połączone szeregowo.

Oporniki połączone szeregowo można zastąpić równoważnym opornikiem  $R_{rw}$ , w którym płynie prąd o takim samym natężeniu *I* przy takiej samej *całkowitej* różnicy potencjałów *U*, jak na rozważanych opornikach.

Na rysunku 27.5b przedstawiono obwód równoważny, w którym trzy oporniki z rysunku 27.5a zastąpiono opornikiem  $R_{\rm rw}$ .





Aby wyprowadzić wyrażenie na  $R_{rw}$  z rysunku 27.5b, zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do obydwu obwodów. Na rysunku 27.5a, zaczynając od punktu *a* i przechodząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół obwodu, otrzymujemy

$$\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_3 = 0,$$

czyli

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}.$$
 (27.5)

Na rysunku 27.5b w obwodzie, w którym trzy oporniki zastąpiono jednym równoważnym opornikiem  $R_{\rm rw}$ , mamy

$$\mathcal{E} - IR_{\rm rw} = 0$$

czyli

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\rm rw}}.$$
 (27.6)

Porównanie wzorów (27.5) i (27.6) prowadzi do wzoru

$$R_{\rm rw} = R_1 + R_2 + R_3$$

Rozszerzenie na n oporów jest proste i ma postać

$$R_{\rm rw} = \sum_{j=1}^{n} R_j$$
 (*n* oporników połączonych szeregowo). (27.7)

Zauważ, że gdy oporniki są połączone szeregowo, równoważny opór jest większy od oporu dowolnego opornika w szeregu.

# Sprawdzian 2

Na rysunku 27.5a mamy  $R_1 > R_2 > R_3$ . Uszereguj trzy oporniki według wartości: a) natężenia płynącego w nich prądu, b) różnicy potencjałów na nich, zaczynając od najwiekszej wartości.

opór wewnętrzny zmniejsza różnicę potencjałów pomiędzy biegunami



**Rys. 27.6.** Punkty *a* i *b*, które znajdują się na biegunach rzeczywistej baterii, mają różne potencjały

## Różnica potencjałów pomiędzy dwoma punktami

Często chcemy znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami obwodu. Może nas na przykład interesować, ile wynosi różnica potencjałów  $V_b$  i  $V_a$ , między punktami *a* i *b* na rys. 27.6? Aby ją obliczyć, przeanalizujmy obwód zaczynając od punktu *a* (o potencjale  $V_a$ ), przechodząc przez baterię i dochodząc do punktu *b* (o potencjale  $V_b$ ), notując przy tym zmiany potencjału, które obserwujemy po drodze. Gdy przechodzimy przez SEM baterii, potencjał zwiększa się o  $\mathcal{E}$ . Gdy przechodzimy przez opór wewnętrzny baterii *r*, poruszamy się zgodnie z kierunkiem płynącego prądu, zatem potencjał maleje o *Ir*. Jesteśmy wtedy w punkcie *b* o potencjale  $V_b$ , stad

$$V_a + \mathcal{E} - Ir = V_b$$

$$V_b - V_a = \mathcal{E} - Ir. \tag{27.8}$$

Aby znaleźć tę różnicę, musimy znać natężenie prądu *I*. Zauważ, że rozważany obwód jest taki sam jak ten z rysunku 27.4a, dla którego wzór (27.4) daje

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$
(27.9)

Podstawiając to równanie do wzoru (27.8), otrzymujemy

$$V_b - V_a = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{R+r}r = \frac{\mathcal{E}}{R+r}R.$$
 (27.10)

Podstawiając do tego wyrażenia dane z rysunku 27.6, otrzymujemy

$$V_b - V_a = \frac{12 \text{ V}}{4 \Omega + 2 \Omega} 4 \Omega = 8 \text{ V}.$$
 (27.11)

Przypuśćmy dla odmiany, że od a do b poruszamy się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, przechodząc przez opornik R, a nie przez baterię. Ponieważ poruszamy się przeciwnie do kierunku prądu, potencjał zwiększa się o IR. Zatem

 $V_a + IR = V_b$ 

$$V_b - V_a = IR. (27.12)$$

Podstawiając *I* z równania (27.9), otrzymujemy znowu wzór (27.10). Tak więc podstawienie danych z rysunku 27.6 da nam ten sam wynik  $V_b - V_a = 8$  V.

 $\frown$ 

Aby znaleźć różnicę potencjałów między dwoma punktami obwodu, należy rozpocząć analizę w jednym punkcie, przejść wzdłuż obwodu do drugiego, dowolną drogą, i dodać algebraicznie napotkane zmiany potencjału.

#### Różnica potencjału pomiędzy biegunami rzeczywistej baterii

Na rysunku 27.6 punkty *a* i *b* znajdują się na biegunach baterii. Tak więc różnica potencjałów  $V_b - V_a$  jest różnicą potencjałów *U* pomiędzy biegunami baterii. Ze wzoru (27.8) widzimy, że

$$U = \mathcal{E} - Ir. \tag{27.13}$$

Gdyby opór wewnętrzny baterii r na rysunku 27.6 wynosił zero, to wzór (27.13) mówiłby nam, że U jest równe SEM baterii, a więc 12 V. Jednak ponieważ  $r = 2 \Omega$ , to ze wzoru (27.13) wynika, że r jest mniejsze niż  $\mathcal{E}$ . Ze wzoru (27.11) wiemy, że różnica potencjałów U wynosi zaledwie 8 V. Zauważ, że wynik ten zależy od natężenia prądu płynącego przez baterię. Gdyby ta sama bateria znajdowała się w innym obwodzie i płynąłby przez nią prąd o innym natężeniu, to U miałoby jakąś inną wartość.

#### Uziemienie obwodu

Na rysunku 27.7a przedstawiono taki sam obwód jak na rysunku 27.6 z wyjątkiem tego, że punkt *a* jest bezpośrednio połączony z *ziemią*, co pokazano używając standardowego symbolu  $\pm$ . *Uziemienie obwodu* zwykle oznacza połączenie obwodu ze ścieżką przewodzenia prowadzącą do powierzchni Ziemi (a w zasadzie z przewodzącymi prąd wilgotnym gruntem i skałami znajdującymi się pod ziemią). W tym przypadku takie połączenie oznacza jedynie przyjęcie definicji, że potencjał w obwodzie w punkcie uziemienia wynosi zero. Tak więc na rysunku 27.7a potencjał w punkcie *a* jest z definicji równy  $V_a = 0$ . Wzór (27.11) mówi nam zatem, że potencjał w punkcie *b* wynosi  $V_b = 8$  V. Na rysunku 27.7b znajduje się taki sam obwód, z tym że tym razem uziemiony jest punkt *b*. Wzór (27.11) mówi nam teraz, że potencjał w punkcie *a* wynosi  $V_a = -8$  V.



**Rys. 27.7.** a) Punkt *a* jest uziemiony. b) Punkt *b* jest uziemiony

#### Moc, potencjał i SEM

Jeśli bateria lub inne źródło SEM wykonuje pracę nad nośnikami ładunku, wytwarzając prąd o natężeniu I, to przekazuje nośnikom ładunku energię ze źródła energii (np. źródła chemicznego w baterii). Rzeczywiste źródło SEM ma opór wewnętrzny r, a więc energia jest w nim także zamieniana na wewnętrzną energię termiczną, czyli ulega omówionemu w podrozdziale 26.5 rozproszeniu na oporze wewnętrznym. Postarajmy się połączyć te zmiany energii.

Wypadkowa szybkość *P* procesu przekazywania energii ze źródła SEM nośnikom ładunku (moc) jest dana wzorem (26.26)

$$P = IU, \tag{27.14}$$

gdzie U jest różnicą potencjałów między biegunami źródła SEM. Ze wzoru (27.13) możemy podstawić  $U = \mathcal{E} - Ir$  do wzoru (27.14) i otrzymać

$$P = I(\mathcal{E} - Ir) = I\mathcal{E} - I^2 r.$$
(27.15)

Widzimy, że człon  $I^2r$  we wzorze (27.15) jest szybkością zamiany energii na energię termiczną w źródle SEM

$$P_r = I^2 r$$
 (moc rozproszona w źródle). (27.16)

Człon  $I\mathcal{E}$  we wzorze (27.15) jest więc mocą  $P_{\text{SEM}}$  przekazu energii przez źródło *zarówno* nośnikom ładunku, jak i na rzecz wewnętrznej energii termicznej, czyli

$$P_{\text{SEM}} = I\mathcal{E}$$
 (moc źródła SEM). (27.17)

Jeśli źródło jest *ładowane* przez przepuszczenie przez nie prądu "w przeciwną stronę", to następuje przekaz energii *od* nośników ładunku *do* źródła, czyli zamiana energii zarówno na energię chemiczną źródła, jak

i na energię termiczną w oporze wewnętrznym r. Szybkość zamiany na energię chemiczną jest określona wzorem (27.17), szybkość rozpraszania wzorem (27.16), a szybkość dostarczania energii przez ładunki wzorem (27.14).

#### Sprawdzian 3

Źródło ma SEM równą 12 V i opór wewnętrzny 2  $\Omega$ . Czy różnica potencjałów między biegunami źródła jest większa, mniejsza, czy równa 12 V, jeśli prąd w źródle płynie: a) od ujemnego do dodatniego bieguna, b) od dodatniego do ujemnego bieguna, c) jeśli jego natężenie jest równe zeru?

#### Przykład 27.01. Obwód o jednym oczku i dwie rzeczywiste baterie

W obwodzie na rysunku 27.8a SEM i opory mają następujące wartości:

$$\mathcal{E}_1 = 4,4 \text{ V}, \qquad \mathcal{E}_2 = 2,1 \text{ V},$$
  
 $r_1 = 2,3 \Omega, \qquad r_2 = 1,8 \Omega, \qquad R = 5,5 \Omega.$ 

a) Ile wynosi natężenie pradu I w obwodzie?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Wyrażenie na natężenie prądu I w obwodzie o jednym oczku można otrzymać, korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa, w którym sumujemy zmiany potencjału wzdłuż całego obwodu.

**Obliczenia:** Chociaż znajomość kierunku prądu nie jest konieczna, możemy go łatwo określić ze znajomości SEM dwóch źródeł. Ponieważ  $\mathcal{E}_1$  jest większa od  $\mathcal{E}_2$ , więc źródło 1 wyznacza kierunek prądu i kierunek ten jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Zastosujemy więc drugie prawo Kirchhoffa, przechodząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, czyli przeciwnym do kierunku przepływu prądu, i rozpoczynając w punkcie *a*. (Decyzja, w którym punkcie zacząć i w którą stronę przechodzić jest arbitralna, ale raz podjęta musi być konsekwentnie respektowana w odniesieniu do dodatniego lub ujemnego znaku potencjału). Otrzymamy

$$-\mathcal{E}_1 + Ir_1 + IR + Ir_2 + \mathcal{E}_2 = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że wzór ten otrzymuje się także wtedy, gdy drugie prawo Kirchhoffa zastosujemy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara lub gdy rozpoczniemy w punkcie innym niż *a*. Warto porównać ten wzór, człon po członie, z rysunkiem 27.8b, przedstawiającym graficznie zmiany potencjału (przy potencjale w punkcie *a* przyjętym umownie za zero).





Wyznaczając z powyższego wzoru natężenie prądu *I*, otrzymujemy

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{4,4 \text{ V} - 2,1 \text{ V}}{5,5 \Omega + 2,3 \Omega + 1,8 \Omega}$$
  
= 0,24 A \approx 240 mA (odpowiedź)

**b**) Ile wynosi różnica potencjałów między punktami *a* i *b*?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Musimy zsumować różnice potencjałów pomiędzy punktami *a* i *b*.

**Obliczenia:** Jeśli rozpoczniemy w punkcie *b* (czyli od ujemnego bieguna źródła 1) i przejdziemy przez źródło 1 zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara do punktu *a* (do dodatniego bieguna źródła), to uwzględniając zmiany potencjału, otrzymamy

$$V_b - Ir_1 + \mathcal{E}_1 = V_a,$$

co daje nam

$$V_a - V_b = -Ir_1 + \mathcal{E}_1 = -(0,2396 \text{ A})(2,3 \Omega) + 4,4 \text{ V}$$
  
= +3,84 V \approx 3,8 V (odpowiedź).

Wynika stąd, że różnica potencjałów jest mniejsza od SEM źródła. Możemy to sprawdzić, rozpoczynając analizę w punkcie *b* na rysunku 27.8a i analizując obwód w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara do punktu *a*. Nauczyliśmy się w tym miejscu dwóch pożytecznych rzeczy. 1) Różnica potencjałów między dwoma punktami obwodu nie zależy od drogi, po której przechodziliśmy od jednego do drugiego punktu. 2) Gdy prąd płynie przez baterię we "właściwym" kierunku, różnica potencjałów między biegunami baterii jest mniejsza, niż wartość SEM baterii, która może być na niej podana.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **27.2.** OBWODY ELEKTRYCZNE O WIELU OCZKACH

#### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 27.17 zastosować pierwsze prawo Kirchhoffa;
- 27.18 narysować schemat obwodu z baterią i trzema opornikami połączonymi równolegle i odróżnić go od schematu obwodu z baterią i trzema opornikami połączonymi szeregowo;
- 27.19 zauważyć, że różnica potencjałów na opornikach połączonych równolegle jest taka sama jak różnica potencjałów na oporniku równoważnym;
- 27.20 obliczyć opór opornika równoważnego dla układu oporników połączonych równolegle;
- 27.21 zauważyć, że całkowite natężenie prądu płynącego przez oporniki połączone równolegle jest równe sumie natężeń prądów płynących przez pojedyncze oporniki;
- 27.22 uprościć obwód z baterią i opornikami połączonymi równolegle oraz opornikami połączonymi szeregowo w kolejnych krokach obejmujących znalezienie oporników równoważnych,

aż do określenia natężenia prądu płynącego przez baterię, a następnie odwrócenie procedury, aż do wyznaczenia natężeń prądów i różnic potencjałów na poszczególnych opornikach;

- 27.23 jeśli obwodu nie można uprościć poprzez wyznaczenie oporów równoważnych, znaleźć w nim zamiast tego różne oczka, zdefiniować prądy płynące w poszczególnych gałęziach obwodu oraz ich natężenia, zastosować pierwsze prawo Kirchhoffa do różnych oczek obwodu, a następnie rozwiązać uzyskany układ równań, znajdując nieznane natężenia prądu;
- 27.24 w obwodzie z identycznymi rzeczywistymi bateriami połączonymi szeregowo zamienić je na pojedynczą baterię doskonałą i pojedynczy opornik;
- 27.25 w obwodzie z identycznymi rzeczywistymi bateriami połączonymi równolegle zamienić je na pojedynczą baterię doskonałą i pojedynczy opornik.

#### Podstawowe fakty

 Jeśli oporniki są połączone równolegle, to różnica potencjałów na nich jest taka sama. Opór równoważny, który zastępuje oporniki połączone równolegle, jest określony wzorem

$$\frac{1}{R_{\rm rw}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}$$

(n oporników połączonych równolegle).

#### Obwody o wielu oczkach

Na rysunku 27.9 przedstawiono obwód składający się z więcej niż jednego oczka. Dla uproszczenia założymy, że źródła są doskonałe. W tym obwodzie są dwa *węzły*, *b* i *d*, i trzy *gałęzie*, łączące te węzły. Gałęziami są: lewa gałąź (*bad*), prawa gałąź (*bcd*) i środkowa gałąź (*bd*). Ile wynoszą natężenia prądów w tych trzech gałęziach?

Prądy oznaczymy, używając innego wskaźnika dla każdej gałęzi. Natężenie prądu  $I_1$  ma tę samą wartość wszędzie w gałęzi *bad*,  $I_2$  ma tę samą wartość wszędzie w gałęzi *bcd* i  $I_3$  jest natężeniem prądu płynącego przez gałąź *bd*. Kierunki prądów są przyjęte dowolnie.

Rozważmy na chwilę węzeł d: ładunek wpływa do tego węzła z wpływającymi prądami o natężeniach  $I_1$  i  $I_3$ , a wypływa z wypływającym prądem  $I_2$ . Ładunek w węźle nie zmienia się, a więc całkowite natężenie prądów wpływających do węzła musi być równe całkowitemu natężeniu prądów z niego wypływających

$$I_1 + I_3 = I_2. (27.18)$$

Można łatwo sprawdzić, że zastosowanie tego warunku do węzła *b* prowadzi dokładnie do tego samego wzoru. Ze wzoru (27.18) wynika więc ogólna zasada:

**Pierwsze prawo Kirchhoffa**. Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.

Jest to po prostu stwierdzenie zachowania ładunku przy stacjonarnym jego przepływie. W węźle ładunek nie może ani rosnąć, ani maleć. Naszymi podstawowymi narzędziami, służącymi do rozwiązywania złożonych obwodów są więc: *drugie prawo Kirchhoffa* (wynikające z zasady zachowania energii) i *pierwsze prawo Kirchhoffa* (wynikające z zasady zachowania ładunku).

Wzór (27.18) jest równaniem z trzema niewiadomymi. Aby je rozwiązać (czyli znaleźć natężenia trzech prądów), potrzebujemy dwóch dodatkowych równań, zawierających te same niewiadome. Otrzymujemy je przez dwukrotne zastosowanie pierwszego prawa Kirchhoffa. W obwodzie z rysunku 27.9 spośród trzech oczek możemy wybrać: lewe oczko (*badb*), prawe oczko (*bcdb*) i duże oczko (*badcb*). Nie ma znaczenia, które dwa oczka wybierzemy — wybierzmy na przykład lewe oczko i prawe oczko.

Jeśli analizujemy lewe oczko w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu b, to drugie prawo Kirchhoffa daje nam

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0. (27.19)$$

Jeśli analizujemy prawe oczko w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu *b*, to drugie prawo Kirchhoffa daje nam:

$$-I_3 R_3 - I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0. (27.20)$$

Mamy teraz trzy równania (wzory (27.18), (27.19) i (27.20)) z trzema nieznanymi natężeniami prądów. Możemy je rozwiązać na wiele sposobów.



d



Jeśli zastosowalibyśmy drugie prawo Kirchhoffa do dużego oczka, to otrzymalibyśmy (poruszając się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i rozpoczynając od punktu *b*) wzór

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0.$$

Może się wydawać, że równanie to zawiera dodatkową informację, ale w rzeczywistości jest tylko sumą równań (27.19) i (27.20).

#### Oporniki połączone równolegle

Na rysunku 27.10a przedstawiono trzy oporniki połączone *równolegle* i podłączone do doskonałego źródła o SEM równej  $\mathcal{E}$ . Określenie "równolegle" oznacza, że oporniki są razem połączone za pomocą przewodów z jednej strony i z drugiej strony oraz że różnica potencjałów U jest przyłożona do pary połączonych końcówek. Stąd na wszystkich trzech opornikach mamy taką samą różnicę potencjałów U, która wytwarza prąd w każdym z oporników.

Gdy różnica potencjałów U jest przyłożona do oporników połączonych równolegle, na wszystkich opornikach jest taka sama różnica potencjałów U.

Na rysunku 27.10a przyłożona różnica potencjałów U jest utrzymywana przez źródło. Na rysunku 27.10b trzy połączone równolegle oporniki zastąpiono równoważnym opornikiem  $R_{rw}$ .

# A

Oporniki połączone równolegle można zastąpić równoważnym opornikiem  $R_{rw}$ , do którego końców jest przyłożona taka sama różnica potencjałów U i przez który przepływa prąd o natężeniu I równym sumie natężeń prądów w opornikach połączonych równolegle.

Aby wyprowadzić wyrażenie określające opór  $R_{rw}$  (rys. 27.10b), zapiszmy najpierw wartość natężenia prądu w każdym z oporników na rysunku 27.10a

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{U}{R_2}, \qquad I_3 = \frac{U}{R_3}$$

różnica potencjałów na opornikach połączonych równolegle i ich oporze równoważnym jest taka sama



**Rys. 27.10.** a) Trzy oporniki połączone równolegle. b) Równoważny obwód, w którym trzy oporniki zastąpiono równoważnym im oporem  $R_{rw}$ 

gdzie U jest różnicą potencjałów między punktami a i b. Jeśli zastosujemy pierwsze prawo Kirchhoffa w punkcie a z rysunku 27.10a i podstawimy te wartości, to znajdziemy

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right).$$
 (27.21)

Gdybyśmy zastąpili oporniki połączone równolegle opornikiem równoważnym  $R_{rw}$  (rys. 27.10b), to mielibyśmy

$$I = \frac{U}{R_{\rm rw}}.$$
 (27.22)

Porównanie wzorów (27.21) i (27.22) prowadzi do wzoru

$$\frac{1}{R_{\rm rw}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$
 (27.23)

Uogólniając ten wynik na przypadek n oporników, mamy

$$\frac{1}{R_{\rm rw}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j} \qquad (n \text{ oporników połączonych równolegle}). \tag{27.24}$$

W przypadku dwóch oporników opornik równoważny ma opór równy iloczynowi oporów oporników podzielonemu przez ich sumę, czyli

$$R_{\rm rw} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$
 (27.25)

Zauważ, że gdy dwa lub więcej oporników jest połączonych równolegle, to opór równoważny jest mniejszy od każdego z oporów łączonych. W tabeli 27.1 podsumowano związki dla oporników i kondensatorów połączonych szeregowo i równolegle.

Tabala 2'	71 (		Irondonco	town mol			márron 0.1	0.010
Tapela 2	/.I. U	рогшкі і	Kondensa	lory poi	ączone s	szeregowo i	TOWHOI	egre

Szeregowo	Równolegle	Szeregowo	Równolegle				
Opt	orniki	Kondensatory					
$R_{\rm rw} = \sum_{j=1}^{n} R_j$ (27.7)	$\frac{1}{R_{\rm rw}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}$ (27.24)	$\frac{1}{C_{\rm rw}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j} \qquad (25.20)$	$C_{\rm rw} = \sum_{j=1}^{n} C_j$ (25.19)				
Takie samo natężenie prądu we wszystkich opornikach	Taka sama różnica potencjałów na wszystkich opornikach	Taki sam ładunek na wszystkich kondensatorach	Taka sama różnica potencjałów na wszystkich kondensatorach				

# Sprawdzian 4

Źródło o różnicy potencjałów U jest podłączone do układu dwóch identycznych oporników i powstaje w nim prąd o natężeniu I. Ile wynoszą różnice potencjałów i natężenia prądu dla każdego opornika, jeśli są one połączone: a) szeregowo, b) równolegle?

#### Przykład 27.02. Oporniki połączone równolegle i szeregowo

Na rysunku 27.11a przedstawiono obwód o wielu oczkach zawierający jedno doskonałe źródło i cztery oporniki, przy czym

 $R_1 = 20 \Omega, \qquad R_2 = 20 \Omega, \qquad \mathcal{E} = 12 V,$  $R_3 = 30 \Omega, \qquad R_4 = 8 \Omega.$ 

a) Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez źródło?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Zauważmy najpierw, że prąd płynący przez źródło jest równocześnie prądem płynącym przez opornik  $R_1$ . Możemy znaleźć jego natężenie przez zastosowanie drugiego prawa Kirchhoffa do oczka zawierającego  $R_1$ , ponieważ natężenie to pojawi się w wyrażeniu na różnicę potencjałów na oporniku  $R_1$ .

*Niewłaściwa metoda:* Możemy wybrać albo lewe oczko, albo duże oczko. Zauważając, że strzałka SEM baterii jest skierowana do góry, czyli prąd wytwarzany przez baterię ma kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara, zastosujemy drugie prawo Kirchhoffa do lewego oczka. Obwód będziemy analizować zgodnie z ruchem wskazówek zegara, rozpoczynając w punkcie *a*. Jeśli *I* jest natężeniem prądu płynącego przez źródło, to spróbujmy napisać:

$$+\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_4 = 0 \qquad (\text{wzór błędny}).$$

Wzór ten jest jednak błędny, ponieważ zakłada takie samo natężenie prądu *I* przepływającego przez oporniki  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_4$ . Przez oporniki  $R_1$  i  $R_4$  przepływa taki sam prąd, ponieważ prąd przepływający przez opornik  $R_4$  musi przepłynąć przez źródło i następnie przez opornik $R_1$  bez zmiany wartości. Prąd ten rozdziela się jednak w węźle b — tylko część przepływa przez opornik  $R_2$ , a reszta przez opornik  $R_3$ .

**Ślepa uliczka:** Aby odróżnić kilka prądów przepływających w obwodzie, musimy każdy z nich indywidualnie oznaczyć, tak jak na rysunku 27.11b. Wtedy przesuwając się z punktu *a* wzdłuż obwodu, możemy napisać drugie prawo Kirchhoffa dla lewego oczka w postaci

$$+\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_1 R_4 = 0.$$

Niestety, równanie to zawiera dwie niewiadome,  $I_1$  i  $I_2$ ; aby je wyznaczyć, będziemy potrzebować przynajmniej jeszcze jednego równania.

*Właściwa metoda:* Łatwiejszą metodą jest uproszczenie obwodu z rysunku 27.11b przez znalezienie oporów

równoważnych. Zauważ, że oporniki  $R_1$  i  $R_2$  *nie* są połączone szeregowo i tych oporów nie można zastąpić opornikiem równoważnym. Natomiast oporniki  $R_2$  i  $R_3$ są połączone równolegle i dlatego możemy zastosować wzór (27.24) lub (27.25), aby znaleźć opór równoważny  $R_{23}$ . Z ostatniego wzoru wynika, że

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(20 \,\Omega)(30 \,\Omega)}{50 \,\Omega} = 12 \,\Omega.$$

Możemy teraz przerysować obwód w postaci rysunku 27.11c; zauważ, że prąd płynący przez opornik  $R_{23}$  musi być prądem o natężeniu  $I_1$ , ponieważ ładunek przepływający przez oporniki  $R_1$  i  $R_4$  musi także przepłynąć przez opornik  $R_{23}$ . Dla tego prostego obwodu o jednym oczku drugie prawo Kirchhoffa (przy analizie obwodu zgodnie z ruchem wskazówek zegara, od punktu *a* tak jak na rysunku 27.11d) ma postać

$$\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_1 R_{23} - I_1 R_4 = 0.$$

Po podstawieniu podanych wartości otrzymujemy

$$12$$
 V −  $I_1(20 Ω)$  −  $I_1(12 Ω)$  −  $I_1(8 Ω)$  = 0,

skąd

$$I_1 = \frac{12 \text{ V}}{40 \Omega} = 0,30 \text{ A} \qquad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

**b**) Ile wynosi natężenie prądu  $I_2$ , przepływającego przez opornik  $R_2$ ?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Powróćmy do obwodu równoważnego z rysunku 27.11d, w którym oporniki o oporach  $R_2$  i  $R_3$  połączone równolegle zostały zastąpione opornikiem o oporze  $R_{23}$ . 2) Opory  $R_2$  i  $R_3$  są połączone równolegle, a więc różnica potencjałów na tych opornikach jest taka sama, jak na równoważnym im oporniku  $R_{23}$ .

**Procedura odwrotna:** Wiemy, że natężenie prądu płynącego przez  $R_{23}$  wynosi  $I_1 = 0,3$  A. Możemy zatem zastosować wzór (26.8) (R = U/I) w celu obliczenia różnicy potencjałów  $U_{23}$  na oporniku  $R_{23}$ 

$$U_{23} = I_1 R_{23} = (0, 3 \text{ A})(12 \Omega) = 3,6 \text{ V}.$$

Różnica potencjałów na oporniku  $R_2$  wynosi więc 3,6 V (rys. 27.11f), czyli natężenie prądu  $I_2$  płynącego przez opornik  $R_2$  jest na podstawie wzoru (26.8) i rysunku 27.11g równe

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{3.6 \text{ V}}{30 \,\Omega} = 0.18 \text{ A}$$
 (odpowiedź).



**Rys. 27.11.** a) Obwód o wielu oczkach z doskonałym źródłem SEM. b) Wybór kierunków prądów płynących przez oporniki. c) Uproszczenie obwodu przez zastąpienie oporników oporem równoważnym. d)–g) Procedura odwrotna znajdowania natężeń prądów płynących przez oporniki połączone równolegle **c**) Ile wynosi natężenie prądu *I*<sub>3</sub> płynącego przez opornik *R*<sub>3</sub>?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Odpowiedź możemy znaleźć dwiema matodami: 1) Stosując wzór (26.8), jak to zrobiliśmy powyżej. 2) Korzystając z pierwszego prawa Kirchhoffa: w punkcie b na rysunku 27.11b prąd wpływający  $I_1$  i prądy wypływające  $I_2$  i  $I_3$  są powiązane wzorem

$$I_1 = I_2 + I_3$$

**Obliczenia:** Przekształcając powyższe równanie, otrzymujemy wynik przedstawiony na rysunku 27.11g

 $I_3 = I_1 - I_2 = 0,3 \text{ A} - 0,18 \text{ A} = 0,12 \text{ A}$  (odpowiedź).

#### Przykład 27.03. Wiele rzeczywistych baterii połączonych szeregowo i równolegle w rybie elektrycznej

Ryby elektryczne potrafią wytworzyć prąd w swych komórkach biologicznych, zwanych *płytkami elektrycznymi*, które są fizjologicznymi źródłami SEM. Płytki elektryczne strętwy (łac. *electrophorus electricus*) z Ameryki Południowej są rozmieszczone w 140 rzędach, ułożonych poziomo wzdłuż ciała, z których każdy zawiera 5000 płytek elektrycznych. Cały układ jest schematycznie przedstawiony na rys. 27.12a; każda płytka elektryczna ma SEM  $\mathcal{E} = 0,15$  V i opór wewnętrzny  $r = 0,25 \Omega$ . Woda otaczająca strętwę domyka obwód między dwoma końcami układu płytek elektrycznych jednym na głowie ryby i drugim w pobliżu jej ogona.



**Rys. 27.12.** a) Model obwodu elektrycznego strętwy w wodzie. Wzdłuż każdego ze 140 rzędów rozciągających się od głowy do ogona ryby znajduje się 5000 płytek elektrycznych. Opór otaczającej wody wynosi  $R_w$ . b) SEM  $\mathcal{E}_{rz}$  i opór  $R_{rz}$  każdego rzędu. c) SEM między punktami *a* i *b* wynosi  $\mathcal{E}_{rz}$ . Między punktami *b* i *c* jest 140 oporów  $R_{rz}$  połączonych równolegle. d) Obwód uproszczony
a) Jakie natężenie prądu może wytworzyć strętwa w otaczającej ją wodzie, która ma opór  $R_w = 800 \Omega$ ?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Obwód z rysunku 27.12a można uprościć, zastępując układ SEM i oporów wewnętrznych układem równoważnego SEM i oporów.

**Obliczenia:** Najpierw rozważymy pojedynczy rząd. Całkowita SEM  $\mathcal{E}_{rz}$  rzędu 5000 płytek elektrycznych jest sumą SEM płytek

$$\mathcal{E}_{rz} = 5000\mathcal{E} = (5000)(0, 15 \text{ V}) = 750 \text{ V}.$$

Całkowity opór  $R_{rz}$  każdego rzędu jest sumą oporów wewnętrznych 5000 płytek

 $R_{\rm rz} = 5000r = (5000)(0,25\,\Omega) = 1250\,\Omega.$ 

Możemy teraz zastąpić każdy ze 140 identycznych rzędów pojedynczym SEM  $\mathcal{E}_{rz}$  i pojedynczym oporem  $R_{rz}$ , jak na rysunku 27.12b.

Na rysunku 27.12b SEM między punktami *a* i *b* w każdym rzędzie wynosi  $\mathcal{E}_{rz} = 750$  V. Rzędy są identyczne i połączone z lewej strony na rysunku 27.12b, a więc wszystkie punkty *b* na rysunku mają ten sam potencjał elektryczny. Możemy więc potraktować te punkty jako połączone i założyć, że jest tylko jeden punkt *b*. SEM między punktem *a* i tym pojedynczym punktem *b* wynosi  $\mathcal{E}_{rz} = 750$  V. Możemy więc narysować obwód taki jak na rysunku 27.12c.

Między punktami *b* i *c* na rysunku 27.12c znajduje się 140 oporników  $R_{rz} = 1250 \Omega$  połączonych równolegle. Równoważny opór  $R_{rw}$  tego układu jest określony wzorem (27.24)

$$\frac{1}{R_{\rm rz}} = \sum_{j=1}^{140} = \frac{1}{R_j} = 140 \frac{1}{R_{\rm rz}},$$

#### Przykład 27.04. Obwód o wielu oczkach i jednoczesne zastosowanie obu praw Kirchhoffa

Na rysunku 27.13 przedstawiono obwód, którego elementy mają następujące parametry:  $\mathcal{E}_1 = 3 \text{ V}, \mathcal{E}_2 = 6 \text{ V}, R_1 = 2 \Omega, R_2 = 4 \Omega$ . Wszystkie trzy źródła są źródłami doskonałymi. Znajdź natężenie i kierunek prądu w każdej z trzech gałęzi.

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Nie warto podejmować próby uproszczenia tego obwodu, gdyż żadne dwa oporniki nie są połączone równolegle, a dla oporników połączonych szeregowo (w praczyli:

$$R_{\rm rz} = \frac{R_{\rm rz}}{140} = \frac{1250\,\Omega}{140} = 8,93\,\Omega$$

Zastępując układ połączonych równolegle oporników jednym opornikiem równoważnym  $R_{rw}$ , otrzymujemy uproszczony obwód z rysunku 27.12d. Stosując drugie prawo Kirchhoffa dla tego obwodu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i rozpoczynając od punktu *b*, mamy

$$\mathcal{E}_{\rm rz} = I R_{\rm w} - I R_{\rm rw} = 0.$$

Wyznaczając stąd *I* i podstawiając znane wartości, otrzymujemy

$$I = \frac{\mathcal{E}_{rz}}{R_{w} + R_{rw}} = \frac{750 \text{ V}}{800 \ \Omega + 8,93 \ \Omega}$$
  
= 0,927 A \approx 0,93 A (odpowiedź).

Jeśli w pobliżu głowy lub ogona strętwy pojawi się inna ryba, to część tego prądu może przejść wąskim kanałem przez nią, porażając ją lub zabijając.

**b**) Ile wynosi natężenie prądu  $I_{rz}$  przepływającego przez każdy rząd z rysunku 27.12a?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Rzędy są identyczne, a więc prąd wpływający i wypływający ze strętwy dzieli się równo między rzędy.

Obliczenia: Możemy zatem napisać

$$I_{\rm rz} = \frac{I}{140} = \frac{0.927 \,\text{A}}{140} = 6.6 \cdot 10^{-3} \,\text{A} \,\text{(odpowiedź)}.$$

Jak widać, prąd przepływający przez każdy rząd jest mały, ponad dwa rzędy wielkości mniejszy niż prąd przepływający przez wodę. Prąd jest więc rozłożony na całe ciało strętwy i w przeciwieństwie do pobliskiej ryby nie zostaje ona porażona ani zabita.

wej lub lewej gałęzi) możemy od razu obliczyć opór równoważny. Należy więc zastosować pierwsze i drugie prawo Kirchhoffa.

*Pierwsze prawo Kirchhoffa:* Wybieramy dowolnie kierunki prądów, tak jak na rys. 27.13, i stosujemy pierwsze prawo Kirchhoffa w punkcie *a*, pisząc

$$I_3 = I_1 + I_2. (27.26)$$

Zastosowanie pierwszego prawa Kirchhoffa w punkcie *b* daje takie samo równanie, więc zastosujemy drugie



**Rys. 27.13.** Obwód o wielu oczkach z trzema doskonałymi źródłami i pięcioma opornikami

prawo Kirchhoffa dla dwóch oczek, dowolnie wybranych spośród trzech możliwych.

*Lewe oczko:* Najpierw wybieramy lewe oczko i rozpoczynając od punktu *b*, analizujemy je w kierunku ruchu wskazówek zegara, pisząc

$$-I_1R_1 + \mathcal{E}_1 - I_1R_1 - (I_1 + I_2)R_2 - \mathcal{E}_2 = 0,$$

gdzie w środkowej gałęźi zamiast  $I_3$  podstawiliśmy  $I_1 + I_2$ . Podstawiając dane, mamy po uproszczeniu

$$I_1(8\,\Omega) + I_2(4\,\Omega) = -3\,\mathrm{V}.$$
 (27.27)

**Prawe oczko:** Stosując drugie prawo Kirchhoffa do prawego oczka, analizujemy je zgodnie z ruchem wskazówek zegara, rozpoczynając od punktu b. Otrzymujemy

$$-I_2R_1 + \mathcal{E}_2 - I_2R_1 - (I_1 + I_2)R_2 - \mathcal{E}_2 = 0.$$

Podstawiając znane wartości, mamy

$$I_2(4\,\Omega) + I_2(8\,\Omega) = 0. \tag{27.28}$$

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

## **27.3.** AMPEROMIERZ I WOLTOMIERZ

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

27.26 wyjaśnić sposób użycia amperomierza i woltomierza,

Podstawowe fakty.

Do pomiarów w obwodach elektrycznych można wykorzystać trzy przyrządy. Amperomierz służy do pomiaru natężenia prądu.
 Woltomierz stosujemy do pomiaru napięcia (różnicy potencjałów). Multimetr można używać do pomiaru natężenia prądu, napięcia lub oporu.

#### Amperomierz i woltomierz

Przyrząd używany do pomiaru natężenia prądu nazywamy *amperomierzem*. Aby zmierzyć natężenie prądu w przewodzie, należy przewód przeciąć i tak

aby nie zaburzyć mierzonych wielkości.

**Połączenie równań:** Mamy teraz do rozwiązania układ dwóch równań (27.27) i (27.28) z dwiema niewiadomymi  $I_1$  i  $I_2$ ; możemy to zrobić bezpośrednio (co w tym przypadku jest całkiem łatwe) lub korzystając z metod rozwiązywania układów równań, np. metody Cramera, przedstawionej w dodatku E. Otrzymujemy

$$I_1 = -0.5 \,\mathrm{A.}$$
 (27.29)

(Znak minus oznacza, że wybrany przez nas kierunek przepływu prądu  $I_1$  na rysunku 27.13 był błędny, ale na jego poprawę musimy chwilę zaczekać). Podstawiając  $I_1 = -0.5$  A do wzoru (27.28) i wyznaczając  $I_2$ , otrzymujemy

$$I_2 = 0,25 \text{ A}$$
 (odpowiedź).

Po podstawieniu do wzoru (27.26) mamy wtedy

$$I_3 = I_1 + I_2 = -0.5 \text{ A} + 0.25 \text{ A} = -0.25 \text{ A}.$$

Dodatnia wartość otrzymana dla  $I_2$  oznacza, że nasz wybór kierunku dla tego prądu był poprawny. Ujemne wartości otrzymane dla  $I_1$  oraz  $I_3$  oznaczają, że wybór kierunków dla tych prądów był błędny. W *ostatnim kroku* możemy teraz poprawić kierunki prądów  $I_1$  oraz  $I_3$  na rysunku 27.13 i zapisać ich natężenia w postaci

$$I_1 = 0.5 \text{ A}$$
 i  $I_3 = 0.25 \text{ A}$  (odpowiedź).

*Uwaga:* Pokazane powyżej poprawki wykonuj zawsze w ostatnim kroku, a nie przed obliczeniem *wszystkich* natężeń prądu.

a także określić, jaki opór musi mieć każde z tych urządzeń,

wstawić amperomierz, żeby mierzony prąd przepływał przez miernik. (Na rysunku 27.14 amperomierz A jest włączony w obwód tak, aby służył do pomiaru natężenia prądu I). Istotne jest, aby opór  $R_A$  amperomierza był bardzo mały w porównaniu z innymi oporami w obwodzie. W przeciwnym razie sama obecność miernika zmieni natężenie mierzonego prądu.

Miernik używany do pomiaru różnicy potencjałów nazywamy *woltomierzem*. Aby znaleźć różnicę potencjałów między dowolnymi dwoma punktami, należy zaciski woltomierza podłączyć do tych punktów, bez przecinania przewodu. (Na rysunku 27.14 woltomierz V jest włączony w obwód tak, aby służył do pomiaru różnicy potencjałów na oporniku  $R_1$ ). Istotne jest, aby opór  $R_V$  woltomierza był bardzo duży w porównaniu z oporem elementu obwodu, do którego woltomierz jest podłączony. W przeciwnym razie sam miernik staje się ważnym elementem obwodu i zmienia różnicę potencjałów, którą mamy zmierzyć.

Często pojedynczy miernik jest tak zbudowany, że przy użyciu przełącznika można spowodować, że będzie nam służył albo jako amperomierz, albo jako woltomierz, a zwykle także jako *omomierz*, czyli miernik do pomiaru oporu dowolnego, podłączonego do jego zacisków, elementu. Taki uniwersalny miernik nazywamy *multimetrem*.

# 27.4. OBWODY RC

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **27.27** narysować schemat obwodu *RC* z ładowanym i rozładowywanym kondensatorem;
- 27.28 napisać drugie prawo Kirchhoffa (w postaci różniczkowej) dla obwodu *RC* z ładowanym kondensatorem;
- 27.29 napisać drugie prawo Kirchhoffa (w postaci różniczkowej) dla obwodu RC z rozładowywanym kondensatorem;
- 27.30 zastosować wzór opisujący zależność ładunku na ładowanym lub rozładowywanym kondensatorze w obwodzie RC od czasu;
- **27.31** korzystając ze wzoru opisującego ładunek na ładowanym lub rozładowywanym kondensatorze w obwodzie *RC*

#### Podstawowe fakty

• Jeśli SEM o wartości  $\mathcal{E}$  jest przyłożona do opornika o oporze R i kondensatora o pojemności C połączonych szeregowo, to ładunek na kondensatorze wzrasta zgodnie ze wzorem

 $q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/(RC)})$  (ładowanie kondensatora),

w którym  $C\mathcal{E} = q_0$  jest stacjonarnym (końcowym) ładunkiem, a  $RC = \tau$  jest pojemnościową stałą czasową obwodu.

Podczas ładowania natężenie prądu wynosi

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) \mathrm{e}^{-t/RC} \qquad \text{(adowanie kondensatora)}.$$



- 27.32 w obwodzie RC z ładowanym lub rozładowywanym kondensatorze znaleźć zależność natężenia prądu płynącego przez opornik od czasu;
- **27.33** obliczyć pojemnościową stałą czasową  $\tau$ ;
- 27.34 w obwodzie RC z ładowanym lub rozładowywanym kondensatorem określić ładunek i różnicę potencjałów na kondensatorze na początku tego procesu, a także po dostatecznie długim czasie.

• Jeśli kondensator rozładowuje się przez opornik *R*, to ładunek na kondensatorze maleje zgodnie ze wzorem

$$q = q_0 e^{-t/(RC)}$$
 (rozładowanie kondensatora)

 Natężenie prądu podczas rozładowywania kondensatora wynosi

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) \mathrm{e}^{-t/RC} \qquad \text{(rozładowanie kondensatora)}.$$



**Rys. 27.14.** Obwód o jednym oczku, w który włączono amperomierz (A) i woltomierz (V)



**Rys. 27.15.** Jeśli klucz S ustawimy w punkcie *a*, to kondensator *ładuje się* przez opornik. Jeśli klucz następnie ustawimy w punkcie *b*, to kondensator *rozładowuje się* przez opornik

#### Obwody RC

W poprzednich podrozdziałach zajmowaliśmy się tylko obwodami, w których płyną prądy stałe, czyli prądy o natężeniach nie ulegających zmianie w czasie. Teraz rozpoczniemy analizę obwodów, w których płyną prądy zmienne, czyli prądy o natężeniach zmieniających się w czasie.

#### Ładowanie kondensatora

Kondensator o pojemności *C* na rysunku 27.15 jest początkowo nienaładowany. Aby go naładować, przesuwamy klucz S do punktu *a*. Powstaje wtedy *obwód szeregowy RC*, składający się z kondensatora, doskonałego źródła o SEM  $\mathcal{E}$  i opornika o oporze *R*.

Z podrozdziału 25.1 wiemy już, że z chwilą zamknięcia obwodu zaczyna przepływać ładunek (przepływ ładunku to prąd) między okładką kondensatora i biegunem baterii po każdej stronie kondensatora. Ten prąd zwiększa ładunek q na okładkach i różnicę potencjałów  $U_C = q/C$ ) na kondensatorze. Gdy ta różnica potencjałów stanie się równa różnicy potencjałów na źródle (równej tu SEM  $\mathcal{E}$ ), natężenie prądu stanie się równe zeru. Zgodnie ze wzorem (25.1) (q = CU) stacjonarny (końcowy) ładunek na całkowicie wtedy naładowanym kondensatorze wynosi  $C\mathcal{E}$ .

Chcemy teraz zbadać proces ładowania. W szczególności chcemy wiedzieć, jak podczas ładowania zmieniają się w czasie: ładunek q(t) na okładkach kondensatora, różnica potencjałów  $U_C(t)$  na kondensatorze i natężenie prądu I(t) w obwodzie. Zaczniemy od zastosowania do obwodu drugiego prawa Kirchhoffa, przechodząc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara od ujemnego bieguna baterii. Otrzymujemy wtedy

$$\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} = 0. \tag{27.30}$$

Ostatni wyraz po lewej stronie równania przedstawia różnicę potencjałów na kondensatorze. Wyraz ten jest ujemny, ponieważ górna okładka kondensatora, połączona z dodatnim biegunem baterii, ma większy potencjał niż dolna okładka. Istnieje więc spadek potencjału, gdyż przechodzimy przez kondensator w dół.

Nie możemy bezpośrednio rozwiązać równania (27.30), ponieważ zawiera ono dwie zmienne *I* i *q*. Jednak zmienne te są zależne i powiązane wzorem  $I = \frac{dq}{dt}$ (27.31)

$$=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$
 (27.31)

Po podstawieniu wyrażenia na I do wzoru (27.30) i przestawieniu wyrazów, otrzymujemy

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$
 (równanie ładowania). (27.32)

Powyższe równanie różniczkowe opisuje zależność od czasu ładunku q na kondensatorze pokazanym na rysunku 27.15. Aby je rozwiązać, musimy znaleźć funkcję q(t), która spełnia to równanie oraz warunek początkowy, że kondensator jest początkowo nienaładowany, czyli q = 0 dla t = 0.

Pokażemy wkrótce, że rozwiązanie równania (27.32) ma postać

 $q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$  (ładowanie kondensatora). (27.33)

(Liczba e = 2,718... jest podstawą logarytmów naturalnych, a nie symbolem elektronu.) Zauważ, że funkcja ze wzoru (27.33) rzeczywiście spełnia nasz warunek początkowy, ponieważ dla t = 0 wyraz  $e^{-t/RC}$  jest równy jedności i zgodnie ze wzorem otrzymujemy wtedy q = 0. Zauważ też, że gdy czas dąży do nieskończoności, wyraz  $^{-t/RC}$  dąży do zera i wzór daje poprawną wartość końcowego (stacjonarnego) ładunku na kondensatorze  $q = C\mathcal{E}$ . Wykres q(t) dla procesu ładowania jest przedstawiony na rysunku 27.16a.

Pochodna funkcji q(t) względem czasu jest równa natężeniu prądu I(t) ładującego kondensator

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) \mathrm{e}^{-t/RC} \qquad \text{(adowanie kondensatora).} \qquad (27.34)$$

Wykres funkcji I(t) dla procesu ładowania jest przedstawiony na rysunku 27.16b. Zauważ, że wartość początkowa natężenia prądu wynosi  $\mathcal{E}/\mathcal{R}$  i że natężenie maleje do zera, gdy kondensator zostanie całkowicie naładowany.

Ładowany kondensator początkowo zachowuje się przy przepływie prądu jak zwykły przewodnik bez oporu, a po upływie długiego czasu jak przerwa w obwodzie.

Stosując wzory (25.1) (q = CU) i (27.33), znajdujemy różnicę potencjałów  $U_C(t)$  na kondensatorze podczas ładowania

$$U_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$$
 (ładowanie kondensatora.) (27.35)

Z otrzymanego wzoru widzimy, że  $U_C = 0$  dla t = 0 i że  $U_C = \mathcal{E}$  dla  $t \to \infty$ , gdy kondensator zostanie całkowicie naładowany.

#### Stała czasowa

Iloczyn *RC* występujący we wzorach (27.33), (27.34) i (27.35) ma wymiar czasu (gdyż argument funkcji wykładniczej musi być bezwymiarowy, a 1  $\Omega \cdot 1$  F = 1 s). Wielkość *RC* nazywamy **pojemnościową stałą czasową** obwodu i oznaczamy symbolem  $\tau$ 

$$\tau = RC$$
 (stała czasowa). (27.36)

Ze wzoru (27.33) widzimy teraz, że w chwili  $t = \tau$  (= *RC*) ładunek na początkowo nienaładowanym kondensatorze z rysunku 27.15 wzrasta od zera do wartości

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-1}) = 0,63C\mathcal{E}.$$
 (27.37)

Innymi słowy, w ciągu czasu równego stałej czasowej  $\tau$  ładunek wzrasta od zera do 63% końcowej wartości  $C\mathcal{E}$ . Na rysunku 27.16 małe trójkąty na osi czasu oznaczają kolejne przedziały czasu równe stałej czasowej w procesie ładowania kondensatora. Czasy ładowania kondensatora wyrażamy często przez podanie  $\tau$ . Na przykład obwód o stałej czasowej  $\tau = 1 \,\mu$ s ładuje się szybko, a obwód o stałej czasowej  $\tau = 100$  s ładuje się znacznie wolniej.





**Rys. 27.16.** a) Wykres zależności ze wzoru (27.33) opisującej narastanie ładunku na kondensatorze z rysunku 27.15. b) Wykres zależności ze wzoru (27.34) opisującej zmniejszanie się prądu ładowania w obwodzie z rysunku 27.15. Krzywe zostały wykreślone dla  $R = 2000 \Omega$ ,  $C = 1 \mu$  F i  $\mathcal{E} = 10$  V; małe trójkąty oznaczają kolejne wielokrotności stałej czasowej  $\tau$ 

#### Rozładowanie kondensatora

Załóżmy teraz, że kondensator na rysunku 27.15 jest całkowicie naładowany do różnicy potencjałów  $U_0$  równej SEM  $\mathcal{E}$  źródła i w chwili t = 0klucz S przestawiamy z punktu *a* do punktu *b*. Kondensator może się więc *rozładowywać* przez opornik *R*. Jak ładunek q(t) na kondensatorze i natężenie prądu I(t) płynącego przez obwód, zawierający kondensator i opornik, zmieniają się w czasie?

Równanie różniczkowe opisujące q(t) jest identyczne z równaniem (27.32), lecz teraz nie ma w obwodzie źródła, czyli należy przyjąć  $\mathcal{E} = 0$ . Stad

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0 \qquad \text{(równanie rozładowania).} \tag{27.38}$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego ma postać

$$q = q_0 e^{-t/RC}$$
 (rozładowanie kondensatora), (27.39)

gdzie  $q_0 = CV_0$  jest początkowym ładunkiem na kondensatorze. Przez podstawienie można sprawdzić, że funkcja ze wzoru (27.39) jest rzeczywiście rozwiązaniem równania (27.38).

Ze wzoru (27.39) wynika, że ładunek q maleje wykładniczo w czasie z szybkością zależną od pojemnościowej stałej czasowej  $\tau = RC$ . W chwili  $t = \tau$  ładunek na kondensatorze wynosi  $qe^{-1}$ , czyli 37% początkowej wartości. Zauważ, że większa stała  $\tau$  oznacza dłuższy czas rozładowania.

Przez różniczkowanie funkcji q(t) ze wzoru (27.39) względem czasu otrzymamy natężenie prądu I(t)

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) \mathrm{e}^{-t/RC} \qquad \text{(rozładowanie kondensatora).}$$
(27.40)

Z otrzymanego wzoru wynika, że natężenie prądu także maleje wykładniczo w czasie z szybkością określoną przez  $\tau$ . Początkowo natężenie prądu jest równe  $I_0 = q_0/RC$ . Zauważ, że  $I_0$  możemy znaleźć, stosując drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu w chwili t = 0; wtedy początkowa różnica potencjałów  $U_0$  jest również różnicą potencjałów na oporniku R, czyli natężenie prądu musi wynosić  $I_0 = U_0/R = (q_0/C)/R = q_0/RC$ . Znak minus we wzorze (27.40) oznacza, że prąd rozładowania kondensatora płynie w kierunku przeciwnym niż prąd jego ładowania.

#### Wyprowadzenie wzoru (27.33)

Aby rozwiązać równanie (27.32), przepiszemy je najpierw w postaci

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$
(27.41)

Ogólne rozwiązanie tego równania różniczkowego ma postać

$$q = q_{\rm p} + K {\rm e}^{-at},$$
 (27.42)

gdzie  $q_p$  jest *rozwiązaniem szczególnym* równania różniczkowego, K — stałą, którą trzeba obliczyć z warunków początkowych, a a = 1/(RC)

jest współczynnikiem przy q w równaniu (27.41). Aby znaleźć  $q_p$ , podstawiamy dq/dt = 0 we wzorze (27.41) (co odpowiada warunkowi końcowemu, jakim jest brak dalszego ładowania), wstawiamy  $q = q_p$  i jako rozwiązanie otrzymujemy

$$q_{\rm p} = C\mathcal{E}.\tag{27.43}$$

Aby obliczyć *K*, podstawiamy otrzymany wynik do wzoru (27.42)

$$q = C\mathcal{E} + Ke^{-at}$$

Uwzględniając warunek początkowy q = 0 dla t = 0, mamy

$$0 = C\mathcal{E} + K,$$

czyli  $K = -C\mathcal{E}$ . Po podstawieniu otrzymanych wartości  $q_p$ , *a* i *K* do wzoru (27.42) otrzymujemy

$$q = C\mathcal{E} - C\mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/RC},$$

co odpowiada wzorowi (27.33).

#### Sprawdzian 5

W tabelce podano cztery zestawy wartości parametrów obwodu z rysunku 27.15. Uszereguj je zgodnie z wartościami: a) początkowego natężenia prądu (po przesunięciu klucza do punktu *a*), b) czasu, potrzebnego na zmniejszenie natężenia prądu do połowy początkowej wartości, zaczynając od wartości największych.

	1	2	3	4
$\mathcal{E}(V)$	12	12	10	10
$R(\Omega)$	2	3	10	5
$C(\mu F)$	3	2	0,5	2

#### Przykład 27.05. Rozładowywanie obwodu *RC* w celu uniknięcia pożaru w pit-stopie na wyścigach samochodowych

W trakcie jazdy samochodu elektrony przemieszczają się z jezdni najpierw na opony, a później na karoserię. Pojazd magazynuje ten ładunek nadmiarowy i związaną z nim elektryczną energię potencjalną, tak jakby jedną okładką kondensatora była karoseria saochodu, a drugą jezdnia (rys. 27.17a). Gdy samochód zatrzymuje się, ten nadmiarowy ładunek i energia odpływają przez opony dokładnie tak, jak kondensator rozładowuje się przez opornik. Jeśli jakiś przewodzący obiekt znajdzie się w odległości kilku centymetrów od samochodu zanim pojazd zostanie rozładowany, to pozostała w nim energia może się gwałtownie przekształcić w iskrę powstałą pomiędzy autem a tym obiektem. Przypuśćmy, że tym przewodzącym obiektem jest nalewak paliwowy. Iskra nie zapali paliwa (nie spowoduje pożaru), jeśli energia iskry jest mniejsza niż wartość krytyczna  $E_{zap}$  = 50 mJ.

Gdy samochód z rysunku 27.17a zatrzymuje się w chwili t = 0, różnica potencjałów pomiędzy samochodem i ziemią  $U_0 = 30 \text{ kV}$ . Pojemność układu autoziemia C = 500 pF, a opór *każdej* opony  $R_{\text{op}} = 100 \text{ G}\Omega$ . Ile czasu zabierze rozładowanie samochodu przez opony poniżej wartości krytycznej  $E_{\text{zap}}$ ?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) w dowolnym czasie *t* zmagazynowana elektryczna energia potencjalna  $E_p$  związana jest ze zmagazynowanym *q* zgodnie ze wzorem (25.21) ( $E_p = q^2/2C$ ). 2) Podczas rozładowywania kondensatora ładunek maleje z czasem zgodnie ze wzorem (27.39) ( $q = q_0 e^{-\tau/RC}$ ).

**Obliczenia:** Możemy potraktować opony jako oporniki, których górne końce połączone są ze sobą poprzez karo-



Rys. 27.17. a) Naładowany samochód i jezdnia działają jak kondensator, który może się rozładować poprzez opony.
b) Równoważny obwód z kondensatorem samochód-jezdnia i czterema oporami opon R<sub>op</sub> połączonymi równolegle.
c) Równoważny opór opon. d) Elektryczna energia potencjalna E<sub>p</sub> kondensatora auto-ziemia zmniejsza się w trakcie rozładowania

serię samochodu, a dolne poprzez jezdnię. Na rysunku 27.17b pokazano, w jaki sposób cztery oporniki połączone są równolegle z pojemnością samochodu, a na rysunku 27.17c pokazano równoważny im opór R. Ze wzoru (27.24) mamy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\rm op}} + \frac{1}{R_{\rm op}} + \frac{1}{R_{\rm op}} + \frac{1}{R_{\rm op}},$$

lub

$$R = \frac{R_{\rm op}}{4} = \frac{100 \cdot 10^9 \,\Omega}{4} = 25 \cdot 10^9 \,\Omega.$$
 (27.44)

Gdy samochód zatrzymuje się, nadmiarowy ładunek i energia ulegają rozładowaniu przez opór *R*. Możemy teraz skorzystać z dwóch *Podstawowych faktów*, aby przeanalizować to rozładowanie. Podstawiając wzór

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

(27.39) do wzoru (25.21), otrzymujemy

$$E_{\rm p} = \frac{q^2}{2C} = \frac{(q_0 {\rm e}^{-t/RC})^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} {\rm e}^{-2t/RC}.$$
 (27.45)

Korzystając ze wzoru (25.1) (q = CU), możemy powiązać początkowy ładunek  $q_0$  zgromadzony na samochodzie z zadaną początkową różnicą potencjału  $U_0$ :  $q_0 = CU_0$ . Podstawiając to równanie do wzoru (27.45), otrzymujemy

$$E_{\rm p} = \frac{(CU_0)^2}{2C} e^{-2t/RC} = \frac{CU_0^2}{2} e^{-2t/RC}$$

lub

$$e^{-2t/RC} = \frac{2E_{\rm p}}{CU_0^2}.$$
 (27.46)

Logarytmując obie strony powyższego równania, otrzymujemy

$$-\frac{2t}{RC} = \ln\left(\frac{2E_{\rm p}}{CU_0^2}\right) \tag{27.47}$$

lub

$$t = -\frac{RC}{2}\ln\left(\frac{2E_{\rm p}}{CU_0^2}\right).$$

Podstawiając dane, stwierdzamy, że czas potrzebny do rozładowania poniżej energii  $E_{zap} = 50 \text{ mJ}$  wynosi

$$t = -\frac{(25 \cdot 10^9 \,\Omega)(500 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{F})}{2} \times \ln\left(\frac{2(50 \cdot 10^{-3} \,\mathrm{J})}{(500 \cdot 10^{-12} \,\mathrm{F})(30 \cdot 10^3 \,\mathrm{V})^2}\right)$$
  
= 9,4 s (odpowiedź).

**Będzie pożar?** Samochód, o którym mowa w przykładzie potrzebuje co najmniej 9,4 s zanim można będzie się w jego pobliżu pojawić z paliwem. Obsługa techniczna nie może czekać tak długo. Zatem w oponach umieszcza się substancje przewodzące (takie jak sadza techniczna), aby zmniejszyć opór opony i w ten sposób zwiększyć szybkość rozładowania. Na rysunku 27.17d przedstawiono wykres zmagazynowanej energii  $E_p$  w funkcji czasu *t* dla oporu  $R = 100 \text{ G}\Omega$  (nasza wartość) i  $R = 10 \text{ G}\Omega$ . Zauważ, o ile szybciej samochód rozładowuje się do wartości  $E_{zap}$  przy tym mniejszym oporze opony.

#### Podsumowanie

**SEM Źródło SEM** wykonuje pracę nad ładunkami, aby utrzymać różnicę potencjałów między biegunami źródła. Jeśli dW jest pracą wykonaną przez źródło przy przesuwaniu dodatniego ładunku dq od ujemnego do dodatniego bieguna, to **SEM** źródła (praca na jednostkę ładunku) wynosi

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}$$
 (definicja SEM). (27.1)

Jednostką SEM w układzie SI, podobnie jak różnicy potencjałów, jest wolt (V). **Doskonałym źródłem SEM** jest źródło nie mające oporu wewnętrznego. Różnica potencjałów między biegunami takiego źródła jest równa SEM. **Rzeczywiste** źródło SEM ma opór wewnętrzny. Różnica potencjałów między jego biegunami jest równa SEM tylko wtedy, gdy przez źródło nie płynie żaden prąd.

**Analiza obwodów** Zmiana potencjału przy przechodzeniu przez opornik R w kierunku przepływu prądu wynosi -IR, a w przeciwnym kierunku +IR. Zmiana potencjału przy przechodzeniu przez doskonałe źródło SEM w kierunku strzałki SEM wynosi  $+\mathcal{E}$ , a w przeciwnym  $-\mathcal{E}$ . Z zasady zachowania energii wynika drugie prawo Kirchhoffa.

**Drugie prawo Kirchhoffa.** Algebraiczna suma zmian potencjałów napotykanych przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zeru.

Z zasady zachowania ładunku wynika pierwsze prawo Kirchhoffa.

**Pierwsze prawo Kirchhoffa.** Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.

**Obwody o jednym oczku** Natężenie prądu w obwodzie o jednym oczku, zawierającym pojedynczy opornik R i źródło o SEM równej  $\mathcal{E}$  i o wewnętrznym oporze r, wynosi

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r},\tag{27.4}$$

co redukuje się do  $I = \mathcal{E}/R$  dla doskonałego źródła SEM o oporze wewnętrznym r = 0.

**Moc** Jeśli rzeczywiste źródło o SEM równej  $\mathcal{E}$  i wewnętrznym oporze *r* wykonuje pracę nad nośnikami ładunku przepływającego przez nią prądu o natężeniu *I*, to moc źródła (szybkość przekazywania energii nośnikom ładunku) wynosi

$$P = IU, \tag{27.14}$$

#### Pytania

1 a) Czy na rysunku 27.18a różnica potencjałów na oporniku  $R_2$  jest większa, mniejsza, czy równa różnicy potencjałów na oporniku  $R_1$ , jeśli  $R_1 > R_2$ ? b) Czy natężenie prądu płynącego przez opornik  $R_2$  jest większe, mniejsze, czy równe natężeniu prądu płynącego przez opornik  $R_1$ ?

gdzie U jest różnicą potencjałów między biegunami źródła. Moc  $P_r$  zamiany energii na energię termiczną w źródle wynosi

$$P_r = I^2 r.$$
 (27.16)

Szybkość zmiany energii chemicznej  $P_{\text{SEM}}$  w źródle wynosi  $P_{\text{SEM}} = I\mathcal{E}.$  (27.17)

**Oporniki połączone szeregowo** Jeśli oporniki są połączone **szeregowo**, to płynie przez nie prąd o tym samym natężeniu. Opór równoważny, który zastępuje układ połączonych szeregowo oporników, wynosi

$$R_{\rm rw} = \sum_{j=1}^{n} R_j$$
 (*n* oporników połączonych szeregowo). (27.7)

**Oporniki połączone równolegle** Jeśli oporniki są połączone **równolegle**, to różnica potencjałów na nich jest taka sama. Opór równoważny, który zastępuje oporniki połączone równolegle, jest określony wzorem

$$\frac{1}{R_{\rm rw}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ oporników połączonych równolegle}).$$
(27.24)

**Obwody** *RC* Jeśli SEM o wartości *E* jest przyłożona do opornika o oporze *R* i kondensatora o pojemności *C* połączonych szeregowo, tak jak na rysunku 27.15, z kluczem w punkcie *a*, to ładunek na kondensatorze wzrasta zgodnie ze wzorem

 $q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$  (ładowanie kondensatora), (27.33) w którym  $C\mathcal{E} = q_0$  jest stacjonarnym (końcowym) ładunkiem, a  $RC = \tau$  jest **pojemnościową stałą czasową** obwodu. Podczas ładowania nateżenie pradu wynosi

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) \mathrm{e}^{-t/RC} \qquad \text{(ladowanie kondensatora).}$$
(27.34)

Jeśli kondensator rozładowuje się przez opornik R, to ładunek na kondensatorze maleje zgodnie ze wzorem

$$q = q_0 e^{-t/RC}$$
 (rozładowanie kondensatora). (27.39)

Natężenie prądu podczas rozładowywania kondensatora wynosi

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) \mathrm{e}^{-t/RC} \quad \text{(rozładowanie kondensatora).}$$
(27.40)

**2** a) Czy na rysunku 27.18a oporniki  $R_1$  i  $R_3$  są połączone szeregowo? b) Czy oporniki  $R_1$  i  $R_2$  są połączone równolegle? c) Uszereguj równoważne opory czterech obwodów przedstawionych na rysunku 27.18, zaczynając od największego.



**Rys. 27.18.** Pytania 1 i 2

**3** Mamy połaczyć oporniki  $R_1$  i  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ), ze źródłem, najpierw pojedynczo, potem szeregowo i na końcu równolegle. Uszereguj te układy według natężenia prądu płynącego przez źródło, zaczynając od największego.

4 Na rysunku 27.19 przedstawiono obwód elektryczny składający się ze źródła dwóch jednorodnych oporników, w którym część ułożona wzdłuż osi x została podzielona na pieć cześci o jednakowej długości. a) Przyjmij,



Rys. 27.19. Pytanie 4

że  $R_1 = R_2$  i uszereguj te segmenty według wartości średniego natężenia pola elektrycznego, które w nich występuje, zaczynając od największego. b) Przyjmij, że  $R_1 > R_2$  i następnie uszereguj te segmenty, tak jak w punkcie a). c) Jaki jest kierunek natężenia pola elektrycznego wzdłuż osi x?

5 Czy oporniki w każdym z obwodów na rysunku 27.20 są połaczone szeregowo, równolegle, czy w inny sposób?



Rys. 27.20. Pytanie 5

6 Monstrualny labirynt z oporników. Na rysunku 27.21 wszystkie oporniki mają opór 4 Ω i wszystkie (doskonałe) źródła mają SEM 4 V. Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez opornik R? (Jeśli znajdziesz właściwe oczko w tym labiryncie, to możesz odpowiedzieć na pytanie po kilku sekundach obliczeń w pamięci).



Rys. 27.21. Pytanie 6

7 Opornik  $R_1$  podłączono do źródła, a następnie dołączono szeregowo opornik R2. Czy a) różnica potencjałów na oporniku  $R_1$ , b) nateżenie pradu  $I_1$  przepływającego przez opornik  $R_1$  są teraz większe, mniejsze, czy takie same, jak poprzednio? c) Czy opór równoważny  $R_{12}$  dla  $R_1$  i  $R_2$  jest większy, mniejszy czy równy oporowi  $R_1$ ?

8 Jaki jest opór równoważny trzech oporników o oporze R każdy, jeśli są połączone z doskonałą baterią a) szeregowo i b) równolegle? c) Czy różnica potencjałów na końcach układu szeregowego jest większa, mniejsza czy równa różnicy potencjałów na końcach układu równoległego?

9 Do baterii podłączone są dwa oporniki. a) W jakim układzie szeregowym czy równoległym różnice potencjałów na każdym oporniku i na oporniku równoważnym są jednakowe? b) W którym układzie nateżenia pradów płynacych przez każdy opornik i prądów płynących przez opornik równoważny są sobie równe?

**10** Monstrualny labirynt z kondensatorów. Na rysunku 27.22 wszystkie kondensatory mają pojemność 6 µF i wszystkie źródła mają SEM 10 V. Ile wynosi ładunek na kondensatorze C? (Jeśli znajdziesz właściwe oczko w tym labiryncie, to możesz odpowiedzieć na pytanie po kilku sekundach obliczeń w pamięci).



**11** Początkowo do źródła podłączono pojedynczy opornik  $R_1$ . Potem dołączono równolegle opornik  $R_2$ . Czy a) różnica potencjałów na oporniku  $R_1$ , b) natężenie prądu  $I_1$  płynącego przez opornik  $R_1$  były większe, mniejsze, czy takie same, jak poprzednio? c) Czy opór równoważny  $R_{12}$  dla  $R_1$  i  $R_2$ 

jest większy, mniejszy, czy równy  $R_1$ ? d) Czy natężenie całkowitego prądu przepływającego przez oporniki  $R_1$  i  $R_2$ jest większe, mniejsze czy równe natężeniu prądu, przepływającego przez opornik  $R_1$ poprzednio?

**12** Po zamknięciu przełącznika w punkcie *a* na rysunku 27.15 przez opornik *R* płynie prąd o natężeniu *I*. Na rysunku 27.23 przedstawiono

wykresy wartości natężenia tego prądu w funkcji czasu dla czterech par wartości oporu R i pojemności C. 1)  $R_0$  i  $C_0$ , 2)

 $2R_0$  i  $C_0$ , 3)  $R_0$  i  $2C_0$ , 4)  $2R_0$  i  $2C_0$ . Który wykres pasuje do której pary?

**13** Na rysunku 27.24 przedstawiono trzy fragmenty obwodu, które kolejno będą podłączane do tego samego źródła przez klucz, tak jak na rysunku 27.15. Wszystkie oporniki są identyczne, podobnie jak kondensatory. Uszereguj fragmenty według wartości: a) końcowego (stacjonarnego) ładunku na kondensatorze, b) czasu potrzebnego do osiągnięcia przez kondensator 50% jego końcowego ładunku, zaczynając od wartości największych.



Rys. 27.24. Pytanie 13

#### Zadania

Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
 Liczba kropek określa stopień trudności zadania
 Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual* Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
 Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
 Wiecj informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

#### Podrozdział 27.1. Obwody elektryczne o jednym oczku

•1 ssm www SEM doskonałych źródeł na rysunku 27.25 wynoszą  $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}$ i  $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ V}$ . Znajdź: a) natężenie prądu w obwodzie, moc z jaką energia jest zamieniana na energię termiczną w b) oporniku 1 (4  $\Omega$ ) i c) oporniku 2 (8  $\Omega$ ), d) moc źródła 1 i e) moc źródła 2. Czy energia jest dostarczana, czy absorbowana przez f) źródło 1 i g) źródło 2?

•2 SEM doskonałych źródeł na rysunku 27.26 wynoszą  $\mathcal{E}_1 = 150 \text{ V i } \mathcal{E}_2 = 50 \text{ V},$ a opory oporników  $R_1 = 3 \Omega$ 



Rys. 27.23. Pytanie 12





**Rys. 27.26.** Zadanie 2

i  $R_2 = 2 \Omega$ . Ile wynosi potencjał w punkcie Q, jeśli potencjał w punkcie P wynosi 100 V?

•3 ilw Akumulator samochodowy o SEM równej 12 V i oporze wewnętrznym 0,04  $\Omega$  jest ładowany prądem o natężeniu 50 A. a) Ile wynosi różnica potencjałów U na jego biegunach? b) Ile wynosi moc  $P_r$ , z jaką energia zamienia się na energię termiczną w akumulatorze? c) Ile wynosi moc  $P_{\text{SEM}}$ przekształcania energii elektrycznej w energię chemiczną? d) Jakie będą odpowiedzi na pytania (a) i (b), gdy akumulator będzie dostarczał prąd o natężeniu 50 A do rozrusznika silnika?

•4 • Na rysunku 27.27 pokazano obwód składający się z czterech oporników połączony z większym obwodem. Pod schematem obwodu przedstawiono wykres zależności potencjału V(x) położenia x wzdłuż dolnej gałęzi obwodu, w której znajduje się opornik 4. Wartość potencjału  $V_A = 12$  V. Powyżej schematu obwodu przedstawiono wykres zależności potencjału V(x) jako funkcję położenia x wzdłuż górnej gałęzi obwodu, w której znajdują się oporniki 1, 2, i 3. Wartości



Rys. 27.27. Zadanie 4

różnic potencjałów  $\Delta V_B = 2 \text{ V i } \Delta V_C = 5 \text{ V.}$  Opornik 3 ma opór 200  $\Omega$ . Ile wynosi opór a) opornika 1 i b) opornika 2?

•5 Prąd o natężeniu 5 A płynął przez 6 minut przez obwód z akumulatorem o SEM równej 6 V. O ile zmniejszyła się energia chemiczna akumulatora?

•6 Standardowa bateria do latarki może dostarczyć około 2 Wh energii zanim się rozładuje. a) Jaki będzie koszt działania żarówki 100 W przez 8 h przy zastosowaniu takich baterii, jeśli jedna bateria kosztuje 3 zł? b) Jaki jest ten koszt, jeśli energia jest dostarczana w cenie 0,3 zł za kilowatogodzinę?

•7 Przewodnik o oporze 5  $\Omega$  jest połączony ze źródłem, którego SEM wynosi 2 V, a opór wewnętrzny 1  $\Omega$ . a) Ile energii przekształca się z chemicznej w elektryczną w ciągu 2 minut. b) Ile energii wydziela się w przewodniku w postaci energii termicznej w tym samym czasie? c) Wyjaśnij, dlaczego odpowiedzi na pytania a) i b) są różne.

•8 Pewien akumulator samochodowy o SEM równej 12 V ma początkowy ładunek 120 Ah (nazywany potocznie "pojemnością" akumulatora). Oblicz, jak długo może on dostarczać energię z mocą 100 W, przyjmując, że różnica potencjałów na biegunach akumulatora pozostaje stała, aż do całkowitego rozładowania akumulatora.

•9 a) Ile wynosi wyrażona w elektronowoltach praca, jaką

wykonuje doskonałe źródło o SEM  $\mathcal{E}$  V przy przeniesieniu elektronu ze swego dodatniego bieguna na ujemny. b) Ile wynosi moc źródła wyrażona w watach, jeśli przepływa przez nie w każdej sekundzie 3,4 $\cdot 10^{18}$  elektronów?



Rys. 27.28. Zadanie 10

••10 a) Jaką wartość musi mieć opór *R* na rysunku 27.28,

jeśli prąd w obwodzie ma mieć natężenie 1 mA? Przyjmij wartości:  $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ V}, \mathcal{E}_2 = 3 \text{ V}$  i  $r_1 = r_2 = 3 \Omega$ . b) Z jaką mocą rozprasza się energia w oporniku?

••11 ssm Na rysunku 27.29 część AB obwodu absorbuje energię z mocą 50 W przy przepływie prądu o natężeniu I = 1 A we wskazanym kierunku. Opór  $R = 2 \Omega$ . a) Ile wynosi różnica potencjałów między A i B? Źródło X nie ma oporu wewnętrznego. b) Ile wynosi SEM tego źródła? c) Jaka jest polaryzacja (położenie biegunów dodatniego i ujemnego) źródła X?





••12 Na rysunku 27.30 przedstawiono opornik o oporze  $R = 6 \Omega$  połączony z doskonałym źródłem SEM  $\mathcal{E} =$ 12 V za pomocą dwóch miedzianych przewodów. Każdy przewód ma długość 20 cm i promień 1 mm. Rozważając takie obwody w tym rozdziale, pomijamy zwykle róż-



Rys. 27.30. Zadanie 12

nice potencjałów wzdłuż przewodów i wydzielanie energii termicznej, które w nich zachodzi. Sprawdź sensowność takiego przybliżenia dla obwodu z rysunku 27.30: Ile wynosi różnica potencjałów na końcach a) opornika i b) każdej z dwóch części przewodu? Z jaką szybkością energia elektryczna tracona jest w postaci energii termicznej w c) oporniku i w d) każdej z części przewodu?

••13 Podziemny kabel o długości 10 km jest ułożony ze wschodu na zachód i składa się z dwóch równoległych przewodów, każdy o oporze 13  $\Omega$ /km. W odległości *x* od zachodniego końca kabla pojawiło się przebicie, na które składa się ścieżka przewodzenia o oporze *R* łącząca oba przewody (rys. 27.31). Opór przewodów z przebiciem mierzony od strony wschodniej wynosi 100  $\Omega$ , a mierzony od strony zachodniej wynosi 200  $\Omega$ . Ile wynoszą a) *x* i b) *R*?



Rys. 27.31. Zadanie 13

••14 •• Na rysunku 27.32a obie baterie mają SEM  $\mathcal{E} = 1,2 \text{ V}$ , a zewnętrzny opornik ma zmienny opór R. Rysunek 27.32b przedstawia wykres różnicy potencjału elektrycznego U pomiędzy biegunami każdej z baterii jako funkcję R. Krzywa 1 odpowiada baterii 1, a krzywa 2 baterii 2. Jednostką

skali poziomej osi wykresu jest  $R_s = 0,2 \Omega$ . Jakie są opory wewnętrzne a) baterii 1 i b) baterii 2?



••15 ilw Natężenie prądu w obwodzie o jednym oczku z pojedynczym opornikiem o oporze R wynosi 5 A. Po połączeniu szeregowo z tym opornikiem drugiego opornika o oporze 2  $\Omega$ , natężenie prądu maleje do 4 A. Ile wynosi opór R?

•••16 Ogniwo słoneczne wytwarza różnicę potencjałów 0,1 V, gdy jest do niego podłączony opornik o oporze 500  $\Omega$ , i różnicę potencjałów 0,15 V, gdy opornik ma opór 1000  $\Omega$ . Ile wynoszą: a) opór wewnętrzny, b) SEM ogniwa słonecznego? c) Pole powierzchni ogniwa wynosi 5 cm<sup>2</sup> i moc absorbowanej energii świetlnej na jednostkę powierzchni wynosi 2 mW/cm<sup>2</sup>. Ile wynosi sprawność ogniwa, które przekształca energię świetlną na energię termiczną w zewnętrznym oporniku o oporze 1000  $\Omega$ ?

•••17 ssm Na rysunku 27.33 SEM baterii 1 wynosi  $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}$ , a jej opór wewnętrzny  $r_1 =$ 0,016  $\Omega$ , natomiast SEM baterii 2 wynosi  $\mathcal{E}_2 = 12 \text{ V}$ , a opór wewnętrzny  $r_2 =$ 0,012  $\Omega$ . Baterie zostały połą-



**Rys. 27.33.** Zadanie 17

czone szeregowo z zewnętrznym oporem R. a) Ile wynosi opór R, który spowoduje spadek różnicy potencjałów na biegunach jednej z baterii do zera. b) Która to będzie bateria?

#### Podrozdział 27.2 Obwody elektryczne o wielu oczkach

•18 Ile wynosi różnica potencjałów  $V_d - V_c$  pomiędzy punktami *d* i *c* na rysunku 27.9, jeśli  $\mathcal{E}_1 = 4$  V,  $\mathcal{E}_2 = 1$  V,  $R_1 = R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ , a bateria jest doskonała?

•19 Dołączając do opornika o  $R = 12 \Omega$  opornik o nieznanym oporze, chcemy uzyskać opór zastępczy, który wynosi  $3 \Omega$ . a) Ile musi wynosić opór tego nieznanego opornika? b) Czy opornik powinien być połączony szeregowo, czy równolegle?

•20 Gdy oporniki 1 i 2 są połączone szeregowo, ich opór równoważny wynosi 16  $\Omega$ . Gdy oporniki są połączone równolegle, ich opór równoważny wynosi 3  $\Omega$ . Ile wynoszą: a) mniejszy opór i b) większy opór tych dwóch oporników? •21 Cztery oporniki o oporach  $18 \Omega$  połączono równolegle i dołączono do doskonałego źródła o SEM równej 25 V. Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez źródło?

•22 Na rysunku 27.34 przedstawiono pięć oporników 5  $\Omega$ . Oblicz równoważny opór między punktami: a) *F* i *H*, b) *F* i *G*. (*Wskazówka*: Wyobraź sobie dla każdej pary punktów, że podłączone jest do nich źródło).

•23 Na rysunku 27.35  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 50 \Omega$ ,  $\mathcal{E}_1 = 6 V$ ,  $\mathcal{E}_2 = 5 V$ ,  $\mathcal{E}_3 = 4 V$ . Znajdź: a) natężenie prądu, płynącego przez opornik 1, b) natężenie prądu, płynącego przez opornik 2 i c) różnicę potencjałów między punktami *a* i *b*.

•24 Na rysunku 27.36  $R_1 = R_2 = 4 \Omega$ , a  $R_3 = 2.5 \Omega$ . Znajdź opór równoważny między punktami *D* i *E*. (*Wskazówka*: Wyobraź sobie, że do punktów *D* i *E* dołączone jest źródło).

•25 ssm Dziewięć drutów miedzianych o długości *l* i średnicy *d* połączono rów-nolegle, tak że tworzą jeden

złożony przewód o oporze R. Jaka musi być średnica D pojedynczego drutu miedzianego o długości l, jeśli ma on mieć taki sam opór?

••26 Na rysunku 27.37 przedstawiono baterię połączoną z jednorodnym opornikiem o oporze  $R_0$ . Wzdłuż opornika od x = 0 po lewej do x = 10 cm może się przesuwać suwak z kontaktem elektrycznym. Przesuwanie suwaka zmienia podział oporu na części po lewej i po





prawej stronie. Znajdź szybkość, z jaką rozpraszana jest energia w oporniki R, w funkcji położenia x. Narysuj wykres funkcji dla  $\mathcal{E} = 50 \text{ V}, R = 2000 \Omega \text{ i } R_0 = 100 \Omega.$ 

••27 Poziomy piorun. Na rysunku 27.38 przedstawiono powód, dla którego nikt nie powinien stać pod drzewem w czasie burzy z piorunami. Jeśli wzdłuż powierzchni drzewa przebiega wyładowanie atmosferyczne, jego część





**Rys. 27.35.** Zadanie 23



Rys. 27.36. Zadanie 24

może skierować się ku takiej osobie. Stanie się tak szczególnie wtedy, gdy przepływający prąd napotka suchy obszar kory i w drodze ku ziemi musi przejść przez powietrze. Na rysunku część wyładowania pokonuje w powietrzu odległość *d*, a następnie przepływa przez

człowieka (którego opór jest bardzo mały w porównaniu z oporem powietrza ze względu na silnie przewodzące płyny ustrojowe wypełniające jego ciało). Pozostała część prądu płynie na odległość h przez powietrze wzdłuż drzewa. Jakie jest nateżenie pradu płynacego przez ciało człowieka, jeśli całkowite natężenie prądu  $I = 5000 \,\mathrm{A}$ , a stosunek d/h = 0.4?



Rys. 27.38. Zadanie 27

••28 SEM doskonałego źródła przedstawionego na rysunku 27.39a wynosi  $\mathcal{E} = 6$  V. Krzywa 1 na rysunku 27.39b przedstawia różnicę potencjałów U, która pojawia się na końcach opornika 1, jako funkcję natężenia prądu I płynącego przez ten opornik badany indywidualnie, gdy przykłada się do niego zmienną różnicę potencjałów. Jednostką skali na osi U jest  $U_s = 18$  V, a jednostką skali na osi I jest  $I_s = 3$  mA. Krzywe 2 i 3 są podobnymi wykresami odpowiednio dla oporników 2 i 3 badanych indywidualnie przez przyłożenie do nich różnicy potencjałów. Jakie jest natężenie prądu płynącego przez opornik 2 w obwodzie z rysunku 27.39a?



**Rys. 27.39.** Zadanie 28

••29 Na rysunku 27.40  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $R_2 = 18 \Omega$ , a SEM doskonałej baterii wynosi  $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ . Jakie są: a) wartość natężenia i b) kierunek (w prawo czy w lewo) prądu  $I_1$ ? c) Ile energii jest rozpraszane we wszystkich czterech opornikach w ciągu 1 minuty?



Rys. 27.40. Zadanie 29

••30 • Na rysunku 27.41 SEM doskonałych baterii wynoszą  $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ V}$  i  $\mathcal{E}_2 = 0,5 \mathcal{E}_1$ , a każdy z oporników ma opór 4  $\Omega$ . Jakie jest natężenie prądu płynącego przez a) opornik 2 i b) opornik 3?

••31 ssm  $\bigcirc$  Na rysunku 27.42 SEM doskonałych żródeł wynoszą  $\mathcal{E}_1 = 5$  V i  $\mathcal{E}_2 =$ 12 V, każdy z oporników ma opór 2  $\Omega$ , a potencjał w uziemionym punkcie obwodu wynosi zero. Ile wynosi potencjał a)  $V_1$  i b)  $V_2$  w oznaczonych punktach obwodu?

••32 Obie baterie przedstawione na rysunku 27.43a są doskonałe. SEM baterii  $1 - \mathcal{E}_1$ 



**Rys. 27.41.** Zadania 30, 41, 88



Rys. 27.42. Zadanie 31

ma ustaloną wartość, a SEM baterii 2  $\mathcal{E}_2$  może się zmieniać pomiędzy 1 V a 10 V. Wykresy na rysunku 27.43b przedstawiają zależność natężenia prądu płynącego przez obie baterie w funkcji  $\mathcal{E}_2$ . Jednostką skali na osi pionowej jest  $I_s = 0,2$  A. Musisz zdecydować, który wykres odpowiada której baterii. Dla obu wykresów ujemna wartość natężenia prądu płynącego przez baterię odpowiada sytuacji, gdy kierunek prądu płynącego przez baterię jest przeciwny do kierunku SEM danej baterii. Ile wynoszą: a)  $\mathcal{E}_1$ , b) opór  $R_1$ , c) opór  $R_2$ ?



••33 • Na rysunku 27.44, natężenie prądu płynącego przez opornik 6 wynosi  $I_6 = 1,4$  A, a opory  $R_1 = R_2 = R_3 = 2 \Omega$ ,  $R_4 = 16 \Omega$ ,  $R_5 = 8 \Omega$ , a  $R_6 = 4 \Omega$ . Ile wynosi SEM doskonałej baterii przedstawionej na rysunku?



••34 Wszystkie opory na rysunkach 27.45a i b wynoszą 6  $\Omega$ , a wszystkimi źródłami są doskonałe baterie 12 V. a) Czy różnica potencjałów  $U_1$  na oporniku 1 zmieni się, gdy przełącznik S na rysunku 27.45a zostanie zamknięty, czy też pozostanie taka sama? b) Czy różnica potencjałów  $U_1$  na oporniku 1 zmieni się, gdy przełącznik S na rysunku 27.45b zostanie zamknięty, czy też pozostanie taka sama?



Rys. 27.45. Zadanie 34

Rys. 27.46. Zadanie 35

Rys. 27.47. Zadanie 36

Rys. 27.48. Zadania 37 i 98

Rys. 27.49. Zadanie 38

pudełko

 $\overline{B}$ 

 $R_3$ 

••35 • Na rysunku 27.46,  $\mathcal{E} = 12 \text{ V}, R_1 = 2000 \Omega,$   $R_2 = 3000 \Omega, \text{ a } R_3 = 4000 \Omega.$  Ile wynoszą różnice potencjałów: a)  $V_A - V_B$ , b)  $V_B - V_C$ , c)  $V_C - V_D$ , d)  $V_A - V_C$ ?

••36 😳 Na rysunku 27.47,  $\mathcal{E}_1 = 6 \,\mathrm{V}, \,\mathcal{E}_2 = 12 \,\mathrm{V}, \,R_1 =$  $100 \Omega, R_2 = 200 \Omega, a R_3 =$  $300 \Omega$ . Jeden punkt obwodu jest uziemiony (V = 0). Jakie są: a) wartość natężenia i b) kierunek (w góre czv w dół) prądu płynącego przez opornik 1, c) wartość natężenia i d) kierunek (w górę czy w dół) pradu płynacego przez opornik 2, e) wartość natężenia i f) kierunek (w górę czy w dół) pradu płynacego przez opornik 3? g) Ile wynosi potencjał elektryczny w punkcie A?

••37 Oporniki na rysunku 27.48 mają opory  $R_1 = 2 \Omega$  i  $R_2 = 5 \Omega$ , a bateria jest doskonała. Dla jakiej wartości oporu  $R_3$  rozpraszanie energii w tym oporniku jest największe?

••**38** Na rysunku 27.49 przedstawiono wycinek obwo-

du. Opory  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$  i  $R_3 = 6 \Omega$ , a natężenie wskazanego prądu wynosi I = 6 A. Różnica potencjałów elektrycznych pomiędzy punktami A i B, które łączą przedstawiony wycinek z resztą obwodu, wynosi  $V_A - V_B = 78 \text{ V}$ . a) Czy urządzenie symbolicznie pokazane jako "pudełko" pochłania, czy dostarcza energię do obwodu i b) z jaką szybkością to następuje? ••39 • Na rysunku 27.50 dwie baterie z SEM  $\mathcal{E} = 12$  V i oporem wewnętrznym  $r = 0,3 \Omega$  połączone są równolegle z opornikiem R. a) Dla jakiej wartości R szybkość rozpraszania energii w tym oporniku jest największa? b) Ile wynosi ta największa wartość?



••40 •• Dwie identyczne baterie o SEM  $\mathcal{E} = 12$  V

Rys. 27.50. Zadania 39 i 40

i oporze wewnętrznym  $r = 0,2 \Omega$  mają zostać podłączone z zewnętrznym opornikiem *R* równolegle (rys. 27.50) lub szeregowo (rys. 27.51). Jeśli R = 2r, to ile wynosi natężenie prądu *I* płynącego w tym zewnętrznym oporniku w przypadku połączenia a) równoległego, b) szeregowego? c) Dla którego połączenia natężenie prądu *I* jest większe? Jeśli R = r/2, to ile wynosi natężenie prądu *I* płynącego w tym zewnętrznym oporniku w przypadku połączenia d) równoległego, e) szeregowego? f) Dla którego połączenia natężenie prądu *I* jest w tym przypadku większe?



Rys. 27.51. Zadanie 40

••41 Na rysunku 27.51  $\mathcal{E}_1 = 3 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1 \text{ V}$ ,  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ , a obie baterie są doskonałe. Z jaką szybkością rozpraszana jest energia w: a) oporniku  $R_1$ , b) oporniku  $R_2$  i c) oporniku  $R_3$ ? Ile wynosi moc d) baterii 1 i e) baterii 2?

••42 Na rysunku 27.52 sieć *n* połączonych równolegle oporników połączona jest szeregowo z opornikiem i doskonałą baterią. Wszystkie oporniki mają taki sam opór. Jeśli z przedstawioną siecią połączony zostałby jeszcze jeden taki sam opornik, to natężenie





prądu płynącego przez baterię zmieniłoby się o 1,25%. Ile wynosi n?

••43 Masz kilka oporników  $10 \Omega$ , w każdym z nich może wydzielać się energia termiczna z mocą 1 W bez ich zniszczenia. Jaka jest minimalna liczba takich oporników, aby przy ich połączeniu szeregowym lub równoległym uzyskać opór  $10 \Omega$ , w którym energia termiczna może się wydzielać z mocą przynajmniej 5 W?

••44 • Na rysunku 27.53  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 50 \Omega$ ,  $R_4 = 75 \Omega$ , a doskonała bateria ma SEM  $\mathcal{E} = 6 V.$  a) Ile wynosi równoważny opór tego układu? Jakie jest natężenie pradu *I* płynacego przez b) opornik 1, c) opornik 2, d) opornik 3 i e) opornik 4?

••45 ilw Na rysunku 27.54  $R_1 = 1 \Omega, R_2 = 2 \Omega, a \text{ dosko-}$ nałe baterie mają SEM  $\mathcal{E}_1$  = 2 V,  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 4 V$ . Jakie sa: a) nateżenie i b) kierunek pradu (w górę czy w dół) płynacego przez baterię 1, c) natężenie i d) kierunek prądu płynacego przez baterie 2, e) natężenie i f) kierunek pradu płynącego przez baterię 3? g) Ile wynosi różnica potencjałów  $V_a - V_b$ ?



Rys. 27.53. Zadania 44 i 48



Rys. 27.54. Zadanie 45

••46 Na rysunku 27.55a opornik 3 ma zmienny opór, a doskonała bateria ma SEM  $\mathcal{E} = 12$  V. Na rysunku 27.55b przedstawiono wykres nateżenia pradu I płynacego przez baterie w funkcji R. Jednostką skali na osi pionowej jest  $R_{3s} = 20 \Omega$ . Wykres ma asymptotę poziomą równą 2 mA dla  $R_3 \rightarrow \infty$ . Ile wynosza: a) opór  $R_1$  i b) opór  $R_2$ ?



Rys. 27.55. Zadanie 46

•••47 ssm Drut miedziany o promieniu a = 0.25 mm ma płaszcz aluminiowy o zewnętrznym promieniu b = 0.38mm. a) W tym złożonym przewodzie płynie prad o nateżeniu I = 2 A. Korzystając z tabeli 26.1, oblicz a) natężenie prądu płynącego w miedzi i b) natężenie prądu płynącego w aluminium. c) Jaka jest długość tego złożonego przewodu, jeśli prad jest wytwarzany przez różnice potencjałów U = 12 V na końcach przewodu?

•••48 😳 Na rysunku 27.53 opory oporników wynoszą  $R_1 = 7 \Omega, R_2 = 12 \Omega, R_3 = 4 \Omega,$  a doskonała bateria ma SEM  $\mathcal{E} = 24$  V. Dla jakiej wartości  $R_4$  szybkość z jaką bateria przekazuje energie do oporników a) wyniesie 60 W, b) będzie maksymalna i wyniesie  $P_{\text{max}}$ , c) będzie minimalna i wyniesie  $P_{\min}$ . Jakie są wartości: d)  $P_{\max}$  i e)  $P_{\min}$ ?

#### Podrozdział 27.3 Amperomierz i woltomierz

••49 ilw a) Określ wskazanie amperomierza na rysunku 27.56, jeśli  $\mathcal{E} = 5 \text{ V}$  (źródło jest doskonałe),  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega i R_3 = 6 \Omega$ . b) Zamieniono teraz położenie amperomierza i źródła SEM. Wykaż, że wskazania amperomierza się nie zmienią.

••50 Na rysunku 27.57  $R_1 =$ 2R, opór wewnetrzny amperomierza wynosi zero, a bateria jest doskonała. Jaką wielokrotnością  $\mathcal{E}/R$  jest natężenie pradu płynacego przez amperomierz?

••51 Na rysunku 27.58 woltomierz o oporze  $R_{\rm V} = 300 \,\Omega$ i amperomierz o oporze  $R_{\rm A} =$  $3 \Omega$  jest używany do pomiaru oporu R w obwodzie, który zawiera także opornik  $R_0 =$  $100 \Omega$  i doskonałą baterię, której SEM wynosi  $\mathcal{E} = 12 \text{ V}.$ Opór R wyznaczany jest jako R = U/I, gdzie U jest



Rys. 27.56. Zadanie 49



Rvs. 27.57. Zadanie 50



Rys. 27.58. Zadanie 51

różnicą potencjałów na końcach opornika, a I jest odczytem z amperomierza. Woltomierz wskazuje różnicę potencjałów U', która jest sumą U i różnicy potencjałów na zaciskach amperomierza. Zatem stosunek odczytów obu mierników nie jest równy R, a tylko *pozornemu* oporowi R' = U'/I. Jeśli  $R = 85 \Omega$ , to ile wynoszą: a) odczyt amperomierza b) odczyt woltomierza i c) R'? d) Jeśli  $R_A$  ulega zmniejszeniu, to czy różnica pomiędzy R', a R rośnie, maleje czy nie ulega zmianie?

••**52** Na rysunku 27.59 przedstawiono prostv omomierz, skonstruowany przez połączenie szeregowo baterii 1.5 V (od latarki), opornika R i amperomierza o zakresie od 0 do 1 mA. Opór R jest tak dobrany, że przy zwarciu



Rys. 27.59. Zadanie 52

zacisków miernik wskazuje maksymalne natężenie 1 mA. Jakiemu zewnętrznemu oporowi między zaciskami odpowiada wskazanie odpowiadające: a) 10%, b) 50%, c) 90% maksymalnego natężenia? d) Jaka jest wartość R, jeśli amperomierz ma opór 20  $\Omega$  i opór wewnętrzny źródła można pominąć?

••53 Na rysunku 27.14 przyjmij  $\mathcal{E} = 3$  V,  $r = 100 \Omega$ ,  $R_1 = 250 \Omega$  i  $R_2 = 300 \Omega$ . Jaki błąd (w procentach) wprowadza do pomiaru różnicy potencjałów na oporniku  $R_1$  fakt, że opór woltomierza  $R_V = 5 k\Omega$ ? Zaniedbaj obecność amperomierza.

••54 Gdy włączono światła samochodu, woltomierz wskazał na nich różnicę potencjałów 12 V, a podłączony szeregowo amperomierz wskazał natężenie 10 A (rys. 27.60). Gdy następnie włączono rozrusznik, wskazanie amperomierza zmalało do 8 A, a światła przyciemniły się nieco. Jakie są: a) SEM akumulatora, b) natężenie prądu płynącego przez rozrusznik przy zapalonych światłach, jeśli opór we-



Rys. 27.60. Zadanie 54

wnętrzny akumulatora wynosi  $0,05 \Omega$ , a opór amperomierza jest znikomo mały?

••55 Na rysunku 27.61 opór  $R_{\rm s}$  dobieramy przez przesuwanie styku ślizgowego tak, aby punkty a i b uzyskały ten sam potencjał. (Warunek ten można sprawdzić przez podłączenie na chwile do punktów *a* i *b* czułego amperomierza; jeśli te punkty mają ten sam potencjał, to wskazówka amperomierza się nie wychyli). Wykaż, że w takim ustawieniu zachodzi związek:  $R_x =$  $R_{\rm s}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ . Układ ten, zwany mostkiem Wheatstone'a, pozwala zmierzyć nieznany opór  $(R_x)$ , gdy znamy opór wzor $cowy(R_s)$ .

••56 Na rysunku 27.62 opór woltomierza wynosi  $R_V =$  $300 \Omega$ , a opór amperomierza wynosi  $R_A = 3 \Omega$ . Mierniki są wykorzystywane do wyznaczenia oporu R w obwodzie, który zawiera również



Rys. 27.61. Zadanie 55





opornik  $R_0 = 100 \Omega$  i doskonałe źródło o SEM  $\mathcal{E} = 12$  V. Opór *R* dany jest jako R = U/I, gdzie *U* jest odczytem na woltomierzu, a *I* jest natężeniem prądu płynącego przez opornik *R*. Jednak odczyt amperomierza wynosi *I'*, a więc jest sumą natężenia prądu *I* oraz natężenia prądu płynącego przez woltomierz. Tak więc stosunek odczytów z dwóch mierników nie wynosi *R*, a jest równy pewnemu *efektywnemu* oporowi R' = U/I'. Jeśli  $R = 85 \Omega$ , to a) jakie będzie wskazanie amperomierza, b) jakie będzie wskazanie woltomierza? c) Ile będzie wynosić R'? d) Jeśli  $R_V$  ulega zwiększeniu, to czy różnica pomiędzy R' a R wzrośnie, zmniejszy się czy też nie ulegnie zmianie?

#### Podrozdział 27.4 Obwody RC

•57 Przełącznik S na rysunku 27.63 jest w chwili t = 0 zamknięty, aby rozpocząć ładowanie początkowo rozładowanego kondensatora o pojem-

ności  $C = 15 \,\mu\text{F}$  przez opornik o oporze  $R = 20 \,\Omega$ . Po jakim czasie różnica potencjałów na okładkach kondensatora będzie równa różnicy potencjałów na końcach opornika?



Rys. 27.63. Zadania 57 i 96

•58 W obwodzie szeregowym *RC* mamy  $\mathcal{E} = 12$  V, *R* = 1,4 M $\Omega$  i *C* = 1,8  $\mu$ F. a) Oblicz stałą czasową obwodu. b) Znajdż maksymalny ładunek, który znajdzie się na kondensatorze podczas ładowania. c) Jak długo będzie ładować się kondensator do ładunku 16  $\mu$ C?

•59 ssm Jaką wielokrotnością stałej czasowej  $\tau$  jest czas, po jakim początkowo nienaładowany kondensator w szeregowym obwodzie *RC* naładuje się do 99% swojego końcowego ładunku?

•60 Kondensator o początkowym ładunku  $q_0$  rozładowuje się przez opornik. Jaką wielokrotnością stałej czasowej  $\tau$  jest czas, po którym ładunek kondensatora zmniejszy się o: a) pierwszą jedną trzecią początkowego ładunku, b) dwie trzecie początkowego ładunku?

•61 ilw Opornik o oporze  $15 \text{ k}\Omega$  i kondensator zostały połączone szeregowo i następnie nagle przyłożono do nich różnicę potencjałów 12 V. Różnica potencjałów na kondensatorze wzrosła do 5 V w ciągu 1,3 µs. a) Oblicz stałą czasową obwodu. b) Znajdź pojemność kondensatora.

•62 Na rysunku 27.64 przedstawiono obwód lampy migającej (podobnej do lamp ostrzegawczych w rejonie prac drogowych). Lampa jarzeniowa L (o znikomo małej pojemności) jest podłączona równolegle do kondensatora *C* obwodu *RC*. Prąd płynie





przez lampę tylko wtedy, gdy różnica potencjałów na niej osiąga napięcie przebicia  $V_L$ ; w tym przypadku kondensator rozładowuje się całkowicie przez lampę i lampa świeci przez krótki czas. Załóżmy, że potrzebne są dwa błyski na sekundę. Jaki powinien być opór *R* dla lampy o napięciu przebicia  $V_L = 72$  V, podłączonej do doskonałego źródła o SEM równej 95 V i kondensatora o pojemności 0,15 µF? ••63 ssm www W obwodzie na rysunku 27.65  $\mathcal{E} = 1,2$  kV,  $C = 6.5 \,\mu$ F,  $R_1 = R_2 = R_3 = 0.73 \,\mathrm{M}\Omega$ . Przy całkowicie rozładowanym kondensatorze zamknięto nagle klucz S (w chwili t = 0). Jakie są w chwili t = 0 natężenie prądu a)  $I_1$  w oporniku 1, b)  $I_2$  w oporniku 2 i c)  $I_3$  w oporniku 3? Ile wynosi dla  $t \rightarrow \infty$  (czyli

po bardzo wielu stałych czasowych) natężenie prądu d)  $I_1$ , e)  $I_2$  i f)  $I_3$ ? Ile wynosi różnica potencjałów  $U_2$  na oporniku  $R_2$  g) w chwili t = 0 i h) dla  $t = \infty$ ? i) Naszkicuj wykres zależności  $U_2$  od czasu tpomiędzy tymi ekstremami.



Rys. 27.65. Zadanie 63

••64 Kondensator, na którym początkowa różnica potencjałów wynosi 100 V, rozładowuje się przez opornik po zamknięciu klucza w chwili t = 0. W chwili t = 10 s różnica potencjałów na kondensatorze wynosi 1 V. a) Jaka jest stała czasowa obwodu? b) Jaka jest różnica potencjałów na kondensatorze w chwili t = 17 s?

•65 • Na rysunku 27.66  $R_1 = 10 \,\mathrm{k}\Omega$ ,  $R_2 = 15 \,\mathrm{k}\Omega$ ,  $C = 0.4 \,\mathrm{\mu}\mathrm{F}$ , a SEM doskonałej baterii wynosi  $\mathcal{E} = 20 \,\mathrm{V}$ . Na początku przełącznik był bardzo długo zamknięty, aż osiągnięto stan równowagi.



**Rys. 27.66.** Zadanie 65 i 99

Następnie w chwili t = 0 przełącznik zostaje otwarty. Jakie jest natężenie prądu płynącego przez opornik 2 w chwili  $t = 4 \,\mu$ s?

••66 Na rysunku 27.67 przedstawiono dwa obwody z naładowanymi kondensatorami, które ulegają rozładowaniu przez oporniki po zamknięciu przełączników. Na rysunku 27.67a  $R_1 = 20 \Omega$ i  $C_1 = 5 \mu$ F. Na rysunku



27.67b  $R_2 = 10 \Omega$  i  $C_2 = 8 \mu$ F. Stosunek początkowych ładunków na kondensatorach wynosi  $q_{02}/q_{01} = 1,5$ . W chwili t = 0 oba przełączniki są zamknięte. W jakiej chwili ładunki na obu kondensatorach są sobie równe?

••67 Wyobraź sobie, że masz niedoskonały kondensator, w którym ładunek przepływa z jednej okładki do drugiej. Różnica potencjałów między okładkami tego kondensatora o pojemności 2 μF maleje do jednej czwartej początkowej wartości w ciągu 2 s. Jaki jest wobec tego opór obszaru między jego okładkami?

••68 Kondensator o pojemności 1  $\mu$ F, w którym początkowo zmagazynowano energię 0,5 J, rozładowuje się przez opornik o oporze 1 M $\Omega$ . a) Ile wynosi początkowy ładunek na kondensatorze? b) Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez opor-

nik, gdy zaczyna się rozładowanie? Jaka jest zależność od czasu t c) różnicy potencjałów  $U_C$  na kondensatorze i d) różnicy potencjałów  $U_R$  na oporniku oraz e) szybkości wytwarzania energii termicznej?

•••69 • Opornik o oporze  $3 \text{ M}\Omega$  i kondensator o pojemności 1 µF połączono szeregowo z doskonałym źródłem o SEM  $\mathcal{E} = 4 \text{ V}$ . Jakie po upływie 1 s od tego połączenia są szybkości: a) wzrostu ładunku na kondensatorze, b) wzrostu energii kondensatora, c) wydzielania się energii termicznej w oporniku, d) dostarczania energii przez źródło?

#### Zadania dodatkowe

**70** SEM każdej z sześciu rzeczywistych baterii przedstawionych na rysunku 27.68 wynosi 20 V, a ich opór wynosi 4  $\Omega$ . a) Ile wynosi natężenie prądu płynącego przez (zewnętrzny) opór  $R = 4 \Omega$ ? b) Ile wynosi różnica potencjałów na każdej z baterii? c) Ile wynosi moc każdej z baterii? d) Z jaka szybkością każda bateria wytwarza wewnętrzną energię cieplną?

**71** Na rysunku 27.69  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ , a doskonała bateria ma SEM  $\mathcal{E} = 120 V$ . Ile wynosi natężenie prądu w punkcie *a*, jeśli zamkniemy:



Rys. 27.68. Zadanie 70



Rys. 27.69. Zadanie 71

a) tylko klucz  $S_1$ , b) tylko klucz  $S_1$  i  $S_2$ , c) wszystkie trzy klucze?

**72** Na rysunku 27.70 doskonała bateria ma SEM  $\mathcal{E} = 30$  V, a opory wynoszą  $R_1 = R_2 = 14 \Omega$ ,  $R_3 = R_4 = R_5 = 6 \Omega$ ,  $R_6 = 2 \Omega$ ,  $R_7 = 1,5 \Omega$ . Ile wynoszą natężenia prądów: a)  $I_2$ , b)  $I_4$ , c)  $I_1$ , d)  $I_3$  i e)  $I_5$ ?



**73** ssm Przewody A i B o jednakowej długości 40 m i jednakowej średnicy 2,6 mm połączono szeregowo. Pomiędzy końcami tego układu przewodów przyłożono różnicę potencjałów 60 V. Odpowiednie opory wynoszą  $R_{\rm A} = 0,127 \Omega$  oraz  $R_{\rm B} = 0,729 \Omega$ . a) Jaka jest wartość gęstości prądu J? b) Jaka jest różnica potencjałów U dla przewodu A? c) Z jakiego materiału został wykonany przewód A (patrz tabela 26.1)? Jaka jest d) wartość J, e) U dla przewodu B? f) Z jakiego materiału został wykonany przewód B?

74 Jakie jest a) natężenie i b) kierunek (w górę czy w dół) prądu *I* na rysunku 27.71, na którym wszystkie opory wynoszą 4  $\Omega$ , a wszystkie baterie są doskonałe i mają SEM 10 V? (*Wskazówka*: Rozwiązanie można uzyskać, wykonując obliczenia w pamięci).



Rys. 27.71. Zadanie 74

75 Frzypuśćmy, że gdy siedzisz na krześle, ładunek elektryczny rozdziela się pomiędzy tym krzesłem a twoim ubraniem. W efekcie uzyskujesz potencjał 200 V, gdy twoja pojemność względem krzesła wynosi 150 pF. Gdy wstajesz, zwiększenie odległości pomiędzy tobą a krzesłem zmniejsza tą pojemność do 10 pF. a) Ile wynosi wtedy potencjał twojego ciała? Potencjał ten maleje z czasem w wyniku odpływu ładunku poprzez ciało i buty do ziemi (jesteś kondensatorem rozładowującym się przez opór). Załóżmy, że opór, który napotyka na tej drodze ładunek wynosi 300 GΩ. Jeśli dotkniesz jakiegoś elementu elektrycznego mając potencjał wyższy niż 100 V, możesz go zniszczyć. b) Jak długo musisz odczekać zanim twój potencjał osiągnie bezpieczny poziom 100 V? Jeśli na nadgarstku masz uziemioną przewodzącą opaskę, twój potencjał w chwili powstania nie rośnie tak bardzo. Rozładowujesz się także znacznie szybciej ponieważ opór takiego uziemienia jest znacznie mniejszy niż opór ciała i butów. c) Przypuśćmy, że twój potencjał zaraz po powstaniu wynosi 1400 V, a twoja pojemność jest równa 10 pF. Ile wynosi opór uziemienia przez opaskę na nadgarstku, który pozwoliłby na rozładowanie twojego ciała do potencjału 100 V w ciągu 0,3 s, czyli szybciej niż zdążysz na przykład sięgnąć do komputera?

**76 •** Na rysunku 27.72 SEM doskonałych baterii wynoszą  $\mathcal{E}_1 = 20 \text{ V}, \mathcal{E}_2 = 10 \text{ V}, \mathcal{E}_3 = 5 \text{ V}, \text{ a każdy opór wynosi 2 } \Omega.$ 

Jakie są a) natężenie i b) kierunek (w lewo, czy w prawo) prądu  $I_1$ ? c) Czy bateria 1 dostarcza, czy pochłania energię i d) jaka jest jej moc? e) Czy bateria 2 dostarcza czy pochłania energię i f) jaka jest jej moc? g) Czy bateria 3 dostarcza czy pochłania energię i h) jaka jest jej moc?



Rys. 27.72. Zadanie 76

**77** ssm Stabilny temperaturowo opornik zrobiony jest z opornika wykonanego z krzemu, który jest połączony szeregowo z opornikiem wykonanym z żelaza. Ile powinny wynosić opory a) opornika krzemowego i b) opornika z żelaza, jeśli wymagany całkowity opór w szerokim zakresie temperatur dookoła 20° wynosi 1000  $\Omega$ ? (Porównaj tabelę 26.1).

**78** Na rysunku 27.14 przyjmij  $\mathcal{E} = 5 \text{ V}$ ,  $r = 2 \Omega$ ,  $R_1 = 5 \Omega$ i  $R_2 = 4 \Omega$ . Jaki procentowy błąd wprowadza do mierzonego natężenia prądu opór amperomierza wynoszący  $R_A = 0,1 \Omega$ ? Załóż, że nie ma w obwodzie woltomierza.

**79** ssm Nienaładowany początkowo kondensator *C* zostaje całkowicie naładowany ze źródła SEM  $\mathcal{E}$  połączonego szeregowo z opornikiem o oporze *R*. a) Wykaż, że końcowa energia zmagazynowana w kondensatorze jest równa połowie energii dostarczonej przez źródło SEM. b) Przez scałkowanie wielkości  $I^2 R$  po czasie ładowania wykaż, że energia rozproszona w postaci energii termicznej w oporniku stanowi także połowę energii dostarczanej przez źródło SEM.

**80** Na rysunku 27.73:  $R_1 = 5\Omega$  i  $R_2 = 10\Omega$ ,  $R_3 = 15\Omega$ ,  $C_1 = 5\mu$ F,  $C_2 = 10\mu$ F, a SEM doskonałej baterii wynosi  $\mathcal{E} = 20$  V. Jaka całkowita energia jest zmagazynowana w obu kondensatorach przy założeniu, że obwód znajduje się w stanie stacjonarnym?



Rys. 27.73. Zadanie 80

**81** Na rysunku 27.5a znajdź różnicę potencjałów na końcach opornika  $R_2$ , jeśli  $\mathcal{E} = 12$  V,  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ .

82 Na rysunku 27.8a oblicz różnicę potencjałów pomiędzy punktami *a* i *c*, rozważając drogę zawierającą R,  $r_1$  i  $\mathcal{E}_1$ .

**83** ssm Kontroler gry elektronicznej składa się z opornika o zmiennym oporze, połączonego z okładkami kondensatora o pojemności 0,22 μF. Kondensator jest ładowany do 5 V, a następnie rozładowywany przez opornik. Czas zmniejszenia się różnicy potencjałów na okładkach do 0,8 V jest mierzony przez zegar w grze. Jaka musi być a) najmniejsza i b) największa wartość tego oporu musi być zakres zmienności oporu opornika, aby uzyskać czasy rozładowania z przedziału od 10 μs do 6 ms?

**84** Na rysunku 27.74 przedstawiony jest schematycznie miernik poziomu paliwa w samochodzie. Opór wskaźnika (na desce rozdzielczej) wynosi 10 Ω. Czujnik poziomu paliwa jest pływakiem połączonym z opornikiem o zmiennym oporze, którego opór zmienia się liniowo z objętością paliwa. Opór ten wynosi 140 Ω, gdy zbiornik jest pusty i 20 Ω gdy zbiornik jest



pełny. Znajdź natężenie prądu płynącego przez obwód gdy zbiornik jest a) pusty b) w połowie napełniony i c) pełny. Załóż, że bateria jest doskonała.

**85** ssm Rozrusznik w samochodzie obraca się zbyt wolno i mechanik musi zadecydować, czy wymienić sam rozrusznik, kabel czy akumulator. W instrukcji obsługi samochodu podano, że opór wewnętrzny akumulatora 12 V nie powinien być większy niż 0,02  $\Omega$ , rozrusznik nie powinien mieć oporu większego niż 0,2  $\Omega$ , a kabel oporu większego niż 0,04  $\Omega$ . Mechanik włącza rozrusznik i stwierdza, że różnica potencjałów na akumulatorze wynosi 11,4 V, na kablu 3 V, a natężenie prądu jest równe 50 A. Która część jest zepsuta?

**86** Dwa oporniki  $R_1$  i  $R_2$  mogą zostać połączone szeregowo lub równolegle z doskonałą baterią o SEM  $\mathcal{E}$ . Chcemy, aby szybkość rozpraszania energii w układzie równoległym była pięć razy większa niż w układzie szeregowym. Jeśli  $R_1 =$  $100 \Omega$ , to ile wynoszą: a) mniejsza i b) większa wartość oporu  $R_2$ , dla którego spełniony jest ten warunek?

87 Obwód przedstawiony na rysunku 27.75 zawiera kondensator, dwie doskonałe baterie, dwa oporniki i przełącznik S, Początkowo przełącznik S był przez długi czas otwarty. Jeśli następnie przełącznik zostanie zamknięty na długi czas, to jaka będzie



**Rys. 27.75.** Zadanie 87

zmiana ładunku na kondensatorze? Przyjmij  $C = 10 \,\mu\text{F}$ ,  $\mathcal{E}_1 = 1 \,\text{V}, \,\mathcal{E}_2 = 3 \,\text{V}, \,R_1 = 0, 2 \,\Omega \,\text{i} \,R_2 = 0, 4 \,\Omega.$ 

**88** Na rysunku 27.41  $R_1 = 10 \Omega$  i  $R_2 = 20 \Omega$ , a SEM doskonałych baterii wynoszą  $\mathcal{E}_1 = 20$  V i  $\mathcal{E}_2 = 50$  V. Dla jakiej wartości  $R_3$  przez baterię 1 nie płynie żaden prad?

**89** Na rysunku 27.76  $R = 10 \Omega$ . Jaki jest opór równoważny pomiędzy punktami Ai B? (*Wskazówka*: Obwód mógłby wyglądać prościej, gdyby najpierw przyjąć, że bateria podłączona jest do punktów A i B).



**Rys. 27.76.** Zadanie 89

**90** a) Rysunek 27.4a pokazuje, że szybkość, z jaką w oporniku *R* rozpraszana jest energia termiczna osiąga maksimum, gdy R = r. b) Wykaż, że ta maksymalna wartość wynosi  $P = \mathcal{E}^2/4r$ .

91 Na rysunku 27.77 SEM dwóch doskonałych baterii wynosi  $\mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}$  i  $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ V}$ , a opór każdego z oporników wynosi 4  $\Omega$ . Jakie jest a) natężenie i b) kierunek (w góre czy w dół) prądu  $I_1$ ? Jakie jest c) natężenie i d) kierunek (w góre czy w dół) pradu I<sub>2</sub>? e) Czy bateria 1 dostarcza, czy pochłania energię i f) z jaką predkością zachodzi ten przekaz energii? g) Czy bateria 2 dostarcza, czy pochłania energie i f) z jaką prędkością zachodzi ten transfer?

**92** Na rysunku 27.78 przedstawiono wycinek obwodu, przez który płynie prąd o natężeniu I = 6 A. Opory wynoszą  $R_1 = R_2 = 2R_3 =$  $2R_4 = 4 \Omega$ . Jakie jest natężenie prądu  $I_1$  płynącego przez opornik 1?



Rys. 27.77. Zadanie 91



Rys. 27.78. Zadanie 92

**93** Połączenie opornika 0,1  $\Omega$  z baterią, której SEM wynosi 1,5 V ma wywoływać w nim generację energii termicznej z szybkością 10 W. a) Jaka różnica poten-

cjałów musi istnieć na końcach opornika? b) Ile musi wynosić opór wewnętrzny baterii?

**94** Na rysunku 27.79 przedstawiono trzy oporniki 20  $\Omega$ .



Rys. 27.79. Zadanie 94

Znajdź opór równoważny pomiędzy punktami: a) *A* i *B*, b) *A* i *C* oraz c) *B* i *C*. (*Wskazówka*: Wyobraź sobie, że bateria połączona jest z odpowiednimi punktami).

**95** Linia zasilania 120 V jest zabezpieczona bezpiecznikiem 15 A. Ile maksymalnie lamp o mocy 500 W można jednocześnie podłączyć równolegle do tej linii bez przepalenia bezpiecznika spowodowanego przekroczeniem dopuszczalnej wartości natężenia prądu?

**96** Na rysunku 27.63 przedstawiono doskonałą baterię o SEM  $\mathcal{E} = 12$  V, opornik o oporze 4  $\Omega$  i nienaładowany kondensator o pojemności  $C = 4 \,\mu\text{F}$ . Jakie jest natężenie prądu płynącego przez opornik po zamknięciu przełącznika S, jeśli ładunek zgromadzony na kondensatorze wynosi 8  $\mu$ F?

**97** ssm Zestaw *N* jednakowych baterii o SEM  $\mathcal{E}$  i oporze wewnętrznym *r* może zostać zestawiony szeregowo (rys. 27.80a) lub równolegle (rys. 27.80b), a następnie połączony z opornikiem *R*. Wykaż, że jeśli R = r to w obu przypadkach natężenie prądu płynącego przez opornik *R* będzie takie samo.



N baterii połączonych równolegle



Rys. 27.80. Zadanie 97

**98** ssm Na rysunku 27.48  $R_1 = R_2 = 10 \Omega$ , a SEM doskonałej baterii wynosi  $\mathcal{E} = 12$  V. a) Dla jakiej wartości  $R_3$  szybkość, z jaką bateria dostarcza energię, jest największa i b) jaka jest wartość tej maksymalnej szybkości?

**99** ssm Na rysunku 27.66 SEM doskonałej baterii wynosi  $\mathcal{E} = 30 \text{ V}$ , opory  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ , a kondensator nie jest naładowany. Gdy przełącznik zostaje zamknięty w chwili t = 0, jakie jest natężenie prądu płynącego przez a) opornik 1 i b) opornik 2? c) Jakie jest natężenie prądu płynącego przez opornik 2 po upływie dostatecznie długiego czasu?

**100** Na rysunku 27.81, SEM doskonałych baterii wynosi  $\mathcal{E}_1 = 20$  V,  $\mathcal{E}_2 = 10$ V,  $\mathcal{E}_3 = 5$ V,  $\mathcal{E}_4 = 5$ V, a opór

każdego z oporników wynosi 2  $\Omega$ . Jakie są a) wartość natężenia i b) kierunek (w lewo czy w prawo) prądu  $I_1$  oraz c) wartość natężenia i d) kierunek (w lewo czy w prawo) prądu  $I_2$ ? (Oblicz w pamięci.) e) Z jaką szybkością przenoszona jest energia w baterii 4 i f) czy energia w tej baterii jest dostarczana czy pochłaniana?

**101** Przedstawiona na rysunku 27.82 doskonała bateria o SEM  $\mathcal{E} = 12$  V połączona jest z siecią oporników  $R_1 =$  $6 \Omega$ ,  $R_2 = 12 \Omega$ ,  $R_3 = 4 \Omega$ ,  $R_4 = 3 \Omega$  i  $R_5 = 5 \Omega$ . Jaka różnica potencjałów panuje na końcach opornika 5?

**102** W poniższej tabeli przedstawiono zależność różnicy potencjałów  $U_T$  na elektrodach baterii jako funkcję natężenia prądu *I*, który z niej wypływa. a) Napisz równanie opisujące związek pomiędzy  $U_T$  a *I*. Wprowadź dane



Rys. 27.81. Zadanie 100



Rys. 27.82. Zadanie 101

do kalkulatora z funkcją graficzną i znajdź metodą najmniejszych kwadratów współczynniki opisujące tę zależność. Wyznacz: b) SEM baterii i c) jej opór wewnętrzny.

I(A):	50	75	100	125	150	175	200
$U_T(\mathbf{V})$ :	10,7	9	7,7	6	4.8	3	1,7

**103** Na rysunku 27.83  $\mathcal{E}_1 = 6 \text{ V}, \mathcal{E}_1 = 12 \text{ V}, \mathcal{R}_1 = 200 \Omega$ i  $\mathcal{R}_2 = 100 \Omega$ . Jakie są: a) wartość natężenia i b) kierunek (w górę czy w dół) prądu płynącego przez opornik 1, c) wartość natężenia



Rys. 27.83. Zadanie 103

i d) kierunek prądu płynącego przez opornik 2, e) wartość natężenia i f) kierunek prądu płynącego przez baterię 2?

**104** Moc trzystopniowej żarówki 120 V zawierającej dwa włókna wynosi 100-200-300 W. Jedno włókno ulega przepaleniu. Później żarówka świeci tak samo intensywnie, gdy przełącznik jest w najniższym i w najwyższym położeniu, a nie świeci wcale, gdy przełącznik znajduje się w położeniu środkowym. a) W jaki sposób dwa włókna żarówki połączone są z trzema położeniami jej przełącznika? Jakie są: b) mniejsza i c) większa wartość oporu włókna żarówki?

**105** Na rysunku 27.84  $R_1 = R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 4 \Omega$ ,  $R_4 = 3 \Omega$ ,  $R_5 = 1 \Omega$ ,  $R_6 = R_7 = R_8 = 8 \Omega$ , a doskonałe baterie mają SEM  $\mathcal{E}_1 = 16$  V i  $\mathcal{E}_2 = 8$  V. Jakie są: a) wartość natężenia i b) kierunek (w górę czy w dół) prądu  $I_1$  oraz c) wartość natężenia i d) kierunek prądu  $I_2$ ? Z jaką szybkością przenoszona jest energia e) w baterii 1 i f) w baterii 2? Czy energia w g) baterii 1 i h) baterii 2 jest dostarczana czy pochłaniana?



Rys. 27.84. Zadanie 105

# Pole magnetyczne

Ζ

D

# DRA B

# **28.1.** POLE MAGNETYCZNE I DEFINICJA WEKTORA $\vec{B}$

28

Ł

Α

#### Czego się nauczysz?

R

0

Ζ

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 28.01 odróżniać elektromagnes od magnesu trwałego;
- **28.02** stwierdzić, że pole magnetyczne jest wielkością wektorową, a więc ma zarówno natężenie, jak i kierunek;
- 28.03 wyjaśnić, jak można określić pole magnetyczne, badając ruch cząstki naładowanej poruszającej się w tym polu;
- **28.04** zastosować dla cząstki naładowanej, poruszającej się w jednorodnym polu magnetycznym, związek między siłą  $F_B$ działającą na tę cząstkę, jej prędkością v, indukcją pola Boraz kątem  $\phi$  między kierunkami wektora prędkości  $\vec{v}$  i wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ ;
- **28.05** określić kierunek siły magnetycznej  $\vec{F}_B$  działającej na cząstkę naładowaną, poruszającą się w jednorodnym polu magnetycznym, (1) stosując regułę prawej dłoni do określenia kierunku iloczynu wektorowego  $\vec{v} \times \vec{B}$  i (2) biorąc pod uwagę znak ładunku cząstki;

#### Podstawowe fakty \_

• Na cząstkę naładowaną poruszającą się w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  działa siła magnetyczna

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}),$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki (z uwzględnieniem znaku), a  $\vec{v}$  — prędkością cząstki.

Reguła prawej dłoni pozwala wynaczyć kierunek iloczynu

- **28.06** znaleźć siłę magnetyczną  $\vec{F}_B$  działającą na poruszającą się cząstkę naładowaną, obliczając iloczyn wektorowy  $q(\vec{v} \times \vec{B})$  zarówno w notacji wektorowej, jak i za pomocą długości wektorów i kątów między nimi;
- **28.07** uzasadnić, że wektor siły magnetycznej  $\vec{F}_B$  musi być zawsze prostopadły zarówno do wektora prędkości  $\vec{v}$ , jak i do wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ ;
- **28.08** opisać, jak siła magnetyczna wpływa na prędkość cząstki i jej energię kinetyczną;
- 28.09 opisać magnes jako dipol magnetyczny;
- 28.10 stwierdzić, że różnoimienne bieguny magnesów przyciągają się, a jednoimienne odpychają;
- **28.11** opisać linie pola magnetycznego gdzie się zaczynają i kończą oraz co oznaczają odstępy między nimi.

wektorowego  $\vec{v} \times \vec{B}$ . W zależności od znaku ładunku q zwrot siły  $\vec{F}_B$  jest albo zgodny z kierunkiem wektora  $\vec{v} \times \vec{B}$ , albo przeciwny.

• Wartość siły  $\vec{F}_B$  jest dana wyrażeniem

$$F_B = |q|vB\sin\phi$$

gdzie  $\phi$  jest kątem między kierunkami wektorów  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$ .

#### 0 fizyce

Mówiliśmy poprzednio, że jednym z najważniejszych celów fizyki jest badanie, jak *pole elektryczne* wytwarza *siłę elektryczną*. Bardzo zbliżonym celem jest próba zrozumienia, jak *pole magnetyczne* wytwarza *siłę magnetyczną*, która działa na poruszającą się cząstkę naładowaną lub magnes. Z polem magnetycznym stykasz się, przyczepiając kartkę z notatkami do drzwi lodówki za pomocą małego magnesu lub wymazując kartę kredytową, gdy przypadkowo zbliżasz ją do magnesu. Magnes działa na drzwi lub na kartę kredytową za pośrednictwem swojego pola magnetycznego. Zastosowań pól magnetycznych i sił magnetycznych jest wiele i ciągle przybywa nowych. Przez dziesiątki lat przemysł rozrywkowy wykorzystywał magnetyczne utrwalanie dżwięków i obrazów na taśmach magnetofonowych i wideo. Choć technologia cyfrowa zastąpiła dziś skutecznie tamte nośniki, wiele form rozrywki nie może się obejść bez magnesów sterujących odtwarzaczami CD i DVD lub twardymi dyskami w komputerach; magnesy poruszają także membrany głośników w słuchawkach, telewizorach, komputerach i telefonach. We współczesnym samochodzie znajdują się dziesiątki magnesów niezbędych do działania rozrusznika, opuszczania i podnoszenia szyb czy poruszania wycieraczkami. Większość systemów alarmowych, dzwonków do drzwi czy automatycznych systemów dostępu opiera się na działaniu magnesów. Krótko mówiąc, jesteś otoczony magnesami.

Nauką zajmującą się polami magnetycznymi jest fizyka, ich zastosowania to domena nauk technicznych. Zarówno w badaniach podstawowych, jak i stosowanych należy najpierw odpowiedzieć na pytanie: "Co wytwarza pole magnetyczne?"

#### Co wytwarza pole magnetyczne?

Skoro pole elektryczne  $\vec{E}$  jest wytwarzane przez ładunek elektryczny, można by oczekiwać, że pole magnetyczne  $\vec{B}$  jest wytwarzane przez ładunek magnetyczny. Chociaż takie ładunki magnetyczne, nazywane monopolami magnetycznymi, są przewidywane w niektórych teoriach, to ich istnienie nie zostało dotychczas potwierdzone. Jak zatem wytworzyć pole magnetyczne? Można to zrobić dwoma sposobami.

Pierwszy sposób polega na użyciu poruszających się cząstek naładowanych elektrycznie, na przykład tworzących prąd elektryczny w przewodzie, do zbudowania **elektromagnesu**. Prąd jest źródłem pola magnetycznego, które może być wykorzystane, na przykład, do sterowania twardym dyskiem komputera lub segregowania złomu (rys. 28.1). Polem magnetycznym wytwarzanym przez prąd elektryczny zajmiemy się w rozdziale 29.

Drugi sposób wytworzenia pola magnetycznego wykorzystuje pewną właściwość cząstek elementarnych, takich jak elektron, a mianowicie fakt, że cząstki te mają *wewnętrzne* właściwości magnetyczne i wytwarzają wokół siebie pole magnetyczne. Podobnie jak masa i ładunek elektryczny cząstki (lub jego brak), te właściwości magnetyczne zalicza się do podstawowych właściwości cząstek elementarnych. Jak zobaczysz w rozdziale 32, pola magnetyczne elektronów w niektórych materiałach sumują się, wytwarzając wokół nich wypadkowe pole magnetyczne. Takie zjawisko występuje w **magnesach trwałych** (co jest korzystne, gdyż magnesy mogą utrzymywać karteczki z notatkami na drzwiach lodówki). W innych materiałach pola magnetyczne wszystkich elektronów wzajemnie się znoszą, nie wytwarzając na zewnątrz wypadkowego pola magnetycznego. Takie zjawisko występuje w substancjach, z których składa się twoje ciało (co jest również korzystne, gdyż w przeciwnym razie mógłbyś uderzać się o drzwi lodówki, ilekroć przechodziłbyś obok niej).

Z doświadczenia wiemy, że jeśli naładowana cząstka (pojedyncza lub będąca nośnikiem prądu elektrycznego) porusza się w polu magnetycz-



**Rys. 28.1.** Zastosowanie elektromagnesu do zbierania i transportu złomu do huty (fot. Digital Vision/Getty Images Inc.)

nym  $\vec{B}$ , to na tę cząstkę działa siła  $\vec{F}_B$ , wynikająca z istnienia pola. W tym rozdziale zajmiemy się przede wszystkim związkiem między polem magnetycznym a tą siłą.

#### Definicja wektora $\vec{B}$

Natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  w pewnym punkcie określiliśmy, umieszczając w tym punkcie cząstkę próbną o ładunku q pozostającą w spoczynku, i mierząc siłę elektryczną  $\vec{F}_E$  działającą na tę cząstkę. Następnie zdefiniowaliśmy  $\vec{E}$  jako

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_E}{q}.$$
(28.1)

Gdyby istniały monopole magnetyczne, moglibyśmy w podobny sposób zdefiniować wektor  $\vec{B}$  będący miarą tego, jak silne jest pole magnetyczne. Jednak takie cząstki nie zostały odkryte, dlatego też musimy określić  $\vec{B}$  inaczej, w zależności od siły  $\vec{F}_B$  działającej na poruszającą się naładowaną cząstkę próbną.

**Poruszająca się cząstka naładowana.** Teoretycznie moglibyśmy to zrobić, wystrzeliwując naładowaną cząstkę tak, aby przechodziła w różnych kierunkach i z różnymi prędkościami przez punkt, w którym mamy zdefiniować wektor  $\vec{B}$ . Następnie moglibyśmy zmierzyć siłę  $\vec{F}_B$  działającą na cząstkę w tym punkcie. Po wielu takich próbach okazałoby się, że siła  $\vec{F}_B$ jest równa zeru, gdy wektor prędkości cząstki  $\vec{v}$  jest skierowany wzdłuż pewnej wyróżnionej osi. Dla wszystkich innych kierunków wektora prędkości  $\vec{v}$  wartość siły  $\vec{F}_B$  jest zawsze proporcjonalna do  $v \sin \phi$ , gdzie  $\phi$ jest kątem między wyróżnioną osią a kierunkiem  $\vec{v}$ . Ponadto kierunek siły  $\vec{F}_B$  jest zawsze prostopadły do kierunku wektora prędkości  $\vec{v}$ . (Te wyniki wskazują, że mamy do czynienia z iloczynem wektorowym).

**Pole.** Możemy zatem teraz zdefiniować wielkość  $\vec{B}$ , którą nazywa się indukcją magnetyczną danego pola, jako wielkość wektorową, skierowaną wzdłuż osi odpowiadającej kierunkowi prędkości cząstek, dla którego siła jest równa zeru. Możemy następnie zmierzyć wartość siły  $\vec{F}_B$ , gdy wektor prędkości  $\vec{v}$  jest skierowany prostopadle do tej osi, i zdefiniować wartość bezwzględną  $\vec{B}$  w zależności od wartości siły:

$$B = \frac{F_B}{|q|v},$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki.

Wszystkie dotychczasowe wyniki mogą być zebrane w postaci równania wektorowego

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}, \qquad (28.2)$$

zgodnie z którym siła  $\vec{F}_B$  działająca na cząstkę (nosząca nazwę siły Lorentza) jest równa ładunkowi cząstki pomnożonemu przez iloczyn wektorowy jej prędkości  $\vec{v}$  i indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  (wszystkie wielkości są mierzone w tym samym układzie odniesienia). Korzystając z równania (3.24) określającego iloczyn wektorowy, możemy zapisać wartość  $\vec{F}_B$  jako

$$F_B = |q|vB\sin\phi, \qquad (28.3)$$

gdzie  $\phi$  oznacza kąt między kierunkami wektorów prędkości  $\vec{v}$  i indukcji magnetycznej B.

#### Wyznaczanie siły działającej na cząstkę w polu magnetycznym

Z równania (28.3) wynika, że wartość siły  $\vec{F}_B$  działającej na cząstkę w polu magnetycznym jest proporcjonalna do ładunku *q* i wartości predkości *v* cząstki. Tak więc siła jest równa zeru, gdy ładunek jest równy zeru lub gdy czastka jest w spoczynku. Z tego samego równania wiemy, że siła jest równa zeru, gdy wektory  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$  są albo równoległe ( $\phi = 0^{\circ}$ ), albo antyrównoległe ( $\phi = 180^\circ$ ), natomiast siła jest największa, gdy wektory  $\vec{v}$ i  $\vec{B}$  sa prostopadłe.

*Kierunek.* Z równania (28.2) możemy określić także kierunek siły  $\vec{F}_B$ . Na podstawie podrozdziału 3.3 wiemy, że iloczyn wektorowy  $\vec{v} \times \vec{B}$  w równaniu (28.2) jest wektorem prostopadłym do wektorów  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$ . Zgodnie z regułą prawej dłoni (rys. 28.2a-c) kciuk prawej dłoni wskazuje kierunek  $\vec{v} \times \vec{B}$ , jeśli pozostałe palce pokazują kierunek obrotu wektora  $\vec{v}$  w kierunku wektora  $\vec{B}$ . Jeżeli ładunek q jest dodatni, to zgodnie z równaniem (28.2) siła  $\vec{F}_B$  ma taki sam znak jak iloczyn wektorowy  $\vec{v} \times \vec{B}$  i dlatego musi być tak samo skierowana. Oznacza to, że dla dodatniego ładunku q siła  $\vec{F}_B$  jest skierowana wzdłuż kciuka (rys. 28.2d). Jeżeli ładunek q jest ujemny, to siła  $\vec{F}_B$ i iloczyn wektorowy  $\vec{v} \times \vec{B}$  mają przeciwne znaki i dlatego muszą być skierowane przeciwnie. Dla ujemnego ładunku q siła  $\vec{F}_B$  jest skierowana przeciwnie niż kciuk (rys. 28.2e). Uwaga! Pominęcie wpływu ujemnego znaku ładunku na kierunek siły to jeden z najczestszych błedów na egzaminach.

Jednak niezależnie od znaku ładunku:

Siła  $\vec{F}_B$  działająca na naładowaną cząstkę, która porusza się z prędkością  $\vec{v}$  w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , jest zawsze prostopadła do wektorów  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$ .



**Rys. 28.2.** a)–c) Reguła prawej dłoni pozwala określić kierunek  $\vec{v} \times \vec{B}$  zgodny z kierunkiem kciuka, jeżeli obracamy wektor  $\vec{v}$  w stronę wektora  $\vec{B}$  o mniejszy kąt  $\phi$  między tymi wektorami. d) Jeżeli ładunek q jest dodatni, to kierunek siły  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$  jest zgodny z kierunkiem  $\vec{v} \times \vec{B}$ . e) Jeżeli ładunek q jest ujemny, to kierunek siły  $\vec{F}_B$  jest przeciwny do kierunku  $\vec{v} \times \vec{B}$ 

Zatem siła  $\vec{F}_B$  nie ma *nigdy* składowej równoległej do wektora  $\vec{v}$ . Oznacza to, że siła  $\vec{F}_B$  nie może zmienić wartości prędkości v cząstki (a więc nie może zmienić energii kinetycznej cząstki). Siła ta może zmienić tylko kierunek prędkości  $\vec{v}$  (a więc kierunek ruchu) i tylko w tym znaczeniu siła  $\vec{F}_B$ może przyspieszać cząstkę.

Aby zrozumieć sens równania (28.2), spójrzmy na rysunek 28.3, na którym przedstawiono kilka śladów pozostawionych przez naładowane cząstki poruszające się z dużą prędkością w *komorze pęcherzykowej*. Komora wypełniona jest ciekłym wodorem i umieszczona w silnym, jednorodnym polu magnetycznym, skierowanym prostopadle przed płaszczyznę rysunku. Cząstka promieniowania  $\gamma$  wpadająca do komory nie zostawia śladu, gdyż nie jest naładowana. Cząstka ta wybija elektron z atomu wodoru (długi ślad zaznaczony e<sup>-</sup>), rozpadając się jednocześnie na elektron (spiralny ślad zaznaczony e<sup>-</sup>) i pozyton (spiralny ślad zaznaczony e<sup>+</sup>). Korzystając z równania (28.2) i rysunku 28.2, sprawdź, że trzy ślady pozostawione przez dwie ujemne cząstki i jedną dodatnią zakrzywiają się we właściwych kierunkach.

*Jednostka.* Jednostką indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w układzie SI, wynikającą z równań (28.2) i (28.3), jest niuton na kulomb razy metr na sekundę. Dla wygody nazwano tę jednostkę **teslą** (T)

$$1 \text{tesla} = 1 \text{ T} = 1 \frac{\text{niuton}}{(\text{kulomb})(\text{metr/sekunda})}$$

Pamiętając, że kulomb na sekundę to amper, otrzymujemy

$$1 T = 1 \frac{\text{niuton}}{(\text{kulomb/sekunda})(\text{metr})} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}.$$
 (28.4)

Starszą, ale wciąż używaną jednostką indukcji  $\vec{B}$  (spoza układu SI) jest gaus (Gs), przy czym

$$1 \text{tesla} = 10^4 \text{ gausów.} \tag{28.5}$$

W tabeli 28.1 podano wartości indukcji magnetycznej w różnych sytuacjach fizycznych. Zauważ, że ziemskie pole magnetyczne w pobliżu powierzchni Ziemi ma indukcję około  $10^{-4}$  T (100 µT lub 1 Gs).



#### Sprawdzian 1

Na rysunku przedstawiono trzy przypadki, w których naładowana cząstka porusza się z prędkością  $\vec{v}$  w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ . Jaki jest kierunek siły magnetycznej  $\vec{F}_B$  w każdym z tych przypadków?





**Rys. 28.3.** Ślady dwóch elektronów (e<sup>-</sup>) i pozytonu (e<sup>+</sup>) w komorze pęcherzykowej, umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym, które jest skierowane prostopadle przed płaszczyznę rysunku (fot. Lawrence Berkeley Laboratory/Photo Researchers Inc.)

Tabela 28.1.Przybliżone wartościindukcji magnetycznej

na powierzchni	0
gwiazdy neutronowej	10 <sup>8</sup> T
w pobliżu dużego elektromagnesu	1,5 T
w pobliżu małego	
magnesu sztabkowego	$10^{-2} { m T}$
na powierzchni Ziemi	$10^{-4} { m T}$
w przestrzeni	
międzygwiezdnej	10 <sup>-10</sup> T
najmniejsza wartość	
w pomieszczeniu	
ekranowanym magnetycznie	$10^{-14} \text{ T}$



a)



b)

**Rys. 28.4.** a) Linie pola magnetycznego magnesu sztabkowego. b) "Krowi magnes" — magnes sztabkowy przeznaczony do umieszczenia w pierwszym żołądku krowy, aby zabezpieczyć jelita przed przypadkowo połkniętymi kawałkami metalu. Żelazne opiłki na końcach magnesu układają się wzdłuż linii pola magnetycznego (dzięki uprzejmości dr. Richarda Cannona, Southeast Missouri State University, Cape Girardeau)

#### Linie pola magnetycznego

Pole magnetyczne możemy zilustrować za pomocą linii pola, podobnie jak zrobiliśmy to w przypadku pola elektrycznego. Obowiązują przy tym podobne zasady, czyli: 1) kierunek stycznej do linii pola magnetycznego w danym punkcie jest kierunkiem indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w tym punkcie, 2) odległość między liniami określa wartość wektora indukcji  $\vec{B}$  — pole magnetyczne jest silniejsze tam, gdzie linie przebiegają bliżej siebie, i na odwrót.

Na rysunku 28.4a pokazano, w jaki sposób pole magnetyczne w pobliżu *magnesu sztabkowego* (magnesu trwałego w kształcie sztabki) może być przedstawione za pomocą linii pola magnetycznego. Wszystkie linie przechodzą przez magnes i wszystkie tworzą zamknięte pętle (również te linie, które na rysunku nie są zamknięte). Oddziaływanie magnetyczne na zewnątrz magnesu sztabkowego jest najsilniejsze w pobliżu jego końców, gdzie gęstość linii jest największa. Tak więc pole magnetyczne magnesu sztabkowego, pokazanego na rysunku 28.4b, powoduje, że opiłki żelaza gromadzą się głównie w pobliżu obydwu końców magnesu.

*Dwa bieguny.* Zamknięte linie pola są skierowane do magnesu z jednego końca, a od magnesu z drugiego. Koniec magnesu, z którego linie wychodzą, nazywamy *biegunem północnym* magnesu; przeciwny koniec, do którego linie wchodzą, nazywany jest *biegunem południowym*. Ponieważ magnes ma dwa bieguny, mówimy, że jest on **dipolem magnetycznym**. Magnesy, których używamy do przytrzymywania kartek z notatkami na lodówce, są krótkimi magnesami sztabkowymi. Na rysunku 28.5 przedstawiono dwa inne, często spotykane kształty magnesów: *magnes podkowiasty* oraz magnes wygięty w kształcie litery C w taki sposób, że jego bieguny znajdują się naprzeciwko siebie. (Pole magnetyczne między biegunami jest więc w przybliżeniu jednorodne). Jeżeli umieścimy dwa magnesy blisko siebie, to niezależnie od ich kształtu przekonamy się, że:

Różnoimienne bieguny magnetyczne przyciągają się, a jednoimienne bieguny magnetyczne się odpychają.

Kiedy zbliżasz trzymane w ręku magnesy, ich przyciąganie i odpychanie może wydawać się nieomal czarodziejską sztuczką, jako że nie widać między nimi nic, co mogłoby wyjaśnić ich oddziaływanie. Podobnie jak zrobiliśmy to dla siły oddziaływania elektrostatycznego między dwiema cząstkami naładowanymi, to oddziaływanie na odległość możemy opisywać za pomocą niewidzialnego pola, w tym przypadku pola magnetycznego.

Wokół Ziemi istnieje pole magnetyczne, którego źródłem jest jej jądro, lecz mechanizm powstawania tego pola jest wciąż nieznany. Na powierzchni Ziemi obecność pola magnetycznego możemy wykryć za pomocą kompasu, który jest w istocie wydłużonym magnesem sztabkowym obracającym się swobodnie wokół osi. Ten magnes sztabkowy w kształcie igły ustawia się w określonym położeniu, gdyż jego biegun północny jest przyciągany w kierunku obszaru arktycznego Ziemi. Zatem w Arktyce musi znajdować się biegun ziemskiego pola magnetycznego, który zgodnie

#### 28.1. POLE MAGNETYCZNE I DEFINICJA WEKTORA $\vec{B}$ 257



z logiką powinniśmy nazwać biegunem *południowym*. Jednakże kierunek ten nazywamy północą, więc znaleźliśmy się w pułapce i, aby z niej wybrnąć, mówimy, że Ziemia ma w tym obszarze *geomagnetyczny biegun północny*.

Dokładniejsze pomiary wskazują, że na półkuli północnej linie ziemskiego pola magnetycznego skierowane są w dół, w stronę powierzchni Ziemi i jednocześnie w stronę Arktyki. Na półkuli południowej linie pola są skierowane w górę, od powierzchni Ziemi i od Antarktydy, czyli od *geomagnetycznego bieguna południowego* Ziemi.

#### Przykład 28.01. Siła magnetyczna działająca na poruszającą się cząstkę naładowaną

W jednorodnym polu magnetycznym wektor indukcji  $\vec{B}$  o wartości 1,2 mT jest skierowany pionowo w górę. W obszarze tego pola znajduje się komora pomiarowa. Proton o energii kinetycznej 5,3 MeV wpada do komory, poruszając się w kierunku poziomym z południa na północ. Ile wynosi wartość siły odchylającej proton, gdy wpada on do komory? Masa protonu jest równa 1,67  $\cdot 10^{-27}$  kg. (Pomiń ziemskie pole magnetyczne).

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Proton obdarzony jest ładunkiem i porusza się w polu magnetycznym, a więc może działać na niego siła magnetyczna  $\vec{F}_B$ . Nie jest ona równa zeru, gdyż początkowa prędkość protonu nie jest skierowana wzdłuż linii pola.

**Wartość:** Do wyznaczenia wartości  $\vec{F}_B$  może posłużyć równanie (28.3),  $F_B = |q|vB\sin\phi$ , pod warunkiem, że obliczymy najpierw prędkość v protonu. Prędkość v można wyznaczyć, znając energię kinetyczną, gdyż  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ . Otrzymujemy

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\rm k}}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(5,3 \text{ MeV})(1,60 \cdot 10^{-13} \text{J/MeV})}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}}}$$
  
= 3,2 \cdot 10<sup>7</sup> m/s.



**Rys. 28.6.** Widok z góry na proton poruszający się w komorze z południa na północ z prędkością *v*. Pole magnetyczne jest skierowane pionowo w górę komory, co zaznaczono na rysunku regularnym układem kropek, przypominających groty strzał. Tor protonu jest odchylony ku wschodowi

Równanie (28.3) daje zatem

$$F_B = |q|vB\sin\phi$$
  
= (1,60 \cdot 10^{-19}C)(3,2 \cdot 10^7 m/s)  
\times (1,2 \cdot 10^{-3}T)(sin 90^{\circ})  
= 6,1 \cdot 10^{-15}N (odpowiedź).

Może się wydawać, że to niewielka siła, ale działa ona na cząstkę o małej masie, nadając jej duże przyspieszenie

$$a = \frac{F_B}{m} = \frac{6.1 \cdot 10^{-15} \text{N}}{1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg}} = 3.7 \cdot 10^{12} \text{m/s}^2.$$

*Kierunek:* Aby znaleźć kierunek  $\vec{F}_B$ , skorzystamy z faktu, że siła  $\vec{F}_B$  jest skierowana wzdłuż prostej wyznaczonej przez iloczyn wektorowy  $q \vec{v} \times \vec{B}$ . Ładunek q jest dodatni, a więc  $\vec{F}_B$  musi mieć taki sam kierunek jak wektor  $\vec{v} \times \vec{B}$ , którego kierunek można określić na podstawie reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego (tak jak na rysunku 28.2d). Wiemy, że prędkość  $\vec{v}$  jest skierowana poziomo, z południa na północ, a wektor indukcji  $\vec{B}$  jest skierowany pionowo do góry. Reguła prawej dłoni wskazuje, że siła odchylająca  $\vec{F}_B$  musi być skierowana poziomo, z zachodu na wschód, jak przedstawiono na rysunku 28.6. (Regularnie ułożone kropki na rysunku przedstawiają pole magnetyczne skierowane prostopadle przed płaszczyznę rysunku. Regularny układ znaków X oznaczałby pole magnetyczne skierowane za tę płaszczyznę).

Gdyby cząstka miała ładunek ujemny, magnetyczna siła odchylająca byłaby skierowana przeciwnie — tzn. poziomo, ze wschodu na zachód. Wynika to bezpośrednio z równania (28.2), jeśli podstawimy ujemną wartość q.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **28.2.** POLA SKRZYŻOWANE: ODKRYCIE ELEKTRONU

#### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 28.12 opisać doświadczenie J.J. Thomsona;
- 28.13 określić siłę działającą na cząstkę naładowaną, poruszającą się w polach elektrycznym i magnetycznym — zarówno w notacji wektorowej, jak i za pomocą długości wektorów i katów miedzy nimi;
- 28.14 określić w sytuacjach, w których działające na cząstkę siły elektryczna i magnetyczna są skierowane przeciwnie – dla jakich prędkości te siły się znoszą, a dla jakich dominująca jest siła elektryczna bądź magnetyczna.

#### Podstawowe fakty

• Jeśli cząstka naładowana porusza się w obszarze, w którym występują pola elektryczne i magnetyczne, to będą na nią działać siły zarówno elektryczna, jak i magnetyczna.

- Jeśli pola są prostopadłe, mówimy, że są to *pola skrzyżo-wane*.
- Jeśli działające siły są skierowane przeciwnie, to dla pewnej prędkości nie wystąpi zakrzywienie toru cząstki.

#### Pola skrzyżowane: odkrycie elektronu

Zarówno pole elektryczne  $\vec{E}$ , jak i pole magnetyczne  $\vec{B}$  mogą działać siłą na naładowaną cząstkę. Gdy wektory tych dwóch pól są wzajemnie prostopadłe, mówimy, że są to *pola skrzyżowane*. Zbadamy teraz, co się stanie z naładowanymi cząstkami (np. z elektronami) podczas ruchu w polach skrzyżowanych. Jako przykład omówimy doświadczenie, które doprowadziło w 1897 r. do odkrycia elektronu przez J. J. Thomsona z Uniwersytetu w Cambridge.

*Dwie siły.* Na rysunku 28.7 przedstawiono schemat współczesnej wersji aparatury doświadczalnej, używanej przez Thomsona — lampę oscyloskopową (podobną do lampy kineskopowej w odbiorniku telewizyjnym starego typu). Po usunięciu powietrza z wnętrza lampy naładowane cząstki (o których teraz wiemy, że są elektronami) emitowane są przez rozżarzone włókno w tylnej części lampy i przyspieszane przez przyłożoną różnicę potencjałów *U*. Po przejściu przez szczelinę C cząstki tworzą wąską wiązkę. Następnie przechodzą przez obszar skrzyżowanych pól  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ , kierując się w stronę ekranu fluorescencyjnego S, na którym wywołują świecenie w postaci plamki (na ekranie telewizyjnym plamka jest częścią obrazu). Siły działające na naładowane cząstki w obszarze pól skrzyżowanych mogą odchylić te cząstki od środka ekranu. Zmieniając wartości i kierunki wektorów pól, Thomson mógł więc zmieniać położenie plamki świetlnej na ekranie. Przypomnij sobie, że pole elektryczne działa na naładowaną ujemnie cząstkę siłą skierowaną przeciwnie do kierunku pola. Zatem w układzie pokazanym na rysunku 28.7 pole elektryczne  $\vec{E}$  odchyla elektrony w górę, a pole magnetyczne  $\vec{B}$  w dół. Oznacza to, że siły te są *przeciwnie skierowane*. Doświadczenie Thomsona mógłbyś przeprowadzić następująco:

- 1. Dla E = 0 i B = 0 zaznacz na ekranie S położenie plamki świetlnej wywołanej przez nieodchyloną wiązkę.
- 2. Włącz pole elektryczne  $\vec{E}$  i zmierz odchylenie wiązki.
- 3. Utrzymując wartość natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  bez zmian, włącz pole magnetyczne  $\vec{B}$  i dobierz wartość jego indukcji tak, aby wiązka powróciła do położenia nieodchylonego. (Siły są przeciwnie skierowane, zatem można je dobrać tak, aby się równoważyły).

W przykładzie 22.4 omawialiśmy odchylenie toru naładowanej cząstki poruszającej się w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  między dwiema płytkami (krok 2 w doświadczeniu Thomsona). Wyznaczyliśmy odchylenie cząstki na końcu płytek:

$$y = \frac{|q|EL^2}{2mv^2},$$
 (28.6)

gdzie v jest prędkością cząstki, m — jej masą, q — jej ładunkiem, a L — długością płytek. To samo równanie można zastosować do wiązki elektronów na rysunku 28.7; w razie potrzeby moglibyśmy zmierzyć przemieszczenie wiązki na ekranie, a następnie obliczyć odchylenie y na końcu płytek. (Kierunek odchylenia zależy od znaku ładunku cząstki, a więc Thomson mógł wykazać, że cząstki wywołujące świecenie na ekranie były naładowane ujemnie).

*Znoszenie się sił.* Gdy dwa pola na rysunku 28.7 są dobrane w taki sposób, że siły odchylające równoważą się (krok 3), ze wzorów (28.1) i (28.3)

**Rys. 28.7.** Współczesna wersja aparatury J. J. Thomsona, służącej do pomiaru stosunku masy do ładunku dla elektronu. Pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$  powstaje w wyniku dołączenia baterii do płytek odchylających. Pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$  jest wytworzone przez prąd płynący w układzie cewek (niepokazanych na rysunku). Wektory  $\vec{B}$  są skierowane za płaszczyznę rysunku, co przedstawiono jako regularny układ znaków X, przypominających upierzone ogony strzał



otrzymujemy

$$|q|E = |q|vB\sin(90^\circ) = |q|vB,$$

czyli:

$$v = \frac{E}{B}$$
 (znoszenie się przeciwnie skierowanych sił). (28.7)

Zatem możliwy jest pomiar prędkości naładowanej cząstki przechodzącej przez obszar pól skrzyżowanych. Po podstawieniu wyrażenia (28.7) w miejsce v w równaniu (28.6) otrzymamy

$$\frac{n}{q|} = \frac{B^2 L^2}{2yE},$$
(28.8)

gdzie wszystkie wielkości po prawej stronie mogą być zmierzone. Tak więc pola skrzyżowane pozwalają nam zmierzyć stosunek m/|q| dla cząstek poruszających się w aparaturze Thomsona. (*Uwaga*: wzór (28.7) stosuje się wtedy, gdy siła elektryczna jest skierowana przeciwnie do siły magnetycznej. W zadaniach możesz spotkać się z innymi sytuacjami).

Thomson twierdził, że te cząstki znajdują się we wszystkich substancjach. Twierdził także, że są one lżejsze ponad tysiąc razy od najlżejszego znanego atomu (wodoru). (Później wykazano, że dokładna wartość tego stosunku jest równa 1836,15). Pomiar stosunku m/|q| w połączeniu ze śmiałością obydwu stwierdzeń Thomsona uważany jest za "odkrycie elektronu".

## $\checkmark$

#### Sprawdzian 2

Na rysunku przedstawiono cztery kierunki wektora prędkości  $\vec{v}$  dodatnio naładowanej cząstki, która porusza się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  (skierowanym przed płaszczyznę rysunku i oznaczonym kropką w kółku) oraz w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ . a) Uszereguj kierunki 1, 2 i 3 pod względem wartości wypadkowej siły działającej na cząstkę, poczynając od największej wartości. b) Dla którego spośród wszystkich kierunków prędkości wypadkowa siła może być równa zeru.



# **28.3.** POLA SKRZYŻOWANE: ZJAWISKO HALLA

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 28.15 opisać zjawisko Halla w metalowym pasku przewodzącym prąd, wyjaśniając, skąd bierze się pole elektryczne i jakie czynniki ograniczają jego natężenie;
- 28.16 narysować dla metalowego paska przewodzącego, w którym zachodzi zjawisko Halla — wektory pola elektrycznego i magnetycznego, wektory prędkości elektronów przewodnictwa oraz wektory działających na nie sił elektrycznej i magnetycznej;
- **28.17** stosować związek między napięciem Halla *U*, natężeniem pola elektrycznego *E* i szerokością paska *d*;
- **28.18** stosować związek między koncentracją nośników prądu *n*, indukcją pola magnetycznego *B*, natężeniem prądu *I* oraz napięciem Halla *U*;
- 28.19 zastosować opis zjawiska Halla do przewodzącego ciała poruszającego się w jednorodnym polu magnetycznym, określając, dla jakich punktów wystąpi różnica potencjałów U, i obliczając tę różnicę w zależności od odległości d między tymi punktami.

#### Podstawowe fakty

• Po przyłożeniu jednorodnego pola magnetycznego *B* do przewodzącego paska, w którym płynie prąd *I* w kierunku prostopadłym do pola magnetycznego, między punktami na przeciwnych brzegach paska wygeneruje się różnica potencjałów *U* (napięcie Halla).

• Siła elektryczna  $\vec{F}_E$  działająca na nośniki prądu znosi się w tej sytuacji z działającą na nie siłą magnetyczną  $\vec{F}_B$ .

 Koncentrację n nośników prądu można wyznaczyć ze związku

$$n = \frac{BI}{Ule},$$

gdzie l jest prostopadłą do  $\vec{B}$  grubością paska.

• W przewodniku poruszającym się z prędkością  $\vec{v}$  w jednorodnym polu magnetycznym  $\vec{B}$  generuje się różnica potencjałów U dana wzorem U = vBd,

gdzie *d* jest szerokością przewodnika w kierunku prostopadłym zarówno do prędkości  $\vec{v}$ , jak i do indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}$ .

#### Pola skrzyżowane: zjawisko Halla

Jak wiesz, wiązka elektronów w próżni może być odchylona za pomocą pola magnetycznego. Czy elektrony przewodnictwa poruszające się w drucie miedzianym mogą być również odchylone przez pole magnetyczne? W 1879 roku Edwin H. Hall, wówczas 24-letni magistrant w Johns Hopkins University, wykazał, że takie zjawisko rzeczywiście zachodzi. To **zjawisko Halla** pozwala sprawdzić, czy nośniki w przewodniku są naładowane dodatnio, czy ujemnie. Ponadto możemy zmierzyć liczbę takich nośników, przypadającą na jednostkę objętości przewodnika, czyli koncentrację nośników.

Na rysunku 28.8a pokazano pasek miedziany o szerokości d, w którym płynie prąd o natężeniu I w kierunku umownym od góry rysunku ku dołowi. Nośnikami ładunku są elektrony, które, jak wiemy, poruszają się z prędkością unoszenia  $v_d$  w kierunku przeciwnym, czyli z dołu do góry. W chwili przedstawionej na rysunku 28.8a włączono właśnie zewnętrzne pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$ , skierowane za płaszczyznę rysunku. Jak widać z równania (28.2), siła magnetyczna  $\vec{F}_B$  będzie działać na każdy poruszający się elektron, odchylając go w kierunku prawego brzegu paska.

W miarę upływu czasu elektrony przemieszczają się w prawo, gromadząc się głównie przy prawym brzegu paska i pozostawiając nieskompensowane ładunki dodatnie w ustalonych położeniach przy lewym brzegu. Rozdzielenie dodatnich i ujemnych ładunków powoduje powstanie wewnątrz paska pola elektrycznego o natężeniu  $\vec{E}$ , skierowanego od lewej strony do prawej, jak pokazano na rysunku 28.8b. To pole działa siłą elektryczną  $\vec{F}_E$ na każdy elektron, dążąc do przemieszczenia go w lewo. W rezultacie na elektrony zaczyna działać siła elektryczna przeciwstawiająca się sile magnetycznej.

**Równowaga.** Układ szybko dąży do stanu równowagi, a siła elektryczna, działająca na każdy elektron rośnie do chwili, w której zrównoważy siłę magnetyczną. W tym momencie, zgodnie z rysunkiem 28.8b, siły pochodzące od pola magnetycznego i pola elektrycznego wzajemnie się równoważą. Elektrony poruszają się wtedy z prędkością  $\vec{v}_d$  wzdłuż paska w górę rysunku. Nie występuje przy tym dalsze gromadzenie się elektronów przy prawym brzegu, a więc i dalszy wzrost natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ .



Rys. 28.8. Pasek miedziany, w którym płynie prąd o natężeniu *I*, jest umieszczony w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ . a) Sytuacja bezpośrednio po włączeniu pola magnetycznego. Pokazany jest zakrzywiony tor, po którym będzie się poruszał elektron. b) Stan równowagi, który zostaje osiągnięty w krótkim czasie. Zauważ, że ładunki ujemne gromadzą się po prawej stronie paska, pozostawiając nieskompensowane ładunki dodatnie po lewej stronie. Zatem lewa strona ma większy potencjał niż prawa. c) Gdyby nośniki ładunku były naładowane dodatnio, dla tego samego kierunku pradu gromadziłyby się one po prawej stronie, a więc prawa strona miałaby większy potencjał

Z tym polem elektrycznym, działającym w poprzek paska o szerokości *d*, związana jest *różnica potencjałów (napięcie) Halla U*. Zgodnie z równaniem (24.21) wartość tego napięcia wynosi

$$U = Ed. \tag{28.9}$$

Dołączając woltomierz do długich boków paska, możemy zmierzyć różnicę potencjałów między dwoma jego brzegami. Ponadto woltomierz pozwala określić, który brzeg paska ma większy potencjał. Dla przypadku przedstawionego na rysunku 28.8b okazałoby się, że lewy brzeg ma większy potencjał, co jest zgodne z naszym założeniem, że nośniki ładunku są ujemne.

Przyjmijmy chwilowo przeciwne założenie, że nośniki ładunku, tworzące prąd o natężeniu *I*, są dodatnie (rys. 28.8c). Możesz się przekonać, że podczas ruchu z góry na dół paska nośniki te są odchylane przez siłę  $\vec{F}_B$ w kierunku prawego brzegu, a zatem *prawy* brzeg paska ma większy potencjał. To ostatnie stwierdzenie jest sprzeczne z odczytem na woltomierzu, zatem nośniki muszą być ujemne.

*Koncentracja.* Zajmijmy się teraz ilościową stroną zjawiska. Gdy siły elektryczne i magnetyczne się równoważą (rys. 28.8b), równania (28.1) i (28.3) dają nam

$$eE = ev_{\rm d}B. \tag{28.10}$$

Zgodnie z równaniem (26.7) prędkość unoszenia v<sub>d</sub>

1

$$p_{\rm d} = \frac{J}{ne} = \frac{I}{neS},\tag{28.11}$$

gdzie J = I/S jest gęstością prądu w pasku, S — polem powierzchni przekroju poprzecznego paska, n — *koncentracją* nośników ładunku (czyli ich liczbą w jednostce objętości).

Podstawiając w równaniu (28.10) E z równania (28.9) oraz  $v_d$  z równania (28.11), otrzymujemy

$$n = \frac{BI}{Ule},\tag{28.12}$$

gdzie l = S/d jest grubością paska. Za pomocą tego równania możemy wyznaczyć *n* z wielkości, które potrafimy zmierzyć.

**Prędkość unoszenia.** Istnieje również możliwość zastosowania zjawiska Halla do bezpośredniego pomiaru prędkości unoszenia  $v_d$ , która, jak pamiętamy, jest rzędu centymetrów na godzinę. W tym pomysłowym doświadczeniu metalowy pasek jest przesuwany mechanicznie w polu magnetycznym, w kierunku przeciwnym do kierunku prędkości unoszenia nośników ładunku. Prędkość, z jaką porusza się pasek, jest następnie tak dobierana, aby napięcie Halla było równe zeru. W tych warunkach, gdy nie występuje napięcie Halla, prędkość nośników ładunku *w laboratoryjnym układzie odniesienia* musi być równa zeru, tak więc prędkość paska i prędkości ujemnych nośników ładunku muszą być równe co do wartości, ale przeciwnie skierowane.

**Poruszający się przewodnik.** Gdy przewodnik porusza się z prędkością v w jednorodnym polu magnetycznym, znajdujące się wewnątrz niego elektrony poruszają się wraz z nim. Przypomina to sytuację przedstawioną na rysunku 28.8a i b, w której przepływ prądu polega na ruchu elektronów,

a więc także dla poruszającego się przewodnika powstanie pole elektryczne  $\vec{E}$  i różnica potencjałów U. Podobnie jak dla prądu, w stanie równowagi siły elektryczna i magnetyczna będą się znosić, ale warunek równowagi (28.10) zapiszemy teraz za pomocą prędkości przewodnika v, a nie prędkości unoszenia  $v_d$  eE = evB.

Podstawiając natężenie pola elektrycznego E wyznaczone ze wzoru (28.9), otrzymujemy (28.12)

$$U = vBd. (28.13)$$

Wzbudzanie różnicy potencjałów w poruszających się obwodach może stanowić poważny problem, na przykład, gdy znajdujący się na pokładzie satelity przewodnik porusza się względem ziemskiego pola magnetycznego. Z drugiej strony, napięcie generowane w przymocowanym do satelity przewodzącym kablu, zwanym *więzią elektrodynamiczną*, może być używane do sterowania satelitą lub generowania energii na jego potrzeby.

#### Przykład 28.02. Napięcie generowane w poruszającym się przewodniku

Na rysunku 28.9a przedstawiono pełny sześcian metalowy o krawędzi d = 1,5 cm, poruszający się w dodatnim kierunku osi y ze stałą prędkością 4 m/s. Sześcian przemieszcza się w jednorodnym polu magnetycznym, którego indukcja  $\vec{B}$  ma wartość 0,05 T oraz kierunek zgodny z dodatnim kierunkiem osi z.

**a**) Która ściana sześcianu w wyniku ruchu w polu magnetycznym ma mniejszy potencjał, a która większy?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Sześcian porusza się w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , a więc na jego naładowane cząstki, łącznie z elektronami przewodnictwa, działa siła magnetyczna  $\vec{F}_B$ .

**Rozumowanie:** Gdy sześcian rozpoczyna ruch w polu magnetycznym, razem z nim zaczynają się też poruszać elektrony. Każdy elektron ma ładunek q i porusza się z prędkością  $\vec{v}$ , zatem działająca na elektron siła  $\vec{F}_B$ jest dana równaniem (28.2). Kierunek iloczynu wektorowego  $\vec{v} \times \vec{B}$  jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi x (rys. 28.9b), natomiast kierunek siły  $\vec{F}_B$  jest przeciwny, gdyż q jest ujemne. Zatem siła  $\vec{F}_B$  działa w ujemnym kierunku osi x, w stronę lewej ściany sześcianu (rys. 28.9c).

Większość elektronów ma ustalone położenia w cząsteczkach, z których zbudowany jest sześcian. Jednak wykonany jest on z metalu, zawiera więc swobodnie poruszające się elektrony przewodnictwa. Niektóre z tych elektronów są odchylane przez siłę  $\vec{F}_B$  w stronę lewej ściany sześcianu, powodując, że lewa ściana jest naładowana ujemnie, a na prawej ścianie pozostaje ładunek dodatni (rys. 28.9d). W wyniku takiego rozdzielenia ładunku powstaje pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$ , skierowane od prawej ściany naładowanej dodatnio do lewej ściany naładowanej ujemnie (rys. 28.9e). Tak więc lewa ściana ma mniejszy potencjał, a prawa — większy.

**b)** Ile wynosi różnica potencjałów między ścianami o większym i mniejszym potencjale?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

- 1. Pole elektryczne o natężeniu  $\vec{E}$  wytworzone w wyniku rozdzielenia ładunków działa na każdy elektron siłą  $\vec{F}_E = q\vec{E}$  (rys. 28.9f). Ładunek q ma wartość ujemną, zatem siła ta jest skierowana przeciwnie do wektora natężenia pola  $\vec{E}$ , czyli w prawą stronę. Tak więc siła  $\vec{F}_E$  działa na każdy elektron w prawo, a siła  $\vec{F}_B$  — w lewo.
- 2. Gdy sześcian zaczyna poruszać się w polu magnetycznym i następuje rozdzielanie ładunków, natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$  rośnie od wartości równej zeru. Zatem wartość siły  $\vec{F}_E$  również zaczyna rosnąć od zera, ale jest początkowo mniejsza od wartości siły  $\vec{F}_B$ . Dlatego na początku o wypadkowej sile działającej na dowolny elektron decyduje siła  $\vec{F}_B$ . Pod wpływem działania tej siły następuje ciągłe przemieszczanie dodatkowych elektronów w kierunku lewej ściany, co zwiększa stopień rozdzielenia ładunku między lewą i prawą ścianą sześcianu (rys. 28.9g).



**Rys. 28.9.** a) Metalowy sześcian o krawędzi *d* poruszający się ze stałą prędkością  $\vec{v}$  w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ . b)-d) Ta sama sytuacja oglądana z przodu: siła magnetyczna działająca na elektron przemieszcza go w stronę lewej ściany sześcianu, zatem na lewej ścianie gromadzi się ładunek ujemny, a na prawej — dodatni. e)-f) Powstaje słabe pola elektryczne, które jednak wywiera niewielką siłę elektryczną na kolejny elektron, lecz i on jest przesuwany do lewej ściany sześcianiu. Pole elektryczne g) rośnie i w końcu h) staje się na tyle silne, że siła elektryczna równoważy siłę magnetyczną

3. Jednakże w miarę rozdzielania ładunku wartość siły  $F_E$  staje się w końcu równa wartości siły  $F_B$  (rys. 28.9h). Ponieważ siły są przeciwnie skierowane, więc wypadkowa siła działająca na dowolny elektron jest wówczas równa zeru i żaden dodatkowy elektron nie jest już odchylany. Wartość siły  $\vec{F}_E$  nie może dalej rosnąć, a elektrony osiągają stan równowagi.

**Obliczenia:** Szukamy różnicy potencjałów U między lewą a prawą ścianą sześcianu po osiągnięciu stanu równowagi (co następuje szybko). Możemy otrzymać U z równania (28.9) (U = Ed), jeśli najpierw znajdziemy wartość E natężenia pola elektrycznego w równowadze. Zastosujemy w tym celu równanie równowagi sił ( $F_E = F_B$ ). Za  $F_E$  podstawiamy |q|E, a za  $F_B$  podstawiamy  $|q|vB \sin \phi$  z równania (28.3). Z rysunku 28.9a wynika, że kąt  $\phi$  między wektorami  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$  jest równy 90°, tak więc sin  $\phi = 1$ , a równanie  $F_E = F_B$  daje

$$|q|E = |q|vB\sin 90^\circ = |q|vB.$$

Stąd otrzymujemy E = vB, a zatem związek U = Ed przybiera postać

$$U = vBd$$
.

Podstawiając znane wartości, otrzymujemy różnicę potencjałów między lewą i prawą ścianą sześcianu

$$U = (4 \text{ m/s})(0.05 \text{ T})(0.015 \text{ m})$$
  
= 0.003 V = 3 mV (odpowiedź).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.
# **28.4.** RUCH CZĄSTEK NAŁADOWANYCH PO OKRĘGU W POLU MAGNETYCZNYM

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 28.20 stwierdzić, kiedy cząstka naładowana będzie się poruszać w jednorodnym polu magnetycznym po linii prostej, kiedy po okręgu, a kiedy po linii śrubowej;
- 28.21 wyprowadzić z drugiej zasady dynamiki Newtona promień okręgu r, po którym jednostajnie porusza się w polu magnetycznym o indukcji B cząstka naładowana o ładunku q i prędkości v;
- 28.22 wyznaczyć dla cząstki naładowanej, poruszającej się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym, związki między prędkością, siłą dośrodkową, przyspieszeniem dośrodkowym i częstością kołową oraz stwierdzić, które z tych wielkości nie zależą od prędkości cząstki;
- Podstawowe fakty

• Cząstka naładowana o masie *m* i ładunku |q| poruszająca się z prędkością  $\vec{v}$  prostopadłą do jednorodnego pola magnetycznego  $\vec{B}$  będzie się poruszać po okręgu.

 Z drugiej zasady dynamiki Newtona zastosowanej do jednostajnego ruchu po okręgu wynika

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r},$$

- 28.23 naszkicować dla dodatnio i ujemnie naładowanej cząstki, poruszającej się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym, trajektorię ruchu i zaznaczyć wektor indukcji magnetyczej, wektor prędkości, iloczyn wektorowy tych wektorów oraz wektor siły magnetycznej;
- 28.24 naszkicować dla naładowanej cząstki, poruszającej się po linii śrubowej w jednorodnym polu magnetycznym, trajektorię ruchu i zaznaczyć wektor indukcji magnetyczej, skok śruby, promień krzywizny toru, składową prędkości równoległą i prostopadłą do wektora indukcji magnetycznej;
- 28.25 określić skok śruby p dla ruchu po linii śrubowej i powiązać z odpowiednimi składowymi prędkości.

skąd można wyznaczyć promień okręgu

$$r = \frac{me}{|q|B}$$

Częstotliwość ν, częstość kołowa ω i okres T ruchu po okregu spełniają związki

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}.$$

## Ruch cząstek naładowanych po okręgu w polu magnetycznym

Jeżeli cząstka porusza się po okręgu z prędkością o stałej wartości, to możemy być pewni, że wypadkowa siła działająca na cząstkę ma stałą wartość i jest skierowana do środka okręgu, zawsze prostopadle do wektora prędkości cząstki. Wyobraź sobie kamień przywiązany do sznurka i wprawiony w ruch wirowy na gładkiej poziomej powierzchni lub satelitę krążącego po orbicie kołowej wokół Ziemi. W pierwszym przypadku naprężenie sznurka zapewnia niezbędną siłę i przyspieszenie dośrodkowe. W drugim przypadku siła i przyspieszenie pochodzą od przyciągania grawitacyjnego Ziemi.

Na rysunku 28.10 przedstawiono inny przykład: Wiązka elektronów jest wstrzeliwana do komory za pomocą *działka elektronowego* G. Elektrony wpadają do komory, w płaszczyźnie rysunku, z prędkością o wartości v, a następnie poruszają się w obszarze jednorodnego pola magnetycznego o wektorze indukcji  $\vec{B}$  skierowanym prostopadle przed płaszczyznę rysunku. W wyniku tego siła  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$  przez cały czas odchyla elektrony, a ponieważ  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$  są zawsze wzajemnie prostopadłe, elektrony poruszają się po okręgu. Tor ich ruchu jest widoczny na zdjęciu, gdyż atomy gazu w komorze emitują światło pod wpływem zderzeń z krążącymi elektronami.



Chcielibyśmy określić parametry ruchu po okręgu dla tych elektronów lub (ogólniej) dla dowolnej cząstki o ładunku |q| i masie *m*, poruszającej się z prędkością *v* prostopadle do kierunku wektora indukcji  $\vec{B}$  w jednorodnym polu magnetycznym. Z równania (28.3) wynika, że na cząstkę działa siła o wartości |q|vB. Z drugiej zasady dynamiki ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ) zastosowanej do ruchu jednostajnego po okregu (równanie (6.18))

$$F = m \frac{v^2}{r} \tag{28.14}$$

otrzymujemy

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r}.$$
(28.15)

Rozwiązując to równanie względem r, wyznaczamy promień toru cząstki

$$r = \frac{mv}{|q|B}$$
 (promień). (28.16)

Okres T (czyli czas jednego pełnego obiegu) jest równy długości obwodu podzielonej przez wartość bezwzględną prędkości

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{|q|B} = \frac{2\pi m}{|q|B}$$
 (okres). (28.17)

Częstotliwość  $\nu$  (czyli liczba obiegów w jednostce czasu) wynosi

1

$$v = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}$$
 (częstotliwość). (28.18)

Częstość kołowa  $\omega$  ruchu, nazywana częstością cyklotronową, jest więc równa

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{|q|B}{m} \qquad \text{(częstość kołowa).} \tag{28.19}$$



Wielkości T, f i  $\omega$  nie zależą od prędkości cząstki (pod warunkiem, że prędkość ta jest znacznie mniejsza od prędkości światła). Szybkie cząstki poruszają się po dużych okręgach, a wolne cząstki po małych, ale czas T jednego pełnego obiegu, czyli okres, jest taki sam dla wszystkich cząstek o takim samym stosunku ładunku do masy |q|/m. Korzystając z równania (28.2), możesz sprawdzić, że jeśli patrzysz w kierunku wektora  $\vec{B}$ , to kierunek ruchu cząstki naładowanej dodatnio jest zawsze przeciwny do ruchu wskazówek zegara, natomiast kierunek ruchu cząstki naładowanej ujemnie — zgodny z ruchem wskazówek zegara.

## Tory śrubowe



Jeżeli prędkość naładowanej cząstki wchodzącej w obszar jednorodnego pola magnetycznego ma składową równoległą do kierunku tego pola, to cząstka będzie się poruszać po linii śrubowej wokół kierunku wektora  $\vec{B}$ . Na rysunku 28.11a pokazano przykładowy wektor prędkości  $\vec{v}$  takiej cząstki rozłożony na dwie składowe, jedną równoległą do wektora  $\vec{B}$ , a drugą — prostopadłą

$$v_{\parallel} = v \cos \phi$$
 i  $v_{\perp} = v \sin \phi$ . (28.20)

Składowa równoległa określa *skok p* linii śrubowej, tzn. odległość miedzy sąsiednimi zwojami (rys. 28.11b). Składowa prostopadła określa promień linii w kształcie spirali i jest wielkością, którą należy podstawić zamiast v w równaniu (28.16).

Na rysunku 28.11c przedstawiono cząstkę naładowaną poruszającą się po linii w kształcie spirali w niejednorodnym polu magnetycznym. Zagęszczenie linii pola po lewej i prawej stronie rysunku wskazuje, że pole jest tam silniejsze. Gdy pole na jednym końcu obszaru jest dostatecznie silne, cząstka "odbija się" od tego końca.

## Sprawdzian 3

Na rysunku pokazano kołowe tory dwóch cząstek, które poruszają się z taką samą prędkością w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  skierowanej prostopadle za płaszczyznę rysunku. Jedną cząstką jest proton, a drugą elektron (który ma mniejszą masę). a) Która cząstka porusza się po okręgu o mniejszym promieniu? b) Czy ta cząstka porusza się zgodnie, czy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara?

**Rys. 28.11.** Naładowana cząstka porusza się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  z prędkością  $\vec{v}$ , która tworzy kąt  $\phi$  z kierunkiem wektora  $\vec{B}$ . b) Ta cząstka zakreśla linię śrubową o promieniu r i skoku p. c) Naładowana cząstka, porusza się w niejednorodnym polu magnetycznym. (Cząstka może zostać uwięziona, poruszając się tam i z powrotem między obszarami silnego pola na obydwu końcach). Zauważ, że wektory sił magnetycznych po lewej i po prawej stronie mają składową skierowaną do środka rysunku

 $\otimes$ 

 $\vec{B}$ 

#### Przykład 28.03. Ruch cząstki naładowanej po linii śrubowej w polu magnetycznym

Elektron o energii kinetycznej 22,5 eV wpada w obszar jednorodnego pola magnetycznego, dla którego wektor indukcji  $\vec{B}$  ma wartość 4,55 · 10<sup>-4</sup> T. Kąt między kierunkiem wektora  $\vec{B}$  a kierunkiem wektora prędkości elektronu  $\vec{v}$  jest równy 65,5°. Ile wynosi skok linii śrubowej, po której porusza się elektron?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Skok p jest odległością przebytą przez elektron w kierunku równoległym do wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  podczas jednego okresu T.

2) Okres *T* jest dany równaniem (28.17) i nie zależy od kąta między kierunkami wektorów  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$  (pod warunkiem, że kąt nie jest równy zeru, gdyż wtedy elektron nie poruszałby się po linii śrubowej).

**Obliczenia:** Korzystając z równań (28.20) i (28.17), znajdujemy

$$p = v_{\parallel}T = (v\cos\phi)\frac{2\pi m}{qB}.$$
 (28.21)

Możemy obliczyć prędkość elektronu, znając jego energię kinetyczną; mamy w ten sposób  $v = 2,81 \cdot 10^6$  m/s. Podstawiając tę wartość i pozostałe dane do równania (28.21), otrzymujemy

$$p = (2,81 \cdot 10^{6} \text{ m/s})(\cos 65,5^{\circ})$$

$$\times \frac{2\pi (9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg})}{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{C})(4,55 \cdot 10^{-4} \text{T})}$$

$$= 9,16 \text{ cm} \qquad (\text{odpowied} ź).$$

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

#### Przykład 28.04. Cząstka naładowana poruszająca się jednostajnie po okręgu w polu magnetycznym

Na rysunku 28.12 przedstawiono zasadnicze elementy spektrometru mas, który może służyć do pomiaru masy jonu. Jon o masie m (która chcemy zmierzyć) i ładunku q jest wytwarzany przez źródło S. Jon, który w chwili początkowej znajduje się w spoczynku, jest przyspieszany przez pole elektryczne wywołane różnicą potencjałów U. Jon opuszcza źródło i wpada do komory separatora, w której jednorodne pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$  jest przyłożone prostopadle do kierunku ruchu jonu. Na dolnej ścianie komory znajduje się dużych rozmiarów detektor; pole magnetyczne powoduje, że jon porusza się po półokręgu i zostaje zarejestrowany w detektorze w odległości x od szczeliny wejściowej. Przypuśćmy, że podczas pewnego pomiaru B = 80 mT, U = 1000 V, a jony o ładunku  $q = +1,6022 \cdot 10^{-19}$  C uderzają w płytę w odległości x = 1,6254 m. Jaka jest masa m pojedynczego jonu wyrażona w atomowych jednostkach masy  $(1 \text{ u} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg})$ ?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Jednorodne pole magnetyczne powoduje, że naładowany jon porusza się po okręgu, zatem możemy znaleźć związek między masą jonu *m* a promieniem okręgu *r*, stosując równanie (28.16) (r = mv/|q|B). Z rysunku 28.12 wynika, że r = x/2 (promień okręgu



**Rys. 28.12.** Jon dodatni, wytworzony przez źródło S, po przyspieszeniu przez różnicę potencjałów U wpada do komory umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , gdzie porusza się po półokręgu o promieniu r i uderza w detektor w odległości x od punktu wejścia do komory

to połowa jego średnicy). Znamy wartość indukcji *B*, do wyznaczenia pozostaje zaś prędkość jonu *v* w polu magnetycznym osiągnięta po przyspieszeniu go przez różnicę potencjałów *U*. 2) Aby znaleźć zależność między *v* i *U*, korzystamy z faktu, że energia mechaniczna  $(E_{mech} = E_k + E_p)$  jest zachowana w czasie przyspieszania jonu. *Wyznaczenie prędkości:* Gdy jon opuszcza źródło, jego energia kinetyczna jest w przybliżeniu równa zeru, natomiast pod koniec procesu przyspieszania jego energia kinetyczna wynosi  $\frac{1}{2}mv^2$ . Jon dodatni jest przyspieszany w obszarze, w którym potencjał zmienia się o -U, a ponieważ jon ma ładunek dodatni q, więc jego energia potencjalna zmienia się o -qU. Jeżeli zapiszemy teraz warunek zachowania energii mechanicznej jako

to otrzymamy

czyli

$$\Delta E_{\rm k} + \Delta E_{\rm p} = 0,$$

 $\frac{1}{2}mv^2 - qU = 0$ 

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$
 (28.22)

*Wyznaczenie masy:* Podstawienie tego wyrażenia do równania (28.16) daje nam

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Zatem

$$x = 2r = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Rozwiązując to równanie względem m i podstawiając dane, otrzymujemy

$$m = \frac{B^2 q x^2}{8U} = \frac{(0,08 \text{ T})^2 (1,6022 \cdot 10^{-19} \text{C}) (1,6254 \text{ m})^2}{8(1000 \text{ V})}$$
  
= 3,3863 \cdot 10^{-25} kg = 203,93 u (odpowiedź).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **28.5.** CYKLOTRONY I SYNCHROTRONY

#### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 28.27 opisać, jak działa cyklotron, naszkicować trajektorię poruszającej się w nim cząstki i wskazać miejsca, w których cząstka jest przyspieszana;
- 28.28 określić warunek rezonansu;

#### Podstawowe fakty \_

 W cyklotronie cząstki są przyspieszane siłami elektrycznymi podczas ruchu po okręgu w polu magnetycznym.

- 28.29 zastosować związek między masą i ładunkiem poruszającej się w cyklotronie cząstki, jej częstotliwością obiegu i polem magnetycznym;
- 28.30 wskazać różnice między cyklotronem i synchrotronem.

 Aby przyspieszać cząstki do prędkości zbliżonych do prędkości światła, konieczny jest synchrotron.

## Cyklotrony i synchrotrony

Wiązki wysokoenergetycznych cząstek, takich jak elektrony i protony, okazały się niezwykle przydatne do badania atomów i jąder atomowych w celu znalezienia fundamentalnych składników materii. Dzięki doświadczeniom z użyciem takich wiązek stwierdzono, że jądra atomowe składają się z protonów i neutronów, a te z kolei zbudowane są z kwarków i gluonów. Ponieważ protony i elektrony są obdarzone ładunkiem elektrycznym, można je przyspieszyć do odpowiednio wysokich energii, przepuszczając je przez odpowiednio dużą różnicę potencjałów. Odcinek, na którym miałoby zachodzić przyspieszanie, ma rozsądną długość dla elektronów, które mają niewielką masę, ale przyspieszanie znacznie cięższych protonów trudno byłoby w rzeczywistym doświadczeniu osiągnąć.



w cyklotronie protony kraża

**Rys. 28.13.** Części składowe cyklotronu: źródło cząstek S i duanty. Jednorodne pole magnetyczne jest skierowane prostopadle przed płaszczyznę rysunku. Krążące protony poruszają się od środka po linii spiralnej wewnątrz wydrążonych duantów, uzyskując dodatkową energię za każdym razem, gdy przekraczają szczelinę między duantami

Pomysłowe rozwiązanie tego problemu polega na tym, by protony lub inne masywne cząstki przechodziły jednorazowo przez niewielką różnicę potencjałów (a więc były przyspieszane w niewielkim stopniu), po czym zawracały w wyniku działania pola magnetycznego, tak by przejść kolejny raz przez niewielką różnicę potencjałów. Jeśli powtórzyć wielokrotnie ten schemat, można osiągnąć znaczne przyspieszenie cząstek.

W tym podrozdziale omówimy dwa *akceleratory*, w których używa się pola magnetycznego do zawracania cząstek do obszarów, gdzie następuje ich przyspieszanie. Uzyskują one coraz większe energie i dzięki temu można otrzymać wiązkę wysokoenergetycznych cząstek.

#### **Cyklotron**

Na rysunku 28.13 przedstawiono widok z góry tej części *cyklotronu*, w której krążą cząstki (np. protony). Dwa wydrążone elementy w kształcie litery D (otwarte wzdłuż prostych krawędzi) są wykonane z płyt miedzianych. Te elementy, zwane *duantami*, połączone są z generatorem, który wytwarza zmienne napięcie w szczelinie między nimi. Napięcie między duantami zmienia okresowo swój znak, a więc pole elektryczne w szczelinie zmienia kierunek — najpierw jest skierowane do jednego duantu, potem do drugiego itd. Duanty są umieszczone w silnym polu magnetycznym, skierowanym prostopadle przed płaszczyznę rysunku. Indukcję pola magnetycznego można regulować, zmieniając prąd płynący przez wytwarzający to pole elektromagnes.

Wyobraź sobie, że proton wychodzący ze źródła S w środku cyklotronu na rysunku 28.13 początkowo porusza się w kierunku ujemnie naładowanego duantu. Proton zostanie przyspieszony w kierunku tego duantu, a kiedy znajdzie się w środku, będzie ekranowany od pól elektrycznych przez miedziane ściany, gdyż pole elektryczne nie wnika do wnętrza duantu. Jednakże pole magnetyczne nie jest ekranowane przez niemagnetyczny miedziany duant, więc proton będzie się poruszać po okręgu, którego promień zależy od prędkości i jest dany równaniem (28.16) (r = mv/|q|B).

Załóżmy teraz, że napięcie między duantami zmienia znak w chwili, w której proton opuszcza pierwszy duant i pojawia się w szczelinie. Tak więc proton *znów* ma przed sobą ujemnie naładowany duant i *znów* zostaje przyspieszony. Ten proces trwa dalej, a krążący proton dotrzymuje kroku zmianom potencjału. W końcu proton, poruszając się po linii spiralnej, osiąga brzeg układu duantów, gdzie płytka odchylająca kieruje go na zewnątrz przez otwór wyjściowy.

*Częstotliwość.* Podstawą działania cyklotronu jest warunek, że częstotliwość v, z jaką proton krąży w polu, a która *nie* zależy od jego prędkości, musi być równa częstotliwości  $v_{gen}$  generatora elektrycznego, czyli

$$v = v_{\text{gen}}$$
 (warunek rezonansu). (28.23)

Ten *warunek rezonansu* informuje nas o tym, że jeśli energia krążącego protonu ma wzrastać, to energia musi być dostarczana z częstotliwością  $v_{\text{gen}}$ , równą częstotliwości v, z jaką proton krąży w polu magnetycznym.

Łącząc równania (28.18) ( $\nu = |q|B/(2\pi m)$ ) i (28.23), możemy zapisać warunek rezonansu w postaci

$$|q|B = 2\pi m \nu_{\text{gen}}.\tag{28.24}$$

Zakładamy, że generator został zaprojektowany tak, aby działał przy jednej ustalonej częstotliwości  $\nu_{gen}$ . Możemy więc "dostroić" cyklotron, zmieniając wartość indukcji *B*, aż równanie (28.24) będzie spełnione i wtedy protony krążące w polu magnetycznym utworzą wiązkę na wyjściu cyklotronu.

## Synchrotron protonów

Przy energii protonów przekraczającej 50 MeV tradycyjne cyklotrony zaczynają zawodzić, ponieważ jedno z założeń, przyjętych przy projektowaniu — to, że częstotliwość obiegu naładowanej cząstki w polu magnetycznym nie zależy od jej prędkości — jest spełnione tylko dla prędkości znacznie mniejszych od prędkości światła. Dla dużych prędkości protonu (powyżej ok. 10% prędkości światła) musimy traktować problem relatywistycznie. Zgodnie z teorią względności, gdy prędkość krążącego protonu zbliża się do prędkości światła, częstotliwość obiegu protonu stopniowo maleje. Zatem protony nie nadążają za generatorem cyklotronu o stałej częstotliwości  $\nu_{gen}$  i w końcu energia krążącego protonu przestaje rosnąć.

Jest jeszcze inna trudność. Dla protonu o energii 500 GeV w polu magnetycznym o indukcji 1,5 T promień toru jest równy 1,1 km. Odpowiedni magnes dla tradycyjnego cyklotronu o takich rozmiarach byłby nieprawdopodobnie kosztowny, gdyż powierzchnia jego biegunów musiałaby być równa około  $4 \cdot 10^6$  m<sup>2</sup>.

Synchrotron protonów został zaprojektowany tak, aby poradzić sobie z tymi trudnościami. Indukcja *B* i częstotliwość generatora  $v_{gen}$  nie są stałe, jak w typowym cyklotronie, ale mogą się zmieniać w czasie cyklu przyspieszania. Jeżeli te wartości zostaną właściwie dobrane, to: 1) protony cały czas krążą w takt zmian napięcia generatora, 2) protony poruszają się po torze kołowym, a nie po spirali. Tak więc magnes musi być umieszczony tylko wzdłuż tego kołowego toru, a nie na obszarze około  $4 \cdot 10^6$  m<sup>2</sup>. Jednak tor cząstki musi być nadal długi, jeżeli chcemy osiągnąć duże energie.

#### Przykład 28.05. Przyspieszanie cząstki naładowanej w cyklotronie

Załóżmy, że cyklotron działa z częstotliwością generatora 12 MHz, a promień duantu wynosi R = 53 cm.

a) Jaka wartość indukcji pola magnetycznego jest potrzebna do przyspieszenia deuteronu w tym cyklotronie? Deuteron jest jądrem deuteru, izotopu wodoru. Składa się z protonu i neutronu, ma więc taki sam ładunek jak proton. Jego masa jest równa  $m = 3,34 \cdot 10^{-27}$  kg.

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Dla danej częstotliwości generatora  $v_{gen}$  wartość indukcji magnetycznej *B* potrzebna do przyspieszenia dowolnej cząstki w cyklotronie zależy, zgodnie z równaniem (28.24), od stosunku masy do ładunku m/|q| tej cząstki ( $|q|B = 2\pi m v_{gen}$ ).

**Obliczenia:** Dla deuteronu i częstotliwości generatora  $v_{gen} = 12$  MHz otrzymujemy

$$B = \frac{2\pi m \nu_{\text{gen}}}{|q|} = \frac{(2\pi)(3,34 \cdot 10^{-27} \text{kg})(12 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1})}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{C}}$$
  
= 1,57 T \approx 1,6 T (odpowiedź).

Zauważ, że wartość indukcji *B* musiałaby być dwukrotnie mniejsza, aby przyspieszyć protony przy tej samej ustalonej częstotliwości generatora równej 12 MHz.

b) Jaka jest końcowa energia kinetyczna deuteronów?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Energia kinetyczna  $(\frac{1}{2}mv^2)$  deuteronu opuszczającego cyklotron jest równa jego energii kinetycznej bezpośrednio przed opuszczeniem cyklotronu, gdy deuteron porusza się po torze kołowym o promieniu w przybliżeniu równym promieniowi *R* duantu. 2) Prędkość *v* deuteronu poruszającego się po tym torze możemy obliczyć z równania (28.16) (r = mv/|q|B).

**Obliczenia:** Rozwiązując to równanie względem v, podstawiając R w miejsce r, a następnie podstawiając dane,

otrzymujemy

$$v = \frac{R|q|B}{m} = \frac{(0.53 \text{ m})(1.60 \cdot 10^{-19} \text{C})(1.57 \text{ T})}{3.34 \cdot 10^{-27} \text{kg}}$$
  
= 3.99 \cdot 10<sup>7</sup> m/s.

Ta prędkość odpowiada energii kinetycznej

$$E_{k} = \frac{1}{2}mv^{2} = \frac{1}{2}(3,34 \cdot 10^{-27} \text{kg})(3,99 \cdot 10^{7} \text{ m/s})^{2}$$
  
= 2,7 \cdot 10^{-12} J (odpowiedź).

czyli około 17 MeV.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **28.6.** siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem

#### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 28.31 naszkicować dla prądu elektrycznego płynącego prostopadle do pola magnetycznego kierunek przepływu prądu, kierunek pola magnetycznego oraz kierunek siły działającej na przewodnik z prądem;
- **28.32** stosować związek między wartością siły magnetycznej  $F_B$ , natężeniem prądu I, długością L przewodnika z prądem oraz kątem  $\phi$  wyznaczonym przez kierunki wektora długości  $\vec{L}$  i wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ ;
- 28.33 stosować regułę prawej dłoni dla iloczynu wektorowego w celu określenia kierunku siły magnetycznej działającej na

#### Podstawowe fakty

 Na prostoliniowy przewodnik z prądem o natężeniu I znajdujący się w jednorodnym polu magnetycznym działa skierowana prostopadle do przewodnika siła przewodnik z prądem w polu magnetycznym;

- **28.34** obliczyć dla przewodnika z prądem w polu magnetycznym siłę magnetyczną proporcjonalną do iloczynu wektorowego wektora długości  $\vec{L}$  i wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ , zarówno w notacji wektorowej, jak i za pomocą długości tych wektorów i kąta między ich kierunkami;
- **28.35** opisać, jak wyznacza się siłę działającą na przewodnik z prądem w polu magnetycznym, jeśli przewodnik nie jest prostoliniowy lub pole nie jest jednorodne.

• Siła działająca na element  $d\vec{L}$  przewodnika z prądem ma postać

$$\mathrm{d}\vec{F}_B = I \; \mathrm{d}\vec{L} \times \vec{B}.$$

• Wektory  $\vec{L}$  i  $d\vec{L}$  opisujące ustawienie przewodnika z prądem są skierowane zgodnie z kierunkiem przepływu prądu.

 $\vec{F}_B = I\vec{L}\times\vec{B}.$ 

## Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem

Omawiając zjawisko Halla, pokazaliśmy, że pole magnetyczne wytwarza siłę poprzeczną, która działa na elektrony poruszające się w przewodniku. Ta siła musi też działać na cały przewodnik, ponieważ elektrony przewodnictwa nie mogą się z niego wydostać.

Na rysunku 28.14a przedstawiono pionowy przewodnik, w którym nie płynie prąd elektryczny. Przewodnik umocowany jest na obydwu końcach i przechodzi przez szczelinę między pionowymi biegunami magnesu. Pole magnetyczne między biegunami jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Na rysunku 28.14b prąd płynie do góry, a przewodnik odchyla się w prawo. Na rysunku 28.14c kierunek przepływu prądu jest przeciwny, przewodnik zaś odchyla się w lewo.

Na rysunku 28.15 pokazano, co dzieje się we wnętrzu przewodnika przedstawionego na rysunku 28.14b. Widzimy jeden z elektronów przewodnictwa, który porusza się w dół z prędkością unoszenia  $v_d$ . Równanie (28.3), w którym należy podstawić  $\phi = 90^\circ$ , informuje nas, że na każdy taki elektron musi działać siła  $\vec{F}_B$  o wartości  $ev_d B$ . Z równania (28.2) wynika, że siła ta jest skierowana w prawo. Spodziewamy się więc, że na cały przewodnik będzie działała siła skierowana w prawo, zgodnie z rysunkiem 28.14b.

Jeśli na rysunku 28.15 zmienilibyśmy *albo* kierunek wektora indukcji, *albo* kierunek prądu, to siła działająca na przewodnik zmieniłaby się na przeciwną, skierowaną teraz w lewo. Zauważ, że nie ma znaczenia, czy rozważamy ładunki ujemne poruszające się w dół (jak obecnie), czy ładunki dodatnie poruszające się do góry. Kierunek siły odchylającej przewodnik będzie taki sam. Możemy więc równie dobrze przyjąć, że prąd składa się z ładunków dodatnich, co zwyczajowo robi się przy analizie obwodów elektrycznych.

**Obliczenie siły.** Rozważmy fragment przewodnika o długości L, przedstawiony na rysunku 28.15. Wszystkie elektrony przewodnictwa znajdujące się w tym obszarze przejdą przez płaszczyznę xx na rysunku 28.15 w czasie  $t = L/v_d$ . Tak więc ładunek przepływający w tym czasie przez płaszczyznę xx wynosi

$$q = It = I\frac{L}{v_{\rm d}}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (28.3), otrzymujemy

$$F_B = q v_{\rm d} B \sin \phi = \frac{IL}{v_{\rm d}} v_{\rm d} B \sin 90^\circ,$$

czyli

$$F_B = ILB. \tag{28.25}$$

Zauważ, że to równanie określa siłę magnetyczną działającą na odcinek przewodnika o długości L, w którym płynie prąd o natężeniu I i który jest umieszczony w polu magnetycznym o wektorze indukcji  $\vec{B}$  prostopadłym do przewodnika.

Jeżeli pole magnetyczne *nie* jest prostopadłe do przewodnika, jak na rysunku 28.16, to siła magnetyczna jest określona równaniem będącym uogólnieniem równania (28.25):

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}$$
 (siła działająca na przewodnik z prądem). (28.26)

Symbol  $\vec{L}$  oznacza tutaj *wektor długości*, który ma wartość bezwzględną L i jest skierowany wzdłuż odcinka przewodnika, zgodnie z umownym kierunkiem prądu. Wartość siły  $F_B$  wynosi

$$F_B = ILB\sin\phi, \qquad (28.27)$$

gdzie  $\phi$  jest kątem między kierunkami  $\vec{L}$  i  $\vec{B}$ . Kierunek siły  $\vec{F}_B$  jest zgodny z kierunkiem iloczynu wektorowego  $\vec{L} \times \vec{B}$ , ponieważ przyjmujemy, że



**Rys. 28.14.** Giętki przewodnik przechodzi między biegunami magnesu (pokazany jest tylko biegun, znajdujący się dalej). a) Gdy prąd nie płynie, przewodnik jest prosty. b) Gdy prąd płynie do góry, przewodnik odchyla się w prawo. c) Gdy prąd płynie w dół, przewodnik odchyla się w lewo. Połączenia doprowadzające prąd do jednego końca przewodnika i odprowadzające prąd z drugiego końca nie są pokazane



**Rys. 28.15.** Widziany z bliska fragment przewodnika przedstawionego na rysunku 28.14b. Prąd płynie do góry rysunku, co oznacza, że elektrony poruszają się w dół. Pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$  skierowane przed płaszczyznę rysunku powoduje, że elektrony wraz z przewodnikiem są odchylane w prawo

siła jest prostopadła zarówno do pola magnetycznego, jak i do kierunku przepływu pradu



**Rys. 28.16.** Przewodnik, w którym płynie prąd o natężeniu *I*, tworzy kąt  $\phi$ z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ . W polu znajduje się odcinek o długości *L*, a wektor  $\vec{L}$  jest skierowany zgodnie z kierunkiem prądu. Na przewodnik działa siła magnetyczna  $\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}$ 

natężenie prądu *I* jest wielkością dodatnią. Z równania (28.26) wynika, że wektor siły  $\vec{F}_B$  jest zawsze prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory  $\vec{L}$  i  $\vec{B}$ , co pokazano na rysunku 28.16.

Równanie (28.26) jest równoważne równaniu (28.2) w tym sensie, że każde z nich może być definicją indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ . W praktyce określamy indukcję  $\vec{B}$  z równania (28.26), gdyż jest znacznie łatwiej zmierzyć siłę magnetyczną działającą na przewodnik niż na pojedynczy, poruszający się ładunek.

Zakrzywiony przewodnik z prądem. Jeżeli przewodnik nie jest prosty lub pole nie jest jednorodne, to możemy podzielić w myśli przewodnik na małe odcinki i zastosować do każdego z nich równanie (28.26). Siła działająca na cały przewodnik będzie sumą wektorową wszystkich sił działających na poszczególne odcinki. Możemy napisać

$$\mathrm{d}\vec{F}_B = I\mathrm{d}\vec{L}\times\vec{B},\qquad(28.28)$$

a następnie wyznaczyć wypadkową siłę działającą na dowolny układ odcinków z prądem, całkując równanie (28.28).

Stosując równanie (28.28), pamiętaj, że nie istnieje oddzielny odcinek przewodnika o długości dL, w którym płynie prąd. Prąd musi być zawsze w jakiś sposób doprowadzony do odcinka przewodnika na jednym jego końcu i odprowadzony na drugim.

#### **Sprawdzian 4**

Na rysunku przedstawiono prąd o natężeniu I, który płynie w przewodniku umieszczonym w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ . Pokazano również działającą na przewodnik siłę magnetyczną  $\vec{F}_B$ . Wektor indukcji jest tak skierowany, że siła ma wartość maksymalną. Jaki jest kierunek wektora indukcji?



#### Przykład 28.06. Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem

W prostym poziomym odcinku przewodu miedzianego płynie prąd o natężeniu I = 28 A. Określ najmniejszą wartość i kierunek wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ , potrzebnego do "lewitacji" przewodu, tzn. do zrównoważenia działającej na niego siły ciężkości. Gęstość liniowa (masa na jednostkę długości) przewodu wynosi 46,6 g/m.

#### PODSTAWOWE FAKTY

1) Jeżeli odcinek przewodu, w którym płynie prąd elektryczny, umieścimy w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , to na odcinek ten będzie działała siła magnetyczna  $\vec{F_B}$ . Aby zrównoważyć działającą w dół siłę ciężkości  $\vec{F_g}$ , siła  $\vec{F_B}$  musi być skierowana do góry (rys. 28.17). **Rys. 28.17.** Przewód (pokazany w przekroju), w którym płynie prąd, może "unosić się" w polu magnetycznym. Prąd w przewodzie płynie przed płaszczyznę rysunku, a wektor indukcji jest skierowany w prawą stronę



2) Zgodnie z równaniem (28.26) kierunek siły  $\vec{F}_B$  zależy od kierunków wektorów  $\vec{B}$  i  $\vec{L}$  ( $\vec{F}_B = I \vec{L} \times \vec{B}$ ).

**Obliczenia:** Ponieważ  $\vec{L}$  jest skierowane poziomo, a natężenie prądu jest wielkością dodatnią, z równania (28.26) i z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego wynika, że wektor  $\vec{B}$  musi być skierowany poziomo w prawą stronę (rys. 28.17), aby siła  $\vec{F}_B$  miała wymagany kierunek w górę.

Wartość siły  $\vec{F}_B$  jest równa  $F_B = ILB \sin \phi$  (28.27). Wektor  $\vec{F}_B$  ma zrównoważyć wektor  $\vec{F}_g$ , więc

$$ILB\sin\phi = mg, \qquad (28.29)$$

gdzie mg jest wartością  $\vec{F}_g$ , a m masą odcinka przewodu. Chcielibyśmy także, aby wartość B potrzebna do zrównoważenia wektorów  $\vec{F}_B$  i  $\vec{F}_g$  była jak najmniejsza, dlatego sin  $\phi$  w równaniu (28.29) musi być jak największy. Aby to uzyskać, podstawiamy  $\phi = 90^\circ$ , tym samym wybierając kierunek wektora  $\vec{B}$  prostopadle do odcinka przewodu. Mamy wiec sin  $\phi = 1$ , a z równania (28.29) otrzymujemy

$$B = \frac{mg}{IL\sin\phi} = \frac{(m/L)g}{I}.$$
 (28.30)

Zapisaliśmy wynik w ten sposób, gdyż znamy m/L, czyli gęstość liniową przewodu. Podstawiając dane, otrzymujemy

$$B = \frac{(46.6 \cdot 10^{-3} \text{kg/m})(9.8 \text{ m/s}^2)}{28 \text{ A}} = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{T}$$

(odpowiedź).

Jest to pole około 160 razy silniejsze od pola magnetycznego Ziemi.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **28.7.** MOMENT SIŁY DZIAŁAJĄCY NA RAMKĘ Z PRĄDEM

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 28.36 naszkicować prostokątną ramkę z prądem w polu magnetycznym i wskazać siły magnetyczne działające na każdy z boków ramki, kierunek przepływu pradu, wektor normalny do ramki  $\vec{n}$  oraz kierunek obrotu ramki spowodowanego działaniem momentu sił:
- 28.37 zastosować dla cewki z prądem w polu magnetycznym związek między momentem siły M, liczbą zwojów N, polem S figury ograniczonej przez każdy ze zwojów, nateżeniem pradu w zwojnicy I, indukcja pola magnetycznego B oraz kątem  $\theta$  wyznaczonym przez wektor normalny  $\vec{n}$  i wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ .

#### Podstawowe fakty

 Choć na poszczególne fragmenty cewki z prądem znajdującej się w zewnętrznym, jednorodnym polu magnetycznym działają siły magnetyczne, to suma wszystkich sił jest równa zeru.

 Wartość wypadkowego momentu siły działającego na taką cewkę jest równa

 $M = NISB\sin\theta$ .

gdzie N jest liczbą zwojów cewki, S - polem powierzchni figury ograniczonej przez jeden zwój, I — natężeniem prądu, B indukcją pola magnetycznego, a  $\theta$  — kątem między wektorem indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  a wektorem normalnym  $\vec{n}$  do zwoju.

## Moment siły działający na ramkę z prądem

Większość pracy wykonują na całym świecie silniki elektryczne. Siły, dzięki którym ta praca jest wykonywana, to siły magnetyczne, które badaliśmy w poprzednim podrozdziale, czyli siły działające na przewodnik z prądem umieszczony w polu magnetycznym.

Na rysunku 28.18 przedstawiono prosty silnik, składający się z pojedynczej ramki z prądem umieszczonej w polu magnetycznym o indukcji B. Dwie siły magnetyczne  $\vec{F}$  i  $-\vec{F}$  wytwarzają moment siły, który działa na ramkę, usiłując ją obrócić wokół osi. Mimo braku wielu istotnych szczegółów, z rysunku można odczytać, w jaki sposób działanie pola magnetycznego na ramkę z prądem wywołuje ruch obrotowy. Spróbujmy przeanalizować ten problem.



**Rys. 28.18.** Części składowe silnika elektrycznego. Prostokątna ramka, w której płynie prąd elektryczny i która może się swobodnie obracać wokół stałej osi, umieszczona jest w polu magnetycznym. Siły magnetyczne działające na przewód wytwarzają moment siły, który powoduje obrót ramki. Komutator (niepokazany na rysunku) odwraca kierunek prądu co pół obrotu, tak aby moment siły działał zawsze w tę samą stronę

**Rys. 28.19.** Prostokątna ramka długości *a* i szerokości *b*, w której płynie prąd o natężeniu *I*, jest umieszczona w jednorodnym polu magnetycznym. Moment siły *M* usiłuje ustawić wektor normalny  $\vec{n}$  wzdłuż linii pola. a) Ramka widziana wzdłuż linii pola magnetycznego. b) Widok perspektywiczny, pokazujący, w jaki sposób reguła prawej dłoni pozwala określić kierunek wektora  $\vec{n}$  prostopadłego do płaszczyzny ramki. c) Ramka widziana od strony boku 2. Ramka obraca się, jak pokazano na rysunku



Na rysunku 28.19a przedstawiono w rzucie prostokątną ramkę o bokach a i b, w której płynie prąd o natężeniu I. Ramka umieszczona jest w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  w taki sposób, że jej dłuższe boki, oznaczone jako 1 i 3, są prostopadłe do kierunku wektora indukcji (skierowanego za płaszczyznę rysunku), natomiast krótsze boki, oznaczone jako 2 i 4, nie są prostopadłe do kierunku wektora indukcji. Przewody doprowadzające prąd do ramki są potrzebne, ale dla uproszczenia nie zostały pokazane.

Do określenia ustawienia ramki w polu magnetycznym używamy wektora normalnego  $\vec{n}$ , który jest prostopadły do płaszczyzny ramki. Na rysunku 28.19b przedstawiono regułę prawej dłoni, zastosowaną w celu znalezienia kierunku  $\vec{n}$ . Ułóż lub zegnij palce prawej dłoni tak, aby wskazywały kierunek prądu w dowolnym punkcie ramki. Twój wyciągnięty kciuk wskaże wtedy kierunek wektora normalnego  $\vec{n}$ .

Na rysunku 28.19c przedstawiona jest ramka, której wektor normalny jest skierowany pod pewnym kątem  $\theta$  do kierunku wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ . Dla takiego ustawienia ramki chcemy wyznaczyć wypadkową siłę i wypadkowy moment siły, działające na ramkę.

*Wypadkowy moment siły.* Wypadkowa siła działająca na ramkę jest wektorową sumą sił działających na jej cztery boki. Dla boku 2 kierunek wektora  $\vec{L}$  w równaniu (28.26) jest zgodny z kierunkiem przepływu prądu, a jego wartość jest równa *b*. Kąt między wektorami  $\vec{L}$  i  $\vec{B}$  (patrz rysunek 28.19c) wynosi 90° –  $\theta$ . Tak więc wartość siły działającej na ten bok jest równa

$$F_2 = IbB\sin(90^\circ - \theta) = IbB\cos\theta.$$
(28.31)

Możesz wykazać, że siła  $\vec{F}_4$  działająca na bok 4 ma taką samą wartość, jak siła  $\vec{F}_2$ , ale jest przeciwnie skierowana. Tak więc siły  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_4$  równoważą się, tzn. ich wypadkowa jest równa zeru. Siły działają wzdłuż tej samej prostej przechodzącej przez środek ramki, dlatego związany z nimi wypadkowy moment siły jest równy zeru.

Inaczej jest w przypadku boków 1 i 3. Wektor  $\vec{L}$  jest tu prostopadły do wektora  $\vec{B}$ , a siły  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_3$  mają taką samą wartość IaB. Siły te są skierowane przeciwnie, a więc nie powodują przesunięcia ramki ani w górę, ani w dół. Jednakże, jak pokazano na rysunku 28.19c, te dwie siły *nie* dzia-



łają wzdłuż tej samej prostej, tak więc powstaje wypadkowy moment siły. Moment ten usiłuje obrócić ramkę tak, aby ustawić jej wektor normalny  $\vec{n}$  wzdłuż kierunku wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ . Ramiona tych sił względem osi obrotu ramki wynoszą  $(b/2) \sin \theta$ . Wartość momentu siły M'wywołanego działaniem sił  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_3$  jest więc równa (patrz rysunek 28.19c)

$$M' = \left(IaB\frac{b}{2}\sin\theta\right) + \left(IaB\frac{b}{2}\sin\theta\right) = IabB\sin\theta.$$
(28.32)

*Cewka.* Przypuśćmy, że pojedynczą ramkę, w której płynie prąd, zastąpimy *cewką* złożoną z N *zwojów.* Następnie załóżmy, że zwoje są nawinięte tak ciasno, że można przyjąć w przybliżeniu, iż mają te same wymiary i leżą w tej samej płaszczyźnie. Zatem zwoje tworzą *płaską cewkę*, a moment siły M', o wartości danej równaniem (28.32), działa na każdy zwój. Całkowity moment siły działający na cewkę ma więc wartość

$$M = NM' = NIabB\sin\theta = (NIS)B\sin\theta, \qquad (28.33)$$

gdzie S = ab jest polem powierzchni objętej przez cewkę. Wielkości w nawiasach (*NIS*) występują razem, ponieważ opisują właściwości cewki: liczbę zwojów, natężenie prądu i pole powierzchni. Równanie (28.33) jest słuszne dla wszystkich płaskich cewek, niezależnie od ich kształtu, pod warunkiem, że pole magnetyczne jest jednorodne. Na przykład, dla często spotykanych cewek o przekroju kołowym o promieniu *r* mamy

$$M = (NI\pi r^2)B\sin\theta.$$
(28.34)

*Wektor normalny.* Zamiast skupiać się na ruchu cewki, łatwiej jest analizować położenie wektora  $\vec{n}$ , który jest prostopadły do płaszczyzny cewki. Równanie (28.33) wskazuje, że płaska cewka z prądem umieszczona w polu magnetycznym będzie usiłowała się obrócić tak, aby kierunek wektora  $\vec{n}$  był zgodny z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej. W silniku elektrycznym kierunek prądu w cewce zmienia się na przeciwny w chwili, w której kierunek wektora  $\vec{n}$  pokrywa się z kierunkiem wektora indukcji; w ten sposób moment siły nadal obraca cewkę. Ta automatyczna zmiana kierunku prądu jest uzyskiwana za pomocą komutatora, który elektrycznie łączy obracającą się cewkę z nieruchomymi stykami przewodów doprowadzających prąd ze źródła.

# **28.8.** DIPOLOWY MOMENT MAGNETYCZNY

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 28.38 stwierdzić, że cewka, przez którą płynie prąd, jest dipolem magnetycznym o magnetycznym momencie dipolowym μ skierowanym wzdłuż wektora normalnego n zgodnie z regułą prawej dłoni;
- 28.39 zastosować dla cewki, przez którą płynie prąd, związek między wartością μ magnetycznego momentu dipolowego, liczbą zwojów N, polem S ograniczonym przez jeden zwój oraz natężeniem prądu I;
- 28.40 zaznaczyć na rysunku przedstawiającym cewkę z prądem kierunek przepływu prądu, a następnie użyć reguły prawej dłoni w celu określenia kierunku magnetycznego momentu dipolowego µ,;
- **28.41** zastosować dla dipola magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym związek między wartością momentu siły M, dipolowym momentem magnetycznym  $\mu$ , indukcją magnetyczną B oraz kątem  $\theta$  wyznaczonym przez wektor

magnetycznego momentu dipolowego  $\vec{\mu}$  i wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ ;

- 28.42 przypisać momentowi siły znak plus lub minus w zależności od kieruku obrotu;
- **28.43** obliczyć moment siły działający na dipol magnetyczny, wyznaczając iloczyn wektorowy wekora dipolowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$  i wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ , zarówno w notacji wektorowej, jak i za pomocą długości wektorów i kąta między nimi;
- 28.44 określić dla dipola magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym taką orientację dipola, że działający nań moment siły jest najmniejszy bądź największy;
- 28.45 zastosować dla dipola magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym związek między energią orientacji E<sub>p</sub>,

#### Podstawowe fakty

• Na znajdującą się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  cewkę o N zwojach i polu przekroju S, przez którą płynie prąd o natężeniu I, działa moment siły dany wzorem

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

We wzorze tym  $\vec{\mu}$  jest magnetycznym momentem dipolowym cewki, którego wartość jest równa  $\mu = NIS$ , a kierunek jest zadany regułą prawej dłoni.

wartością magnetycznego momentu dipolowego  $\mu$ , wartością indukcji magnetycznej *B* oraz kątem  $\theta$  między wektorem magnetycznego momentu dipolowego  $\vec{\mu}$  i wektorem indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ ;

- **28.46** wyznaczyć energię orientacji  $E_p$ , obliczając iloczyn skalarny wektora dipolowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$  i wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ ;
- 28.47 określić, jaka orientacja dipola magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym odpowiada najmniejszej bądź największej energii orientacji;
- **28.48** znaleźć związek między energią orientacji dipola magnetycznego w polu magnetycznym a pracą *W*<sub>zewn</sub> wykonaną przez moment sił zewnętrznych podczas obracania dipola.
- Energia orientacji dipola magnetycznego w polu magnetycznym jest równa

$$E_{\mathbf{p}}(\theta) = -\vec{\mu} \cdot B.$$

• Jeśli siły zewnętrzne powodują obrót dipola magnetycznego, zmieniając jego początkową orientację opisywaną kątem  $\theta_{\rm pocz}$ na orientację opisywaną kątem  $\theta_{\rm końc}$ , to praca sił zewnętrznych wykonana nad tym dipolem jest równa

 $W_{\text{zewn}} = \Delta E_{\text{p}} = E_{\text{p końc}} - E_{\text{p pocz}}.$ 

## **Dipolowy moment magnetyczny**

Jeżeli omawianą w poprzednim podrozdziale cewkę, przez którą płynie prąd, umieścimy w polu magnetycznym, to będzie ona się obracała pod działaniem momentu siły. Cewka będzie się zatem zachowywać tak samo, jak umieszczony w polu magnetycznym magnes sztabkowy. Z tego względu, podobnie jak magnes sztabkowy, cewkę, przez którą płynie prąd, możemy określić mianem *dipola magnetycznego*. Moment siły działający na cewkę w polu magnetycznym możemy wyrazić, wprowadzając pojęcie **magnetycznego momentu dipolowego** cewki, który będziemy oznaczać przez  $\vec{\mu}$ . Kierunek wektora  $\vec{\mu}$  wybieramy zgodnie z kierunkiem wektora normalnego  $\vec{n}$ , prostopadłego do płaszczyzny cewki; kierunek ten możemy określić za pomocą reguły prawej dłoni przedstawionej na rysunku 28.19: jeżeli palce prawej dłoni zegniemy tak, by wskazywały kierunek przepływu prądu w cewce, wyciągnięty kciuk wskaże nam kierunek wektora  $\vec{\mu}$ . Natomiast wartość bezwzględną wektora  $\vec{\mu}$  definiujemy jako

$$\mu = NIS$$
 (moment magnetyczny), (28.35)

gdzie *N* jest liczbą zwojów cewki, *I* — natężeniem prądu płynącego przez cewkę, a *S* — polem powierzchni objętej przez każdy zwój cewki. Skoro jednostką natężenia prądu jest amper, a powierzchni — metr kwadratowy, z równania (28.35) wynika, że jednostką  $\vec{\mu}$  jest amper razy metr kwadratowy (A · m<sup>2</sup>).

*Moment siły.* Stosując  $\vec{\mu}$ , możemy zapisać równanie (28.33), które określa moment siły działający na cewkę pod wpływem pola magnetycznego jako

$$M = \mu B \sin \theta, \qquad (28.36)$$

gdzie  $\theta$  jest kątem między wektorami  $\vec{\mu}$  i  $\vec{B}$ .

Równanie to może być zapisane w ogólniejszej postaci jako zależność wektorowa

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \qquad (28.37)$$

która bardzo przypomina analogiczne równanie dla momentu siły wywieranego przez pole *elektryczne* na dipol *elektryczny*, równanie (22.34)

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

W obydwu przypadkach moment siły wywierany przez pole — magnetyczne lub elektryczne — jest równy iloczynowi wektorowemu odpowiedniego momentu dipolowego i wektora pola.

*Energia.* Dipol magnetyczny ma w zewnętrznym polu magnetycznym pewną energię, która zależy od ustawienia dipola w polu magnetycznym, zwaną również energią orientacji dipola magnetycznego. Wykazaliśmy, że dla dipola elektrycznego (22.38)

$$E_{\rm p}(\theta) = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

W przypadku magnetycznym można napisać analogicznie

$$E_{\rm p}(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \tag{28.38}$$

W obydwu przypadkach energia równa jest minus iloczynowi skalarnemu odpowiedniego momentu dipolowego i wektora pola.

Dipol magnetyczny ma najmniejszą energię  $(-\mu B \cos 0^{\circ} = -\mu B)$ , gdy moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  jest ustawiony zgodnie z kierunkiem wektora indukcji  $\vec{B}$  (rys. 28.20). Dipol ma największą energię  $(-\mu B \cos 180^{\circ} =$  $+\mu B)$ , gdy wektor  $\vec{\mu}$  jest ustawiony przeciwnie do kierunku wektora indukcji pola. Skoro energię wyrażamy w dżulach, a indukcję magnetyczną w teslach, z równania (28.38) wynika, że jednostkę  $\vec{\mu}$  możemy równoważnie wyrazić jako dżul na teslę (J/T), zamiast jako amper razy metr kwadratowy, co wywnioskowaliśmy z równania (28.35).

**Praca.** Gdy zewnętrzny moment siły obraca dipol magnetyczny od pewnego początkowego ustawienia  $\theta_{pocz}$  do innego ustawienia  $\theta_{końc}$ , praca sił zewnętrznych  $W_{zewn}$  wykonana nad dipolem przez pole magnetyczne jest równa

$$W_{\text{zewn}} = \Delta E_{\text{p}} = E_{\text{p końc}} - E_{\text{p pocz}}, \qquad (28.39)$$

gdzie  $E_{p \text{ końc}}$  i  $E_{p \text{ pocz}}$  są wyznaczone z równania (28.38).

Dotychczas z dipolem magnetycznym była utożsamiana tylko cewka z prądem oraz magnes sztabkowy. Jednakże dipolem magnetycznym jest również obracająca się naładowana kula oraz (w przybliżeniu) Ziemia. Wreszcie większość cząstek elementarnych, w tym elektron, proton i neutron, ma dipolowe momenty magnetyczne. Jak zobaczysz w rozdziale 32, wszystkie te układy zachowują się jak ramki z prądem. W tabeli 28.2 porównano przybliżone wartości niektórych dipolowych momentów magnetycznych. wektor magnetycznego momentu dipolowego próbuje ustawić się zgodnie z kierunkiem pola



**Rys. 28.20.** Ustawienia dipola magnetycznego (w tym przypadku ramki z prądem) w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}$  odpowiadające największej i najmniejszej energii. Kierunek dipolowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$  określony jest przez kierunek prądu *I* zgodnie z regułą prawej dłoni, pokazaną na rysunku 28.19b dla wektora  $\vec{n}$ 

Tabela	28.2.	Wartości	niektórych
dipolow	ych m	iomentów	magnetycznych

mały magnes szt	abkowy 5 J/T
Ziemia	$8,0 \cdot 10^{22} \text{ J/T}$
proton	$1,4 \cdot 10^{-26}$ J/T
elektron	$9,3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$

*Nazewnictwo.* Wielkość  $E_p$  występująca we wzorze (28.38) nazywa się niekiedy energią potencjalną i wiąże się ją z pracą wykonywaną przez pole magnetyczne przy zmianie orientacji dipola. Unikamy tu dotyczącej tej definicji debaty, stwierdzając, że  $E_p$  jest energią związaną z orientacją dipola.

## Sprawdzian 5

Na rysunku pokazano cztery ustawienia dipolowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$ , tworzącego kąt  $\theta$  z kierunkiem pola magnetycznego. Uszereguj ustawienia pod względem: a) wartości momentu siły działającego na dipol, b) energii potencjalnej dipola, rozpoczynając od największej wartości.



#### Przykład 28.07. Obrót dipola magnetycznego w polu magnetycznym

Na rysunku 28.21 przedstawiono okrągłą cewkę o polu powierzchni *S* równym 2,52  $\cdot$  10<sup>-4</sup> m<sup>2</sup>, składającą się z 250 zwojów, przez które płynie prąd o natężeniu 100 µA. Cewka jest w spoczynku w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji *B* = 0,85 T, a jej dipolowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  jest ustawiony zgodnie z kierunkiem wektora  $\vec{B}$ .

a) Jaki jest kierunek prądu w cewce na rysunku 28.21?

**Reguła prawej dłoni:** Wyobraź sobie, że obejmujesz zwoje cewki prawą dłonią tak, aby twój prawy kciuk był wyciągnięty w kierunku wektora  $\vec{\mu}$ . Kierunek, w którym twoje palce zaginają się wokół zwojów, jest kierunkiem prądu w cewce. Tak więc w zwojach biegnących po bliższej stronie cewki (widocznych na rysunku 28.21) prąd płynie z góry na dół.

**b**) Jaką pracę musi wykonać nad cewką przyłożony z zewnątrz moment siły, obracając ją o 90° w stosunku do ustawienia początkowego tak, aby  $\vec{\mu}$  było prostopadłe do wektora  $\vec{B}$ , a cewka była znowu w spoczynku?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Praca  $W_{\text{zewn}}$  wykonana przez przyłożony moment siły jest równa zmianie energii cewki związanej ze zmianą jej ustawienia.

**Obliczenia:** Z równania (28.39) (które ma postać 
$$W_{\text{zewn}} = E_{\text{p końc}} - E_{\text{p pocz}}$$
) wynika, że

$$W_{\text{zewn}} = E_{p}(90^{\circ}) - E_{p}(0^{\circ})$$
$$= -\mu B \cos 90^{\circ} - (-\mu B \cos 0^{\circ})$$
$$= 0 + \mu B = \mu B.$$

Podstawiając w miejsce  $\mu$  wyrażenie (28.35), otrzymujemy

$$W_{\text{zewn}} = (NIS)B$$
  
= (250)(100 \cdot 10^{-6} A)(2,52 \cdot 10^{-4} m^2)(0,85 T)  
= 5.355 \cdot 10^{-6} J \approx 5.4 \mu J (odpowiedź).

Podobnie możemy wykazać, że do obrócenia cewki o kolejne 90°, tak by magnetyczny moment dipolowy był skierowany przeciwnie do pola magnetycznego, należy wykonać dodatkową pracę równą  $5.4 \mu$ J.



**Rys. 28.21.** Widok z boku okrągłej cewki z prądem, której dipolowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  jest ustawiony zgodnie z kierunkiem wektora  $\vec{B}$ 

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

#### **Podsumowanie**

Indukcja magnetyczna  $\vec{B}$  Indukcja magnetyczna  $\vec{B}$  jest zdefiniowana za pomocą siły  $\vec{F}_B$ , która działa na cząstkę próbną o ładunku q, poruszającą się w polu z prędkością  $\vec{v}$ 

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}. \tag{28.2}$$

Jednostką indukcji  $\vec{B}$  w układzie SI jest **tesla** (T): 1 T =  $1 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m}) = 10^4 \text{ gausów}.$ 

**Zjawisko Halla** Jeżeli przewodzący pasek o grubości l, w którym płynie prąd o natężeniu I, zostanie umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , to nośniki o ładunku e zaczną się gromadzić na brzegu paska, wytwarzając poprzeczne napięcie U. Znak napięcia między brzegami paska wskazuje na znak nośników ładunku.

Naładowana cząstka poruszająca się w polu magnetycznym Naładowana cząstka o masie *m* i ładunku |q|, wpadająca z prędkością  $\vec{v}$  w jednorodne pole magnetyczne prostopadle do kierunku wektora indukcji *B*, będzie poruszała się po okręgu. Stosując drugą zasadę dynamiki dla ruchu po okręgu, otrzymujemy

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r},\tag{28.15}$$

skąd wyznaczamy promień okręgu

$$r = \frac{mv}{|q|B}.$$
(28.16)

Częstotliwość w ruchu po okręgu  $\nu$ , częstość kołowa  $\omega$  i okres *T* są dane wzorami

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}.$$
 (28.19, 28.18, 28.17)

Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem Na prostoliniowy przewodnik, w którym płynie prąd o natę-

## Pytania

1 Na rysunku 28.22 przedstawiono trzy przypadki, w których dodatnio naładowana cząstka porusza się z prędkością  $\vec{v}$  w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  i działa na tę cząstkę siła magnetyczna  $\vec{F}_B$ . Dla każdego przypadku sprawdź, czy kierunki wektorów są poprawne.



2 Na rysunku 28.23 przedstawiono przewodnik z prądem płynącym w prawą stronę w jednorodnym polu magnetycznym oraz cztery możliwe ustawienia wektora indukcji magnetycznej. a) Uszereguj te ustawienia pod względem wielkości napięcia poprzecznego, które powstanie między brzegami przeżeniu *I*, umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym działa siła

$$\bar{F}_B = IL \times \bar{B}. \tag{28.26}$$

Siła działająca w polu magnetycznym na element prądu *IdL* wynosi

$$\mathrm{d}\vec{F}_B = I\mathrm{d}\vec{L} \times \vec{B}. \tag{28.28}$$

Kierunek wektora  $\vec{L}$  lub d $\vec{L}$  jest zgodny z kierunkiem przepływu prądu *I*.

**Moment siły działający na cewkę z prądem** Na cewkę (obejmującą powierzchnię o polu *S*, składającą się z *N* zwojów, przez które płynie prąd o natężeniu *I*) umieszczoną w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  działa moment siły

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \tag{28.37}$$

Symbol  $\vec{\mu}$  oznacza tutaj **dipolowy moment magnetyczny** cewki o wartości  $\mu = NIS$  i kierunku określonym za pomocą reguły prawej dłoni.

**Energia orientacji dipola magnetycznego** Energia orientacji dipola magnetycznego jest równa

$$E_{\rm p}(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \tag{28.38}$$

Jeżeli pod działaniem zewnętrznej siły dipol obraca się od pewnego początkowego ustawienia  $\theta_{pocz}$  do innego ustawienia  $\theta_{końc}$  oraz dipol spoczywa zarówno w chwili początkowej, jak i końcowej, to praca wykonana nad dipolem przez siłę zewnętrzną wynosi

$$W = \Delta E_{\rm p} = E_{\rm p \ końc} - E_{\rm p \ pocz}.$$
 (28.39)

wodnika. b) Dla którego z ustawień górny brzeg drutu będzie miał wyższy potencjał niż dolny?

**3** Na rysunku 28.24 przedstawiono metalowy prostopadłościan, który porusza się z pewną prędkością v w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ . Krawędzie prostopadłościanu mają długości, odpowiednio, d, 2di 3d. Wektor prędkości prostopadłościanu może mieć jeden z trzech kierunków: równoległy do osi x, równoległy do osi y lub równoległy do osi z,



Rys. 28.24. Pytanie 3

przy czym dla każdego wyboru kierunku prędkość może być zwrócona zgodnie lub przeciwnie do danej osi. a) Uszereguj opisane wyżej sześć wyborów wektora prędkości pod względem napięcia poprzecznego na prostopadłościanie. b) Dla którego wyboru przednia ściania prostopadłościanu ma niższy potencjał niż tylna?

4 Na rysunku 28.25 przedstawiono tor cząstki przechodzącej przez sześć obszarów jednorodnego pola magnetycznego, w których odcinki toru są albo półokręgami, albo ćwiartkami okręgu. Po opuszczeniu ostatniego obszaru cząstka przelatuje między dwiema naładowanymi równoległymi płytkami i jest odchylana w kierunku płytki o większym potencjale. Jakie są kierunki wektora indukcji w sześciu obszarach?



**5** W podrozdziale 28.2 omawialiśmy ruch naładowanej cząstki w skrzyżowanych polach, w przypadku, gdy siły  $\vec{F}_E$  i  $\vec{F}_B$  były skierowane przeciwnie. Okazało się, że cząstka porusza się po linii prostej (tzn. obie siły się równoważą), gdy prędkość cząstki jest dana równaniem (28.7) (v = E/B). Która z dwóch sił jest większa, jeżeli zamiast tego równania prędkość cząstki spełnia nierówność: a) v < E/B, b) v > E/B?

**6** Na rysunku 28.26 przedstawiono skrzyżowane jednorodne pola elektryczne i magnetyczne ( $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ ) oraz wektory prędkości, pokazane w pewnej chwili dla 10 cząstek wymienionych w tabeli 28.3 (wektory nie są narysowane w skali). W tabeli



Rys. 28.26. Pytanie 6

Tabela 28.3. Pytanie 4

cząstka	ładunek	prędkość	cząstka	ładunek	prędkość
1	+	mniejsza	6	_	większa
2	+	większa	7	+	mniejsza
3	+	mniejsza	8	+	większa
4	+	większa	9	_	mniejsza
5	_	mniejsza	10	_	większa

podano znaki ładunków oraz prędkości cząstek. Prędkości są podane w tabeli albo jako mniejsze, albo większe od E/B (patrz pytanie 5). Które cząstki będą w chwili przedstawionej na rysunku 28.26 poruszać się zza płaszczyzny rysunku w twoją stronę?

**7** Na rysunku 28.27 przedstawiono tor elektronu przechodzącego przez dwa obszary jednorodnego pola magnetycznego

o wartościach indukcji  $B_1$ i  $B_2$ . Tor elektronu w każdym obszarze jest półokręgiem. a) Które pole jest silniejsze? b) Jakie są kierunki wektorów indukcji? c) Czy czas przebywania elektronu w obszarze pola  $\vec{B}_1$  jest większy, mniejszy, czy taki sam jak czas przebywania w obszarze pola  $\vec{B}_2$ ?

8 Na rysunku 28.28 przedstawiono tor elektronu poruszającego się w jednorodnym polu magnetycznym. Tor ten składa się z dwóch odcinków prostoliniowych, z których każdy przebiega między dwiema jednorodnie nałado-





-

wanymi płytkami, oraz dwóch półokręgów. Która płytka z odpowiedniej pary ma wyższy potencjał elektrostatyczny a) dla górnej pary, b) dla dolnej pary? c) Jak skierowane jest pole magnetyczne?

**9** a) Jeżeli w sprawdzianie 5 moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  obraca się pod działaniem zewnętrznej siły od ustawienia 2 do ustawienia 1 (2 do 1), to czy praca wykonana nad dipolem przez tę siłę jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru? b) Uszereguj malejąco pracę wykonaną nad dipolem przez tę siłę dla następujących obrotów: 2 do 1, 2 do 4, i 2 do 3.

**10** *Karuzela cząstek.* Na rysunku 28.29 przedstawiono 11 torów cząstek w obszarze jednorodnego pola magnetycznego. Jeden tor jest linią prostą, pozostałe są półokręgami. W tabeli



Rys. 28.29. Pytanie 10

28.4 podano masy, ładunki i prędkości 11 cząstek, które poruszają się w polu po tych torach w zaznaczonych kierunkach. Przyporządkuj tory na rysunku poszczególnym cząstkom w tabeli. (Kierunek pola magnetycznego można wyznaczyć, wybierając jeden szczególny tor).

Tabela 28.4. Pytanie 8

cząstka	masa	ładunek	prędkość
1	2 <i>m</i>	q	υ
2	m	2q	v
3	m/2	q	2v
4	3 <i>m</i>	3q	3v
5	2m	$\hat{q}$	2v
6	т	$-\dot{q}$	2v
7	т	-4q	v
8	m	-q	v
9	2m	$-2\dot{q}$	8v
10	m	$-2\dot{q}$	8v
11	3 <i>m</i>	Ô	3v

11 Na rysunku 28.30 naładowana cząstka wpada z prędkością  $v_0$  w obszar jednorodnego pola magnetycznego o indukcji  $\vec{B}$ , zakreśla półokrąg w czasie  $T_0$ , a następnie opuszcza obszar pola. a) Czy ładunek cząstki jest dodatni, czy ujemny? b) Czy końcowa prędkość cząstki jest większa, mniejsza, czy równa  $v_0$ ? c) Czy czas przebywania w obszarze pola o indukcji  $\vec{B}$ 





#### Rys. 28.30. Pytanie 11

**12** Na rysunku 28.31 przedstawiono trzy sytuacje, w których dodatnio naładowana cząstka porusza się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ . W każdej z trzech sytuacji prędkości cząstki mają taką samą wartość, a różnią się jedynie kierunkiem. Uszereguj malejąco przedstawione sytuacje z uwagi na a) okres, b) częstotliwość oraz c) skok ruchu cząstki.



## Zadania

<b>GO</b>	Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach <i>WileyPLUS</i> (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
•_•••	Liczba kropek określa stopień trudności zadania
ssm	Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w Student Solutions Manual
www	Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
ilw	Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
THE	Więcej informacji znajdziesz w książce The Flying Circus of Physics i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

# Podrozdział 28.1 Pole magnetyczne i definicja wektora $\overrightarrow{B}$

•1 ssm ilw Na proton, który porusza się pod kątem 23° do kierunku wektora indukcji o wartości 2,6 mT, działa siła magnetyczna o wartości  $6.5 \cdot 10^{-17}$  N. Oblicz: a) prędkość protonu, b) jego energię kinetyczną w elektronowoltach.

•2 Cząstka o masie 10 g i ładunku  $80 \mu$ C porusza się w jednorodnym polu magnetycznym w obszarze, dla którego przyspieszenie w spadku swobodnym wynosi –  $(9,8 \text{ m/s}^2)$  j. Prędkość tej cząstki jest stała i równa  $20\hat{i}$  km/s, a wektor prędkości jest prostopadły do wektora indukcji magnetycznej. Jaki w tej sytuacji musi być wektor indukcji magnetycznej?

•3 Elektron porusza się z prędkością chwilową

$$\vec{v} = (2 \cdot 10^6 \text{ m/s})\hat{i} + (3 \cdot 10^6 \text{ m/s})\hat{j}$$

w jednorodnym polu magnetycznym, którego indukcja  $\vec{B} = (0,03 \text{ T})\hat{i} - (0,15 \text{ T})\hat{j}$ . a) Oblicz wartość siły magnetycznej działającej na elektron. b) Powtórz obliczenia dla protonu o takiej samej prędkości.

•4 Cząstka  $\alpha$  porusza się z prędkością  $\vec{v}$  o wartości 550 m/s w jednorodnym polu magnetycznym, którego indukcja  $\vec{B}$  ma wartość 0,045 T. (Cząstka  $\alpha$  ma ładunek +3,2 · 10<sup>-19</sup> C i masę 6,6 · 10<sup>-27</sup> kg). Kąt między wektorami  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$  jest równy 52°. Jakie są wartości: a) siły  $\vec{F}_B$  wywieranej na cząstkę przez pole; b) przyspieszenia cząstki wynikającego z działania siły  $\vec{F}_B$ ? c) Czy prędkość cząstki rośnie, maleje, czy też nie zmienia się?

••5 • Elektron porusza się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = B_x \hat{i} + 3B_x \hat{j}$ . W pewnej chwili prędkość elektronu jest równa  $\vec{v} = (2\hat{i} + 4\hat{j}) \text{ m/s}$ , siła magnetyczna działająca na elektron jest zaś wtedy równa  $\vec{F}_B = (6,4 \cdot 10^{-19} \text{ N}) \hat{k}$ . Oblicz  $B_x$ .

••6 Proton porusza się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = (10\hat{i} - 20\hat{j} + 30\hat{k})$  mT. W pewnej chwili  $t_1$  prędkość protonu jest dana wyrażeniem  $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + (2,0 \text{ km/s})\hat{k}$ , a działająca na proton siła magnetyczna jest równa  $\vec{F}_B = (4 \cdot 10^{-17} \text{ N})\hat{i} + (2 \cdot 10^{-17} \text{ N})\hat{j}$ . Ile w tej chwili są równe: a)  $v_x$ , b)  $v_y$ ?

#### Podrozdział 28.2 Pola skrzyżowane: odkrycie elektronu

•7 Elektron ma prędkość początkową  $(12\hat{j}+15\hat{k})$  km/s i stałe przyspieszenie  $(2 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2)\hat{i}$  w obszarze, w którym istnieją jednorodne pola elektryczne i magnetyczne. Wyznacz natężenie pola elektrycznego  $\vec{E}$ , jeśli indukcja  $\vec{B} = (400 \ \mu \text{T})\hat{i}$ .

•8 Pole elektryczne o natężeniu 1,5 kV/m i pole magnetyczne o indukcji 0,4 T działają na poruszający się elektron siłą wypadkową równą zeru. Oblicz wartość prędkości elektronu.

•9 ilw Przedstawiony na rysunku 38.32 elektron jest przyspieszany przez różnicę potencjałów 1 kV a następnie skierowany w obszar między dwiema równoległymi płytkami odległymi o 20 mm, między którymi występuje różnica potencjałów 100 V, przy czym dolna płytka ma niższy potencjał. Zaniedbując efekty brzegowe i zakładając, że elektron porusza się prostopadle do kierunku wektora natężenia pola elektrycznego, gdy dostaje się w obszar między płytkami, oblicz, jaka powinna być wartość wektora indukcji jednorodnego pola magnetycznego przyłożonego prostopadle zarówno do toru elektronu, jak i do kierunku wektora natężenia pola elektrycznego, aby elektron poruszał się wzdłuż linii prostej.



Rys. 28.32. Zadanie 9

••10 Proton porusza się w jednorodnym polu elektrycznym oraz w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = -2.5\hat{i}$  mT. W pewnej chwili prędkość protonu wynosi  $\vec{v} = 2000\hat{j}$  m/s. Określ wektor wypadkowej siły działającej wtedy na proton, jeśli natężenia pola elektrycznego wynoszą: a) 4 $\hat{k}$  V/m, b)  $-4\hat{k}$  V/m, c) 4 $\hat{i}$  V/m.

••11 😨 Źródło jonów wytwarza jony <sup>6</sup>Li o ładunku +*e* i masie 9,99 ·  $10^{-27}$  kg. Jony są przyspieszane przez różnicę potencjałów 10 kV i wpadają poziomo w obszar, w którym istnieje jednorodne pole magnetyczne o indukcji B = 1,2 T. Oblicz najmniejszą wartość natężenia pola elektrycznego, które należałoby przyłożyć w tym samym obszarze, aby jony <sup>6</sup>Li poruszały się bez odchylenia.

•••12 • W chwili  $t_1$  elektron porusza się zgodnie z kierunkiem osi x przez obszar, w którym występuje pole elektryczne  $\vec{E}$  i magnetyczne  $\vec{B}$ , przy czym wektor  $\vec{E}$  jest równoległy do osi y. Na rysunku 28.33 przedstawiono składową y wypadkowej siły  $\vec{F}_{wyp}$  działającej na elektron, wynikającej z jego oddziaływania z obydwoma polami; składowa ta jest

funkcją prędkości v elektronu w chwili  $t_1$ , przy czym skala osi poziomej jest wyznaczona przez wartość  $v_s = 100$  m/s. Składowe x oraz z wypadkowej siły w chwili  $t_1$  są równe zeru. Zakładając  $B_x = 0$ , znajdź: a) wartość natężenia pola elektrycznego E oraz b) wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ .



D.

#### Podrozdział 28.3 Pola skrzyżowane: zjawisko Halla

•13 Pasek miedziany o grubości 150  $\mu$ m i szerokości 4,5 mm umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji wynoszącej 0,65 T, skierowanym prostopadle do paska. Następnie przez pasek przepuszczono prąd o natężeniu I =23 A, co spowodowało pojawienie się napięcia Halla U. Oblicz U. (Dla miedzi liczba nośników ładunku na jednostkę objętości wynosi 8,47 · 10<sup>28</sup> elektronów/m<sup>3</sup>).

•14 Pasek metalowy długości 6,5 cm, szerokości 0,85 cm i grubości 0,76 mm porusza się ze stałą prędkością  $\vec{v}$  w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B = 1,2 mT, skierowanym prostopadle do paska, jak na rysunku 28.34. Między punktami x i y zmierzono różnicę potencjałów 3,9  $\mu$ V. Oblicz wartość prędkości v.





••15 Przedstawiony na rysunku 28.35 przewodzący prostopadłościan o krawędziach długości  $d_x = 5 \text{ m}, d_y = 3 \text{ m} \text{ i } d_z = 2 \text{ m}$  porusza się ze stałą prędkością  $\vec{v} = (20,0 \text{ m/s}) \hat{i}$  w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = (30 \text{ mT}) \hat{k}$ . Oblicz: a) wektor natężenia pola elektrycz-

nego  $\vec{E}$  wewnątrz prostopadłościanu oraz b) różnicę potencjałów między przeciwległymi parami jego ścian.

•••16 San vysunku 28.35 przedstawiono metalowy prostopadłościan o ścianach prostopadłych do odpowiednich osi układu wspołrzędnych.



Rys. 28.35. Zadania 15 i 16

Prostopadłościan ten znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B = 0,02 T. Długość jednej z czwórek krawędzi jest równa 25 cm, rysunek nie oddaje zaś rzeczywistych proporcji prostopadłościanu. Prostopadłościan przesuwano kolejno z prędkościami o tej samej wartości 3,0 m/s, skierowanymi wzdłuż kolejnych osi i mierzono różnicę potencjałów U między przeciwległymi ścianami. Przy ruchu wzdłuż osi y otrzymano U = 12 mV, przy ruchu wzdłuż osi z otrzymano U = 18 mV, przy ruchu wzdłuż osi x otrzymano zaś U = 0. Jakie są długości krawędzi prostopadłościanu: a)  $d_x$ , b)  $d_y$  oraz c)  $d_z$ ?

# Podrozdział 28.4 Ruch cząstek naładowanych w polu magnetycznym po okręgu

•17 W wyniku niektórych reakcji jądrowych powstają cząstki  $\alpha$  składające się z dwóch protonów i dwóch neutronów; mają one ładunek +2*e* i masę 4,00 u, gdzie u jest jednostką masy atomowej równą 1 u = 1,661 · 10<sup>-27</sup> kg. Dla cząstki  $\alpha$  poruszającej się po okręgu o promieniu 4,5 cm w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B = 1,2 T oblicz: a) prędkość cząstki, b) okres w ruchu po okręgu, c) energię kinetyczną w elektronowoltach, d) różnicę potencjałów, która przyspieszyłaby cząstkę aż do osiągnięcia przez nią takiej samej energii jak w przypadku ruchu po okręgu.

•18 • Na rysunku 28.36 przedstawiono cząstkę poruszającą się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B = 4 mT. Cząstka ta jest albo protonem, albo elektro-

nem (należy to rozstrzygnąć); działa na nią siła magnetyczna o wartości  $3,2 \cdot 10^{-15}$  N. Ile wynoszą: a) prędkość cząstki, b) promień okręgu będącego torem cząstki oraz c) częstotliwość ruchu po okręgu?



Rys. 28.36. Zadanie 18

•19 Pewna cząstka porusza się w jednorodnym polu magnetycznym, którego wektor indukcji jest prostopadły do prędkości cząstki. Na rysunku 28.37 przedstawiono zależność okresu *T* ruchu cząstki po okręgu od *odwrotności* wartości indukcji magnetycznej *B*. Osie pozioma i pionowa są tak wyskalowane, że  $T_s = 40$  ns oraz  $B_s^{-1} = 5$  T<sup>-1</sup>. Ile jest równy stosunek m/|q| masy cząstki do jej ładunku?





nego, gdzie porusza się jednostajnie po okręgu. Na rysunku 28.38 przedstawiono zależność promienia *r* tego okręgu od  $U^{1/2}$ , przy czym osie pozioma i pionowa są tak wyskalowane, że  $r_{\rm s} = 3$  mm oraz  $U_{\rm s}^{1/2} = 40 \text{ V}^{1/2}$ . Ile wynosi indukcja pola magnetycznego?



•21 ssm Elektron o energii kinetycznej 1,2 keV krąży w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku wektora indukcji w jednorodnym polu magnetycznym. Promień orbity jest równy 25 cm. Oblicz: a) prędkość elektronu, b) indukcję magnetyczną, c) częstotliwość, d) okres ruchu po okręgu.

•22 W pewnym doświadczeniu proton o energii kinetycznej 1 MeV porusza się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym. Jaka musi być energia: a) cząstki  $\alpha$  (q = +2e, m = 4 u), b) deuteronu (q = +e, m = 2 u), jeśli one mają się poruszać po tym samym okręgu?

•23 Jaka powinna być wartość indukcji jednorodnego pola magnetycznego przyłożonego prostopadle do wiązki elektronów, które poruszają się z prędkością  $1,3 \cdot 10^6$  m/s, aby elektrony krążyły po łuku okręgu o promieniu 0,35 m?

•24 Elektron, będący początkowo w spoczynku, jest przyspieszany przez różnicę potencjałów 350 V. Następnie dostaje się w obszar jednorodnego pola magnetycznego o wartości indukcji 200 mT, przy czym jego prędkość jest prostopadła do kierunku pola. Oblicz: a) prędkość elektronu, b) promień toru elektronu w polu magnetycznym.

•25 a) Oblicz częstotliwość obiegu elektronu o energii 100 eV w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 35 μT.
b) Oblicz promień toru tego elektronu, jeśli wektor jego pręd-kości jest prostopadły do wektora indukcji.

••26 Na rysunku 28.39 naładowana cząstka wpada w obszar jednorodnego pola magnetycznego, zakreśla półokrąg, a następnie opuszcza ten obszar. Cząstka jest albo protonem, albo elektronem (musisz to rozstrzygnąć) i przebywa w obszarze pola przez 130 ns. a) Jaka jest wartość wektora indukcji  $\vec{B}$ ? b) Jeżeli cząstka zostanie powtórnie skierowana w obszar pola magnetycznego (wzdłuż tego samego początkowego toru), ale jej energia będzie dwa razy większa, to jak długo będzie wówczas przebywała w obszarze pola?



Rys. 28.39. Zadanie 26

••27 Pewien spektrometr mas (rys. 28.12) jest używany do oddzielania jonów uranu o masie  $3,92 \cdot 10^{-25}$  kg i ładunku

 $3,20 \cdot 10^{-19}$  C od jonów podobnego rodzaju. Jony są przyspieszane przez różnicę potencjałów 100 kV, a następnie dostają się w obszar jednorodnego pola magnetycznego, gdzie ich tor jest łukiem okręgu o promieniu 1 m. Po zmianie kierunku o 180° i przejściu przez szczelinę o szerokości 1 mm i wysokości 1 cm, jony są zbierane w zbiorniku. a) Jaka jest wartość wektora indukcji magnetycznej w separatorze? Jeżeli urządzenie jest wykorzystywane do oddzielania 100 mg materiału w ciągu godziny, oblicz: b) natężenie prądu jonów uranu, c) energię termiczną wydzielaną w zbiorniku w ciągu 1 h.

••28 Znajdująca się w jednorodnym polu magnetycznym cząstka porusza się jednostajnie po okręgu o promieniu  $r = 26,1 \,\mu\text{m}$ . Siła magnetyczna działająca na tę cząstkę jest równa  $1,6\cdot 10^{-17}$  N. Ile wynosi energia kinetyczna tej cząstki?

••29 Elektron znajdujący się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 0,3 T porusza się po linii śrubowej. Skok jego toru jest równy 6  $\mu$ m, a wartość siły magnetycznej działającej na elektron wynosi 2 · 10<sup>-15</sup> N. Jaka jest prędkość elektronu?

••30 T Na rysunku 28.40 przedstawiono elektron, który w chwili t = 0 ma początkową energię kinetyczną równą 4 keV. Elektron ten wlatuje najpierw do obszaru 1, gdzie występuje jednorodne pole magnetyczne o indukcji 0,01 T prostopadłe do płaszczyzny rysunku i skierowane



Rys. 28.40. Zadanie 30

od ciebie. Elektron zakreśla tam półokrąg i kieruje się w stronę obszaru 2, pokonując drogę długości 25 cm. Wzdłuż niej elektron jest przyspieszany przez róznicę potencjałów U = 2000 V, w taki sposób, że prędkość elektronu przyrasta jednostajnie. W obszarze 2 znajduje się jednorodne pole magnetyczne o indukcji 0,02 T prostopadłe do płaszczyzny rysunku i skierowane w twoją stronę. Elektron zakreśla tam kolejny półokrąg, a następnie opuszcza obszar 2 w chwili *t*. Oblicz *t*.

••31 Pewna cząstka elementarna rozpada się na elektron e<sup>-</sup> i pozyton e<sup>+</sup>. Zakładając, że rozpadająca się cząstka spoczywa w polu magnetycznym o indukcji 3,53 mT oraz że e<sup>-</sup> i e<sup>+</sup> zaraz po rozpadzie poruszają się prostopadle do kierunku pola magnetycznego, wyznacz upływający od chwili rozpadu czas, po jakim cząstki te się zderzą.

••32 Źródło wysyła elektron, którego prędkość wynosi  $v = 1,5 \cdot 10^7$  m/s, w obszar jednorodnego pola magnetycznego o indukcji  $B = 10^{-3}$  T. Kierunek wektora prędkości elektronu tworzy kąt  $\theta = 10^{\circ}$  z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej. Oblicz odległość *d* od punktu początkowego do punktu, w którym tor elektronu ponownie przetnie linię pola, przechodzącą przez punkt początkowy.

••33 ssm www Pozyton o energii kinetycznej 2 keV wystrzelono w polu magnetycznym o indukcji 0,1 T tak, że wektor prędkości pozytonu tworzy kąt 89° z wektorem  $\vec{B}$ . Wyznacz: a) okres ruchu pozytonu oraz b) skok i c) promień linii śrubowej będącej torem ruchu pozytonu.

••34 Znajdujący się w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = (20\hat{i} - 50\hat{j} - 30\hat{k})$  mT elektron porusza się po linii śrubowej. W chwili t = 0 prędkość elektronu wynosi  $\vec{v} = (20\hat{i} - 30\hat{j} - 50\hat{k})$  m/s. a) Jaki jest kąt  $\phi$  między wektorami  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$ . Prędkość elektronu będzie zmieniać się w czasie. Czy zmieniać się będzie b) jej wartość lub c) kąt  $\phi$ ? d) Jaki jest promień linii śrubowej?

#### Podrozdział 28.5 Cyklotrony i synchrotrony

••35 Poruszający się w cyklotronie proton znajduje się początkowo niemal w spoczynku w środku cyklotronu. Przy każdym przejściu między duantami proton ten napotyka różnicę potencjałów 200 V. a) O jaką wartość zwiększa się energia kinetyczna protonu przy każdym przejściu między duantami? b) Ile wynosi jego energia kinetyczna po 100 takich przejściach? Niech  $r_{100}$  będzie promieniem okręgu, po którym porusza się proton w duancie po 100 takich przejściach,  $r_{101}$  zaś niech będzie promieniem toru po kolejnym przejściu między duantami. c) Ile wynosi wyrażony w procentach względny przyrost promienia od  $r_{100}$  do  $r_{101}$  dany wzorem

względny przyrost = 
$$\frac{r_{101} - r_{100}}{r_{100}} \cdot 100\%$$
 ?

••36 Zadaniem pewnego cyklotronu wyposażonego w duanty o promieniu 53 cm i generator o częstotliwości 12 MHz jest przyspieszanie protonów. a) Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej *B* pozwalająca na osiągnięcie rezonansu? b) Ile wynosi energia kinetyczna protonów opuszczających cyklotron dla takiej wartości *B*? Jeżeli natomiast B =1,57 T, c) dla jakiej częstotliwości generatora zachodzi rezonans i d) jaka jest, dla takiej częstotliwości energia kinetyczna protonu opuszczającego cyklotron?

 •37 Oszacuj całkowitą drogę przebytą przez deuteron podczas całego procesu przyspieszania w cyklotronie o promieniu 53 cm i częstotliwości 12 MHz, przyjmując, że przyspieszająca różnica potencjałów między duantami jest równa 80 kV.

••38 W pewnym cyklotronie proton porusza się po okręgu o promieniu 0,5 m. Wartość indukcji magnetycznej wynosi 1,2 T. a) Jaka jest częstotliwość generatora? b) Jaka jest energia kinetyczna protonu, wyrażona w elektronowoltach?

#### Podrozdział 28.6 Siła magnetyczna działająca na przewodnik z prądem

•39 ssm W poziomej linii przesyłowej płynie z południa na północ prąd o natężeniu 5000 A. Ziemskie pole magnetyczne (60  $\mu$ T) jest skierowane na północ i nachylone w dół pod kątem 70° do poziomu. Wyznacz: a) wartość oraz b) kieru-

nek siły magnetycznej, która działa na 100 m przewodu linii w ziemskim polu magnetycznym.

•40 Przewód o długości 1,8 m, w którym płynie prąd o natężeniu 13 A, tworzy kąt 35° z kierunkiem linii jednorodnego pola magnetycznego o indukcji B = 1,5 T. Oblicz siłę magnetyczną, która działa na ten przewód.

•41 ilw Ważący 13 g przewód o długości 62 cm jest zawieszony na dwóch giętkich doprowadzeniach w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 0,44 T (rys. 28.41). Jakie

powinny być: a) wartość natężenia prądu i b) jego kierunek (w lewo czy w prawo), aby usunąć naprężenie w przewodach doprowadzających?

•42 Przedstawiony na rysunku 28.42 zagięty przewód znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym. Każdy z prostoliniowych odcinków przewodu ma długość 2 m i tworzy kąt  $\theta = 60^\circ$  z osią x; przez przewód płynie prąd o natężeniu 2 A. Jaki jest wektor wypadkowej siły działającej na przewód, jeśli wektory indukcji pola magnetycznego są równe: a) 4 k T oraz b) 4 i T?



Rys. 28.42. Zadanie 42

•43 Pojedyncza ramka, przez którą płynie prąd o natężeniu 4 A, ma kształt trójkąta prostokątnego o bokach 50, 120 i 130 cm. Ramka znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 75 mT, a kierunek wektora indukcji jest równoległy do kierunku prądu w boku ramki o długości 130 cm. Jaka jest wartość siły magnetycznej działającej na: a) bok o długości 130 cm, b) bok o długości 50 cm oraz c) bok o długości 120 cm? d) Jaka jest wartość wypadkowej siły działającej na ramkę?

••44 Na rysunku 28.43 przedstawiono przewód w kształcie pierścienia o promieniu a = 1,8 cm, ustawiony prostopadle do osi symetrii rozbieżnego pola magnetycznego. W każdym punkcie pierścienia pole ma-



#### Rys. 28.43. Zadanie 44

gnetyczne ma taką samą wartość wektora indukcji B = 3,4 mT, a jego kierunek tworzy kąt  $\theta = 20^{\circ}$  z prostą prostopadłą do płaszczyzny pierścienia. Skręcone przewody doprowadzające nie mają wpływu na warunki zadania. Wyznacz wartość siły, z jaką pole działa na pierścień, jeżeli w pierścieniu płynie prąd o natężeniu *I*. ••45 W przewodzie o długości 50 cm płynie prąd o natężeniu 0,5 A w dodatnim kierunku osi x; przewód znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = (0,003 \text{ T})\hat{j} + (0,01 \text{ T})\hat{k}$ . Wyznacz wektor siły magnetycznej działającej na przewód.

••46 Na rysunku 28.44 przedstawiono metalowy przewód o masie 24,1 mg, który może ślizgać się bez tarcia po dwóch poziomych, równoległych szynach odległych o d = 2,56 cm. Cały układ znajduje się w jednorodnym, skierowanym pionowo polu magnetycznym o indukcji 56,3 mT. W chwili t = 0 do szyn podłączono urządzenie *G*, wytwarzające prąd o stałym natężeniu I = 9,13 mA płynący przez szyny i przewód (niezależnie od ruchu przewodu). Dla chwili t = 61,1 ms wyznacz: a) prędkość przewodu oraz b) jej kierunek (w lewo czy w prawo).



Rys. 28.44. Zadanie 46

•••47 • Pręt miedziany o masie 1 kg leży na dwóch poziomych szynach, odległych o 1 m. Przez pręt płynie z jednej szyny do drugiej prąd o natężeniu 50 A. Współczynnik tarcia statycznego między prętem a szynami wynosi 0,6. Jaka jest a) najmniejsza wartość indukcji magnetycznej oraz b) odpowiadający jej kierunek wektora indukcji magnetycznej, której przekroczenie sprawi, że pręt będzie się ślizgał po szynach?

•••48 • W długim, sztywnym przewodniku leżącym wzdłuż osi *x* płynie prąd o natężeniu 5 A w kierunku przeciwnym do kierunku osi *x*. Przewodnik znajduje się w polu magnetycznym o indukcji danej wzorem  $\vec{B} = (3\hat{i} + 8x^2\hat{j})$  mT, gdzie *x* jest położeniem wzdłuż przewodnika wyrażonym w metrach. Znajdź wektor siły działającej na dwumetrowy odcinek przewodnika, który leży między x = 1 m a x = 3 m.

## Podrozdział 28.7 Moment siły działający na ramkę z prądem

•49 ssm Na rysunku 28.45 przedstawiono prostokątną cewkę o wymiarach 10 cm na 5 cm, składającą się z 20 zwojów. W cewce, która może się obracać wokół jednego z jej dłuższych boków, płynie prąd o natężeniu 0,1 A. Cewka znajduje się w płaszczyźnie *xy*, w obszarze jednorodnego pola magnetycznego



Rys. 28.45. Zadanie 49

o wektorze indukcji mającym wartość 0,5 T i tworzącym kąt  $30^{\circ}$  z osią *x*. Wyznacz wartość i kierunek momentu siły działającego na cewkę względem danej osi obrotu.

••50 Elektron porusza się po okręgu, którego promień  $r = 5,29 \cdot 10^{-11}$  m, z prędkością 2,19  $\cdot 10^6$  m/s. Traktując tor elektronu jako ramkę, w której płynie prąd stały równy średniemu prądowi związanemu z ruchem elektronu, wyznacz maksymalny moment siły wywierany na ramkę przez jednorodne pole magnetyczne o indukcji B = 7,1 mT.

••51 Na rysunku 28.46 przedstawiono drewniany walec o masie m = 0,25 kg i długości L = 0,1 m. Cewka składająca się z N = 10 zwojów drutu została nawinięta na walcu w taki sposób, że oś walca leży w płaszczyźnie cewki. Walec ten położono na równi pochyłej nachylonej pod kątem  $\theta$  do poziomu w taki sposób, że płaszczyzna cewki jest równoległa do płaszczyzny równi. Zakładając, że cały układ znajduje

się w skierowanym pionowo do góry jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 0,5 T, oblicz najmniejsze natężenie *I* prądu płynącego przez cewkę, który nie pozwala walcowi stoczyć się w dół równi.

••**52** Na rysunku 28.47 przedstawiono prostokatna ramkę z prądem leżącą w płaszczyźnie zawierajacej wektor indukcji jednorodnego pola magnetycznego. Ramka składa się z jednego zwoju gietkiego przewodnika umocowanego tak, że długości boków prostokata mogą się zmieniać, ale całkowita długość przewodnika pozostaje stała. Gdy długość x jednego z boków prostokata zmienia



Rys. 28.46. Zadanie 51



się od zera do wartości maksymalnej wynoszącej 4 cm, zmienia się także wartość momentu siły M działającego na ramkę. Największa z tych wartości M to  $4,8 \cdot 10^{-8}$  N  $\cdot$  m. Jaki prąd płynie przez ramkę?

••53 Udowodnij, że wzór  $M = NISB \sin \theta$  obowiązuje dla zamkniętych ramek o dowolnych kształtach, a nie tylko dla ramki prostokątnej przedstawionej na rysunku 28.19. (*Wska-zówka*: Zastąp ramkę o dowolnym kształcie układem przylegających do siebie długich, wąskich ramek prostokątnych, które są w przybliżeniu równoważne ramce o dowolnym kształcie, jeżeli chodzi o rozkład prądu).

#### Podrozdział 28.8 Dipolowy moment magnetyczny

•54 Dipol magnetyczny, którego dipolowy moment magnetyczny jest równy 0,02 J/T, znajdował się początkowo w stanie spoczynku w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 52 mT. Dipol został puszczony swobodnie i może obracać się bez przeszkód. W chwili, gdy dipolowy moment magnetyczny dipola jest skierowany zgodnie z kierunkiem indukcji pola magnetycznego, jego energia kinetyczna wynosi 0,8 mJ. a) Znajdź kąt, który tworzy w chwili początkowej kierunek dipolowego momentu magnetycznego z kierunkiem indukcji magnetycznej. b) Znajdź kąt, który utworzy kierunek dipolowego momentu magnetycznego z kierunkiem indukcji magnetycznej w chwili, gdy prędkość obrotu dipola będzie znów równa zeru.

•55 ssm Dwie współśrodkowe okrągłe ramki z drutu o promieniach  $r_1 = 20$  cm i  $r_2 = 30$  cm są umieszczone w płaszczyźnie *xy*. W każdej z nich płynie prąd o natężeniu 7 A w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (rys. 28.48). a) Wyznacz wartość wypadkowego dipolowego momentu magnetycznego tego układu. b) Powtórz obliczenia dla przeciwnego kierunku prądu w wewnętrznej ramce.



Rys. 28.48. Zadanie 55

•56 W kołowej ramce o promieniu 15 cm płynie prąd o natężeniu 2,6 A. Ramka jest umieszczona w jednorodnym polu magnetycznym tak, aby normalna do jej płaszczyzny tworzyła kąt 41° z kierunkiem wektora indukcji o wartości 12 T. a) Oblicz wartość dipolowego momentu magnetycznego ramki. b) Jaka jest wartość momentu siły działającego na ramkę?

•57 ssm Okrągła cewka o 160 zwojach ma promień 1,9 cm. a) Oblicz natężenie prądu, który wytwarza dipolowy moment magnetyczny o wartości 2,3 A  $\cdot$  m<sup>2</sup>. b) Oblicz wartość maksymalnego momentu siły działającego na cewkę, w której płynie prąd o tym natężeniu, w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 35 mT.

•58 Dipolowy moment magnetyczny Ziemi ma wartość  $8 \cdot 10^{22}$  J/T. Przyjmij, że moment ten powstaje w wyniku ruchu ładunków w zewnętrznej części płynnego jądra Ziemi. Oblicz natężenie prądu wytworzonego przez poruszające się ładunki, jeżeli promień kołowego toru ładunków wynosi 3500 km.

•59 Ramka, przez którą płynie prąd o natężeniu 5 A, ma kształt trójkąta prostokątnego o bokach 30, 40 i 50 cm. Ramka znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 80 mT, której kierunek jest równoległy do kierunku prądu przepływającego przez bok trójkąta o długości 50 cm. Wyznacz wartości: a) dipolowego momentu magnetycznego ramki, b) momentu siły działającego na ramkę. ••60 Na rysunku 28.49 przedstawiono ramkę ABCDEFA, w której płynie prąd o natężeniu I = 5 A. Boki ramki są równoległe do odpowiednich osi układu współrzędnych, przy czym AB = 20 cm, BC = 30 cm, a FA = 10 cm. Oblicz wartość i kierunek dipolowego momentu magnetycznego

tej ramki. (*Wskazówka*: Wyobraź sobie, że prądy o takich samych natężeniach *I*, ale o przeciwnych kierunkach płyną przez odcinek *AD*; następnie weź pod uwagę dwie prostokątne ramki *ABCDA* i *ADEFA*).

••61 ssm W przedstawionej na rysunku 28.50 cewce płynie prąd o natężeniu I =2 A w stronę zaznaczoną na rysunku. Cewka jest równoległa do płaszczyzny *xz*, ma 3 zwoje otaczające pole  $4 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup> każdy i znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} =$  $(2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k})$  mT. Wyznacz: a) energię orientacji cewki



Rys. 28.50. Zadanie 61

oraz b) wektor momentu siły magnetycznej działającego na cewkę.

••62 •• Na rysunku 28.51a przedstawiono dwie współosiowe cewki leżące w tej samej płaszczyżnie; kierunki przepływu prądu w cewkach są przeciwne. Prąd płynący przez większą cewkę 1 ma ustalone natężenie, można natomiast zmieniać natężenie prądu  $I_2$  płynącego przez cewkę 2. Na rysunku 28.51b przedstawiono wypadkowy moment magnetyczny układu dwóch cewek w zależności od  $I_2$ . Skale osi są tak dobrane, że  $\mu_{wyp,s} = 2 \cdot 10^{-5} \text{A} \cdot \text{m}^2$  oraz  $I_{2,s} = 10 \text{ mA}$ . Gdyby odwrócić kierunek przepływu prądu w cewce 2, jaką wartość miałby wtedy wypadkowy moment magnetyczny dla  $I_2 = 7 \text{ mA}$ ?



••63 W kołowej ramce o promieniu 8 cm płynie prąd o natężeniu 0,2 A. Wektor jednostkowy równoległy do momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$  jest równy 0,6 $\hat{i}$  – 0,8 $\hat{j}$  (wektor ten określa kierunek wektora momentu magnetycznego). Jeżeli ramka

znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = (0,25 \text{ T})\hat{i} + (0,3 \text{ T})\hat{k}$ , oblicz: a) moment siły, działający na ramkę (używając wektorów jednostkowych), b) energię orientacji ramki.

••64 Solution Na rysunku 28.52 przedstawiono energię  $E_p$  orientacji dipola magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym w zależności od kąta  $\phi$  między kierunkami indukcji magnetyczej  $\vec{B}$  i momentu magnetycznego. Skala osi pionowej jest dobrana tak, że  $E_{p,s} = 2 \cdot 10^{-4}$  J. Dipol magnetyczny można obracać bez tarcia wokół pewnej osi, co pociąga za sobą zmianę kąta  $\phi$ . Obrót od położenia  $\phi = 0$ w stronę przeciwną (zgodną) w stosunku do kierunku ruchu wskazówek zegara daje dodatnie (ujemne) wartości kąta  $\phi$ . W pewnej chwili dipol znajdował się w położeniu  $\phi = 0$ , miał energię kinetyczną obrotu  $6,7 \cdot 10^{-4}$  J i obracał się

zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Jakie będzie największe wychylenie dipola? (Używając słownictwa wprowadzonego w podrozdziale 8.3, można by równoważnie zapytać, jakiej wartości  $\phi$  będzie odpowiadał punkt zwrotny w studni potencjału przedstawionej na rysunku 28.52).



Rys. 28.52. Zadanie 64

••65 ssm ilw Z fragmentu przewodnika o długości 25 cm, przez który płynie prąd o natężeniu 4,51 mA, wykonano cewkę o przekroju kołowym, którą umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 5,71 mT. Jakie powinny być: a) kąt między wektorem indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  i momentem magnetycznym oraz b) liczba zwojów cewki, aby moment siły magnetycznej działającej na cewkę był maksymalny? c) Ile wynosi ten moment siły?

#### Zadania dodatkowe

**66** Proton o ładunku +*e* i masie *m* wpada z prędkością  $\vec{v} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$  do obszaru, w którym występuje jednorodne pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B} = B\hat{i}$ . Znajdź wektor prędkości protonu w dowolnej chwili *t*.

**67** Zegar ścienny ma tarczę w kształcie koła o promieniu 15 cm. Wokół tarczy nawinięto sześć zwojów drutu, w którym płynie prąd o natężeniu 2 A w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Zegar umieszczony jest w stałym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 70 mT (ale pomimo to nie spóźnia się). O godzinie pierwszej wskazówka godzinowa zegara jest ustawione zgodnie z kierunkiem indukcji pola magnetycznego. a) Po upływie ilu minut wskazówka ustawi się zgodnie z kierunkiem momentu siły magnetycznej działającego na zwoje? b) Wyznacz wartość tego momentu siły.

**68** W przewodzie leżącym wzdłuż osi y, od y = 0 do y = 0,25 cm, płynie prąd o natężeniu 2 mA w kierunku przeciwnym do kierunku osi y. Przewód znajduje się w niejednorodnym polu magnetycznym o indukcji

 $\vec{B} = (0,3 \text{ T/m})\hat{y}i + (0,4 \text{ T/m})\hat{y}j.$ 

Używając wektorów jednostkowych, wyznacz siłę magnetyczną działającą na przewód.

**69** Atom 1 o masie 35 u oraz atom 2 o masie 37 u zostały jednokrotnie zjonizowane i każdy z nich ma ładunek +*e*. Po wprowadzeniu do spektrometru mas (rys. 28.12) i przyspieszeniu wskutek przejścia przez różnicę potencjałów U =7,3 kV, każdy z otrzymanych jonów krąży po torze kołowym w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B = 0,5 T. Jaka będzie odległość  $\Delta x$  między punktami, w których jony uderzą w detektor?

**70** Elektron o energii kinetycznej 2,5 keV poruszający się zgodnie z kierunkiem osi *x* wpada do obszaru, w którym występuje jednorodne pole elektryczne o natężeniu 10 kV/m skierowane przeciwnie do kierunku osi *y*. Jak należy dobrać wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ , by elektron nadal poruszał się wzdłuż osi *x*, a wartość indukcji magnetycznej była moż-liwie najmniejsza?

**71** Fizyk S. A. Goudsmit opracował metodę wyznaczania mas ciężkich jonów przez pomiar okresu ruchu w polu magnetycznym o znanej wartości indukcji. Jednoujemny jon jodu wykonuje 7 obiegów w czasie 1,29 ms w polu o indukcji 45 mT. Oblicz masę jonu w atomowych jednostkach masy.

**72** Wiązka elektronów o energii kinetycznej  $E_k$  wychodzi z rury akceleratora przez "okienko" z cienkiej folii. W odległości d od okienka umieszczona jest metalowa płyta prostopadła do kierunku wiązki (rys. 28.53). a) Wykaż, że możemy zapobiec uderzeniu elektronów w płytę, jeżeli przyłożymy jednorodne pole magne-

tyczne o indukcji  $\vec{B}$  spełniające nierówność





gdzie *m* i *e* oznaczają masę i ładunek elektronu. b) Jaki powinien być kierunek wektora indukcji magnetycznej?

**Rys. 28.53.** Zadanie 72

**73** ssm W chwili t = 0 elektron o energii kinetycznej 12 keV znajduje się w punkcie x = 0 i porusza się zgodnie z kierunkiem osi x, przy czym jest to także kierunek poziomej składowej ziemskiego pola magnetycznego  $\vec{B}$ . Pionowa składowa tego pola skierowana jest w dół i ma wartość 55  $\mu$ T. a) Jaka jest wartość przyspieszenia elektronu spowodowanego działaniem siły magnetycznej? b) Ile wyniesie odległość elektronu od osi x, gdy składowa x jego położenia będzie równa x = 20 cm? **74** T Cząstka o ładunku 2 C porusza się w jednorodnym polu magnetycznym. W pewnej chwili prędkość tej cząstki jest równa  $(2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})$  m/s, a siła magnetyczna działająca na cząstkę wynosi  $(4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k})$  N. Wiedząc, że składowe *x* i *y* indukcji magnetycznej są równe, wyznacz  $\vec{B}$ .

**75** Proton, deuteron (q = +e, m = 2 u) i cząstka  $\alpha$  (q = +2e, m = 4 u) o tej samej energii kinetycznej dostają się w obszar jednorodnego pola magnetycznego, poruszając się prostopadle do wektora indukcji  $\vec{B}$ . Znajdź: a) stosunek promienia  $r_d$  toru deuteronu do promienia  $r_p$  toru protonu oraz b) stosunek promienia  $r_{\alpha}$  toru cząstki  $\alpha$  do  $r_p$ .

**76** Przedstawiony na rysunku 28.54 spektometr mas Bainbridge'a pozwala na rozdzielenie jonów o tej samej prędkości. Przeszedłszy przez szczeliny S<sub>1</sub> i S<sub>2</sub>, jony trafiają do rozdzielacza prędkości składającego się z pola elektrycznego wytworzonego przez naładowane płyty P i P' oraz pola magnetycznego, prostopadłego zarówno do pola elektrycznego, jak i do kierunku prędkości jonów. Te z jonów, których tory nie zostały odchylone w skrzyżowanych polach  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ , przechodzą do obszaru, w którym występuje drugie pole magnetyczne  $\vec{B}'$ , gdzie poruszają się po torach kołowych aż do trafie

nia na kliszę fotograficzną (lub do nowoczesnego detektora), gdzie są rejestrowane. Wykaż, że dla takich jonów zachodzi wzór |q|/m = E/(rBB'), gdzie r jest promieniem orbity kołowej.

77 ssm Przedstawiony na rysunku 28.55 elektron porusza się z prędkością v =100 m/s wzdłuż osi x w jednorodnych polach elektrycznym i magnetycznym. Pole magnetyczne ma wartość 5 T, jest prostopadłe do płaszczyzny rysunku i skierowane od ciebie. Znajdź wektor natężenia pola elektrycznego.





**78** a) Dla układu przedstawionego na rysunku 28.8 wykaż, że stosunek wartości natężenia pola elektrycznego Halla E do wartości natężenia pola elektrycznego  $E_C$ , powodującego ruch ładunku (przepływ prądu) wzdłuż paska, wynosi

$$\frac{E}{E_C} = \frac{B}{ne\rho},$$

gdzie  $\rho$  jest oporem właściwym materiału, a *n* — koncentracją nośników ładunku. b) Oblicz ten stosunek dla danych z zadania 13. (Patrz tabela 26.1).

**79** ssm Proton, deuteron (q = +e, m = 2u) oraz cząstka  $\alpha$  (q = +2e, m = 4u) są przyspieszane przez tę samą różnicę potencjałów, a następnie wlatują w ten sam obszar, w którym

znajduje się jednorodne pole magnetyczne, poruszając się prostopadle do wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ . Znajdź: a) stosunek energii kinetycznej protonu  $E_{k,p}$  do energii kinetycznej cząstki  $\alpha E_{k,\alpha}$  oraz b) stosunek energii kinetycznej deuteronu  $E_{k,d}$  do energii kinetycznej cząstki  $\alpha E_{k,\alpha}$ . Wiedząc, że promień toru protonu jest równy 10 cm, wyznacz promień toru c) deuteronu oraz d) cząstki  $\alpha$ .

**80** Elektron porusza się z prędkością  $7,2 \cdot 10^6$  m/s w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 83 mT. Ile wynosi a) największa oraz b) najmniejsza wartość siły magnetycznej działającej na elektron? c) W pewnej chwili elektron porusza się z przyspieszeniem  $4,9 \cdot 10^{14}$  m/s<sup>2</sup>. Oblicz kąt, jaki tworzą wówczas kierunki wektora prędkości i wektora indukcji magnetycznej.

**81** Cząstka o ładunku  $5 \mu C$  porusza się w obszarze, w którym występuje jednorodne pole magnetyczne o indukcji  $-20\hat{i}$  mT oraz jednorodne pole elektryczne o natężeniu  $300\hat{j}$  V/m. W pewnej chwili prędkość cząstki jest równa  $(17\hat{i} - 11\hat{j} + 7\hat{k})$  km/s. Ile wynosi wówczas wektor całkowitej siły elektromagnetycznej (będącej sumą siły elektrycznej i siły magnetycznej) działającej na tę cząstkę?

82 Prąd o natężeniu 3 A płynący wzdłuż płytki przewodzącej o długości 4 cm, szerokości 1 cm i grubości 10  $\mu$ m daje napięcie Halla (mierzone dla punktów brzegu płytki wyznaczających kierunek poprzeczny do kierunku przepływu prądu) o wartości 10  $\mu$ V, gdy przyłożone jest pole magnetyczne o indukcji 1,5 T w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płytki. Wyznacz: a) prędkość unoszenia ładunków oraz b) ich koncentrację. c) Naszkicuj schemat opisanego układu i określ, na którym brzegu płytki potencjał elektrostatyczny ma większą wartość, zakładając, że nośnikami ładunku są elektrony.

**83** ssm Cząstka o masie 4 g porusza się z prędkością 4 km/s w płaszczyźnie xy w obszarze, gdzie występuje jednorodne pole magnetyczne o indukcji 5 î mT. W pewnej chwili, gdy wektor prędkości cząstki ma kierunek, który można otrzymać, obracając kierunek osi x o kąt 37° w stronę przeciwną do kierunku ruchu wskazówek zegara, siła magnetyczna działająca na tę cząstkę jest równa 0,48 k N. Ile wynosi ładunek cząstki?

84 Przez prostoliniowy przewodnik leżący wzdłuż osi x i łączący punkty o współrzędnych x = 0 oraz x = 1 m płynie zgodnie z kierunkiem osi x prąd o natężeniu 3 A. Przewodnik ten znajduje się w niejednorodnym polu magnetycznym, którego indukcja wynosi  $\vec{B} = (4 \text{ T/m}^2) x^2 \hat{i} - (0,6 \text{ T/m}^2) x^2 \hat{j}$ . Wyraź za pomocą wektorów jednostkowych wektor siły magnetycznej działającej na ten przewodnik.

**85** W pewnej chwili prędkość protonu poruszającego się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k})$  mT jest równa  $\vec{v} = (-2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k})$  m/s. Wyznacz: a) wektor siły magnetycznej  $\vec{F}$  działającej na proton, b) kąt między wektorami  $\vec{v}$  i  $\vec{F}$  oraz c) kąt między wektorami  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$ . **86** Elektron wlatujący do obszaru wypełnionego jednorodnym polem magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = 60 \text{ î} \ \mu\text{T}$  ma prędkość  $\vec{v} = (32 \text{ î} + 40 \text{ ĵ}) \text{ m/s}$ . Oblicz: a) promień linii śrubowej będącej torem ruchu tego elektronu oraz b) jej skok. Czy dla obserwatora spoglądającego z punktu wejścia elektronu w obszar pola magnetycznego kierunek obiegu elektronu jest zgodny czy przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara?

87 Na rysunku 28.56 przedstawiony jest generator homopolarny, wyposażony w przewodzace koło poruszane silnikiem (niepokazanym na rysunku) i połączone szczotkami z resztą obwodu. Taki generator może wytwarzać znacznie większą siłę elektromotoryczną w porównaniu z generatorami wyposażonymi w obracająca się petle z drutu, ponieważ może osiągać znacznie większe prędkości obrotowe. Koło ma promień R = 0.25 m i obraca się z częstotliwością f = 4000 Hz, a cały układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B = 60 mT prostopadłym do płaszczyzny koła. Gdy koło się obraca, elektrony płyną poprzez pole magnetyczne wzdłuż zaznaczonej na rysunku linii przerywanej. a) Czy dla przedstawionego na rysunku kierunku obrotu koła siła magnetyczna działająca na elektrony jest skierowana w górę czy w dół? b) Czy wartość tej siły jest większa bliżej środka czy brzegu koła? c) Ile wynosi praca tej siły dla przemieszczenia jednostkowego ładunku wzdłuż przedstawionego na rysunku radialnego odcinka łaczącego środek koła z jego brzegiem? d) Jaka zatem siła elektromotoryczna jest wytwarzana w przedstawionym układzie? e) Jaka moc jest wytwarzana w tym układzie, jeśli natężenie prądu elektrycznego w obwodzie wynosi 50 A?



**88** Na rysunku 28.57 przedstawiono przewodzący drut o masie m = 10 g i długości L = 20 cm, którego końce zanurzone są w naczyniach z rtęcią (która dobrze przewodzi prąd). Drut znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B = 0,1 T. W wyniku bardzo szybkiego zamknięcia, a następnie otwarcia obwodu wyłącznikiem (niepokazanym na rysunku) przez obwód popłynął krótkotrwały impuls prądu, co spowodowało podskoczenie drutu. Wyznacz ładunek, który przepłynął w obwodzie, wiedząc, że wysokość podskoku była równa h = 3 m. Przy wykonywaniu obliczeń załóż, że czas trwania tego impulsu był znacznie mniejszy od czasu pod-





skoku, oraz zastosuj definicję impulsu opisaną wzorem (9.30), pęd impulsu dany wzorem (9.31) oraz związek między ładunkiem i natężeniem prądu dany wzorem (26.2).

×	×	×	×	×	×
 $\mathbf{x} \uparrow_{d}$	×	×	×	×	×
$\times \downarrow^{a}$	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×
Rvs	28.5	8 <b>7</b> a	danie	89	

**89** Na rysunku 28.58 przedstawiono elektron o masie *m*, jący między dwie odległe o d poziome płyty o różnicy potencjałów U. Początkowo prędkość elektronu była skierowana pionowo w górę. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Oblicz minimalną wartość indukcji magnetycznej B, dla której elektron nie uderzy w górną płytę.

ładunku -e i niewielkiej (zaniedbywalnej) prędkości wlatu-

**90** Cząstka o ładunku *q* porusza się z prędkością *v* po okręgu o promieniu *r*. Traktując tor ruchu cząstki jako pętlę z prądem o odpowiednio uśrednionym natężeniu, wyznacz największy moment siły, jaki może działać na taką pętlę w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji *B*.

**91** Dla doświadczenia ilustrującego zjawisko Halla wyraź koncentrację nośników prądu w funkcji wartości natężenia pola elektrycznego *E*, wartości gęstości prądu *J* oraz wartości indukcji magnetycznej *B*.

**92** Elektron poruszający się w jednorodnym polu magnetycznym ma w pewnej chwili prędkość  $\vec{v} = (40 \text{ km/s})\hat{i} + (35 \text{ km/s})\hat{j}$  i działa na niego siła magnetyczna  $\vec{F} = -(4,2 \text{ f N})\hat{i} + (4,8 \text{ f N})\hat{j}$ . Wiedząc, że  $B_x = 0$ , wyznacz wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ .

# Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu

# **29.1.** POLE MAGNETYCZNE WYWOŁANE PRZEPŁYWEM PRĄDU

### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 29.01 zaznaczyć na rysunku element prądu w przewodniku i określić kierunek pola magnetycznego wytwarzanego przez ten element w dowolnym punkcie w otoczeniu przewodnika;
- **29.02** wyznaczyć dla dowolnego punktu w otoczeniu przewodnika oraz dla dowolnego elementu prądu wartość i kierunek indukcji magnetycznej wytwarzanej przez ten element;
- 29.03 określić wartość indukcji pola magnetycznego wytwarzanego przez element prądu płynącego w kierunku rozważanego punktu;
- **29.04** stosować dla punktu w otoczeniu długiego prostoliniowego przewodu, w którym płynie prąd, związek między wartością indukcji magnetycznej, natężeniem prądu i odległością między przewodem a rozważanym punktem;
- **29.05** stosować dla punktu w otoczeniu długiego prostoliniowego przewodu, w którym płynie prąd, regułę prawej dłoni w celu określenia kierunku indukcji magnetycznej;

#### Podstawowe fakty.

• Pole magnetyczne wytwarzane w otoczeniu przewodu, w którym płynie prąd, może być wyznaczone na podstawie prawa Biota–Savarta. Prawo to stwierdza, że przyczynek  $d\vec{B}$  do indukcji magnetycznej wytwarzany przez element prądu  $I d\vec{s}$  w punkcie P w odległości r od tego elementu jest równy

$$\mathrm{d}\vec{B} = rac{\mu_0}{4\pi} rac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathrm{r}}}{r^2}$$
 (prawo Biota–Savarta).

W powyższym wzorze  $\hat{\mathbf{r}}$  jest wektorem jednostkowym wyznaczającym kierunek od elementu prądu do punktu *P*. Wielkość  $\mu_0$  jest nazywana przenikalnością magnetyczną próżni, a jej wartość to

 $4\pi \cdot 10^{-7} \ T \cdot \ m/A \approx 1.26 \cdot 10^{-6} \ T \cdot \ m/A.$ 

- 29.06 stwierdzić, że wokół długiego, prostoliniowego przewodu, przez który płynie prąd, linie pola magnetycznego tworzą otaczające ten przewód okręgi;
- 29.07 stosować dla punktu w otoczeniu ograniczonego z jednej strony długiego prostoliniowego przewodu, w którym płynie prąd, związek między wartością indukcji magnetycznej, natężeniem prądu i odległością między przewodem a rozważanym punktem;
- 29.08 stosować dla wierzchołka łuku utworzonego przez przewód, w którym płynie prąd, związek między wartością indukcji magnetycznej, natężeniem prądu, promieniem łuku oraz kątem wyznaczonym przez ten łuk;
- **29.09** stosować dla krótkiego prostoliniowego przewodu, przez który płynie prąd, prawo Biota–Savarta w celu określenia pola magnetycznego wytwarzanego przez ten prąd.

• Dla długiego prostoliniowego przewodu, przez który płynie prąd, prawo Biota–Savarta pozwala wyznaczyć wartość indukcji magnetycznej w punkcie, którego odległość od przewodu jest równa *R*:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$
 (długi prostoliniow przewódy).

• Wartość indukcji magnetycznej w wierzchołku łuku o kącie środkowym  $\phi$  i promieniu R utworzonego przez przewód, przez który płynie prąd o natężeniu I, wynosi

 $B = rac{\mu_0 I \phi}{4\pi R}$  (w środku łuku okręgu).

## 0 fizyce

Jednym z podstawowych faktów doświadczalnych fizyki jest spostrzeżenie, że poruszająca się cząstka naładowana wytwarza wokół siebie pole magnetyczne. Podobnie prąd elektryczny, który składa się z poruszających się



element prądu wytwarza w punkcie P

**Rys. 29.1.** Element prądu  $I d\vec{s}$  wytwarza przyczynek  $d\vec{B}$  do pola magnetycznego w punkcie P. Zielony znak  $\times$  (przypominający ogon strzały) umieszczony w punkcie P wskazuje, że  $d\vec{B}$  jest skierowane prostopadle *za* płaszczyznę rysunku

rozkład pradu

cząstek naładowanych, także jest źródłem pola magnetycznego. Chociaż ta właściwość *elektromagnetyzmu*, czyli ogółu zjawisk związanych z elektrycznością i magnetyzmem, była zaskoczeniem dla swych odkrywców, jest dziś ona niezwykle istotna w codziennym życiu każdego człowieka, jako że stanowi podstawę działania niezliczonych urządzeń elektronicznych. Na przykład, to właśnie pole magnetyczne pozwala podnosić bardzo ciężkie ładunki, takie jak pociągi unoszące się nad torem na poduszce magnetycznej.

Rozdział ten rozpoczniemy od wyznaczenia pola magnetycznego pochodzącego od prądu elektrycznego płynącego przez bardzo krótki odcinek przewodnika, a następnie wyznaczymy całkowite pole magnetyczne wokół przewodnika dla kilku różnych jego kształtów.

# Obliczanie indukcji magnetycznej pola wywołanego przepływem prądu

Na rysunku 29.1 przedstawiono przewodnik dowolnego kształtu, w którym płynie prąd o nateżeniu I. Chcemy wyznaczyć wektor  $\vec{B}$  w punkcie P położonym w niewielkiej odległości od przewodnika. Najpierw dzielimy w myśli przewodnik na elementy ds, a następnie definiujemy wektorowy element ds, który ma długość ds, a jego kierunek jest zgodny z kierunkiem przepływu prądu w elemencie ds. Możemy następnie zdefiniować element prądu jako Idš. Naszym celem będzie wyznaczenie indukcji d $\vec{B}$ pola wytworzonego w punkcie P przez odpowiedni element prądu. Wiemy z doświadczenia, że wektory  $\vec{B}$  — podobnie jak wektory natężeń pól elektrycznych — dodają się. Zatem możemy obliczyć wypadkowy wektor  $\vec{B}$ w punkcie P, sumując za pomocą całkowania przyczynki d $\vec{B}$  od wszystkich elementów prądu. Jednakże to sumowanie jest bardziej skomplikowane i wymaga większego wysiłku niż w przypadku pól elektrycznych. Wytwarzający pole elektryczne element ładunku dq jest wielkością skalarną, natomiast wytwarzający pole magnetyczne element prądu  $I d\vec{s}$  jest iloczynem skalara i wektora.

*Wartość pola magnetycznego.* Okazuje się, że wartość wektora d $\vec{B}$  pola wytworzonego w punkcie P przez element prądu  $I d\vec{s}$  jest równa

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \,\mathrm{d}s \sin\theta}{r^2},\tag{29.1}$$

gdzie  $\theta$  jest kątem między kierunkami wektorów d $\vec{s}$  i  $\hat{r}$ , a wektor  $\vec{r}$  jest skierowany od ds do punktu P. Symbol  $\mu_0$  jest stałą zwaną *przenikalnością* magnetyczną próżni (stałą magnetyczną), której wartość jest równa

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \,\mathrm{T} \cdot \,\mathrm{m/A} \approx 1.26 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{T} \cdot \,\mathrm{m/A}. \tag{29.2}$$

*Kierunek pola magnetycznego.* Kierunek wektora d $\vec{B}$  prostopadły do płaszczyzny rysunku 29.1 jest kierunkiem iloczynu wektorowego d $\vec{s} \times \hat{r}$ . Możemy więc zapisać równanie (29.1) w postaci wektorowej jako

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (\text{prawo Biota-Savarta}). \tag{29.3}$$

To równanie wektorowe i jego skalarna postać (29.1) znane są jako **prawo Biota–Savarta**. To prawo, które zostało wykryte doświadczalnie, opisuje

#### 29.1. POLE MAGNETYCZNE WYWOŁANE PRZEPŁYWEM PRĄDU 295

odwrotną proporcjonalność indukcji magnetycznej i kwadratu odległości. Zastosujemy to prawo do obliczenia wypadkowej indukcji  $\vec{B}$  pola wytworzonego w punkcie *P* przez prądy o różnych rozkładach.

Analiza jednego szczególnego rozkładu jest bardzo prosta. Jeżeli rozważany prąd elektryczny płynie w stronę punktu P, w którym wyznaczamy pole, albo też w kierunku odwrotnym, łatwo przekonać się, że z równania (29.1) wynika, iż pole magnetyczne w punkcie P pochodzące od tego prądu jest równe zeru (kąt  $\theta$  jest równy 0° dla prądu płynącego w stronę punktu Poraz 180° dla prądu płynącego w kierunku odwrotnym).

# Pole magnetyczne wytworzone przez prąd płynący w długim prostoliniowym przewodzie

Wkrótce wykażemy, stosując prawo Biota–Savarta, że wartość indukcji magnetycznej pola w odległości R od długiego prostoliniowego przewodu, przez który płynie prąd o natężeniu I, jest dana wzorem



w dowolnym punkcie wektor pola magnetycznego jest styczny do odpowiedniego okręgu



**Rys. 29.2.** Linie pola magnetycznego wytworzonego przez prąd płynący w długim prostoliniowym przewodzie tworzą współśrodkowe okręgi wokół przewodu. W tym przypadku prąd płynie za płaszczyznę rysunku, jak pokazuje znak ×

**Rys. 29.3.** Opiłki żelaza, rozrzucone na kartonie układają się wzdłuż współśrodkowych okręgów, gdy w przewodzie płynie prąd. To ich ułożenie wzdłuż linii pola magnetycznego jest wynikiem działania pola magnetycznego wytworzonego przez prąd płynący w przewodzie (dzięki uprzejmości Education Development Center)

Wartość wektora indukcji *B* w równaniu (29.4) zależy tylko od natężenia prądu i odległości *R* danego punktu od przewodu. Wyprowadzając ten wzór, wykażemy, że linie pola  $\vec{B}$  tworzą współśrodkowe okręgi wokół przewodu. Pokazano to na rysunku 29.2, a także za pomocą opiłków żelaza na rysunku 29.3. Odległość między liniami na rysunku 29.2 rośnie wraz ze wzrostem odległości od przewodu. Odpowiada to zmniejszaniu się wartości indukcji  $\vec{B}$  zgodnie z zależnością 1/R przewidzianą w równaniu (29.4). Długości dwóch wektorów  $\vec{B}$  na tym rysunku również wykazują malejącą zależność od *R*.

*Kierunek pola magnetycznego.* Podstawienie wartości liczbowych do wzoru (29.4) jest bardzo łatwe. Trudniejsze bywa określenie kierunku wektora  $\vec{B}$  w danym punkcie. Linie pola mają kształt okręgów otaczających długi prostoliniowy przewód, a wektor pola musi być styczny do takiego okręgu. Oznacza to, że wektor ten musi być prostopadły do radialnego odcinka łączącego przewód z rozważanym punktem. Jak przedstawiono to na rysunku 29.4, możliwe są jednak dwa wybory strony, w którą może być skierowany wektor pola. Jeden z nich jest poprawny dla prądu płynącego



**Rys. 29.4.** Wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  jest prostopadły do odcinka *r* łączącego długi przewód prostoliniowy, przez który płynie prąd, z rozważanym punktem. Jak jednak stwierdzić, która z dwóch możliwości wyboru tego wektora jest właściwa? za płaszczyznę rysunku, a drugi dla prądu płynącego przed tę płaszczyznę. Oto prosta reguła prawej dłoni, która pozwala na szybkie określenie, która z tych dwóch możliwości jest poprawna.

*Reguła prawej dłoni*: Uchwyć element prawą ręką, tak aby twój kciuk wskazywał kierunek prądu. Twoje palce będą wtedy wskazywać kierunek linii pola magnetycznego, wytworzonego przez ten element.



Wynik zastosowania reguły prawej dłoni do prądu płynącego w prostoliniowym przewodzie (rys. 29.2) pokazano na rysunku 29.5a. Aby wyznaczyć kierunek wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  pola wytworzonego przez ten prąd w dowolnym punkcie, uchwyć (w myśli) przewód prawą ręką, tak aby twój kciuk wskazywał kierunek prądu. Niech czubki twoich palców przechodzą przez wybrany punkt; kierunek, który pokazują, jest wtedy zgodny z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej w tym punkcie. Jak widać na rysunku 29.2, wektor indukcji  $\vec{B}$  w dowolnym punkcie jest *styczny do linii pola magnetycznego*; z rysunku 29.5 wynika, że wektor indukcji pola jest *prostopadły do odcinka, zaznaczonego linią przerywaną, łączącego wybrany punkt i przewód z prądem*.

#### Wyprowadzenie wzoru (29.4)

Na rysunku 29.6 zilustrowano zadanie, które mamy wykonać: szukamy wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w punkcie P, w odległości R od przewodu. Rysunek 29.6 jest w istocie bardzo podobny do rysunku 29.1, z wyjątkiem tego, że teraz przewód jest prosty i nieskończenie długi. Wartość przyczynku do indukcji magnetycznej pola wytworzonego w punkcie P przez element prądu  $Id\vec{s}$ , który znajduje się w odległości r od punktu P, jest dana równaniem (29.1)

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\mathrm{d}s\,\sin\theta}{r^2}$$

Wektor d $\vec{B}$  na rysunku 29.6 jest skierowany tak, jak wektor d $\vec{s} \times \hat{r}$  — a mianowicie prostopadle za płaszczyznę rysunku.

Zauważ, że d $\vec{B}$  w punkcie P ma taki sam kierunek dla wszystkich elementów prądu, na które można podzielić przewód. Tak więc wartość indukcji magnetycznej pola wytworzonego w punkcie P przez elementy prądu w górnej połowie nieskończenie długiego przewodu można obliczyć przez całkowanie dB w równaniu (29.1) dla s zmieniającego się od zera do nieskończoności.

Rys. 29.5. Reguła prawej dłoni wskazuje kierunek linii pola magnetycznego wytworzonego przez prąd w przewodzie. a) Przypadek przedstawiony na rysunku 29.2 widziany z boku. Wektor  $\vec{B}$ w dowolnym punkcie po lewej stronie przewodu jest prostopadły do odcinka zaznaczonego linią przerywaną i skierowany za płaszczyznę rysunku w kierunku czubków palców, jak pokazuje znak  $\times$ . b) Jeżeli zmienimy kierunek pradu na przeciwny, to wektor  $\vec{B}$  w dowolnym punkcie po lewej stronie przewodu będzie nadal prostopadły do odcinka zaznaczonego linia przerywaną, ale teraz będzie skierowany przed płaszczyznę rysunku, jak pokazuje kropka





Rozważmy teraz element prądu w dolnej połowie przewodu położony w takiej odległości w dół od punktu *P*, w jakiej ds znajduje się powyżej punktu *P*. Ze wzoru (29.3) wynika, że wektor indukcji magnetycznej pola wytworzonego w punkcie *P* przez ten element ma taką samą wartość i kierunek, jak wektor indukcji pola pochodzącego od elementu *I* ds na rysunku 29.6. Zatem indukcja pola wytworzona przez dolną połowę przewodu jest dokładnie taka sama, jak indukcja pola wytworzonego przez górną połowę. Aby znaleźć wartość indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  całkowitego pola w punkcie *P*, wystarczy więc pomnożyć wynik naszego całkowania przez 2. Stąd otrzymujemy

$$B = \int_{s=0}^{s=\infty} dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \theta ds}{r^2}.$$
 (29.5)

Zmienne  $\theta$ , *s* i *r* w tym równaniu nie są niezależne. Jak wynika z rysunku 29.6, związane są one zależnościami:

$$r = \sqrt{s^2 + R^2}$$

oraz

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}$$

Po wykorzystaniu tych związków i zastosowaniu całki 19 z dodatku E z równania (29.5) otrzymujemy szukaną zależność

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left[ \frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$
(29.6)

Zauważ, że indukcja magnetyczna w punkcie *P* pola pochodzącego albo od dolnej, albo od górnej połowy nieskończonego przewodu na rysunku 29.6 jest równa połowie tego wyrażenia, tzn.

.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \qquad \text{(prostoliniowy przewód ograniczony z jednej strony).}$$
(29.7)

# Pole magnetyczne wytworzone przez prąd płynący w przewodzie o kształcie łuku okręgu

Aby wyznaczyć indukcję magnetyczną pola wytworzonego w pewnym punkcie przez prąd płynący w zagiętym przewodzie, moglibyśmy znów zastosować równanie (29.1) i zapisać wartość indukcji pola pochodzącego od pojedynczego elementu prądu. Następnie moglibyśmy obliczyć całkę i wyznaczyć wypadkową indukcję pola wytworzonego przez wszystkie elementy prądu. W zależności od kształtu przewodu takie całkowanie może być trudne. Jest ono jednak całkiem proste, gdy przewód ma kształt łuku okręgu, a dany punkt znajduje się w środku tego okręgu.





**Rys. 29.7.** a) W przewodzie w kształcie łuku okręgu o środku *C* płynie prąd o natężeniu *I*. b) Kąt między kierunkami d $\vec{s}$  i  $\hat{r}$  jest równy 90° dla dowolnego elementu łuku. c) Wyznaczanie kierunku indukcji magnetycznej pola w punkcie *C* wytworzonego przez prąd w przewodzie. Wektor  $\vec{B}$  jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a jego kierunek pokazują czubki palców, co zaznaczono kolorową kropką w punkcie *C*  Na rysunku 29.7a przedstawiono przewód w kształcie łuku o kącie środkowym  $\phi$ , promieniu *R* i środku *C*. W przewodzie płynie prąd o natężeniu *I*. W punkcie *C* każdy element prądu *I*d*s* wytwarza pole magnetyczne o wartości indukcji danej równaniem (29.1). Ponadto, jak pokazano na rysunku 29.7b, bez względu na to, w którym miejscu przewodu znajduje się element prądu, kąt  $\theta$  między wektorami d*s* i  $\hat{r}$  jest równy 90°, a ponadto r = R. Zatem podstawiając *R* zamiast *r* oraz 90° zamiast  $\theta$ , otrzymujemy z równania (29.1)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids \sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ids}{R^2}.$$
 (29.8)

Taką wartość ma w punkcie C indukcja pola pochodzącego od elementu prądu.

*Kierunek pola magnetycznego.* Co można powiedzieć o kierunku przyczynku d $\vec{B}$  pochodzącego od danego elementu prądu? Z dotychczasowych rozważań wiemy, że ten wektor musi być prostopadły do odcinka łaczącego element prądu z punktem *C* i skierowany albo za płaszczyznę rysunku 29.7a, albo też przed nią. Aby stwierdzić, która z tych możliwości jest poprawna, użyjemy reguły prawej dłoni dla dowolnego elementu prądu, tak jak przedstawiono to na rysunku 29.7c. Gdy kciuk wskazuje kierunek prądu, a pozostałe palce znajdują się w pobliżu punktu *C*, widzimy, że wektor d $\vec{B}$  pochodzący od dowolnego elementu prądu jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a nie za nią.

*Wypadkowe pole magnetyczne.* Aby wyznaczyć całkowite pole magnetyczne w punkcie *C* pochodzące od wszystkich elementów prądu, musimy zsumować wszystkie przyczynki d $\vec{B}$ . Ponieważ jednak wszystkie one mają ten sam kierunek, nie musimy wykonywać rachunku na składowych wektorów. Wystarczy zsumować wartości dB tych wektorów dane równaniem (29.8). Ponieważ mamy do czynienia z nieskończoną liczbą nieskończenie małych przyczynków, sumowanie należy zastąpić całkowaniem. Wynik końcowy chcemy przedstawić w takiej postaci, aby od razu było widać, jak całkowite pole zależy od kąta łuku  $\phi$  (a nie od długości łuku). Dlatego we wzorze (29.8) zamienimy ds na d $\phi$ , korzystając z zależności d $s = R d\phi$ . Po scałkowaniu otrzymujemy

$$B = \frac{\mu_0 I \phi}{4\pi R} \qquad (\text{w środku łuku okręgu}). \tag{29.9}$$

*Uwaga!* Zwróć uwagę, że to równanie pozwala na wyznaczenie indukcji pola magnetycznego *tylko* w środku krzywizny łuku okręgu, wzdłuż którego płynie prąd. Gdy podstawiamy dane do równania, musimy pamiętać, aby wyrazić  $\phi$  w radianach, a nie w stopniach. Na przykład, aby znaleźć indukcję magnetyczną pola w środku pełnego okręgu, wzdłuż którego płynie prąd, powinniśmy za  $\phi$  podstawić  $2\pi$  radianów w równaniu (29.9). Otrzymamy wtedy

$$B = \frac{\mu_0 I(2\pi)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad \text{(w środku pełnego okręgu).} \tag{29.10}$$

#### Przykład 29.01. Pole magnetyczne w wierzchołku łuku

Przewód na rysunku 29.8a, w którym płynie prąd o natężeniu *I*, składa się z łuku okręgu o promieniu *R* i kącie środkowym  $\pi/2$  rad oraz z dwóch odcinków, których przedłużenia przecinają się w środku okręgu *C*. Ile wynosi indukcja magnetyczna  $\vec{B}$  pola wytworzonego w punkcie *C* przez prąd w przewodzie?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Możemy wyznaczyć indukcję magnetyczną  $\vec{B}$  w punkcie *C*, stosując prawo Biota–Savarta (wzór (29.3)) do każdego elementu prądu. Zastosowanie wzoru (29.3) można uprościć, obliczając  $\vec{B}$  oddzielnie dla trzech różnych części przewodu, czyli dla: 1) odcinka po lewej stronie, 2) odcinka po prawej stronie, 3) łuku okręgu.

**Odcinki:** Dla dowolnego elementu prądu w odcinku (1) kąt  $\theta$  między d $\vec{s}$  i  $\hat{r}$  jest równy zeru (rys. 29.8b), tak więc ze wzoru (29.1) wynika

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \sin \theta}{r^2} = 0.$$

Wobec tego prąd płynący przez cały odcinek (1) przewodu nie wytwarza pola magnetycznego w punkcie C, czyli

$$B_1 = 0.$$

Takie samo rozumowanie można przeprowadzić w przypadku odcinka prostego (2), gdzie kąt  $\theta$  między d $\vec{s}$  i  $\hat{r}$ dla dowolnego elementu prądu jest równy 180°. Zatem

$$B_2 = 0$$

*Łuk okręgu:* Zastosowanie prawa Biota–Savarta do wyznaczenia indukcji magnetycznej pola w środku łuku okręgu prowadzi do równania (29.9) ( $B = \mu_0 I \phi / 4\pi R$ ).

**Rys. 29.8.** a) Przewód składa się z dwóch odcinków prostych (1 i 2) oraz łuku okręgu (3). W przewodzie płynie prąd o natężeniu *I*. b) Dla elementu prądu w odcinku (1) kąt między d $\vec{s}$  i  $\hat{r}$ jest równy zeru. c) Wyznaczenie kierunku indukcji magnetycznej  $\vec{B}_3$  pola wytworzonego w punkcie *C* przez prąd płynący wzdłuż łuku okręgu; pole jest skierowane w tym przypadku za płaszczyznę rysunku

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

3

C

a)

R

W naszym przykładzie kąt środkowy  $\phi$  łuku jest równy  $\pi/2$  radianów, tak więc z równania (29.9) wynika, że wartość indukcji magnetycznej  $\vec{B}_3$  pola w środku *C* łuku jest równa

$$B_3 = \frac{\mu_0 I(\pi/2)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

Aby wyznaczyć kierunek  $\vec{B}_3$ , stosujemy regułę prawej dłoni, przedstawioną na rysunku 29.5. Uchwyć w myśli łuk okręgu prawą ręką, tak jak na rysunku 29.8c, aby twój kciuk wskazywał kierunek prądu. Kierunek, w którym twoje palce obejmują przewód, wskazuje kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wokół przewodu. Linie pola pochodzącego od elementu prądu, do którego przyłożona jest twoja dłoń, tworzą otaczające przewód okręgi, które wychodzą przed płaszczyznę rysunku nad łukiem i wchodzą za nią pod łukiem. W otoczeniu punktu *C* (wewnątrz łuku okręgu) czubki twoich palców wskazują kierunek *za płaszczyznę* rysunku. Zatem  $\vec{B}_3$  jest skierowane za tę płaszczyznę.

**Pole wypadkowe:** W ogólnym przypadku, gdy mamy wyznaczyć wypadkowy wektor indukcji magnetycznej pola będącego sumą dwóch (lub większej liczby) pól magnetycznych, musimy dodać wektory indukcji. Jednak w tym przykładzie tylko przewód w kształcie łuku wytwarza pole magnetyczne w punkcie C. Możemy więc zapisać wypadkową wartość indukcji  $\vec{B}$  jako

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 0 + 0 + \frac{\mu_0 I}{8R} = \frac{\mu_0 I}{8R}$$
 (odpowiedź).

Kierunek wektora  $\vec{B}$  jest zgodny z kierunkiem wektora  $\vec{B}_3$  — jest to kierunek za płaszczyznę rysunku 29.8.



b)



# Przykład 29.02. Pole magnetyczne między dwoma długimi, prostoliniowymi przewodami, przez które płynie prąd

Na rysunku 29.9a przedstawiono dwa długie równoległe przewody, w których płyną w przeciwnych kierunkach prądy o natężeniach  $I_1$  i  $I_2$ . Jaka jest wartość i kierunek indukcji  $\vec{B}$  wypadkowego pola magnetycznego w punkcie P? Przyjmij następujące wartości:  $I_1 = 15$  A,  $I_2 = 32$  A, d = 5,3 cm.



**Rys. 29.9.** a) W dwóch przewodach płyną w przeciwnych kierunkach prądy o natężeniach  $I_1$  i  $I_2$  (przed i za płaszczyznę rysunku). Zwróć uwagę na kąt prosty w punkcie *P*. b) Suma wektorowa obliczonych oddzielnie wektorów indukcji  $\vec{B}_1$  i  $\vec{B}_2$  daje w wyniku wypadkowy wektor indukcji  $\vec{B}$ 

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Wypadkowy wektor indukcji magnetycznej B pola w punkcie P jest wektorową sumą wektorów indukcji pól magnetycznych pochodzących od prądów w obydwu przewodach. 2) Indukcję magnetyczną pola wytworzonego przez dowolny prąd można obliczyć, stosując prawo Biota–Savarta. Z tego prawa dla punktów w otoczeniu długiego przewodu prostoliniowego, w którym płynie prad, otrzymaliśmy równanie (29.4).

**Wyznaczenie wektorów:** Na rysunku 29.9a punkt *P* znajduje się w odległości *R* zarówno od przewodu z prądem o natężeniu  $I_1$ , jak i od przewodu z prądem o natężeniu  $I_2$ . Zgodnie ze wzorem (29.4) te prądy wytwarzają w punkcie *P* pola magnetyczne  $\vec{B}_1$  i  $\vec{B}_2$  o wartościach indukcji:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$
 oraz  $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}$ 

Zauważ, że na rysunku 39.9a obydwa kąty przy podstawie (między bokami R i d) trójkąta prostokątnego są równe 45°. Możemy więc napisać cos 45° = R/d i zastąpić R iloczynem  $d \cos 45^\circ$ . Zatem wartości indukcji  $B_1$  i  $B_2$  można zapisać jako

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d \cos 45^\circ}$$
 oraz  $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d \cos 45^\circ}$ .

Chcemy obliczyć sumę wektorów  $\vec{B}_1$  i  $\vec{B}_2$ , która jest wypadkowym wektorem indukcji B w punkcie P. Aby określić kierunki wektorów  $\vec{B}_1$  i  $\vec{B}_2$ , stosujemy regułę prawej dłoni (rys. 29.5) do każdego przewodu na rysunku 29.9a. Dla przewodu 1, z pradem płynacym przed płaszczyzne rysunku, obejmujemy w myśli przewód prawą ręką z kciukiem skierowanym zgodnie z kierunkiem pradu. Zagiete palce wskazuja wtedy, że linie pola biegną w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. W szczególności w pobliżu punktu P linie te są skierowane w górę i w lewo. Przypomnij sobie, że linie pola magnetycznego w dowolnym punkcie w otoczeniu długiego przewodu prostoliniowego z prądem muszą być skierowane prostopadle do prostej łączącej ten punkt i przewód. Zatem wektor  $B_1$  musi być skierowany do góry i w lewo, jak pokazano na rysunku 29.9b. (Zwróć uwagę na zaznaczony kąt prosty między wektorem  $\vec{B}_1$  a prostą łączącą punkt *P* i przewód 1).

Powtarzając to rozumowanie dla przewodu 2, dochodzimy do wniosku, że wektor  $\vec{B}_2$  jest skierowany do góry i w prawo, jak pokazano na rysunku 29.9b. (Zwróć uwagę na zaznaczony kąt prosty między wektorem  $\vec{B}_2$ a prostą łączącą punkt *P* i przewód 2).

**Dodawanie wektorów:** Możemy teraz dodać wektorowo  $\vec{B}_1$  i  $\vec{B}_2$ , aby wyznaczyć w ten sposób wypadkowy wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  pola w punkcie *P*. Można to zrobić, rozkładając wektory na składowe i następnie wyznaczając  $\vec{B}$  z jego składowych. Istnieje też inny sposób przedstawiony na rysunku 29.9b. Ponieważ wektory  $\vec{B}_1$  i  $\vec{B}_2$  są wzajemnie prostopadłe, są one przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokatną jest wektor  $\vec{B}$ . Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{2\pi d \cos 45^\circ} \sqrt{I_1^2 + I_2^2}$$
$$= \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})\sqrt{(15 \text{ A})^2 + (32 \text{ A})^2}}{(2\pi)(5,3 \cdot 10^{-2} \text{ m})(\cos 45^\circ)}$$
$$= 1,89 \cdot 10^{-4} \text{ T} \approx 190 \,\mu\text{T} \qquad (\text{odpowied}\hat{z}).$$
Kąt  $\phi$  między kierunkami wektorów  $\vec{B}_1$  i  $\vec{B}_2$  na rysunku 29.9b wynika z zależności

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{B_1}{B_2},$$

co dla  $B_1$  i  $B_2$  obliczonych wyżej daje

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **29.2.** siły działające między dwoma równoległymi przewodami z pradem

## Czego się nauczysz? \_\_\_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

29.10 znaleźć dla dwóch równoległych przewodów z prądem o zgodnych lub przeciwnych kierunkach przepływu pole magnetyczne wytwarzane przez jeden z tych przewodów w miejscu, gdzie znajduje się drugi przewód, oraz siłę działającą na drugi przewód; 29.11 stwierdzić, że równoległe przewody z prądem przyciągają się, jeśli kierunki przepływu prądu są zgodne, a odpychają się, jeśli kierunki te są przeciwne;

 $\phi = \operatorname{arctg} \frac{I_1}{I_2} = \operatorname{arctg} \frac{15 \text{ A}}{32 \text{ A}} \approx 25^\circ.$ 

Kat między kierunkiem wektora  $\vec{B}$  i osią x, pokazany

(odpowiedź).

na rysunku 29.9b, jest więc równy:

 $\phi + 45^{\circ} \approx 25^{\circ} + 45^{\circ} = 70^{\circ}$ 

29.12 opisać działanie działa szynowego.

#### Podstawowe fakty \_

• Równoległe przewody, w których prądy płyną w tych samym kierunku, przyciągają się, a równoległe przewody, w których prądy płyną w przeciwnych kierunkach — odpychają się. Siła działająca na odcinek takiego przewodu o długości *L* jest równa

 $F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a \ I_b}{2\pi d},$ 

gdzie d jest odległością między przewodami, a  $I_a$  i  $I_b$  są natężeniami prądów płynących w przewodach.

# Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem

Dwa długie równoległe przewody, w których płyną prądy, działają na siebie siłami. Na rysunku 29.10 przedstawiono dwa takie przewody odległe o d, w których płyną prądy o natężeniach  $I_a$  i  $I_b$ . Zbadajmy siły, którymi przewody te działają wzajemnie na siebie.

Najpierw szukamy siły działającej na przewód *b* (rys. 29.10), którą wywołał prąd płynący w przewodzie *a*. Ten prąd wytwarza pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}_a$  i właśnie to pole magnetyczne powoduje powstawanie poszukiwanej siły. Aby wyznaczyć siłę, musimy zatem znać wartość i kierunek wektora indukcji  $\vec{B}_a$  w miejscu, w którym znajduje się przewód b. Ze wzoru (29.4) wynika, że wartość  $\vec{B}_a$  w każdym punkcie przewodu *b* jest równa

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}.$$
 (29.11)

Z reguły prawej dłoni wynika, że wektor indukcji  $\vec{B}_a$  w miejscu, w którym znajduje się przewód *b*, jest skierowany w dół, jak pokazano na rysunku 29.10. Znamy już indukcję, możemy zatem teraz wyznaczyć siłę, jaką pole działa na przewód *b*. Zgodnie z równaniem (28.26) siła  $\vec{F}_{ba}$  wytworzona

pole magnetyczne wytwarzane przez przewód *a* w miejscu przewodu *b* powoduje występowanie siły działającej na przewód *b* 



w których płyną prądy w tym samym kierunku, wzajemnie się przyciągają.  $\vec{B}_a$ jest wektorem indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez prąd w przewodzie *a* w miejscu, w którym znajduje się przewód *b*.  $\vec{F}_{ba}$  jest siłą, która działa na przewód *b*, gdyż płynie w nim prąd, a przewód znajduje się w polu o indukcji  $\vec{B}_a$  przez zewnętrzne pole o indukcji  $\vec{B}_a$  i działająca na odcinek przewodu b o długości L jest równa

$$\vec{F}_{ba} = I_b \vec{L} \times \vec{B}_a, \tag{29.12}$$

gdzie  $\vec{L}$  jest wektorem długości przewodu. Na rysunku 29.10 wektory  $\vec{L}$  i  $\vec{B}_a$  są prostopadłe, zatem stosując wzór (29.11), możemy napisać

$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}.$$
 (29.13)

Kierunek wektora  $\vec{F}_{ba}$  jest zgodny z kierunkiem iloczynu wektorowego  $\vec{L} \times \vec{B}_a$ . Stosując regułę prawej dłoni dla iloczynu wektorowego do wektorów  $\vec{L}$  i  $\vec{B}_a$ , pokazanych na rysunku 29.10, widzimy, że wektor  $\vec{F}_{ba}$  jest skierowany w stronę przewodu *a*.

Ogólny sposób postępowania przy wyznaczaniu siły działającej na przewód z prądem może być przedstawiony następująco:

Aby znaleźć siłę działającą na przewód z prądem wywołaną przepływem prądu w drugim przewodzie, najpierw wyznacz pole pochodzące od prądu w drugim przewodzie w miejscu, w którym znajduje się pierwszy przewód. Następnie wyznacz siłę, jaką to pole działa na pierwszy przewód.

Moglibyśmy teraz zastosować tę procedurę do obliczenia siły działającej na przewód *a*, wywołanej przepływem prądu w przewodzie *b*. Okazałoby się, że siła działa w kierunku przewodu *b*; tak więc dwa przewody, w których prądy płyną równolegle, wzajemnie się przyciągają. Gdyby dwa prądy płynęły antyrównolegle (czyli w kierunkach przeciwnych), moglibyśmy podobnie wykazać, że obydwa przewody wzajemnie się odpychają. Zatem:

Przewody, w których płyną prądy równoległe, przyciągają się, a te, w których płyną prądy antyrównoległe, się odpychają.

Siła działająca między przewodami, w których płyną prądy równoległe, jest podstawą definicji ampera, który jest jedną z siedmiu podstawowych jednostek w układzie SI. Definicja przyjęta w 1946 roku jest następująca: 1 amper oznacza natężenie prądu stałego, który płynąc w dwóch równoległych prostoliniowych, nieskończenie długich przewodach o znikomo małym przekroju poprzecznym, umieszczonych w próżni w odległości 1 m, wywołuje między tymi przewodami siłę o wartości  $2 \cdot 10^{-7}$  N na każdy metr długości przewodu.

### **Działo szynowe**

Schemat działa szynowego jest przedstawiony na rysunku 29.11. Prąd o dużym natężeniu płynie przez jedną z dwóch równoległych, przewodzących szyn, następnie przez przewodzący bezpiecznik (np. cienki kawałek miedzi) i w końcu wraca do źródła przez drugą przewodzącą szynę. Pocisk, który mamy wystrzelić, znajduje się po zewnętrznej stronie bezpiecznika i może się swobodnie poruszać między szynami. Tuż po włączeniu prądu





bezpiecznik topi się i wyparowuje, wytwarzając w tym miejscu warstwę przewodzącego gazu.

Reguła prawej dłoni (rys. 29.5) pokazuje, że prądy w szynach na rysunku 29.11a wytwarzają pola magnetyczne o liniach skierowanych w dół w obszarze między szynami. Wypadkowe pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$  działa na warstwę gazu siłą  $\vec{F}$ , wynikającą z przepływu prądu *I* (rys. 29.11b). Zgodnie z równaniem (29.12) i regułą prawej dłoni dla iloczynu wektorowego dochodzimy do wniosku, że siła  $\vec{F}$  jest skierowana na zewnątrz, równolegle do szyn. Gaz, który przesuwa się wzdłuż szyn, popycha pocisk, mogąc nadać mu w ciągu 1 ms przyspieszenie nawet  $5 \cdot 10^6 g$ , a następnie wystrzelić go z prędkością 10 km/s. Być może pewnego dnia działa szynowe będą stosowane do wystrzeliwania w przestrzeń kosmiczną urobku kopalni działających na Księżycu bądź asteroidach.

# Sprawdzian 1

Na rysunku przedstawiono trzy długie równoległe prostoliniowe przewody umieszczone w ten sposób, że środkowy przewód jest jednakowo odległy od obu pozostałych. W przewodach płyną prądy o takich samych natężeniach,



skierowane bądź za płaszczyznę, bądź przed płaszczyznę rysunku. Uszereguj przewody pod względem wartości siły, jaka działa na nie wskutek przepływu prądu w pozostałych dwóch przewodach, zaczynając od największej wartości.

# 29.3. PRAWO AMPÈRE'A

# Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **29.13** zastosować prawo Ampère'a do pętli otaczającej przepływający prąd;
- 29.14 zastosować regułę prawej dłoni do określenia w prawie Ampère'a kierunku prądu przepływającego przez powierzchnię ograniczoną konturem całkowania;
- 29.15 określić wypadkowy prąd, jaki pownien być uwzględ-

## Podstawowe fakty

Prawo Ampère'a ma postać

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p$$
 (prawo Ampère'a).

niony w prawie Ampère'a, gdy pętla otacza więcej niż jeden przewód z prądem;

**29.16** zastosować prawo Ampère'a do przypadku długiego prostoliniowego przewodu z prądem w celu wyznaczenia pola magnetycznego wewnątrz oraz na zewnątrz przewodu z uwzględnieniem faktu, że w prawie Ampère'a istotny jest wyłącznie prąd przepływający przez wnętrze pętli.

Natężenie prądu *I*<sub>p</sub> po prawej stronie równania jest *wypadkowym* natężeniem prądu przepływającego przez powierzchnię ograniczoną konturem całkowania.

# Prawo Ampère'a

Możemy wyznaczyć wypadkowe pole elektryczne wytworzone przez *dowolny* układ ładunków, określając najpierw przyczynek d $\vec{E}$  pochodzący od elementu ładunku, a następnie sumując wszystkie takie przyczynki. Jeżeli układ ładunków jest skomplikowany, być może będziemy musieli skorzystać z komputera. Przypomnij sobie, że jeśli rozkład ładunku ma symetrię płaszczyznową, walcową lub sferyczną, to można zastosować prawo Gaussa i wyznaczyć wypadkowe pole elektryczne, wkładając w to znacznie mniej wysiłku.

Podobnie możemy wyznaczyć wypadkowe pole magnetyczne wytworzone przez *dowolny* układ prądów, określając najpierw przyczynek d $\vec{B}$ (29.3) pochodzący od elementu prądu, a następnie sumując wszystkie takie przyczynki. Znów być może będziemy musieli skorzystać z komputera w przypadku skomplikowanego układu prądów. Jeżeli jednak układ prądów ma pewną symetrię, będziemy mogli zastosować **prawo Ampère'a** i wyznaczyć wypadkowe pole magnetyczne, wkładając w to znacznie mniej wysiłku. To prawo, które można wyprowadzić z prawa Biota–Savarta, jest zwyczajowo przypisywane André Marie Ampère'owi (1775–1836), na którego cześć nazwano jednostkę natężenia prądu w układzie SI. Jednakże prawo to zostało w rzeczywistości sformułowane ściśle przez angielskiego fizyka Jamesa Clerka Maxwella. Prawo Ampère'a ma postać

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \qquad \text{(prawo Ampère'a)}. \tag{29.14}$$

Kółko w znaku całki oznacza, że iloczyn skalarny  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  ma być całkowany wzdłuż *zamkniętego* konturu. Natężenie prądu  $I_p$  po prawej stronie równania jest *wypadkowym* natężeniem prądu przepływającego przez powierzchnię ograniczoną konturem całkowania.

Aby dostrzec, jakie znaczenie ma iloczyn skalarny  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  i jego całka, zastosujmy najpierw prawo Ampère'a w przypadku ogólnym, przedstawionym na rysunku 29.12. Na rysunku pokazano przekrój poprzeczny trzech długich prostoliniowych przewodów, w których płyną prądy  $I_1$ ,  $I_2$  i  $I_3$ , skierowane albo za płaszczyznę, albo przed płaszczyznę rysunku. Pewien kontur zamknięty, leżący w płaszczyźnie rysunku, obejmuje dwa przewody, ale nie obejmuje trzeciego. Zaznaczony na konturze kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara wskazuje dowolnie wybrany kierunek całkowania w równaniu (29.14).

Aby zastosować prawo Ampère'a, dzielimy w myśli kontur na elementy wektorowe d $\vec{s}$ , które są w każdym punkcie skierowane wzdłuż stycznej do konturu w kierunku całkowania. Załóżmy, że w miejscu, w którym znajduje się element d $\vec{s}$  pokazany na rysunku 29.12, wypadkowy wektor indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez trzy prądy jest równy  $\vec{B}$ . Przewody są prostopadłe do płaszczyzny rysunku, więc wektor indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez każdy z prądów w miejscu zajmowanym przez element d $\vec{s}$  leży w płaszczyźnie rysunku 29.12. Zatem wypadkowy wektor indukcji  $\vec{B}$  w miejscu d $\vec{s}$  musi również leżeć w tej płaszczyźnie. Nie znamy jednak kierunku wektora  $\vec{B}$  na płaszczyźnie, dlatego na rysunku 29.12 narysowano wektor  $\vec{B}$  pod dowolnym kątem  $\theta$  do kierunku d $\vec{s}$ . Iloczyn skalarny  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  po lewej stronie równania (29.14) jest równy  $B \cos \theta ds$ . Tak więc prawo Ampère'a może być zapisane jako

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos\theta ds = \mu_0 I_{\rm p}.$$
(29.15)

Możemy przyjąć, że iloczyn skalarny  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  jest iloczynem elementu ds konturu i składowej indukcji pola  $B \cos \theta$ , stycznej do konturu. Natomiast całkowanie traktujemy jako sumowanie wszystkich takich iloczynów wo-kół całego konturu.



w prawie Ampère'a bierze się

**Rys. 29.12.** Prawo Ampère'a zastosowane do dowolnego konturu, który obejmuje dwa długie prostoliniowe przewody, ale nie obejmuje trzeciego przewodu. Zwróć uwagę na kierunki prądów

**Sprawa znaków.** Gdy potrafimy rzeczywiście wykonać takie całkowanie, nie musimy wcześniej znać kierunku wektora  $\vec{B}$ . Zamiast tego przyjmujemy dowolnie wektor  $\vec{B}$  w kierunku całkowania (tak jak na rysunku 29.12). Następnie stosujemy następującą regułę prawej dłoni, aby przypisać znak plus lub minus każdemu prądowi, który wchodzi w skład objętego konturem prądu całkowitego  $I_p$ :

Ułóż prawą rękę wzdłuż konturu, tak aby palce wskazywały kierunek całkowania. Jeżeli prąd przepływa przez kontur w kierunku wyciągniętego kciuka, to przypisujemy mu znak plus. Gdy prąd płynie w kierunku przeciwnym — przypisujemy mu znak minus.

W końcu obliczamy wartość wektora  $\vec{B}$  z równania (29.15). Jeżeli otrzymamy dodatnią wartość *B*, to znaczy, że przyjęty kierunek wektora  $\vec{B}$ jest poprawny. Jeżeli otrzymana wartość jest ujemna, to odrzucamy znak minus i oznaczamy  $\vec{B}$  na rysunku w kierunku przeciwnym.

*Wypadkowe natężenie prądu.* Na rysunku 29.13 reguła prawej dłoni dla prawa Ampère'a została zastosowana dla przypadku przedstawionego na rysunku 29.12. Dla wskazanego kierunku całkowania, przeciwnego do ruchu wskazówek zegara, wypadkowe natężenie prądu objętego konturem jest równe

$$I_{\rm p} = I_1 - I_2$$

(Prąd  $I_3$  nie jest objęty konturem). Możemy zatem napisać równanie (29.15) w postaci

$$\oint B\cos\theta \,\mathrm{d}s = \mu_0(I_1 - I_2). \tag{29.16}$$

Być może jesteś ciekaw, dlaczego natężenie prądu  $I_3$  nie występuje po prawej stronie równania (29.16), mimo że wartość indukcji *B* po lewej stronie zależy również od tego prądu. Odpowiedź wynika z faktu, że przyczynki do pola magnetycznego pochodzące od prądu  $I_3$  kompensują się, gdyż całkowanie w równaniu (29.16) jest wykonywane wokół całego konturu. W przeciwieństwie do tego, przyczynki do pola magnetycznego pochodzące od prądu objętego konturem się nie kompensują.

W ogólnym przypadku, przedstawionym na rysunku 29.12, nie potrafimy rozwiązać równania (29.16) względem wartości *B*, ponieważ nie mamy dostatecznej informacji, która pozwoliłaby uprościć i obliczyć całkę. Znamy jednak wynik całkowania: musi on być równy wartości wyrażenia  $\mu_0(I_1 - I_2)$ , które zależy od wypadkowego natężenia prądu przecinającego powierzchnię ograniczoną konturem.

Zastosujemy teraz prawo Ampère'a dla dwóch przypadków, w których symetria pozwala nam na uproszczenie i obliczenie całki, a więc na wyznaczenie indukcji magnetycznej.

# Pole magnetyczne na zewnątrz długiego prostoliniowego przewodu z prądem

Na rysunku 29.14 przedstawiono długi prostoliniowy przewód, w którym prąd o natężeniu I płynie przed płaszczyznę rysunku. Z równania (29.4) wynika, że indukcja magnetyczna  $\vec{B}$  wytworzonego przez ten prąd pola





**Rys. 29.13.** Reguła prawej dłoni dla prawa Ampère'a służąca do określenia znaków prądów objętych konturem. Sytuacja odpowiada przedstawionej na rysunku 29.12

całość prądu przecina powierzchnię ograniczoną konturem, a więc całość powinna być uwzględniona w prawie Ampère'a





ma taką samą wartość we wszystkich punktach znajdujących się w odległości r od środka przewodu; innymi słowy pole  $\vec{B}$  ma symetrię walcową względem osi przewodu. Możemy wykorzystać tę symetrię do uproszczenia całki występującej w prawie Ampère'a (równania (29.14) i (29.15)), jeżeli otoczymy przewód zamkniętym konturem w kształcie okręgu o promieniu r i środku leżącym na osi przewodu, jak pokazano na rysunku 29.14. Indukcja  $\vec{B}$  ma wtedy taką samą wartość B w każdym punkcie konturu. Będziemy obliczać całkę w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, więc d $\vec{s}$  ma kierunek pokazany na rysunku 29.14.

Wyrażenie  $B \cos \theta$  w równaniu (29.15) można dalej uprościć, jeśli zauważymy, że wektor  $\vec{B}$  jest styczny do konturu w każdym jego punkcie, podobnie jak d $\vec{s}$ . Zatem wektory  $\vec{B}$  i d $\vec{s}$  są albo równoległe, albo antyrównoległe w każdym punkcie konturu i przyjmujemy, mogąc dowolnie wybrać kierunek całkowania, tę pierwszą możliwość. Wobec tego w każdym punkcie konturu kąt  $\theta$  między wektorami d $\vec{s}$  i  $\vec{B}$  jest równy 0°, a cos  $\theta = \cos 0° = 1$ . Całka w równaniu (29.15) przybiera więc postać

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos \theta \, ds = B \oint ds = B(2\pi r).$$

Zauważ, że ostatnia całka w powyższym równaniu oznacza sumowanie wszystkich elementów liniowych ds po konturze w kształcie okręgu; otrzymujemy więc w wyniku długość okręgu  $2\pi r$ .

Z reguły prawej dłoni otrzymujemy znak plus dla prądu na rysunku 29.14. Wyrażenie po prawej stronie prawa Ampère'a przybiera postać  $+\mu_0 I$  i otrzymujemy wówczas

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_s$$

w prawie Ampère'a uwzględnia się jedynie prąd przepływający przez powierzchnię ograniczoną konturem całkowania



**Rys. 29.15.** Zastosowanie prawa Ampère'a do wyznaczenia indukcji magnetycznej pola, które powstaje w wyniku przepływu prądu o natężeniu *I* wewnątrz długiego prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym. Prąd jest równomiernie rozłożony w przekroju poprzecznym przewodu i płynie przed płaszczyznę rysunku. Kontur całkowania znajduje się wewnątrz przewodu

czyli

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \text{(na zewnątrz przewodu z prądem).} \tag{29.17}$$

Przy niewielkiej zmianie oznaczeń jest to równanie (29.4), które wyprowadziliśmy wcześniej z prawa Biota–Savarta, wkładając w to znacznie więcej wysiłku. Ponadto, ponieważ otrzymaliśmy dodatnią wartość B, wiemy, że kierunek wektora  $\vec{B}$ , pokazany na rysunku 29.14, został wybrany poprawnie.

# Pole magnetyczne wewnątrz długiego prostoliniowego przewodu z prądem

Na rysunku 29.15 przedstawiono przekrój poprzeczny długiego prostoliniowego przewodu o promieniu R. W przewodzie płynie równomiernie rozłożony prąd o natężeniu I skierowany przed płaszczyznę rysunku. Ze względu na równomierny rozkład prądu w przekroju poprzecznym przewodu, pole magnetyczne wytwarzane przez ten prąd musi mieć symetrię walcową. Tak więc, aby wyznaczyć indukcję magnetyczną pola wewnątrz przewodu, możemy znów wykorzystać kontur o promieniu r, przyjmując teraz r < R, tak jak pokazano na rysunku 29.15. Z symetrii wynika ponownie, że wektor  $\vec{B}$  jest styczny do konturu, tak więc lewa strona prawa Ampère'a przybiera postać

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r).$$
(29.18)

Ze względu na równomierny rozkład prądu natężenie prądu  $I_p$  objętego konturem jest proporcjonalne do pola powierzchni wewnątrz tego konturu, czyli

$$I_{\rm p} = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$
 (29.19)

Z reguły prawej dłoni wynika, że  $I_p$  ma znak dodatni. Wobec tego z prawa Ampère'a otrzymujemy

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$

czyli

$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\right) r \qquad \text{(wewnatrz przewodu z prądem).} \tag{29.20}$$

Zatem wartość indukcji magnetycznej *B* wewnątrz przewodu jest proporcjonalna do *r*. Wartość ta jest równa zeru w środku i osiąga maksimum dla r = R (na powierzchni przewodu). Zauważ, że z równań (29.17) i (29.20) otrzymujemy tę samą wartość *B* na powierzchni przewodu.

# Sprawdzian 2

Na rysunku przedstawiono trzy przewody, w których płyną prądy o takich samych natężeniach *I* i kierunkach zaznaczonych na rysunku, oraz cztery kontury zamknięte. Uszereguj kontury pod względem wartości całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  po każdym z nich, zaczynając od największej wartości.



# Przykład 29.03. Zastosowanie prawa Ampère'a do wyznaczenia pola magnetycznego wewnątrz walca z prądem

Na rysunku 29.16a przedstawiono przekrój poprzeczny długiego, przewodzącego walca o promieniu wewnętrznym a = 2 cm i promieniu zewnętrznym b = 4 cm. Przez walec płynie prąd skierowany przed płaszczyznę rysunku, a wartość gęstości prądu w przekroju poprzecznym jest dana wzorem  $J = cr^2$ , gdzie  $c = 3 \cdot 10^6$  A/m<sup>4</sup>, a r jest wyrażone w metrach. Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w punkcie oddalonym o 3 cm od osi walca?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Punkt, w którym chcemy wyznaczyć  $\vec{B}$ , znajduje się wewnątrz przewodzącego walca, między jego wewnętrzną i zewnętrzną powierzchnią boczną. Widzimy, że rozkład prądu ma symetrię walcową (dla danego pro-

mienia gęstość prądu w przekroju jest taka sama). Zatem symetria pozwala nam zastosować prawo Ampère'a do wyznaczenia wartości  $\vec{B}$  w danym punkcie. Najpierw wybieramy kontur całkowania pokazany na rysunku 29.16b. Kontur jest okręgiem o środku leżącym na osi walca i ma promień r = 3 cm, ponieważ naszym zadaniem jest wyznaczenie indukcji  $\vec{B}$  w tej właśnie odległości od osi walca.

2) Następnym krokiem jest obliczenie natężenia prądu  $I_p$  objętego konturem. Jednakże *nie możemy* założyć proporcjonalności, tak jak w równaniu (29.19), ponieważ teraz prąd nie jest rozłożony równomiernie. Zamiast tego musimy scałkować gęstość prądu od wewnętrznego promienia walca *a* do promienia konturu *r*; odpowiednie kroki tego rachunku przedstawione są na rysunkach 29.16c-h.





**Rys. 29.16.** a) i b) W celu wyznaczenia pola magnetycznego w punkcie znajdującym się wewnątrz walca z prądem wybieramy kontur całkowania w postaci okręgu przechodzącego przez ten punkt. c)–h) Ponieważ prąd nie jest rozłożony jednorodnie wewnątrz walca, obliczamy przyczynek do natężenia prądu pochodzący od cienkiego pierścienia, a następnie sumujemy — całkując — wszystkie takie przyczynki

Obliczenia: Wyznaczaną całkę zapisujemy jako

$$I_{p} = \int J dS = \int_{a}^{r} cr^{2}(2\pi r dr) = 2\pi c \int_{a}^{r} r^{3} dr$$
$$= 2\pi c \left[\frac{r^{4}}{4}\right]_{a}^{r} = \frac{\pi c(r^{4} - a^{4})}{2}.$$

Zauważ, że w kolejnych krokach powyższego rachunku przyjęliśmy, że element powierzchni d*S* jest polem bardzo cienkiego pierścienia przedstawionego na rysunkach 29.16d–f, a następnie pole to zapisaliśmy w postaci iloczynu obwodu pierścienia  $2\pi r$  oraz jego szerokości dr.

Kierunek całkowania zaznaczony na rysunku 29.16b został wybrany dowolnie jako zgodny z ruchem wskazówek zegara. Stosując do tego konturu regułę prawej dłoni dla prawa Ampère'a, dochodzimy do wniosku, że powinniśmy przyjąć ujemną wartość  $I_p$ , ponieważ prąd jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a kciuk wskazuje kierunek za płaszczyznę rysunku.

Następnie obliczamy lewą stronę prawa Ampère'a dokładnie tak samo, jak dla rysunku 29.15 i znów otrzymujemy wzór (29.18). Zatem z prawa Ampère'a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\rm p}$$

wynika, że

$$B(2\pi r) = -\frac{\mu_0 \pi c}{2} (r^4 - a^4).$$

Wyznaczając B i podstawiając dane, otrzymujemy

$$B = -\frac{\mu_0 c}{4r} (r^4 - a^4)$$
  
=  $-\frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(3 \cdot 10^6 \text{ A/m}^4)}{4(0,03 \text{ m})}$   
×  $[(0,03 \text{ m})^4 - (0,02 \text{ m})^4] = -2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ 

Tak więc indukcja magnetyczna  $\vec{B}$  pola w punkcie odległym od osi o 3 cm ma wartość

$$B = 2 \cdot 10^{-5} \,\mathrm{T} \qquad (\mathrm{odpowied}\hat{z}),$$

a linie pola magnetycznego są skierowane przeciwnie do naszego kierunku całkowania, a więc przeciwnie do ruchu wskazówek zegara na rysunku 29.16b.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **29.4.** SOLENOIDY I TOROIDY

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 29.17 opisać solenoid i toroid oraz naszkicować linie pola magnetycznego dla każdego z tych układów;
- 29.18 wyjaśnić, jak można zastosować prawo Ampère'a do wyznaczenia pola magnetycznego wewnątrz solenoidu;
- **29.19** zastosować związek między indukcją magnetyczną *B* wewnątrz solenoidu, prądem *I* płynącym przez solenoid oraz

#### Podstawowe fakty

• Wewnątrz długiego solenoidu, przez który płynie prąd o natężeniu *I*, indukcja magnetyczna w punktach oddalonych od końców solenoidu ma wartość

 $B = \mu_0 I n$  (solenoid idealny),

gdzie n jest liczbą zwojów na jednostkę długości.

liczbą zwojów solenoidu na jednostkę długości, oznaczaną przez n;

- **29.20** wyjaśnić, jak można zastosować prawo Ampère'a do wyznaczenia pola magnetycznego wewnątrz toroidu;
- **29.21** zastosować związek między indukcją magnetyczną *B* wewnątrz toroidu, natężeniem prądu *I* płynącego przez toroid, promieniem *r* oraz liczbą zwojów toroidu *N*.

• W punkcie wewnątrz toroidu o *N* zwojach indukcja magnetyczna ma wartość

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{1}{r} \qquad \text{(toroid)},$$

gdzie r jest odległością punktu od środka toroidu.

# Solenoidy i toroidy

### Pole magnetyczne solenoidu

Zwrócimy teraz uwagę na inny przypadek, w którym prawo Ampère'a okazuje się przydatne. Dotyczy on pola magnetycznego wytworzonego przez prąd płynący w długiej cewce, ciasno nawiniętej wzdłuż linii śrubowej. Taką cewkę nazywamy **solenoidem** (rys. 29.17). Zakładamy przy tym, że długość solenoidu jest znacznie większa od jego średnicy.

Na rysunku 29.18 przedstawiono przekrój fragmentu solenoidu z rozsuniętymi zwojami. Pole magnetyczne solenoidu jest superpozycją pól wytwarzanych przez pojedyncze zwoje, z których składa się solenoid. Dla punktów położonych bardzo blisko uzwojenia, każdy zwój zachowuje się pod względem magnetycznym prawie tak, jak długi prostoliniowy przewód, a linie pola tworzą prawie współśrodkowe okręgi. Z rysunku 29.18 wnioskujemy, że pola między sąsiednimi zwojami niemal całkowicie się znoszą, a wewnątrz solenoidu i dostatecznie daleko od uzwojenia wektor



**Rys. 29.17.** Solenoid, w którym płynie prąd o natężeniu *I* 

**Rys. 29.18.** Pionowy przekrój przechodzący przez oś solenoidu z rozsuniętymi zwojami. Pokazane są części pięciu zwojów położone z tyłu, a także linie pola magnetycznego wytworzonego przez prąd płynący w solenoidzie. Wokół każdego zwoju powstają kołowe linie pola. W pobliżu osi solenoidu linie skierowane są wzdłuż osi. Ułożone blisko siebie linie wskazują, że pole w pobliżu osi jest silne. Na zewnątrz solenoidu odległości między liniami są duże; oznacza to, że pole tam jest bardzo słabe



**Rys. 29.19.** Linie pola magnetycznego w rzeczywistym solenoidzie o skończonej długości. Pole jest silne i jednorodne w punktach leżących wewnątrz solenoidu, takich jak punkt  $P_1$ , natomiast stosunkowo słabe w punktach leżących na zewnątrz, takich jak punkt  $P_2$ 



**Rys. 29.20.** Zastosowanie prawa Ampère'a do odcinka długiego idealnego solenoidu, w którym płynie prąd o natężeniu *I*. Kontur całkowania jest prostokątem *abcd* 



 $\vec{B}$  jest w przybliżeniu równoległy do osi solenoidu. W granicznym przypadku *idealnego solenoidu*, który jest nieskończenie długi i składa się ze ściśle ułożonych zwojów, pole wewnątrz solenoidu jest jednorodne, a jego linie są równoległe do osi solenoidu.

W punktach położonych powyżej solenoidu, takich jak punkt P na rysunku 29.18, pole wytworzone przez górne części zwojów (górne części zwojów są zaznaczone () jest skierowane w lewo (jak narysowano w pobliżu P) i znosi się częściowo z polem pochodzącym od dolnych części zwojów (dole części zwojów są zaznaczone 🛞) i skierowanym w prawo (pole to nie zostało zaznaczone na rysunku). W granicznym przypadku solenoidu idealnego indukcja magnetyczna na zewnątrz solenoidu jest równa zeru. Dla rzeczywistego solenoidu możemy również przyjąć, że indukcja na zewnątrz solenoidu jest równa zeru. Założenie to jest spełnione, jeśli długość solenoidu jest znacznie większa od jego średnicy, a rozważamy takie punkty, jak punkt P, tzn. położone dostatecznie daleko od końców solenoidu. Kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wzdłuż osi solenoidu wynika z reguły prawej dłoni: uchwyć solenoid prawą ręką, tak aby twoje palce wskazywały kierunek prądu w uzwojeniu; twój wyciągnięty kciuk wskaże wtedy kierunek wektora indukcji magnetycznej, zgodny z osią solenoidu.

Na rysunku 29.19 przedstawiono linie pola  $\vec{B}$  w rzeczywistym solenoidzie. Odległości między liniami w środkowym obszarze wskazują, że pole wewnątrz cewki jest dość silne i jednorodne w przekroju poprzecznym. Pole na zewnątrz solenoidu jest natomiast stosunkowo słabe.

Prawo Ampère'a. Zastosujmy teraz prawo Ampère'a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \tag{29.21}$$

do idealnego solenoidu, przedstawionego na rysunku 29.20. Pole  $\vec{B}$  jest jednorodne wewnątrz solenoidu, a jego indukcja jest równa zeru na zewnątrz. Wykorzystując prostokątny kontur całkowania *abcd*, możemy zapisać całkę  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  w postaci sumy czterech całek, po jednej dla każdego odcinka konturu:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{a}^{b} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{b}^{c} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{c}^{d} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{d}^{a} \vec{B} \cdot d\vec{s}.$$
 (29.22)

Pierwsza całka po prawej stronie równania (29.22) jest równa Bh, gdzie B jest wartością indukcji jednorodnego pola  $\vec{B}$  wewnątrz solenoidu, a h jest (dowolnie wybraną) długością odcinka łączącego a i b. Druga i czwarta całka są równe zeru, gdyż dla każdego elementu d $\vec{s}$  tych odcinków wektor  $\vec{B}$  jest albo prostopadły do d $\vec{s}$ , albo równy zeru, a więc iloczyn skalarny  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  jest równy zeru. Trzecia całka, która jest obliczana wzdłuż odcinka zewnętrznego, jest również równa zeru, gdyż B = 0 we wszystkich punktach leżących na zewnątrz solenoidu. Zatem całka  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  dla całego prostokątnego konturu ma wartość Bh.

*Wypadkowe natężenie prądu.* Całkowite natężenie prądu  $I_p$  obejmowanego prostokątnym konturem na rysunku 29.20 nie jest równe natężeniu prądu I w uzwojeniu solenoidu, gdyż kontur całkowania obejmuje więcej niż jeden zwój. Załóżmy, że n jest liczbą zwojów przypadających na jednostkę długości; wówczas kontur obejmuje nh zwojów i wobec tego

$$I_{\rm p} = I(nh).$$

Z prawa Ampère'a otrzymujemy więc

$$Bh = \mu_0 Inh,$$

czyli:

 $B = \mu_0 In$  (solenoid idealny). (29.23)

Choć wyprowadziliśmy wzór (29.23) dla nieskończenie długiego idealnego solenoidu, jest on całkiem dobrze spełniony dla rzeczywistych solenoidów, jeśli tylko zastosujemy go do punktów położonych dostatecznie daleko od końców solenoidu. Wzór (29.23) jest zgodny z doświadczalnie stwierdzonym faktem, że wartość indukcji magnetycznej *B* pola wewnątrz solenoidu nie zależy od jego średnicy ani długości i jest stała w przekroju poprzecznym solenoidu. Solenoid umożliwia więc w praktyce wytworzenie, w celach doświadczalnych jednorodnego pola magnetycznego o zadanej wartości indukcji, podobnie jak płaski kondensator umożliwia w praktyce uzyskanie jednorodnego pola elektrycznego o zadanej wartości natężenia.

#### Pole magnetyczne toroidu

Na rysunku 29.21a przedstawiono **toroid**, czyli (pusty w środku) solenoid tak zwinięty, że przypomina kształtem pustą w środku bransoletkę. Jakie pole magnetyczne  $\vec{B}$  powstaje w punktach wewnątrz toroidu (czyli w pustym wnętrzu bransoletki)? Możemy się tego dowiedzieć, stosując prawo Ampère'a i wykorzystując symetrię toroidu.

Z właściwości symetrii wynika, że linie pola B tworzą wewnątrz toroidu współśrodkowe okręgi i są tak skierowane, jak pokazano na rysunku 29.21b. Wybierzmy okrąg o promieniu r jako kontur całkowania i przyjmijmy kierunek całkowania zgodny z ruchem wskazówek zegara. Prawo Ampère'a (29.14) daje nam

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 I N$$

gdzie I jest natężeniem prądu w uzwojeniu toroidu, a N — całkowitą liczbą



**Rys. 29.21.** a) Toroid, przez który płynie prąd o natężeniu *I*. b) Poziomy przekrój toroidu. Pole magnetyczne wewnątrz rury w kształcie bransoletki może być wyznaczone za pomocą prawa Ampère'a i konturu całkowania pokazanego na rysunku

zwojów (zakładamy, że kierunek prądu jest dodatni dla zwojów objętych konturem całkowania). Stąd otrzymujemy

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{1}{r} \qquad \text{(toroid).} \tag{29.24}$$

Inaczej niż w solenoidzie, indukcja nie jest stała w przekroju toroidu.

Można łatwo wykazać na podstawie prawa Ampère'a, że B = 0 w punktach położonych na zewnątrz idealnego toroidu (czyli zwiniętego idealnego solenoidu). Kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wewnątrz toroidu wynika z reguły prawej dłoni. Uchwyć toroid palcami swojej prawej dłoni, zagiętymi w kierunku, w którym płynie prąd w uzwojeniu, a wtedy twój wyciągnięty kciuk wskaże kierunek wektora indukcji magnetycznej.

# Przykład 29.04. Pole magnetyczne wewnątrz solenoidu (długiej cewki z prądem)

Przez solenoid o długości L = 1,23 m i średnicy wewnętrznej d = 3,55 cm płynie prąd o natężeniu I = 5,57 A. Solenoid składa się z pięciu ciasno nawiniętych warstw, z których każda zawiera 850 zwojów na odcinku L. Ile wynosi indukcja B w środku solenoidu?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Zgodnie z równaniem (29.23) wartość indukcji magnetycznej *B* w środku solenoidu zależy od natężenia prądu *I* płynącego w uzwojeniu i liczby zwojów *n* na jednostkę długości ( $B = \mu_0 In$ ).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **29.5.** CEWKA Z PRĄDEM JAKO DIPOL MAGNETYCZNY

## Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 29.22 naszkicować linie pola magnetycznego wytwarzanego przez płaską cewkę z prądem;
- 29.23 stosować dla cewki z prądem związek między momentem magnetycznym cewki μ, natężeniem prądu I płynącego

#### Podstawowe fakty.

 Indukcja pola magnetycznego wytworzonego przez cewkę z prądem w punkcie P położonym na osi prostopadłej do cewki w odległości z od cewki jest równa \_

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3},$$

**Obliczenia:** Ponieważ *B* nie zależy od średnicy solenoidu, więc wartość *n* dla pięciu identycznych warstw jest po prostu pięć razy większa od wartości dla pojedynczej warstwy. Wobec tego z równania (29.23) otrzymujemy  $B = \mu_0 In$ 

$$= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(5,57 \text{ A}) \frac{5 \cdot 850 \text{ zwojów}}{1,23 \text{ m}}$$
  
= 2,42 \cdot 10^{-2} \text{ T} = 24.2 \text{ mT} (odpowiedź).

Wynik ten jest bardzo dobrym przybliżeniem rzeczywistej wartości *B* dla prawie wszystkich punktów wewnątrz solenoidu.

przez cewkę oraz liczbą zwojów N i powierzchnią S ograniczoną przez każdy ze zwojów;

**29.24** stosować dla punktów leżących na osi cewki związek między indukcją magnetyczną B, momentem magnetycznym cewki  $\mu$  oraz odległością z od środka cewki.

gdzie  $\vec{\mu}$  jest momentem magnetycznym cewki. Wzór ten jest słuszny tylko dla wartości z znacznie większych od rozmiarów cewki.

# Cewka z prądem jako dipol magnetyczny

Dotychczas omówiliśmy pola magnetyczne wytworzone przez prądy płynące w długim prostoliniowym przewodzie, w solenoidzie i w toroidzie. Zwrócimy teraz uwagę na pole wytworzone przez cewkę, w której płynie prąd. Widzieliśmy w podrozdziale 28.8, że taka cewka zachowuje się jak dipol magnetyczny. Jeżeli umieścimy cewkę w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , to będzie działać na nią moment siły

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \tag{29.25}$$

W tym równaniu  $\vec{\mu}$  oznacza dipolowy moment magnetyczny cewki, który ma wartość *NIS*, gdzie *N* jest liczbą zwojów, *I* jest natężeniem prądu płynącego w każdym zwoju, a *S* oznacza pole powierzchni, otoczonej przez każdy zwój. (*Uwaga!* Nie pomyl magnetycznego momentu dipolowego  $\vec{\mu}$ z przenikalnością magnetyczną próżni  $\mu_0$ ).

Przypomnij sobie, że kierunek  $\vec{\mu}$  wynika z reguły prawej dłoni: uchwyć uzwojenie cewki w taki sposób, aby palce twojej prawej dłoni wskazywały kierunek prądu, a wtedy twój wyciągnięty kciuk wskaże kierunek momentu dipolowego  $\vec{\mu}$ .

# Pole magnetyczne cewki

Zajmiemy się teraz inną cechą cewki z prądem jako dipola magnetycznego. Jakie pole magnetyczne wytwarza taka cewka w otaczającej ją przestrzeni? Symetria takiego układu jest niewystarczająca, aby skorzystać z prawa Ampère'a. Musimy zatem zastosować prawo Biota–Savarta. Dla ułatwienia rozpatrzmy najpierw cewkę w postaci pojedynczego okrągłego zwoju oraz punkty znajdujące się na osi symetrii, którą oznaczymy jako oś *z*. Wykażemy, że wartość indukcji magnetycznej pola w tych punktach jest równa

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}},$$
(29.26)

gdzie *R* jest promieniem cewki, a *z* jest odległością danego punktu od środka cewki. Ponadto kierunek wektora indukcji  $\vec{B}$  jest taki sam, jak kierunek dipolowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$  cewki.

*Pole magnetyczne w dużej odległości od cewki.* Dla punktów na osi położonych daleko od cewki możemy przyjąć  $z \gg R$  w równaniu (29.26). Przy takim przybliżeniu równanie to redukuje się do

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}.$$

Pamiętając, że  $\pi R^2$  jest polem powierzchni *S* cewki, i uogólniając wynik na przypadek cewki o *N* zwojach, możemy zapisać to równanie w postaci

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NIS}{z^3}.$$

Co więcej, ponieważ wektory  $\vec{B}$  i  $\vec{\mu}$  mają ten sam kierunek, możemy zapisać to równanie w postaci wektorowej, korzystając z zależności  $\mu = NIS$ :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3} \qquad \text{(cewka z prądem).} \tag{29.27}$$



**Rys. 29.22.** Pętla z prądem wytwarza pole magnetyczne podobne do pola magnesu sztabkowego, dlatego można skojarzyć z pętlą biegun północny i południowy. Dipolowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  pętli, którego kierunek można wyznaczyć za pomocą reguły prawej dłoni, jest skierowany od bieguna południowego do północnego, zgodnie z kierunkiem linii pola  $\vec{B}$  wewnątrz pętli



**Rys. 29.23.** Przekrój poprzeczny ramki o promieniu *R*, w której płynie prąd. Płaszczyzna ramki jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Pokazana jest tylko połowa ramki położona z tyłu. Stosujemy prawo Biota–Savarta do wyznaczenia indukcji w punkcie *P* na osi prostopadłej do płaszczyzny ramki Tak więc możemy traktować cewkę z prądem jako dipol magnetyczny w dwojaki sposób: 1) cewka umieszczona w zewnętrznym polu magnetycznym doznaje działania momentu siły, 2) cewka wytwarza swoje własne pole magnetyczne opisywane równaniem (29.27) dla punktów na osi cewki położonych dostatecznie daleko. Na rysunku 29.22 przedstawiono pole magnetyczne pojedynczej pętli z prądem. Jedna strona pętli odgrywa rolę bieguna północnego (w kierunku  $\vec{\mu}$ ), a druga — bieguna południowego, co ilustruje magnes naszkicowany na rysunku. Gdybyśmy taką cewkę z prądem umieścili w zewnętrznym polu magnetycznym, obracałaby się tak samo jak magnes sztabkowy.

# Sprawdzian 3

Na rysunku przedstawiono cztery układy okrągłych pętli o promieniach *r* lub 2*r*. Pętle mają wspólną pionową oś symetrii (prostopadłą do nich) i płyną w nich we wskazanych kierunkach prądy o takich samych natężeniach. Uszereguj układy pod względem wartości indukcji wypadkowego pola magnetycznego w punkcie oznaczonym kropką, leżącym na osi w połowie odległości między pętlami, zaczynając od największej wartości.



# Wyprowadzenie wzoru (29.26)

Na rysunku 29.23 przedstawono w rzucie połowę okrągłej ramki o promieniu R, w której płynie prąd o natężeniu I. Rozważmy punkt P na osi ramki, leżący w odległości z od jej płaszczyzny i zastosujmy prawo Biota–Savarta do elementu ds ramki, położonego po jej lewej stronie. Wektorowy element długości d $\vec{s}$  jest skierowany prostopadle przed płaszczyznę rysunku. Kąt  $\theta$ między d $\vec{s}$  a  $\hat{r}$  na rysunku 29.23 jest równy 90°. Płaszczyzna wyznaczona przez te dwa wektory jest prostopadła do płaszczyzny rysunku i zawiera zarówno d $\vec{s}$ , jak i  $\hat{r}$ . Z prawa Biota–Savarta (i z reguły prawej dłoni) wynika, że wektor d $\vec{B}$  pola wytworzonego w punkcie P przez element d $\vec{s}$ jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej wektory d $\vec{s}$  i  $\hat{r}$ , a więc leży w płaszczyźnie rysunku i jest skierowany prostopadle do  $\hat{r}$ , jak pokazano na rysunku 29.23.

Rozłóżmy d $\overline{B}$  na dwie składowe: d $B_{\parallel}$ , skierowaną wzdłuż osi ramki, oraz d $B_{\perp}$ , prostopadłą do osi. Z symetrii wynika, że wektorowa suma wszystkich prostopadłych składowych d $B_{\perp}$  pochodzących od wszystkich elementów ramki ds jest równa zeru. Pozostaje więc tylko składowa osiowa d $B_{\parallel}$  i mamy

$$B = \int \mathrm{d}B_{\parallel}$$

Dla elementu d $\vec{s}$  na rysunku 29.23 prawo Biota–Savarta (29.1) mówi, że indukcja magnetyczna w odległości r jest równa

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\mathrm{d}s\sin 90^\circ}{r^2}.$$

Wiemy również, że

$$\mathrm{d}B_{\parallel} = \mathrm{d}B\cos\alpha.$$

Łącząc te dwie zależności, otrzymujemy

$$\mathrm{d}B_{\parallel} = \frac{\mu_0 I \cos\alpha \mathrm{d}s}{4\pi r^2}.$$

Na rysunku 29.23 widać, że r i  $\alpha$  są ze sobą związane. Spróbujmy wyrazić obie te wielkości w funkcji zmiennej z, czyli odległości między punktem P a środkiem ramki. Otrzymujemy następujące zależności:

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$
(29.29)

oraz

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$
(29.30)

Podstawiając wyrażenia (29.29) i (29.30) do równania (29.28), otrzymujemy

$$\mathrm{d}B_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \mathrm{d}s.$$

Zauważ, że *I*, *R* i *z* przyjmują te same wartości dla wszystkich elementów ds wokół ramki, więc całkując to wyrażenie, otrzymamy

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int ds$$

czyli biorąc pod uwagę, że  $\int ds$  jest po prostu obwodem  $2\pi R$  ramki

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Jest to właśnie równanie (29.26), które mieliśmy wyprowadzić.

# **Podsumowanie**

**Prawo Biota–Savarta** Indukcja magnetyczna pola wytworzonego przez prąd płynący w przewodniku może być wyznaczona z *prawa Biota–Savarta*. Prawo to orzeka, że przyczynek d $\vec{B}$  do indukcji pola wytworzonego przez element prądu  $I d\vec{s}$  w punkcie P odległym o r od tego elementu jest równy

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \mathrm{d}\vec{s} \times \hat{\mathrm{r}}}{r^2} \qquad \text{(prawo Biota-Savarta).} \qquad (29.3)$$

W tym równaniu  $\hat{r}$  jest wektorem jednostkowym skierowanym od elementu prądu do punktu *P*. Wielkość  $\mu_0$ , zwana przenikalnością magnetyczną próżni (stałą magnetyczną), jest równa

$$4\pi \cdot 10^{-7} \ T \cdot m/A \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \ T \cdot m/A.$$

#### **Pole magnetyczne długiego prostoliniowego przewodu** Zgodnie z prawem Biota–Savarta dla długiego prostoliniowego przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu *I*, wartość indukcji magnetycznej w odległości *R* od przewodu jest równa

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad \text{(dlugi przewód prostoliniowy).} \qquad (29.4)$$

Pole magnetyczne przewodu w kształcie łuku okręgu Wartość indukcji magnetycznej w środku łuku okręgu o promieniu R i kącie środkowym  $\phi$  (w radianach) jest równa

$$B = \frac{\mu_0 I \phi}{4\pi R} \qquad \text{(w środku łuku okręgu),} \qquad (29.9)$$

gdzie I jest natężeniem prądu płynącego wzdłuż łuku.

**Siła działająca między równoległymi przewodami z prądem** Równoległe przewody, w których płyną prądy w tym samym kierunku, przyciągają się, a równoległe przewody, w których płyną prądy w kierunkach przeciwnych, się odpychają. Wartość siły działającej na odcinek o długości *L* któregokolwiek z dwóch przewodów jest równa

$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a \ I_b}{2\pi d},$$
 (29.13)

gdzie d jest odległością przewodów, a  $I_a$  i  $I_b$  oznaczają natężenia prądów w przewodach.

Prawo Ampère'a Prawo Ampère'a stwierdza, że

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \qquad \text{(prawo Ampère'a)}. \qquad (29.14)$$

Całka krzywoliniowa w tym równaniu jest obliczana wzdłuż zamkniętego konturu. Natężenie prądu  $I_p$  występujące po prawej stronie tego równania jest *wypadkowym* natężeniem prądu przecinającego powierzchnię ograniczoną przez kontur całkowania. Dla pewnych rozkładów prądów łatwiej jest zastosować równanie (29.14) niż (29.3), aby obliczyć indukcję magnetyczną pola wytworzonego przez prąd.

**Pola solenoidu i toroidu** Wewnątrz *długiego solenoidu*, przez który płynie prąd o natężeniu *I*, wartość *B* indukcji ma-

# **Pytania**

1 Na rysunku 29.24 przedstawiono trzy obwody, z których każdy składa się z dwóch odcinków radialnych oraz z dwóch współśrodkowych łuków, jednego o promieniu r, a drugiego o większym promieniu R. W każdym obwodzie płynie prąd o takim samym natężeniu, a odcinki radialne tworzą taki sam kąt. Uszereguj obwody pod względem wartości indukcji wypadkowego pola magnetycznego w środku, zaczynając od największej wartości.



wartości; prędkość  $\vec{v}_2$  jest

skierowana za płaszczyznę ry-

sunku. Elektrony 1 i 2 znaj-

**Rys. 29.25.** Pytanie 2

gnetycznej w punktach oddalonych od końców solenoidu jest równa

$$B = \mu_0 In$$
 (solenoid idealny), (29.23)

gdzie n jest liczbą zwojów na jednostkę długości. Pole magnetyczne wewnątrz solenoidu jest jednorodne. Na zewnątrz solenoidu pole magnetyczne jest w przybliżeniu równe zeru.

W punkcie leżącym wewnątrz *toroidu* wartość indukcji *B* jest równa

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \frac{1}{r} \qquad \text{(toroid)}, \qquad (29.24)$$

gdzie r jest odległością danego punktu od środka toroidu.

**Pole dipola magnetycznego** Pole magnetyczne wytworzone przez cewkę z prądem (która jest w istocie *dipolem magnetycznym*) w punkcie *P* położonym na osi cewki w odległości z od płaszczyzny cewki jest skierowane równolegle do osi i dane wyrażeniem

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3},$$
(29.27)

gdzie  $\vec{\mu}$  jest dipolowym momentem magnetycznym cewki. To równanie jest słuszne tylko wtedy, gdy odległość *z* jest znacznie większa od rozmiarów cewki.

dują się w takiej samej odległości od przewodu, podobnie elektrony 3 i 4. Uszereguj te elektrony ze względu na wartość działającej na nie siły magnetycznej, zaczynając od największej wartości.

**3** Na rysunku 29.26 przedstawiono cztery układy długich równoległych przewodów, w których płyną prądy o takim samym natężeniu, za lub przed płaszczyznę rysunku. Przewody znajdują się w wierzchołkach identycznych kwadratów. Uszereguj układy pod względem wartości indukcji magnetycznej wypadkowego pola w środku kwadratu, zaczynając od największej wartości.



stawiono przekrój poprzeczny układu złożonego z dwóch długich przewodów prostoli-



niowych; w przewodzie po lewej stronie płynie prąd o natężeniu  $I_1$  w kierunku przed płaszczyznę rysunku. Jeżeli wypadkowe pole magnetyczne w punkcie P jest równe zeru, to a) czy w przewodzie po prawej stronie prąd o natężeniu  $I_2$  powinien płynąć w kierunku przed, czy za płaszczyzne rysunku oraz b) czy nateżenie  $I_2$  powinno być wieksze, mniejsze, czy takie samo jak  $I_1$ ?

5 Na rysunku 29.28 przedstawiono trzy obwody, każdy złożony z odcinków radialnych oraz współśrodkowych łuków okregu (bedacych albo półokregami, albo ćwiartkami okregu) o promieniach r, 2r i 3r. W każdym z obwodów płynie prąd o takim samym natężeniu. Uszereguj obwody pod względem wartości indukcji magnetycznej wytwarzanej w zaznaczonych kropkami wierzchołkach łuków, poczynając od wartości najwiekszej.



6 Na rysunku 29.29 przedstawiono wartość indukcji magnetycznej B jako funkcję odległości od osi czterech przewodów z prądem oznaczonych a, b, c, d, przy czym uwzględniono pole magnetyczne zarówno na zewnatrz przewodu, jak i wewnątrz niego. Gęstość prądu w każdym z przewodów jest taka sama. Linie, które powinny pokrywać się na wykresie, narysowano jako nieco rozsunięte i oznaczono symbolami dwóch przewodów. Uszereguj przewody z prądem pod względem: a) promienia, b) wartości indukcji magnetycznej na powierzchni przewodu i c) natężenia prądu płynącego w przewodzie, poczynając od największych wartości. d) Czy gęstość pradu płynacego w przewodzie a jest większa, mniejsza czy taka sama jak gestość prądu płynącego w przewodzie c?





7 Na rysunku 29.30 przedstawiono cztery kontury całkowania (a, b, c, d) w kształcie okregów ułożonych współśrodkowo Z przewodem, w którym prąd płynie przed płaszczyznę rysunku. Prad jest rozłożony równomiernie



**Rys. 29.30.** Pytanie 7

w (zacieniowanym) przekroju poprzecznym przewodu. Uszereguj kontury pod względem wartości całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  obliczonej wzdłuż każdego konturu, zaczynając od największej wartości. 8 Na rysunku 29.31 przedstawiono cztery układy długich, równoległych i równoodległych przewodów, w których płyna prady o takich samych natężeniach, skierowane za lub przed płaszczyznę rysunku. Uszereguj układy pod względem wartości wypadkowej siły działającej na przewód środkowy, a wywołanej przepływem pradu w pozostałych przewodach, zaczynajac od najwiekszej wartości.



9 Na rysunku 29.32 przedstawiono cztery kontury całkowania w kształcie okręgów (a, b, c, d) i cztery długie walcowe przewody (zacieniowane). Wszystkie kontury i przewody sa współśrod-Trzy z przewodów kowe. maja kształt walców pustych w środku, a przewód położony



Rys. 29.32. Pytanie 9

w środku jest pełnym walcem. Licząc od wewnętrznego przewodu, prądy w przewodach mają następujące natężenia i kierunki: 4 A przed płaszczyznę rysunku, 9 A za płaszczyznę rysunku, 5 A przed płaszczyzne rysunku, 3 A za płaszczyzne rysunku. Uszereguj kontury całkowania pod względem wartości całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  obliczonej wzdłuż każdego konturu, zaczynając od największej wartości.

10 Na rysunku 29.33 przedstawiono cztery przewody z prądem o takich samych natężeniach I oraz pięć zamkniętych konturów (a-e) obejmujących te przewody. Uszereguj kontury pod względem wartości całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  obliczonej we wskazanych kierunkach, zaczynając od największej (dodatniej) wartości całki.



**Rys. 29.33.** Pytanie 10

11 Na rysunku 29.34 przedstawiono trzy układy trzech długich prostoliniowych przewodów, w których płyna prady o ta-

#### 318 ROZDZIAŁ 29. POLE MAGNETYCZNE WYWOŁANE PRZEPŁYWEM PRĄDU

kich samych natężeniach, skierowane za lub przed płaszczyznę rysunku. a) Uszereguj układy pod względem wartości wypadkowej siły działającej na przewód *A* z prądem płynącym przed płaszczyznę rysunku, wywołanej przepływem prądu w pozostałych przewodach, zaczynając od największej wartości. b) Czy kąt między kierunkiem siły działającej na przewód *A* w układzie 3 a linią przerywaną jest równy, mniejszy czy większy od 45°?





# Zadania

I	<b>GO</b>	Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach <i>WileyPLUS</i> (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
•		Liczba kropek określa stopień trudności zadania
	ssm	Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w Student Solutions Manual
	www	Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
	ilw	Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
		Więcej informacji znajdziesz w książce The Flying Circus of Physics i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

# Podrozdział 29.1 Obliczanie indukcji magnetycznej pola wywołanego przepływem prądu

1 Geodeta używa kompasu w miejscu znajdującym się 6,1 m poniżej linii energetycznej, w której płynie prąd stały o natężeniu 100 A. a) Jakie pole magnetyczne wytwarza linia energetyczna w miejscu, w którym znajduje się kompas?
b) Czy to pole będzie w sposób istotny zakłócało wskazania kompasu? Pozioma składowa indukcji magnetycznej ziemskiego pola w tym miejscu jest równa 20 μT.

•2 Na rysunku 29.35a przedstawiono mały fragment bardzo długiego, prostoliniowego przewodu z prądem; fragment ten ma długość  $ds = 1 \,\mu m$ . Płynący przez ten fragment prąd jest źródłem przyczynka d $\vec{B}$  do indukcji pola magnetycznego wokół przewodu. Na rysunku 29.35b przedstawiono wartość tego przyczynka dB w punktach oddalonych o 2,5 cm od rozważanego fragmentu w zależności od kata  $\theta$  miedzy kierunkiem przewodu a linią łaczącą rozważany fragment przewodu z odpowiednim



punktem. Skala osi pionowej jest wyznaczona przez d $B_s = 60$  pT. Jaka jest całkowita indukcja magnetyczna pochodząca od przewodu z prądem w odległości 2,5 cm od przewodu?

•3 ssm W pewnym miejscu na Filipinach ziemskie pole magnetyczne o indukcji 39 μT jest poziome i skierowane na północ. Przypuśćmy, że wypadkowa indukcja pola jest równa zeru dokładnie 8 cm nad długim, prostoliniowym, poziomym przewodem, w którym płynie prąd stały. Wyznacz: a) natężenie prądu, b) kierunek prądu.

•4 Prosty przewód, w którym płynie prąd o natężeniu I =5 A, rozgałęzia się na dwa takie same półokręgi, tak jak pokazano na rysunku 29.36. Ile wynosi indukcja magnetyczna w środku *C* utworzonej w ten sposób pętli?

•5 Na rysunku 29.37 przedstawiono długi przewód składający się z półokręgu o promieniu R = 5 mm i dwóch prostych odcinków. Przez przewód płynie prad o natęże-









niu I = 10 A. Punkt *b* znajduje się w równej odległości od obu prostoliniowych części przewodu, na tyle daleko od półokręgu, że części te można traktować jako nieskończenie długie przewody prostoliniowe. Jaka jest a) wartość, b) kierunek (przed czy za płaszczyzną rysunku) wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w punkcie *a*. Jaka jest c) wartość, d) kierunek (przed czy za płaszczyzną rysunku) wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w punkcie *b*.

•6 Na rysunku 29.38 zaznaczono punkt *P* znajdujący się w odległości R = 2 cm od bardzo długiego, prostoliniowego przewodu z prądem. Pole magnetyczne wytworzone w punk-

cie P jest sumą przyczynków od wszystkich jednakowych elementów prądu I d $\vec{s}$  rozłożonych wzdłuż przewodnika. Ile

wynosi odległość s do elementu prądu a) dającego największy przyczynek do indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  stanowiącej b) dającego przyczynek o wartości 10% największego?

•7 • Na rysunku 29.39 przedstawiono obwód składający się z dwóch odcinków radialnych oraz dwóch przewodów w kształcie łuków okręgu o tym samym wierzchołku *P*, kącie środkowym  $\theta = 74^{\circ}$  i promieniach, odpowiednio, *a* = 13,5 cm oraz *b* = 10,7 cm; w obwodzie

•8 Na rysunku 29.40 przedstawiono obwód składający się z dwóch odcinków radialnych oraz dwóch przewodów w kształcie półokręgu o tym samym wierzchołku *C* i promieniach, odpowiednio,  $R_2 =$ 7,8 cm oraz  $R_1 = 3,15$  cm;





**Rys. 29.39.** Zadanie 7

Rys. 29.40. Zadanie 8

w obwodzie płynie prąd o natężeniu I = 0,281 A. a) Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w punkcie C? b) Czy wektor ten jest skierowany przed czy za płaszczyznę rysunku?

płynie prad o natężeniu I = 0,411 A. a) Ile wynosi wartość

indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w punkcie P? b) Czy wektor ten

jest skierowany przed czy za płaszczyzne rysunku?

•9 ssm Dwa długie równoległe przewody znajdują się w odległości 8 cm i płyną w nich prądy o takich samych natężeniach, a indukcja pola magnetycznego w połowie odległości między przewodami ma wartość 300  $\mu$ T. a) Czy prądy płyną w tych samych, czy w przeciwnych kierunkach? b) Ile wynoszą natężenia tych prądów?

•10 Na rysunku 29.41 przedstawiono przewód składający się z półokręgu o promieniu R = 9,26 cm oraz dwóch odcinków o długości L = 13,1 cm każdy. W przewodzie płynie prąd

o natężeniu I = 34,8 mA. a) Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w środku C półokręgu? b) Czy wektor ten jest skierowany przed czy za płaszczyznę rysunku?



•11 Na rysunku 29.42 przedstawiono dwa długie przewody prostoliniowe prostopadłe do płaszczyzny rysunku, oddalone o  $d_1 = 0.75$  cm. W przewodzie 1 płynie prąd o natężeniu 6,5 A skierowany za płaszczyznę rysunku. Wiedząc, że wy-

padkowe pole magnetyczne w punkcie *P* leżącym w płaszczyźnie przewodów i oddalonym od przewodu 2 o  $d_2 = 1,5$  cm jest równe zeru, wyznacz a) natężenie oraz b) kierunek prądu płynącego w przewodzie 2.

•12 Na rysunku 29.43 przedstawiono dwa długie przewody prostoliniowe, w których płyną prądy, odpowiednio,  $I_1 = 3,61$  mA oraz  $I_2 = 3I_1$ , skierowane przed płaszczyznę rysunku. a) W którym punkcie na osi *x* wypadkowe





Rys. 29.43. Zadanie 12

pole magnetyczne jest równe zeru? b) Czy punkt, w którym pole magnetyczne jest równe zeru, przesunie się w stronę przewodu 1, w stronę przewodu 2, czy pozostanie bez zmian, jeśli natężenia prądów w obu przewodach zwiększy się dwukrotnie?

••13 Na rysunku 29.44 przedstawiono przewód o długości L = 18 cm, w którym płynie prąd o natężeniu I = 58,2 mA. Punkt  $P_1$  leży na środkowej przewodu w odległości R = 13,1 cm od niego. Znajdź wartość indukcji magnetycznej w punkcie  $P_1$ . (Zauważ, że w tym zadaniu *nie* możemy założyć, że przewód jest długi).



••14 Wzór (29.4) opisuje wartość indukcji pola magnetycznego wytwarzanego w punkcie *P* przez prąd płynący w *nieskończenie długim* przewodzie prostoliniowym, przy czym odległość punktu *P* od przewodu jest równa *R*. Przypuśćmy jednak, że przewód ten ma skończoną długość *L*, punkt *P* leży zaś na jego środkowej. Wzór (29.4) nie daje wówczas poprawnego wyniku dla indukcji magnetycznej w punkcie *P*; jego zastosowanie wiąże się z popełnieniem pewnego błędu. Jeżeli żądamy, by błąd względny wyznaczenia *B* nie przekraczał 1%, jaka może być najmniejsza wartość stosunku *L/R*? Innymi słowy, dla jakiej wartośći *L/R* otrzymujemy

$$\frac{B_{(29.4)} - B_{\text{rzecz}}}{B_{\text{rzecz}}} \cdot 100\% = 1\%,$$

gdzie  $B_{(29.4)}$  jest wartością indukcji magnetycznej wyznaczoną ze wzoru (29.4), a  $B_{rzecz}$  — jej rzeczywistą wartością?

••15 Na rysunku 29.45 przedstawiono dwa fragmenty obwodów. Przez dolny fragment, w skład którego wchodzi półokrąg o promieniu 5 cm i środku *P*, płynie prąd o natężeniu  $I_1 = 0,4$  A. Przez górny fragment, w skład którego wchodzi łuk okręgu o promieniu 4 cm o kącie środkowym 120° i wierzchołku w tym samym punkcie *P*, płynie prąd o natężeniu  $I_2 = 2I_1$ . Wyznacz a) wartość oraz b) kierunek wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w punkcie *P* 

dla kierunków przepływu prądu zaznaczonych na rysunku. Jaka będzie c) wartość oraz d) kierunek wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ , gdy kierunek przepływu prądu o natężeniu  $I_2$  zostanie odwrócony?



Rys. 29.45. Zadanie 15

••16 <sup>CD</sup> Na rysunku 29.46 przedstawiono dwa leżące w jednej płaszczyźnie przewody w kształcie współśrodkowych okręgów. Przewód 1 ma promień 1.5 cm i płynie



Rys. 29.46. Zadanie 16

w nim prąd o natężeniu 4 mA. Przewód 2 ma promień 2,5 cm i płynie w nim prąd o natężeniu 6 mA; można go dowolnie obracać wokół jego średnicy i mierzyć indukcję magnetyczną w środku okręgów. O jaki kąt należy obrócić ten przewód, by wypadkowa indukcja magnetyczna w środku okręgów była równa 100 nT?

••17 ssm Na rysunku 29.44 przedstawiono punkt  $P_2$  leżący na prostej prostopadłej do przewodu o długości L = 13,6 cm i przechodzącej przez jego koniec; odległość punktu  $P_2$  od przewodu jest równa R = 25,1 cm. Wiedząc, że przez przewód płynie prąd o natężeniu I = 0,693 A, wyznacz wartość indukcji magnetycznej w punkcie  $P_2$ . (Zauważ, że w tym zadaniu *nie* możemy założyć, że przewód jest długi).

••18 Przewodnik z prądem składa się z dwóch odcinków oraz dwóch półokręgów leżących w jednej płaszczyźnie, co przedstawiono — nie w skali! — na rysunku



Rys. 29.47. Zadanie 18

29.47a. Wartość indukcji magnetycznej we wspólnym środku półokręgów jest równa 47,25  $\mu$ T. Następnie mniejszy półokrąg zostaje obrócony w taki sposób, że po obrocie znowu leży w tej samej płaszczyźnie co pozostałe elementy obwodu, tak jak pokazano na rysunku 29.47b. W takiej sytuacji pole magnetyczne we wspólnym środku półokręgów ma indukcję o wartości 15,75  $\mu$ T, skierowaną przeciwnie względem indukcji przed obrotem. Wyznacz promień mniejszego z półokręgów.

••19 Przez leżący na osi x długi przewód prostoliniowy płynie prąd o natężeniu 30 A skierowany zgodnie z kierunkiem osi x. Przez punkt o współrzędnych (0, 4, 0) m przechodzi kolejny długi przewód prostoliniowy, który jest prostopadły do płaszczyzny xy i płynie w nim prąd o natężeniu 40 A skierowany zgodnie z kierunkiem osi z. Jaka jest wartość wypadkowej indukcji pola magnetycznego w punkcie o współrzędnych (0, 2, 0) m?

••20 Na rysunku 29.48 przedstawiono długi, izolowany przewód, który został zgięty w taki sposób, że fragment przewodu tworzy okrąg o promieniu R = 1,89 cm. Przez przewód płynie prąd o natężeniu I = 5,78 mA. Wyznacz wektor indukcji pola magnetycznego w punkcie C będącym środkiem fragmentu przewodu w kształ-

cie okręgu, jeśli a) okrąg leży w płaszczyżnie rysunku oraz b) okrąg został obrócony w sposób przedstawiony na rysunku i jest prostopadły do płaszczyzny rysunku.





••21 S Na rysunku 29.49 przedstawiono przekrój poprzeczny układu składającego się z dwóch bardzo długich, prostoliniowych przewodów odległych o  $d_1 = 6$  m; w każdym z przewodów płynie prąd o natężeniu 4 A skierowany przed płaszczyznę rysunku. Wyznacz wypadkową indukcję pola magnetycznego



Rys. 29.49. Zadanie 21

w punkcie *P*, równoodległego od przewodów i leżącego w odległości  $d_2 = 4$  m od płaszczyzny zawierającej przewody.

••22 S Na rysunku 29.50a przedstawiono przekrój poprzeczny układu składającego się z dwóch bardzo długich, prostoliniowych przewodów odległych o *L*. Stosunek natężeń prądów płynących w tych przewodach wynosi  $I_1/I_2 = 4$ , ale na rysunku nie zaznaczono kierunków tych prądów. Na rysunku 29.50b przedstawiono wykres zależności składowej  $B_y$ wypadkowej indukcji pola magnetycznego mierzonej w punktach na osi *x* po prawej stronie przewodu 2. Skala osi poziomej wykresu jest wyznaczona przez  $x_s = 20$  cm, a skala osi pionowej przez  $B_{ys} = 4$  nT. a) Dla jakiej wartości x > 0składowa  $B_y$  przyjmuje wartość największą? b) Jaka jest największa wartość  $B_y$ , jeżeli  $I_2 = 3$  mA? W którą stronę płyną prądy w przewodach c) 1 oraz d) 2, przed czy za płaszczyznę rysunku?



••23 ilw Na rysunku 29.51 przedstawiono proton poruszający się z prędkością chwilową  $\vec{v} = (-200 \text{ m/s})\hat{j}$  w kierunku długiego, prostoliniowego przewodu, w którym płynie

prąd o natężeniu I = 350 mA. W pokazanej na rysunku chwili odległość między protonem a przewodem wynosi d = 2,89 cm. Wyznacz wektor siły działającej na proton i zapisz go za pomocą wektorów jednostkowych.

••24 The Narysunku 29.52 przedstawiono przekrój poprzeczny układu składającego się z czterech bardzo długich, prostoliniowych, parami równoległych przewodów. W każdym z tych przewodów płynie prąd o takim samym natężeniu, a kierunki prądów zaznaczone są na rysunku. W chwili początkowej każdy



Rys. 29.51. Zadanie 23



Rys. 29.52. Zadanie 24

z przewodów znajduje się w odległości d od początku układu współrzędnych. Oznaczmy indukcję magnetyczną wytwarzaną w początku układu współrzędnych przez  $\vec{B}$ . a) Do jakiego położenia wyznaczonego wartością współrzędnej x należy przesunąć przewód 1, by kierunek wektora  $\vec{B}$  obrócił się o 30° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara? b) Do jakiego położenia wyznaczonego wartością współrzędnej x należy następnie przesunąć przewód 3, by kierunek  $\vec{B}$  obrócił się o 30° i był taki sam jak na początku?

••25 ssm Przewód, w którym płynie prąd o natężeniu I = 3 A, jest ułożony jak na rysunku 29.53. Składa się on z dwóch półprostych oraz łuku okręgu o kącie środko-



Rys. 29.53. Zadanie 25

wym  $\theta$ . Wszystkie elementy obwodu leżą w jednej płaszczyźnie. Jaka musi być wartość kąta  $\theta$ , aby indukcja *B* w środku okręgu była równa zeru?

••26 S Na rysunku 29.54a przedstawiono przewód 1 składający się z dwóch odcinków radialnych oraz łuku okręgu o promieniu *R*; przez przewód ten płynie prąd o natężeniu  $I_1 = 0,5$  A w stronę zaznaczoną na rysunku. Przewód 2, przedstawiony na rysunku w przekroju, jest długi, prostoliniowy i prostopadły do płaszczyzny rysunku, a jego odległość od wierzchołka łuku jest równa promieniowi łuku. W przewodzie 2 płynie prąd o natężeniu  $I_2$ , którego wartość można dowolnie zmieniać. Przepływ prądu w przewodach powoduje wytworzenie pola magnetycznego, którego indukcja w wierzchołku łuku jest równa  $\vec{B}$ . Na rysunku 29.54b przedstawiono wykres zależności kwadratu wartości indukcji,  $B^2$ , od  $I_2^2$ .



Rys. 29.54. Zadanie 26

Skala osi pionowej jest wyznaczona przez  $B_s^2 = 10^{-9} \text{ T}^2$ . Jaki jest kąt środkowy łuku okręgu?

••27 Na rysunku 29.55 rzedstawiono przekrój poprzeczny układu składającego się z dwóch bardzo długich, prostoliniowych przewodów, w których płyną prądy, odpowiednio,  $I_1 = 30$  mA oraz  $I_2 = 40$  mA skierowane przed płaszczyznę rysunku. Przewody te znajdują



Rys. 29.55. Zadanie 27

się w jednakowych odległościach od początku układu współrzędnych. Oznaczmy przez  $\vec{B}$  indukcję magnetyczną w początku układu współrzędnych. Jak należy dobrać nową wartość natężenia  $I_1$ , by kierunek wskazywany przez wektor  $\vec{B}$ obrócił się o 20° zgodnie z ruchem wskazówek zegara?

••28 •• Na rysunku 29.56a przedstawiono dwa przewody, przez które płynie prąd. Przewód 1 składa się z dwóch odcinków radialnych oraz łuku okręgu o promieniu R; przez przewód ten płynie prąd o natężeniu  $I_1 = 2$  A w stronę zaznaczoną na rysunku. Przewód 2 jest długi i prostoliniowy, płynie przez niego prąd o natężeniu  $I_2$ , które może być dowolnie zmieniane, a jego odległość od wierzchołka łuku przewodu 1 jest równa R/2. Zmierzono wypadkową indukcję magnetyczną  $\vec{B}$  w wierzchołku łuku, na rysunku 29.56b przedstawiono zależność składowej  $\vec{B}$  prostopadłej do płaszczyzny rysunku od natężenia  $I_2$ . Skala osi poziomej jest wyznaczona przez  $I_{2,s} = 1$  A. Jaki jest kąt środkowy łuku?



••29 ssm Na rysunku 29.57 przedstawiono cztery długie przewody miedziane ułożone równolegle w ten sposób, że w przekroju poprzecznym wyznaczają wierzchołki kwadratu o boku a = 20 cm. W każdym przewodzie płynie



prąd o natężeniu 20 A, przy czym w przewodach 1 i 4 prąd płynie przed płaszczyznę rysunku, a w przewodach 2 i 3 za płaszczyznę rysunku. Znajdź wypadkowy wektor  $\vec{B}$  w środku kwadratu.

•••30 • Dwa długie, cienkie, prostoliniowe przewody leżą na powierzchni równie długiego plastikowego walca o promieniu R = 20 cm. Na rysunku 29.58a przedstawiono przekrój poprzeczny tego układu, na którym zaznaczono położenia walca i przewodu 1, ale nie przewodu 2. Przewód 2 znajduje się w ustalonym położeniu, położenie przewodu 1 opisane katem  $\theta_1$  zmienia sie od  $\theta_1 = 0^\circ$  do  $\theta_1 = 180^\circ$ ; innymi słowy, punkt, w którym przewód 1 przecina płaszczyznę xy i przechodzi przez pierwszą lub drugą ćwiartkę układu współrzednych. Mierzone jest wypadkowe pole magnetyczne na osi walca. Na rysunku 29.58b przedstawiono zależność składowej  $B_x$  indukcji tego pola od kąta  $\theta_1$ , przy czym skala osi pionowej jest dana przez  $B_{xs} = 6 \,\mu\text{T}$ , na rysunku 29.58c przedstawiono zaś zależność składowej  $B_v$  od  $\theta_1$ , przy czym skala osi pionowej jest dana przez  $B_{vs} = 4 \,\mu\text{T.}$  a) Jaki kąt  $\theta_2$ opisuje położenie przewodu 2? b) Ile wynosi nateżenie prądu płynącego w przewodzie 1 oraz c) w którą stronę (przed czy za płaszczyznę rysunku) prąd ten płynie? d) Ile wynosi natę-



żenie prądu płynącego w przewodzie 1 oraz e) w którą stronę (przed czy za płaszczyznę rysunku) prąd ten płynie?

•••31 Na rysunku 29.59 przedstawiono przewód z prądem, przy czym a = 4,7 cm, w przewodzie płynie zaś prąd o natężeniu 13 A. Wyznacz a) wartość oraz b) kierunek (przed czy za płaszczyznę rysunku) indukcji magnetycznej w punkcie *P*.



Rys. 29.59. Zadanie 31

•••32 • Przedstawiony na rysunku 29.60a przewód z prądem składa się z dwóch odcinków radialnych oraz dwóch półokręgów o tym samym środku, przy czym promień większego okręgu jest równy 10 cm. Początkowo cały układ znajduje się w jednej płaszczyźnie, następnie mniejszy półokrąg jest obracany o kąt  $\theta$ , aż znajdzie się w położeniu prostopadłym do wyjściowej płaszczyzny, przedstawionym na rysunku 29.60b. Na rysunku 29.60c przedstawiono wykres zależności wypadkowej indukcji magnetycznej w środku półokręgów od kąta  $\theta$ . Skala osi pionowej tego wykresu jest wyznaczona przez  $B_a = 10 \,\mu$ T oraz  $B_b = 12 \,\mu$ T. Jaki jest promień mniejszego z półokręgów?





•••33 ssm ilw Na rysunku 29.61 przedstawiono przekrój długiej cienkiej taśmy o szerokości w, w której płynie równomiernie rozłożony prąd o całkowitym natężeniu I =4,61  $\mu$ A, skierowany za płasz-



czyznę rysunku. Wyraź za pomocą wektorów jednostkowych wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w punkcie P położonym w płaszczyźnie taśmy, w odległości d = 2,16 cm od jej brzegu. (*Wskazówka*: Wyobraź sobie, że taśma składa się z wielu długich cienkich drutów, ułożonych równolegle).

•••34 • Na rysunku 29.62 przedstawiono przekrój poprzeczny układu składającego się z plastikowego walca o promieniu 20 cm – oraz dwóch długich, prosto- przewód 1liniowych przewodów leżących na powierzchni tego walca. Przewód 1 jest zamocowany po lewej stronie wal-



**Rys. 29.62.** Zadanie 34

ca i płynie w nim prąd o natężeniu  $I_1 = 60$  mA, skierowany przed płaszczyznę rysunku. Przewód 2, w którym płynie prąd o natężeniu  $I_2 = 40$  mA, skierowany przed płaszczyznę rysunku, może przybierać różne położenia na powierzchni walca. Dla jakiej (dodatniej) wartości kąta  $\theta_2$  wypadkowa indukcja pola magnetycznego na osi walca ma wartość 80 nT?

#### Podrozdział 29.2 Siły działające między dwoma równoległymi przewodami z prądem

•35 ssm Na rysunku 29.63 przedstawiono przekrój poprzeczny przez układ składający się z dwóch długich prostoliniowych przewodów z prądem. Przez przewód 1, leżący w odległości  $d_1 = 2,4$  cm od pewnej płaszczyzny, płynie prąd o natężeniu 4 mA skierowany przed płaszczyznę rysunku. Przez przewód 2, równoległy do przewodu 1 i leżący na tej płaszczyźnie w odległości  $d_2 = 5$  cm od rzutu prostopadłego prze-

wodu 1 na płaszczyznę, płynie prąd o natężeniu 6,8 mA skierowany za płaszczyznę rysunku. Wyznacz składową *x* siły magnetycznej działającej na przewód 2 wskutek przepływu prądu w przewodzie 1.

••36 Na rysunku 29.64 przedstawiono pięć długich równoległych przewodów o długości 10 m, leżących w płaszczyźnie *xy*. W każdym przewo-





Rys. 29.64. Zadania 36 i 39

dzie płynie prąd o natężeniu I = 3 A skierowany przed płaszczyznę rysunku. Odległość między sąsiednimi przewodami jest równa d = 8 cm. Na każdy z pięciu przewodów działa siła magnetyczna związana z przepływem prądu w pozostałych przewodach. Używając wektorów jednostkowych, wyraź siłę magnetyczną na jednostkę długości wywieraną na: a) przewód 1, b) przewód 2, c) przewód 3, d) przewód 4 oraz e) przewód 5.

••37 • Na rysunku 29.57 przedstawiono cztery długie przewody ułożone równolegle w ten sposób, że w przekroju poprzecznym wyznaczają wierzchołki kwadratu o boku a = 13,5 cm. W każdym przewodzie płynie prąd o natężeniu 7,5 A, przy czym w przewodach 1 i 4 prąd płynie przed płasz-

czyznę rysunku, a w przewodach 2 i 3 za płaszczyznę rysunku. Używając wektorów jednostkowych, wyraź wypadkową siłę magnetyczną działającą na odcinek przewodu 4 *o długości jednego metra*.

••38 😳 Na rysunku 29.65a przedstawiono przekrój poprzeczny układu składającego się z trzech równoległych przewodów, w których płyną prądy. Przewody 1 i 2 są zamocowane w ustalonych położeniach, które można opisać współrzedna x, a odległość miedzy tymi przewodami jest równa d. Przez przewód 1 płynie prąd o nateżeniu 0,75 A, ale kierunek przepływu prądu nie jest znany. Przewód 3, przez który płynie prąd o natężeniu 0,25 A skierowany przed płaszczyzne rysunku, może być dowolnie przesuwany wzdłuż osi x w obszarze po prawej stronie przewodu 2. Przy zmianie położenia przewodu 3 zmienia się także wypadkowa siła magnetyczna  $\vec{F}_2$  działająca na przewód 2 wskutek przepływu prądu w przewodach 1 i 3. Składową x tej siły możemy oznaczyć przez  $F_{2x}$ , a wartość tej składowej przypadającą na odcinek przewodu o długości  $L_2$  przez  $F_{2x}/L_2$ . Na rysunku 29.65b przedstawiono zależność  $F_{2x}/L_2$  od położenia x przewodu 3. Skala osi poziomej jest wyznaczona przez  $x_{\rm s} = 12$  cm, a przy  $x \to \infty$  wielkość  $F_{2x}/L_2$  dąży do wartości granicznej  $-0.627 \,\mu$ N/m. Wyznacz a) natężenie prądu płynacego w przewodzie 2 oraz b) kierunek tego pradu (przed czy za płaszczyzne rysunku).



Rys. 29.65. Zadanie 38

••39 The Na rysunku 29.64 przedstawiono pięć długich równoległych przewodów, leżących w płaszczyźnie *xy*. Odległość między sąsiednimi przewodami jest równa d = 50 cm. W przewodach tych płyną prądy o natężeniach, odpowiednio,  $I_1 = 2$  A,  $I_2 = 4$  A,  $I_3 = 0,25$  A,  $I_4 = 4$  A oraz  $I_5 = 2$  A, przy czym prądy płynące w przewodach 1, 3, 4 i 5 są skierowane za płaszczyznę rysunku, a prąd płynący w przewodzie 2 przed płaszczyznę rysunku. Ile wynosi wartość wypadkowej siły działającej na jednostkę długości przewodu 3 wskutek przepływu prądu w pozostałych przewodach?

••40 Na rysunku 29.57 przedstawiono cztery długie przewody ułożone równolegle w taki sposób, że w przekroju poprzecznym wyznaczają wierzchołki kwadratu o boku *a* = 13,5 cm. W każdym przewodzie płynie prąd o natężeniu 15 A skierowany przed płaszczyznę rysunku. Używając wektorów jednostkowych, wyraź wypadkową siłe magnetyczną działającą na odcinek przewodu 1 o długości jednego metra.

•••41 ilw W długim prostym przewodzie na rysunku 29.66 płynie prąd o natężeniu 30 A, a w prostokątnej ramce prąd o natężeniu 20 A. Oblicz wypadkową siłę działającą na ramkę wskutek przepływu prądu w przewodzie, przyjmując a = 1 cm, b = 8 cm i L = 30 cm.



Podrozdział 29.3 Prawo Ampère'a

•42 W pewnym obszarze płynie prąd o jednorodnej gęstości równej 15 A/m<sup>2</sup> skierowanej wzdłuż osi z. Oblicz wartość całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  dla konturu całkowania składającego się z trzech odcinków, z których pierwszy biegnie od punktu o współrzędnych (4d, 0, 0) do punktu (4d, 3d, 0), drugi biegnie od punktu (4d, 3d, 0) do punktu (0, 0, 0), a trzeci biegnie od punktu (0, 0, 0) do punktu (4d, 0, 0), przy czym d = 20 cm.

•43 Na rysunku 29.67 przedstawiono przekrój poprzeczny długiego walcowego przewodnika o promieniu a = 2 cm, w którym płynie równomiernie rozłożony prąd o natężeniu

170 A. Wyznacz wartość indukcji pola magnetycznego a) na osi walca oraz w odległości b) 1 cm od osi walca, c) 2 cm od osi walca (czyli na jego powierzchni) oraz d) 4 cm od osi walca.

•44 Na rysunku 29.68 przedstawiono dwie kwadratowe, przewodzące ramki, w których płyną prądy o natężeniach  $I_1 = 5$  A oraz  $I_2 = 3$  A, jak pokazano na rysunku 29.49. Jaka jest wartość całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  dla a) konturu 1 oraz b) konturu 2.

•45 ssm W każdym z ośmiu przewodów na rysunku 29.69 płynie prąd o natężeniu 2 A, skierowany za lub przed płaszczyznę rysunku. Zaznaczono dwa kontury całkowa-



Rys. 29.67. Zadanie 43



**Rys. 29.68.** Zadanie 44



Rys. 29.69. Zadanie 45

nia dla całki krzywoliniowej  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ . Wyznacz wartość całki dla a) konturu 1 oraz b) konturu 2.

•46 Osiem przewodów przecina prostopadle płaszczyznę rysunku w punktach pokazanych na rysunku 29.70. W przewodzie oznaczonym liczbą całkowitą k (k = 1, 2, ..., 8) płynie prąd o natężeniu kI, gdzie I = 4,5 mA. W przewodach oznaczonych nieparzystą liczbą k prąd płynie przed płaszczyznę rysunku, natomiast w przewodach oznaczonych parzystą liczbą kprąd płynie za płaszczyznę rysunku. Oblicz wartość całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  wzdłuż zamkniętego konturu w kierunku wskazanym na rysunku.



Rys. 29.70. Zadanie 46

••47 ilw W długim przewodzie w kształcie walca o promieniu a = 3,1 mm płynie prąd o gęstości  $\vec{J}$ , która jest skierowana wzdłuż osi walca, a jej wartość zależy od odległości r od osi walca zgodnie ze wzorem  $J = J_0 r/a$ , gdzie  $J_0 = 31 \text{ A/m}^2$ . Wyznacz wartość indukcji magnetycznej dla a) r = 0, b) r = a/2 oraz c) r = a.

••48 W długiej okrągłej rurze o zewnętrznym promieniu równym R = 2,6 cm płynie równomiernie rozłożony prąd o natężeniu I = 8 mA skierowany za płaszczyznę rysunku 29.71. Przewód biegnie równolegle do rury w odległości 3R, licząc od środka rury do środka przewodu. Wyznacz wartość i kierunek prądu płynącego w przewodzie, wiedząc, że indukcja magnetyczna wypadkowego pola w punkcie P ma taką samą war-



Rys. 29.71. Zadanie 48

tość jak wypadkowego pola magnetycznego w środku rury, ale jest przeciwnie skierowana.

#### Podrozdział 29.4 Solenoidy i toroidy

•49 Toroid o przekroju w kształcie kwadratu o boku 5 cm i promieniu wewnętrznym 15 cm ma 500 zwojów, przez które płynie prąd o natężeniu 0,8 A. (Toroid powstał z kwadratowego solenoidu — a nie okrągłego, jak na rysunku 29.17 — zgiętego w kształcie obwarzanka). Ile wynosi indukcja magnetyczna pola wewnątrz toroidu w odległości od środka równej: a) promieniowi wewnętrznemu, b) promieniowi zewnętrznemu?

•50 W solenoidzie o długości 95 cm i promieniu 2 cm, składającym się z 1200 zwojów płynie prąd o natężeniu 3,6 A. Oblicz wartość indukcji magnetycznej wewnątrz solenoidu.

•51 W solenoidzie o 200 zwojach, mającym długość 25 cm i średnicę 10 cm, płynie prąd o natężeniu 0,29 A. Oblicz wartość indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  wewnątrz solenoidu.

•52 W solenoidzie o długości 1,3 m i średnicy 2,6 cm płynie prąd o natężeniu 18 A. Wartość indukcji magnetycznej wewnątrz solenoidu jest równa 23 mT. Oblicz długość drutu, z którego nawinięty jest solenoid.

••53 Długi solenoid ma 100 zwojów/cm i płynie w nim prąd o natężeniu *I*. Elektron porusza się wewnątrz solenoidu po okręgu o promieniu 2,3 cm w płaszczyźnie prostopadłej do osi solenoidu. Prędkość elektronu wynosi 0,046*c* (*c* — prędkość światła). Oblicz natężenie prądu *I* w solenoidzie.

••54 Elektron został wystrzelony do wnętrza solenoidu w taki sposób, że gdy zaczyna on oddziaływać z polem magnetycznym na końcu solenoidu, prędkość elektronu ma wartość 800 m/s i jest skierowana pod kątem 30° do osi solenoidu. Solenoid ma 8000 zwojów i płynie w nim prąd o natężeniu 4 A. W tej sytuacji elektron będzie poruszał się po linii śrubowej o osi pokrywającej się z osią solenoidu. Ile razy elektron obiegnie tę oś przed osiągnięciem drugiego końca solenoidu? (W rzeczywistych solenoidach pole magnetyczne nie jest jednorodne w pobliżu końców solenoidu i rzeczywista liczba obiegów jest nieco mniejsza od wartości tu wyznaczonej).

••55 ssm ilw www W długim solenoidzie o 10 zwojach na cm i promieniu 7 cm płynie prąd o natężeniu 20 mA, a w prostym przewodzie ułożonym wzdłuż osi solenoidu płynie prąd o natężeniu 6 A. W jakiej odległości od osi linie wypadkowego pola magnetycznego tworzą kąt 45° z kierunkiem osi? b) Jaka jest tam wartość indukcji magnetycznej pola?

## Podrozdział 29.5 Cewka z prądem jako dipol magnetyczny

•56 Na rysunku 29.72 przedstawiono układ zwany cewkami Helmholtza. Układ ten składa się z dwóch cewek w kształcie okręgów o promieniu R = 2,5 cm, umieszczonych współo-

siowo w odległości s = R. Każda z cewek ma 200 zwojów i płyną w nich w tych samych kierunkach prądy o takim samym natężeniu I =12,2 mA. Oblicz wartość wypadkowej indukcji magnetycznej w punkcie P położonym w połowie odległości między cewkami.



**Rys. 29.72.** Zadanie 56

•57 ssm Student zbudował krótki elektromagnes, nawijając 300 zwojów drutu na drewniany walec o średnicy d = 5 cm. Po dołączeniu źródła w uzwojeniu płynie prąd o natężeniu 4 A. a) Jaka jest wartość momentu magnetycznego tego urządzenia? b) W jakiej odległości  $z \gg d$ , mierzonej wzdłuż osi, indukcja magnetyczna pola tego dipola będzie miała wartość 5  $\mu$ T (czyli w przybliżeniu jedną dziesiątą indukcji magnetycznej pola ziemskiego)?

•58 Na rysunku 29.73a przedstawiono odcinek przewodu, w którym płynie prąd o natężeniu *I*. Przewód został wygięty w taki sposób, że tworzy okrągłą cewkę o jednym zwoju. Na rysunku 29.73b taki sam odcinek przewodu został zagięty tak,

że tworzy cewkę o dwóch zwojach i o promieniu dwa razy mniejszym. a) Jeżeli  $B_a$ i  $B_b$  są wartościami indukcji magnetycznej w środku każdej z cewek, to jaki jest stosunek  $B_b/B_a$ ? b) Jaki jest stosunek wartośći momentów dipolowych  $\mu_b/\mu_a$  obydwu cewek?



•59 ssm Jaka jest wartość dipolowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$  solenoidu opisanego w zadaniu 51?

••60 Solution Na rysunku 29.74a przedstawiono dwie pętle kołowe o promieniu 4 cm, których środki leżą na osi y, pętle leżą zaś w płaszczyznach prostopadłych do osi y; przez pętle te płyną prądy o różnych natężeniach. Początkowa odległość między pętlami wynosi L = 3 cm, przy czym środek pętli 2 znajduje się w początku układu współrzędnych. Przepływ prądu przez pętle jest źrodłem pola magnetycznego; jego składowa y w początku układu współrzędnych, którą oznaczymy przez  $B_y$ , jest mierzona podczas stopniowego przesuwania pętli 2 w kierunku wyznaczonym przez oś y. Na rysunku 29.74b przedstawiono zależność  $B_y$  od położenia y pętli 2. Dla  $y \rightarrow \infty B_y$  dąży do wartości granicznej 7,2 µT, a skala osi poziomej jest wyznaczona przez  $y_s = 10$  cm. Jakie jest a) natężenie  $I_1$  prądu płynącego w pętli 1 oraz b) natężenie  $I_2$ prądu płynącego w pętli 2?



Rys. 29.74. Zadanie 60

••61 W pętli o kształcie okręgu o promieniu 12 cm płynie prąd o natężeniu 15 A. Płaska cewka o promieniu 0,82 cm i 50 zwojach, w której płynie prąd o natężeniu 1,3 A, jest tak umieszczona w środku pętli, że płaszczyzny pętli i cewki są prostopadłe. Przyjmij, że pole magnetyczne wytworzone przez pętlę jest w przybliżeniu jednorodne w obszarze zajętym przez cewkę. a) Wyznacz wartość indukcji pola wytwarzanego przez cewkę w jej środku oraz b) wartość momentu siły działającej na cewkę.

••62 Na rysunku 29.75 przedstawiono obwód składający się z dwóch odcinków radialnych oraz dwóch półokręgów, przez który płynie prąd o natężeniu I = 56,2 mA. Półokręgi mają

wspólny środek P, a ich promienie są równe odpowiednio a = 5,72 cm i b = 9,36 cm. Wyznacz a) wartość oraz b) kierunek (przed czy za płaszczyznę rysunku) indukcji pola magnetycznego wytwarzanego w punkcie P, a także c) wartość oraz d) kierunek dipolowego momentu magnetycznego obwodu.



**Rys. 29.75.** Zadanie 62

••63 Na rysunku 29.76 przedstawiono przewód *abcdefgh* przebiegający przez osiem z dwunastu krawędzi sześcianu, przy czym długość krawędzi jest równa 10 cm. Przez ten przewód płynie prąd o natężeniu 6 A. a) Traktując

ten przewód jako złożenie trzech kwadratowych ramek z prądem, wyznacz wektor wypadkowego momentu magnetycznego przewodu i zapisz ten wektor za pomocą wektorów jednostkowych. b) Jaka jest wartość wypadkowej indukcji pola magne- <sup>z</sup> tycznego w punkcie o współrzednych (0, 5, 0) m?



# Zadania dodatkowe

64 Na rysunku 29.77 przedstawiono obwód składający się z dwóch odcinków radialnych oraz dwóch łuków okręgu

o wspólnym środku *P* i promieniach odpowiednio 2 m oraz 4 m. Przez obwód ten płynie prąd o natężeniu *I* = 200 mA, a zaznaczony na rysunku 29.77 kąt  $\theta$  ma miarę  $\pi/4$  rad. Wyznacz a) wartość oraz b) kierunek (przed czy za płaszczyznę rysunku) wypadkowej indukcji magnetycznej w punkcie *P*.



**Rys. 29.77.** Zadanie 64

**65** W przewodzie o przekroju kołowym i promieniu 8 mm płynie równomiernie rozłożony prąd o natężeniu 25 A. W jakiej odległości od osi przewodu znajdują się punkty, w których wartość indukcji magnetycznej jest równa 0,1 mT?

**66** Dwa długie przewody leżą w płaszczyźnie xy i są równoległe do osi x, a w każdym z nich prąd płynie w kierunku osi x. Współrzędna y przewodu 1 jest równa 10 cm, a płynący w nim prąd ma natężenie 6 A. Współrzędna y przewodu 2 jest równa 5 cm, a płynący w nim prąd ma natężenie 10 A. a) Wyznacz wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w początku układu współrzędnych i zapisz ten wektor za pomocą wektorów jednostkowych. b) Jaka jest współrzędna y punktów, dla których  $\vec{B} = 0$ ? c) Jaka byłaby współrzędna y punktów, dla których  $\vec{B} = 0$ , gdyby kierunek przepływu prądu w przewodzie 1 został odwrócony?

67 Z dwóch przewodów takiej samej długości L utworzono okrąg i kwadrat. W każdym przewodzie płynie prąd o takim samym natężeniu I. Wykaż, że indukcja magnetyczna w środku kwadratu jest większa od indukcji magnetycznej w środku okręgu.

**68** W długim przewodzie prostoliniowym płynie prąd o natężeniu 50 A. Poruszający się z prędkośćią 10<sup>7</sup> m/s elektron znajduje się w pewnej chwili w odległości 5 cm od tego przewodu. Wyznacz wartość działającej wówczas na elektron siły magnetycznej, zakładając, że prędkość elektronu a) jest skierowana radialnie w stronę przewodu, b) jest równoległa do przewodu i skierowana zgodnie z kierunkiem przepływu prądu oraz c) jest prostopadła do każdego z kierunków określonych w punktach a) i b).

**69** Trzy długie przewody są równoległe do osi z, a w każdym z nich płynie prąd o natężeniu 10 A skierowany zgodnie z kierunkiem osi z. Punkty przecięcia tych przewodów z płaszczyzną xy tworzą trójkąt równoboczny o promieniu 50 cm, przedstawiony na rysunku 29.78. Czwarty przewód

(przewód *b*) jest równoległy do trzech opisanych wyżej i przechodzi przez środek podstawy trójkąta. Wiedząc, że wypadkowa siła magnetyczna działająca na przewód *a* jest równa zeru, wyznacz a) natężenie oraz b) kierunek prądu płynącego w przewodzie *b*.

**70** Na rysunku 29.79 przedstawiono obwód składający się z trzech odcinków radialnych, półokręgu o promieniu 4 m oraz dwóch ćwiartek okręgu o promieniu 2 m. Wyznacz wartość indukcji magnetycznej we wspólnym środku okręgów wyznaczonych przez fragmenty obwodu.



Rys. 29.78. Zadanie 69



**Rys. 29.79.** Zadanie 70

**71** Nieizolowany przewód miedziany o średnicy 2,6 mm może przewodzić prąd o natężeniu 50 A, nie przegrzewając się. Dla takiego prądu wyznacz wartość indukcji magnetycznej na powierzchni przewodu.

**72** Przez długi pionowy przewód płynie prąd o nieznanym natężeniu. W długiej cienkiej powierzchni walcowej o promieniu 3 cm, na osi której leży ten przewód, płynie w górę prąd o natężeniu 30 mA. Promień powierzchni walcowej jest równy 3 mm. Jeśli wartość indukcji pola magnetycznego

w punkcie odległym o 5 mm od przewodu wynosi 1  $\mu$ T, to jakie są a) natężenie oraz b) kierunek prądu w przewodzie?

**73** Na rysunku 29.80 przedstawiono przekrój poprzeczny przez długi przewód walcowy o promieniu a = 4 cm. W przewodzie tym znajduje się długie wydrążenie w kształcie walca o promieniu b = 1,5 cm. Równoległe osie przewodu i wydrążenia są odległe o d = 2 cm. Przez



Rys. 29.80. Zadanie 73

przewód płynie prąd o natężeniu I = 5,25 A, jednorodnie rozłożony w wydrążonym przewodzie (zacieniowany obszar na rysunku). a) Wyznacz wartość indukcji magnetycznej na osi wydrążenia. b) Przedyskutuj dwa przypadki szczególne: b = 0 oraz d = 0.

**74** Wartość indukcji magnetyczne w punktach odległych o 88 cm od osi długiego przewodu prostoliniowego jest równa 7,3  $\mu$ T. Ile wynosi natężenie prądu płynącego w przewodzie?

**75** ssm Na rysunku 29.81 przedstawiono odcinek przewodu, w którym płynie wzdłuż osi y prąd o natężeniu I = 2 A. Środek tego odcinka pokrywa się z początkiem układu współrzędnych, odcinek ma zaś długość  $\Delta s = 3$  cm i stanowi fragment pewnego większego obwodu. Indukcja pola magne-



Rys. 29.81. Zadanie 75

tycznego wytworzonego przez ten odcinek w punktach odległych o kilka metrów od początku układu współrzędnych może być obliczona z prawa Biota–Savarta zapisanego w postaci  $\mu_0$   $\sin \theta$ 

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \Delta s \cdot \frac{\sin \theta}{r^2},$$

(gdzie *r* jest odległością takiego punktu od początku układu współrzędnych, a  $\theta$  — kątem, jaki linia łącząca ten punkt z początkiem układu współrzędnych tworzy z osią y), gdyż wszystkie wkłady d $\vec{B}$  są wówczas praktycznie jednakowe. Wyznacz i zapisz za pomocą wektorów jednostkowych indukcję magnetyczną  $\vec{B}$  w punktach o współrzędnych a) (0, 0, 5) m, b) (0, 6, 0) m, c) (7, 7, 0) m oraz d) (-3, -4, 0) m.

**76 •** Na rysunku 29.82 przedstawiono przekrój poprzeczny układu składającego się z dwóch długich, równoległych przewodów odległych o d = 10 cm; w każdym z przewodów płynie prąd o natężeniu 100 A, przy czym



Rys. 29.82. Zadanie 76

prąd płynący w przewodzie 1 jest skierowany przed płaszczyznę rysunku. Punkt *P* jest równoodległy od obu przewodów, a najkrótsze odcinki łączące go z przewodami tworzą kąt prosty. Wyznacz i zapisz za pomocą wektorów jednostkowych wypadkową indukcję magnetyczną w punkcie *P*, zakładając, że w przewodzie 2 prąd płynie a) przed płaszczyznę rysunku, b) za płaszczyzne rysunku.

**77** W każdym z dwóch nieskończenie długich przewodów przedstawionych na rysunku 29.83 płynie w tę samą stronę prąd o tym samym natężeniu. Fragment każdego z przewodów biegnie po ćwiartce danego okręgu o promieniu *R*. Wykaż, że wytwarzane w środku okręgu



Rys. 29.83. Zadanie 77

pole magnetyczne jest takie samo jak w punktach znajdujących się w odległości *R* poniżej leżącego w płaszczyźnie rysunku nieskończonego, poziomego przewodu prostoliniowego, w którym prąd płynie w lewą stronę.

**78** Długi przewód, w którym płynie prąd o natężeniu 100 A, umieszczono prostopadle do linii zewnętrznego jednorodnego pola magnetycznego o indukcji 5 mT. Jaka jest odległość między tym przewodem a punktami, w których wypadkowa indukcja magnetyczna jest równa zeru?

**79** Przez długi przewód w kształcie wydrążonego walca o promieniu wewnętrznym 2 mm i promieniu zewnętrznym 4 mm płynie jednorodnie rozłożony prąd o natężeniu 24 A. Na osi walca znajduje się długi, cienki przewód, przez który płynie w przeciwną stronę prąd o natężeniu 24 A. Wyznacz wartość indukcji magnetycznej w punktach odległych o a) 1 mm, b) 3 mm oraz c) 5 mm od osi walca.

**80** W długim przewodzie o promieniu przekraczającym 4 mm płynie jednorodnie rozłożony prąd. Wartość indukcji magnetycznej jest równa 0,28 mT w punktach odległych o 4 mm od osi przewodu oraz 0,2 mT w punktach odległych o 10 mm od osi przewodu. Jaki jest promień tego przewodu?

**81 ssm** Na rysunku 29.84 przedstawiono przekrój przez nieskończoną, przewodzącą płytę, w której płynie prąd o gęstości liniowej  $\lambda$  względem kierunku osi *x*. Prąd płynie prostopadle przed pła-



szczyznę rysunku. a) Zastosuj prawo Biota–Savarta i rozważ symetrie, aby wykazać, że dla wszystkich punktów *P* znajdujących się nad płytą i dla wszystkich punktów *P'* pod nią wektory indukcji *B* są równoległe do płyty i skierowane tak, jak pokazano na rysunku. b) Zastosuj prawo Ampère'a, aby wykazać, że  $B = \frac{1}{2}\mu_0\lambda$  we wszystkich punktach *P* i *P'*. 82 Na rysunku 29.85 przedstawiono przekój poprzeczny układu złożonego z dwóch długich, równoległych przewo-

dów odległych o d = 18,6 cm. W każdym z przewodów płynie prąd o natężeniu 4,32 A, skierowany przed płaszczyznę rysunku dla przewodu 1 i za płaszczyznę rysunku dla przewodu 2. Wyznacz i zapisz za pomocą wektorów jednostkowych indukcję magnetyczną w punkcie *P* znajdującym się w odległości R = 34,2 cm od płaszczyzny zawierającej przewody.

**83** ssm Wyznacz i zapisz za pomocą wektorów jednostkowych indukcję magnetyczną w punkcie Pzaznaczonym na rysunku 29.86, przyjmując I = 10 A oraz a = 8 cm. (Zauważ, że przewody *nie* są długie).



**Rys. 29.86.** Zadanie 83

**84** Trzy długie przewody leżą w płaszczyźnie xy i są równoległe do osi x, przy czym odległość między kolejnymi parami przewodów wynosi 10 cm. W leżących na zewnątrz przewodach płynie prąd o natężeniu 5 A, skierowany wzdłuż osi x. Wyznacz wartość siły działającej na trzymetrowy odcinek jednego z zewnętrznych przewodów, jeśli w przewodzie znajdującym się między nimi płynie prąd o natężeniu 3,2 A, skierowany: a) zgodnie z kierunkiem osi x, b) przeciwnie do kierunku osi x.

**85** ssm Na rysunku 29.87 przedstawiono przekrój poprzeczny przewodu w kształcie wydrążonego walca o promieniach a i b, w którym płynie jednorodnie rozłożony prąd I. a) Wykaż, że indukcję magnetyczną B(r) w punk-



Rys. 29.87. Zadanie 85

tach odległych o r od osi walca określa dla a < r < b wzór

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi (a^2 - b^2)} \cdot \frac{r^2 - b^2}{r}.$$

b) Sprawdź, że powyższe równanie daje dla r = a indukcję magnetyczną długiego przewodu prostoliniowego, w którym płynie prąd o natężeniu *I*, dla r = b zerową indukcję magnetyczną, a dla b = 0 indukcję magnetyczną wewnątrz długiego

przewodu o promieniu *a*, przewodzącego prąd o natężeniu *I*. c) Przyjmij a = 2 cm, b = 1,8 cm oraz I = 100 A i naszkicuj wykres zależności B(r) dla 0 < r < 6 cm.

**86** Wykaż, że wartość indukcji magnetycznej pola wytworzonego w środku prostokątnej ramki o długości *L* i szerokości *W*, w której płynie prąd o natężeniu *I*, wynosi

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{(L^2 + W^2)^{1/2}}{LW}.$$

**87** Na rysunku 29.88 przedstawiono przekrój poprzeczny długiego kabla koncentrycznego i zaznaczono odpowiednie promienie *a*, *b* i *c*. Przez wewnętrzną i zewnętrzną część kabla płyną prądy o tych samych natężeniach, ale przeciwnych kierunkach.



Rys. 29.88. Zadanie 87

Wyprowadź wzór określający wartość indukcji magnetycznej B(r) w odległości r od osi kabla dla a) r < c, b) c < r < b, c) b < r < a oraz d) r > a. e) Sprawdź znalezione wyrażenia dla wszystkich przypadków szczególnych, jakie tylko zdołasz wymyślić. f) Przyjmij a = 2 cm, b = 1,8 cm, c = 0,4 cm oraz I = 120 A i naszkicuj zależność B(r) w zakresie 0 < r < 3 cm.

**88** Na rysunku 29.89 przedstawiono schemat działa szynowego. Pocisk *P* znajduje się między dwiema szerokimi szynami o kołowym przekroju poprzecznym. Prąd ze źródła płynie przez szyny i przewodzący pocisk (bezpiecznik nie jest używany). a) Niech *w* oznacza odległość między szynami, *R* — promień każdej z szyn, a *I* — natężenie prądu. Wykaż, że siła działająca na pocisk jest skierowana wzdłuż szyn w prawo i jest dana przybliżonym wzorem

$$F = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi} \ln \frac{w+R}{R}.$$

b) Zakładając, że początkowo pocisk znajduje się w spoczynku na lewym krańcu szyn, oblicz prędkość v, z jaką zostanie wystrzelony z prawego krańca szyn. Przyjmij I = 450 kA,  $\omega = 12$  mm, R = 6,7 cm oraz L = 4 m; masa pocisku jest równa 10 g.



# R O Z D Z I A Ł 30

# Zjawisko indukcji i indukcyjność

# **30.1.** PRAWO FARADAYA I REGUŁA LENZA

# Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **30.01** opisać strumień magnetyczny przez zadaną powierzchnię jako "ilość" pola magnetycznego "przebijającego" tę powierzchnię (a nie ślizgającego się po niej);
- **30.02** określić zorientowany element płaskiej powierzchni jako wektor prostopadły do tej powierzchni o wartości równej polu tej powierzchni;
- **30.03** stwierdzić, że dowolną powierzchnię można podzielić na fragmenty dostatecznie małe i płaskie, że każdemu z nich można przypisać zorientowany element powierzchni  $d\vec{S}$ , czyli wektor prostopadły do danego fragmentu o wartości równej polu powierzchni tego fragmentu;
- **30.04** obliczyć strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przez zadaną powierzchnię, całkując iloczyn skalarny wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  i zorientowanego elementu powierzchni po tej powierzchni, wyraziwszy uprzednio iloczyn skalarny wektorów albo za pomocą ich długości i kąta między nimi albo za pomocą składowych;
- 30.05 stwierdzić, że gdy zmienia się gęstość linii pola magne-

#### Podstawowe fakty.

• Strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przez zadaną powierzchnię S znajdującą się w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  jest określony jako

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

gdzie całkowanie odbywa się po zadanej powierzchni. Jednostką strumienia magnetycznego jest weber, oznaczany jako 1 Wb = 1 T  $\cdot$  m<sup>2</sup>.

• Dla pola magnetycznego prostopadłego do powierzchni *S* i stałej wartości indukcji magnetycznej na tej powierzchni strumień jest równy

$$\Phi_B = BS \qquad (\vec{B} \perp S, \vec{B} \text{ jednorodne}).$$

 Gdy strumień magnetyczny przez powierzchnię ograniczoną przewodzącą pętlą zmienia się w czasie, w pętli powstaje SEM



- **30.06** stwierdzić, że prąd indukowany w przewodzącej pętli jest powodowany przez indukowaną SEM;
- 30.07 stosować prawo Faradaya, czyli związek między SEM indukowaną w przewodzącej pętli i szybkością zmian strumienia magnetycznego przez tę pętlę;
- 30.08 uogólnić prawo Faradaya dla cewki o wielu zwojach;
- 30.09 opisać trzy podstawowe sytuacje, w których może zmieniać się strumień pola przez cewkę;
- 30.10 zastosować regułę prawej dłoni oraz regułę Lenza w celu wyznaczenia SEM i prądu indukowanych w przewodzącej pętli;
- 30.11 stwierdzić, że przy zmianie strumienia magnetycznego przez pętlę indukuje się w niej prąd wytwarzający pole magnetyczne przeciwdziałające zmianie strumienia;
- **30.12** wyznaczyć SEM i prąd indukowane w przewodzącej pętli zawierającej źródło prądu.

oraz prąd; proces ten nazywamy indukcją. Indukowana SEM jest równa

$$=-rac{\mathrm{d} \Phi_B}{\mathrm{d} t}$$
 (prawo Faradaya),

E

• Jeśli pętlę zamienić na cewkę o N zwojach, SEM indukowana w cewce będzie równa

$$\mathcal{E} = -N \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}.$$

 Indukowany prąd ma taki kierunek, że pole magnetyczne wywołane przepływem tego prądu przeciwdziała zmianie strumienia magnetycznego indukującej prąd. Indukowana SEM ma ten sam kierunek co indukowany prąd.



# 0 fizyce

W rozdziale 29 omawialiśmy fakt, że przepływ prądu wytwarza pole magnetyczne. Było to nie lada zaskoczeniem dla badaczy, którzy odkryli to zjawisko. Prawdopodobnie jeszcze bardziej zaskakujące musiało być odkrycie odwrotnej zależności — że pole magnetyczne może być źródłem pola elektrycznego powodującego przepływ prądu. Związek między polem magnetycznym i wytwarzanym (*indukowanym*) przez nie polem elektrycznym jest dziś nazywany *prawem indukcji Faradaya*.

Choć prowadzone przez Michaela Faradaya i innych naukowców badania, które doprowadziły do sformułowania tego prawa, należałoby początkowo określić jako badania podstawowe, znajdują dziś one zastosowania w niemal każdej dziedzinie życia. Przykładem może być zastosowanie zjawiska indukcji w gitarach elektrycznych, które zrewolucjonizowały wczesną muzykę rockową i wciąż nie można sobie bez nich wyobrazić heavy metalu czy punk rocka. Zjawisko to leży także u podstaw konstrukcji generatorów elektrycznych zaopatrujących w prąd wielkie miasta i środki transportu oraz pieców indukcyjnych stosowanych powszechnie w hutach do szybkiego topienia dużych ilości metalu.

Zanim jednak dojdziemy do takich zastosowań jak gitara elektryczna, przyjrzymy się najpierw dwóm prostym doświadczeniom związanym z prawem indukcji Faradaya.

# Dwa doświadczenia

Przeanalizujmy dwa proste doświadczenia, aby przygotować się do omówienia prawa indukcji Faradaya.

*Pierwsze doświadczenie.* Na rysunku 30.1 przedstawiono przewodzącą pętlę połączoną z czułym amperomierzem. Ponieważ w układzie nie ma żadnego innego źródła siły elektromotorycznej (SEM), więc prąd w obwodzie nie płynie. Jeśli jednak będziemy przesuwać magnes sztabkowy w kierunku pętli, nagle w obwodzie pojawi się prąd. Prąd znika, gdy magnes przestaje się poruszać. Jeżeli teraz zaczniemy odsuwać magnes od pętli, prąd znów popłynie, ale tym razem w przeciwnym kierunku. Wykonując takie doświadczenia przez pewien czas, odkrylibyśmy, że:

- 1. Prąd pojawia tylko wtedy, gdy występuje względny ruch pętli i magnesu (tzn. jeden z tych elementów porusza się względem drugiego). Prąd znika, gdy pętla i magnes przestają się poruszać względem siebie.
- 2. Szybszy ruch wytwarza prąd o większym natężeniu.
- 3. Jeśli przybliżanie północnego bieguna magnesu do pętli wytwarza prąd płynący np. w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to oddalanie tego bieguna powoduje przepływ prądu w kierunku przeciwnym. Przybliżanie bieguna południowego do pętli lub oddalanie od niej również wywołuje przepływ prądu, ale w kierunkach przeciwnych niż przy ruchu bieguna północnego.

Prąd wytwarzany w pętli nazywamy **prądem indukowanym**, pracę przypadającą na jednostkę ładunku, wykonaną w celu wytworzenia prądu (czyli ruchu elektronów przewodnictwa, które tworzą ten prąd) nazywamy **indukowaną siłą elektromotoryczną (SEM)**, a zjawisko wytwarzania prądu i SEM nazywamy **zjawiskiem indukcji elektromagnetycznej**.



**Rys. 30.1.** Amperomierz wskazuje przepływ prądu w pętli z drutu, gdy magnes porusza się względem tej pętli

**Drugie doświadczenie.** To doświadczenie można wykonać za pomocą układu pokazanego na rysunku 30.2 i złożonego z dwóch przewodzących pętli, które znajdują się blisko siebie, ale się nie stykają. Jeżeli zamkniemy klucz S, włączając prąd w pętli po prawej stronie, to miernik wskaże nagły, ale krótkotrwały przepływ prądu — prądu indukowanego — w pętli po lewej stronie. Jeśli teraz otworzymy klucz, to w pętli po lewej stronie pojawi się znów nagły i krótkotrwały prąd indukowany, tym razem jednak płynący w przeciwnym kierunku. Otrzymujemy prąd indukowany (a więc i SEM indukowaną) tylko wtedy, gdy natężenie prądu w pętli po prawej stronie się zmienia (podczas włączania lub wyłączania), a nie wtedy, gdy natężenie jest stałe (nawet gdy jest duże).

Indukowana SEM i indukowany prąd w tych doświadczeniach powstają najwyraźniej wtedy, gdy coś się zmienia — ale co jest tym "czymś"? Faraday znalazł odpowiedź na to pytanie.

# Prawo indukcji Faradaya

Faraday uświadomił sobie, że SEM i prąd mogą być indukowane w pętli, tak jak w naszych dwóch doświadczeniach, gdy zmienia się *"ilość" pola magnetycznego* przechodzącego przez pętlę. Faraday doszedł następnie do wniosku, że "ilość" pola magnetycznego może być zilustrowana za pomocą linii pola magnetycznego przechodzących przez pętlę. **Prawo indukcji Faradaya**, sformułowane na podstawie naszych doświadczeń, brzmi następująco:

SEM jes

SEM jest indukowana w pętli po lewej stronie rysunków 30.1 i 30.2, gdy zmienia się liczba linii pola magnetycznego przechodzących przez pętlę.

Rzeczywista liczba linii pola, przechodzących przez pętlę nie ma znaczenia. Wartości indukowanej SEM i natężenia indukowanego prądu zależą od *szybkości*, z jaką ta liczba się zmienia.

W naszym pierwszym doświadczeniu (rys. 30.1) linie pola magnetycznego rozchodzą się z bieguna północnego magnesu. Tak więc w miarę przybliżania bieguna północnego do pętli liczba linii pola przechodzących przez pętlę rośnie. Ten wzrost najwidoczniej wywołuje ruch elektronów przewodnictwa w pętli (indukowany prąd) i dostarcza energii dla tego ruchu (indukowana SEM). Gdy magnes przestaje się poruszać, liczba linii pola przechodzących przez pętlę przestaje się zmieniać, a indukowany prąd i indukowana SEM znikają.

W naszym drugim doświadczeniu (rys. 30.2), gdy klucz jest otwarty, prąd nie płynie i nie ma pola magnetycznego. Jednakże, gdy włączymy prąd w prawej pętli, wzrastające natężenie prądu wytwarza pole magnetyczne wokół tej pętli, a także pętli po lewej stronie. Gdy indukcja magnetyczna rośnie, liczba linii pola magnetycznego przechodzących przez pętlę po lewej stronie również rośnie. Podobnie, jak w pierwszym doświadczeniu, ten wzrost najwidoczniej indukuje tam prąd i SEM. Gdy natężenie prądu w pętli po prawej stronie osiągnie końcową stałą wartość, liczba linii pola przechodzących przez pętlę po lewej stronie przestaje się zmieniać, a indukowany prąd i indukowana SEM znikają.



**Rys. 30.2.** Amperomierz wskazuje przepływ prądu w pętli po lewej stronie w momencie, gdy klucz S jest zamykany (aby włączyć prąd w pętli po prawej stronie) lub otwierany (aby wyłączyć prąd w pętli po prawej stronie). Obie cewki są nieruchome

### **Opis ilościowy**

Aby zrobić użytek z prawa Faradaya, musimy wiedzieć, jak obliczyć "ilość" pola magnetycznego przechodzącego przez pętlę. W rozdziale 23 obliczyliśmy w podobnym przypadku "ilość" pola elektrycznego przechodzącego przez pewną powierzchnię. W tym celu zdefiniowaliśmy strumień elektryczny  $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ . Teraz zdefiniujemy *strumień magnetyczny*. Wyobraź sobie, że pętla obejmująca powierzchnię *S* jest umieszczona w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ . Strumień magnetyczny jest wtedy równy:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad \text{(strumień magnetyczny przez powierzchnię S).}$$
(30.1)

Podobnie jak w rozdziale 23,  $d\vec{S}$  jest wektorem o wartości dS i kierunku prostopadłym do elementu powierzchni dS. Tak jak dla strumienia pola elektrycznego chcielibyśmy wybrać tę składową pola, która "przebija" rozważaną powierzchnię, a nie "ślizga się" po niej. Iloczyn skalarny wekora pola i wektora  $d\vec{S}$  daje właśnie tę "przebijającą" składową.

**Przypadek szczególny.** Zastosujmy równanie (30.1) do przypadku szczególnego, w którym pętla leży w pewnej płaszczyźnie, a linie pola magnetycznego są prostopadłe do tej płaszczyzny. Możemy wtedy zapisać iloczyn skalarny w równaniu (30.1) jako  $BdS \cos 0^\circ = BdS$ . Jeżeli ponadto pole magnetyczne jest jednorodne, to B może być wyniesione przed znak całki, a wyrażenie  $\int dS$ , które pozostało, jest po prostu polem powierzchni S pętli. Zatem równanie (30.1) sprowadza się do

$$\Phi_B = BS \qquad (\vec{B} \perp S, \vec{B} \text{ jednorodne}). \tag{30.2}$$

*Jednostka.* Z równań (30.1) i (30.2) wynika, że jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest tesla razy metr kwadratowy. Taka jednostka nosi nazwę *webera* (w skrócie Wb)

$$1 \text{weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2.$$
 (30.3)

*Prawo Faradaya*. Stosując pojęcie strumienia magnetycznego, możemy sformułować prawo Faradaya w bardziej ilościowy i użyteczny sposób:

Wartość SEM  $\mathcal{E}$  indukowanej w przewodzącej pętli jest równa szybkości, z jaką strumień magnetyczny przechodzący przez tę pętlę zmienia się w czasie.

Jak zobaczymy poniżej, indukowana SEM  $\mathcal{E}$  usiłuje przeciwdziałać zmianie strumienia, tak więc prawo Faradaya możemy zapisać jako

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$
 (prawo Faradaya), (30.4)

gdzie znak minus oznacza przeciwdziałanie. Często jednak pomijamy znak minus w równaniu (30.4), gdy poszukujemy tylko wartości bezwzględnej indukowanej SEM.

Jeżeli zmieniamy strumień pola magnetycznego w cewce złożonej z N zwojów, to indukowana SEM pojawia się w każdym zwoju i całkowita SEM indukowana w cewce jest sumą tych cząstkowych indukowanych SEM. Jeżeli cewka jest ciasno nawinięta, tak że ten sam strumień pola magnetycznego  $\Phi_B$  przenika przez wszystkie zwoje, to całkowita SEM indukowana w cewce jest równa

$$\mathcal{E} = -N \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$
 (cewka o N zwojach). (30.5)

Strumień magnetyczny przechodzący przez cewkę możemy zmienić w następujący sposób:

- 1. Przez zmianę wartości indukcji magnetycznej *B* pola w cewce.
- 2. Przez zmianę powierzchni cewki lub tej części powierzchni, która znajduje się w polu magnetycznym (np. powiększanie rozmiarów cewki lub przesuwanie jej względem obszaru, gdzie istnieje pole).
- 3. Przez zmianę kąta między kierunkiem wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  a powierzchnią cewki (np. obracanie cewki, tak aby wektor indukcji  $\vec{B}$  był najpierw prostopadły do płaszczyzny cewki, a następnie znalazł się w tej płaszczyźnie).

# **Sprawdzian 1**

Na wykresie przedstawiono wartości B(t) dla jednorodnego pola magnetycznego, przechodzącego przez przewodzącą pętlę i prostopadłego do płaszczyzny pętli. Uszereguj pięć przedziałów czasu na wykresie pod względem wartości SEM indukowanej w pętli, zaczynając od największej wartości.



# Przykład 30.01. SEM indukowana w cewce w obecności solenoidu

Długi solenoid S, pokazany w przekroju na rysunku 30.3, ma 220 zwojów/cm i płynie w nim prąd o natężeniu I = 1,5 A. Średnica solenoidu D jest równa 3,2 cm. W jego środku umieszczamy cewkę C o średnicy d = 2,1 cm, składającą się ze 130 ciasno ułożonych zwojów. Natężenie prądu w solenoidzie zmniej-



**Rys. 30.3.** Cewka C umieszczona jest we wnętrzu solenoidu S, w którym płynie prąd o natężeniu *I* 

szamy do zera ze stałą szybkością, w ciągu 25 ms. Jaka jest wartość SEM indukowanej w cewce C podczas zmiany natężenia prądu w solenoidzie?

#### PODSTAWOWE FAKTY

- 1. Cewka C, umieszczona we wnętrzu solenoidu, znajduje się w polu magnetycznym wytworzonym przez prąd płynący w solenoidzie. Istnieje więc strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przechodzący przez cewkę.
- 2. Natężenie prądu *I* maleje, zatem strumień  $\Phi_B$  również maleje.
- 3. W miarę zmniejszania się  $\Phi_B$  w cewce C indukuje się SEM  $\mathcal{E}$ .

- 4. Strumień przenikający przez każdy zwój cewki C zależy od pola powierzchni *S* i ustawienia tego zwoju w polu magnetycznym  $\vec{B}$  solenoidu. Pole  $\vec{B}$  jest jednorodne, a jego linie są skierowane prostopadle do powierzchni *S*, zatem strumień można obliczyć ze wzoru (30.2) ( $\Phi_B = BS$ ).
- 5. Wartość indukcji magnetycznej *B* we wnętrzu solenoidu zależy od natężenia prądu *I* płynącego w solenoidzie oraz od liczby zwojów *n* na jednostkę długości, zgodnie z równaniem (29.23) ( $B = \mu_0 In$ ).

**Obliczenia:** Cewka składa się z więcej niż jednego zwoju, stosujemy więc prawo Faradaya w postaci równania (30.5) ( $\mathcal{E} = -N d\Phi_B/dt$ ), gdzie liczba zwojów N jest równa 130, a  $d\Phi_B/dt$  jest szybkością zmian strumienia w każdym zwoju.

Natężenie prądu w solenoidzie zmienia się ze stałą szybkością, a więc strumień  $\Phi_B$  również zmienia się ze stałą szybkością i dlatego możemy zapisać  $d\Phi_B/dt$ jako  $\Delta \Phi_B/\Delta t$ . Tak więc, aby obliczyć  $\Delta \Phi_B$ , wystarczy znać końcową i początkową wartość strumienia. Końcowy strumień  $\Phi_{B,końc}$  jest równy zeru, gdyż końcowe natężenie prądu w solenoidzie jest równe zeru. Aby wyznaczyć początkowy strumień  $\Phi_{B,\text{pocz}}$ , zauważmy, że *S* jest równe  $\frac{1}{4}\pi d^2 = 3,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , a *n* wynosi 220 zwojów/cm, czyli 22 000 zwojów/m. Podstawiając równanie (29.23) do równania (30.2), otrzymujemy

$$\begin{split} \Phi_{B,\text{pocz}} &= BS = (\mu_0 In)S \\ &= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{ m/A})(1.5 \text{ A})(22\,000 \text{ zwojów/m}) \\ &\times (3.46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 1.44 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}. \end{split}$$

Możemy teraz napisać

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{\Phi_{B,\text{końc}} - \Phi_{B,\text{pocz}}}{\Delta t}$$
$$= \frac{(0 - 1.44 \cdot 10^{-5} \text{ Wb})}{25 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = -5.76 \cdot 10^{-4} \text{ Wb/s}$$
$$= -5.76 \cdot 10^{-4} \text{ V}.$$

Interesuje nas tylko wartość bezwzględna, więc pomijajmy znak minus w tym równaniu i w równaniu (30.5), piszac

$$\mathcal{E} = N \frac{d\Phi_B}{dt} = (130 \text{ zwojów})(5,76 \cdot 10^{-4} \text{ V})$$
  
= 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ V} = 75 mV (odpowiedź).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **Regula Lenza**

Wkrótce po odkryciu przez Faradaya prawa indukcji Heinrich Friedrich Lenz sformułował regułę umożliwiającą wyznaczenie kierunku prądu indukowanego w obwodzie:

Prąd indukowany płynie w takim kierunku, że pole magnetyczne wytworzone *przez ten prąd* przeciwdziała zmianie strumienia pola magnetycznego, która ten prąd indukuje.

Ponadto kierunek indukowanej SEM jest taki jak kierunek prądu indukowanego. Najważniejszym pojęciem w regule Lenza jest "przeciwdziałanie". Zastosujmy tę regułę do sytuacji przedstawionej na rysunku 30.4, w której biegun północny magnesu jest przesuwany w kierunku przewodzącej pętli.

1. Przeciwdziałanie ruchowi magnesu. Przybliżanie północnego bieguna magnesu na rysunku 30.4 zwiększa strumień pola magnetycznego w pętli i w ten sposób indukuje w niej prąd. Wiemy na podstawie rysunku 29.22, że taka pętla zachowuje się jak dipol magnetyczny, który ma swój biegun północny i południowy, a magnetyczny moment dipolowy  $\vec{\mu}$  jest skierowany od bieguna południowego do północnego. Aby *przeciwdziałać* wzrostowi strumienia pola magnetycznego spowodowanemu przybliżaniem magnesu, po stronie przybliżającego się bieguna północnego magnesu musi powstać biegun północny pętli, tak aby go odpychać (rys. 30.4). Zgodnie z regułą prawej dłoni dla  $\vec{\mu}$  (rys. 29.22), prąd indukowany w pętli na rysunku 30.4 musi więc płynąć przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Jeżeli natomiast zaczniemy odsuwać magnes od pętli, będzie w niej nadal płynął prąd indukowany. Teraz jednak po stronie oddalającego się bieguna północnego magnesu powstanie biegun południowy pętli, tak aby przeciwdziałać ruchowi magnesu. Prąd indukowany będzie więc płynąć zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

2. Przeciwdziałanie zmianie strumienia. Gdy magnes na rysunku 30.4 znajduje się początkowo w dużej odległości od pętli, strumień magnetyczny przechodzący przez pętlę jest znikomo mały. Gdy magnes zbliża się do pętli, strumień przenikający przez pętlę rośnie (na rysunku 30.4 zbliżamy do pętli biegun północny magnesu, a zatem linie jego pola magnetycznego są skierowane w dół). Aby przeciwdziałać temu wzrostowi strumienia, prąd o natężeniu *I* musi wytworzyć swoje własne pole  $\vec{B}_I$  skierowane wewnątrz pętli w górę, jak pokazano na rysunku 30.5a. Tak więc skierowany w prawo strumień pola  $\vec{B}_I$  przeciwdziała zwiększaniu się strumienia pola  $\vec{B}$  skierowanego w lewo. Zgodnie z regułą prawej dłoni (rys. 29.22) prąd *I* na rysunku 30.5a musi więc płynąć przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

*Uwaga.* Strumień pola  $\vec{B}_I$  zawsze przeciwdziała *zmianie* strumienia pola  $\vec{B}$ , ale nie zawsze znaczy to, że  $\vec{B}_I$  jest skierowane przeciwnie do  $\vec{B}$ . Jeśli na przykład będziemy odsuwać magnes od pętli na rysunku 30.4, strumień  $\Phi_B$  wytworzony przez magnes będzie nadal skierowany w dół, ale jego wartość będzie teraz malała. Strumień pola  $\vec{B}_I$  musi więc być skierowany wewnątrz pętli w dół, aby przeciwdziałać zmniejszaniu się strumienia  $\Phi_B$ , jak pokazano na rysunku 30.5b. Zatem  $\vec{B}_I$  i  $\vec{B}$  będą teraz skierowane zgodnie. Na rysunkach 30.5c i d przedstawiono przypadki, w których południowy biegun magnesu odpowiednio przybliża się i oddala od pętli.

# Sprawdzian 2

Na rysunku przedstawiono trzy przypadki, w których identyczne przewodzące okrągłe pętle znajdują się w obszarach jednorodnego pola magnetycznego, którego wartość indukcji albo rośnie (R), albo maleje (M) z tą samą szybkością. W każdym przypadku linia przerywana pokrywa się ze średnicą. Uszereguj przypadki pod względem wartości natężenia prądu indukowanego w pętli, zaczynając od największej wartości.





**Rys. 30.4.** Stosowanie reguły Lenza. Magnes przesuwany w kierunku pętli indukuje w niej prąd. Prąd ten wytwarza swoje własne pole magnetyczne, a dipolowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}$  jest skierowany tak, aby przeciwdziałać ruchowi magnesu. Tak więc prąd indukowany musi płynąć w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jak pokazano na rysunku





**Rys. 30.5.** Kierunek prądu o natężeniu *I* indukowanego w pętli jest taki, że pole magnetyczne  $\vec{B}_I$  wytworzone przez ten prąd przeciwdziała *zmianie* pola magnetycznego  $\vec{B}$ , która ten prąd indukuje. Wektor indukcji  $\vec{B}_I$  jest zawsze skierowany przeciwnie do wzrastającego wektora indukcji pola  $\vec{B}$  (a) i (c), natomiast jest zawsze zgodny z kierunkiem malejącego wektora indukcji pola  $\vec{B}$  (b) i (d). Reguła prawej dłoni wskazuje kierunek prądu indukowanego w zależności od kierunku indukowanego pola

# Przykład 30.02. SEM i prąd indukowane przy zmianie jednorodnego pola magnetycznego

Na rysunku 30.6 przedstawiono przewodzącą pętlę składającą się z półokręgu o promieniu r = 0,2 m i trzech odcinków. Półokrąg znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , skierowanym przed płaszczyznę rysunku. Wartość indukcji jest dana wzorem  $B = 4t^2 + 2t + 3$ , gdzie *B* jest wyrażone w teslach, a *t* w sekundach. Do pętli dołączone jest źródło doskonałe o SEM  $\mathcal{E}_{\text{bat}} = 2$  V. Opór pętli wynosi 2  $\Omega$ . a) Jakie są wartość i kierunek SEM  $\mathcal{E}_{ind}$  indukowanej w pętli przez pole  $\vec{B}$  w chwili t = 10 s?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1. Zgodnie z prawem Faradaya wartość  $\mathcal{E}_{ind}$  jest równa szybkości  $d\Phi_B/dt$ , z jaką zmienia się strumień magnetyczny przechodzący przez pętlę.
- 2. Strumień przechodzący przez pętlę zależy od tego, jaka część pola powierzchni pętli leży w obszarze pola magnetycznego  $\vec{B}$ , oraz od ustawienia pętli w tym polu.
- 3. Pole  $\vec{B}$  jest jednorodne, a wektor  $\vec{B}$  jest prostopadły do płaszczyzny pętli, zatem strumień dany jest wzorem (30.2) ( $\Phi_B = BS$ ). (Nie musimy wykonywać całki powierzchniowej, aby wyznaczyć strumień).
- 4. Indukowane pole  $\vec{B}_I$  (wytwarzane przez indukowany prąd) musi przeciwdziałać *zmianie* pola magnetycznego.

**Wartość:** Korzystając z równania (30.2) i biorąc pod uwagę, że tylko wartość indukcji pola B zmienia się w czasie (a nie pole powierzchni S), możemy napisać prawo Faradaya (30.4) w postaci

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(BS)}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}.$$

Ponieważ pole przenika przez pętlę tylko wewnątrz obszaru półkolistego, więc pole powierzchni *S* w tym równaniu jest równe  $\frac{1}{2}\pi r^2$ . Podstawiając ten wynik oraz wyrażenie dla *B*, otrzymujemy

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = S \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi r^2}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (4t^2 + 2t + 3) = \frac{\pi r^2}{2} (8t + 2).$$

Zatem w chwili t = 10 s

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{\pi (0,2)^2}{2} [8(10) + 2] = 5,152 \text{ V} \approx 5,2 \text{ V}$$
  
(odpowiedź

*Kierunek:* Aby wyznaczyć kierunek  $\mathcal{E}_{ind}$ , zauważ najpierw, że strumień przechodzący przez pętlę na rysunku 30.6 jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a jego wartość rośnie w czasie. Ponieważ pole indukowane  $B_I$  (wytworzone przez prąd indukowany) musi przeciwdziałać temu wzrostowi, musi być ono skierowane za płaszczyznę rysunku. Stosując regułę prawej dłoni

(rys. 30.5c), dochodzimy do wniosku, że prąd indukowany musi płynąć w pętli zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Tak więc indukowana SEM  $\mathcal{E}_{ind}$  musi być skierowana również zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

**b**) Ile wynosi natężenie prądu płynącego w pętli w chwili t = 10 s?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Należy pamiętać, że mamy do czynienia z dwoma SEM powodującymi ruch ładunków wokół pętli.

**Obliczenia:** Indukowana SEM  $\mathcal{E}_{ind}$  wytwarza w pętli prąd płynący w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, natomiast SEM źródła  $\mathcal{E}_{bat}$  wytwarza prąd płynący w kierunku przeciwnym. Wartość  $\mathcal{E}_{ind}$  jest większa niż  $\mathcal{E}_{bat}$ , zatem wypadkowa SEM  $\mathcal{E}_{wyp}$  jest skierowana zgodnie z ruchem wskazówek zegara, podobnie jak całkowity prąd w pętli. Aby obliczyć natężenie prądu dla t = 10 s, korzystamy z równania (27.2)  $(I = \mathcal{E}/R)$ , a zatem

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{wyp}}}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}} - \mathcal{E}_{\text{bat}}}{R} = \frac{5,152 \text{ V} - 2 \text{ V}}{2 \Omega}$$
  
= 1,58 A \approx 1,6 A (odpowiedź).

**Rys. 30.6.** Źródło prądu jest dołączone do przewodzącej pętli, w skład której wchodzi półokrąg o promieniu *r* umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym. Wektor indukcji magnetycznej jest skierowany przed płaszczyznę rysunku, a jego wartość zmienia się w czasie

#### Przykład 30.03. SEM indukowana przy zmianie niejednorodnego pola magnetycznego

Na rysunku 30.7 przedstawiono prostokątną ramkę z drutu umieszczoną w niejednorodnym i zmieniającym się w czasie polu magnetycznym  $\vec{B}$ . Wektor indukcji  $\vec{B}$  jest skierowany prostopadle za płaszczyznę rysunku, a jego wartość wynosi  $B = 4t^2x^2$ , gdzie *B* jest wyrażone w teslach, *t* w sekundach, a *x* w metrach. (Pamiętaj, że *B* zależy zarówno od czasu, jak i od położenia). Szerokość ramki jest równa W = 3 m, a wysokość

H = 2 m. Jakie są wartość i kierunek SEM  $\mathcal{E}$  indukowanej w ramce w chwili t = 0, 1 s?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1. Ponieważ wartość indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  zmienia się w czasie, więc strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przechodzący przez ramkę również zmienia się w czasie.

- 2. Zmienny w czasie strumień indukuje w ramce SEM  $\mathcal{E}$ , zgodnie z prawem Faradaya, które możemy zapisać (pomijając znak) jako  $\mathcal{E} = d\Phi_B/dt$ .
- 3. Aby zastosować to prawo, musimy znać wyrażenie, określające strumień  $\Phi_B$  w dowolnej chwili *t*. Jednakże *nie możemy* w tym celu zastosować równania (30.2) ( $\Phi_B = BS$ ), gdyż pole *B nie* jest jednorodne w obszarze objętym petlą. Zamiast tego musimy zastosować równanie (30.1) ( $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ).

**Obliczenia:** Na rysunku 30.7 wektor  $\vec{B}$  jest prostopadły do płaszczyzny ramki (a zatem równoległy do wektora powierzchni d $\vec{S}$ ), tak więc iloczyn skalarny w równaniu (30.1) jest równy BdS. Pole magnetyczne jest funkcją współrzędnej x, ale nie jest funkcją y, zatem za element powierzchni dS możemy przyjąć pole powierzchni pionowego paska o wysokości H i szerokości dx (jak pokazano na rysunku 30.7). Wtedy dS = Hdx, a przenikający przez ramkę strumień jest równy

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B dS = \int B H dx = \int 4t^2 x^2 H dx.$$
Traditionary term collector is tiple state in a determining

Traktując w tym całkowaniu t jako stałą i podstawiając granice całkowania x = 0 i x = 3 m, otrzymujemy

$$\Phi_B = 4t^2 H \int_0^5 x^2 dx = 4t^2 H \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 72t^2$$

gdzie podstawiliśmy H = 2 m, a wartość  $\Phi_B$  jest wyrażona w weberach. Możemy teraz zastosować prawo Faradaya do obliczenia wartości bezwzględnej  $\mathcal{E}$  w dowolnej chwili *t* 

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(72t^2)}{\mathrm{d}t} = 144t,$$

gdzie  $\mathcal{E}$  jest wyrażone w woltach. Dla t = 0,1 s

$$\mathcal{E} = (144 \text{ V/s})(0,1 \text{ s}) \approx 14 \text{ V}$$
 (odpowiedź).

Strumień pola  $\vec{B}$  przechodzący przez pętlę jest skierowany za płaszczyznę rysunku 30.7, a jego wartość rośnie, gdyż wartość indukcji pola *B* rośnie w czasie. Na mocy reguły Lenza pole *B*<sub>1</sub> wytworzone przez prąd indukowany przeciwstawia się temu wzrostowi i dlatego jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Reguła prawej dłoni przedstawiona na rysunku 30.5d mówi zatem, że prąd indukowany płynie w pętli w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a więc tak samo skierowana jest indukowana SEM  $\mathcal{E}$ .



**Rys. 30.7.** Zamknięta, przewodząca ramka o szerokości *W* i wysokości *H* znajduje się w niejednorodnym, zmiennym w czasie polu magnetycznym o wektorze indukcji skierowanym za płaszczyznę rysunku. Aby zastosować prawo Faradaya, posłużymy się pionowym paskiem o wysokości *H*, szerokości dx i polu powierzchni d*S* 

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **30.2.** ZJAWISKO INDUKCJI I PRZEKAZYWANIE ENERGII

#### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

30.13 obliczyć dla pętli przewodzącej wsuwanej do pola magnetycznego lub z niego wysuwanej prędkość przemiany energii w ciepło;

#### Podstawowe fakty.

 Występowanie prądów indukowanych wskutek zmiany strumienia magnetycznego oznacza, że takiemu prądowi przekazywana jest pewna energia. Energia ta może następnie przy-

- 30.14 zastosować związek między natężeniem indukowanego prądu i szybkością wydzielania energii termicznej;
- 30.15 opisać prądy wirowe.

bierać inne formy, na przykład, może zostać przekształcona w energię termiczną.

## Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

Zgodnie z regułą Lenza, niezależnie od tego, czy przybliżasz, czy oddalasz magnes od pętli na rysunku 30.1, siła magnetyczna przeciwstawia się ruchowi magnesu. Oznacza to, że siła, jaką działasz, wykonuje pracę dodatnią. Jednocześnie w przewodniku, z którego wykonana jest pętla, wydziela się energia termiczna, gdyż prąd indukowany w pętli w wyniku ruchu magnesu napotyka opór elektryczny materiału. Innymi słowy, energia, którą przekazujesz do zamkniętego układu *pętla + magnes*, działając siłą, przekształca się w końcu w energię termiczną. (Pomijamy tutaj energię wypromieniowaną przez pętlę podczas zjawiska indukcji w postaci fal elektromagnetycznych). Im szybciej przesuwasz magnes, tym szybciej siła, którą przykładasz, wykonuje pracę, a więc tym większa jest szybkość, z jaką dostarczona przez ciebie energia jest przekształcana w energię termiczną w pętli. Oznacza to, że przekazywana wtedy moc jest większa.

Niezależnie od tego, w jaki sposób prąd jest indukowany w pętli, energia jest zawsze podczas tego procesu przekształcana w energię termiczną, gdyż w pętli istnieje opór elektryczny. (Wyjątkiem jest przypadek, gdy pętla jest wykonana z nadprzewodnika). Na przykład na rysunku 30.2, gdy zamykamy klucz S, a prąd jest przez chwilę indukowany w pętli po lewej stronie, energia dostarczona ze źródła jest przekształcana w energię termiczną w pętli.

Na rysunku 30.8 przedstawiono inny przypadek, w którym powstaje prąd indukowany. Część prostokątnej przewodzącej ramki o szerokości Lznajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o wektorze indukcji skierowanym prostopadle do płaszczyzny ramki za tę płaszczyznę. Takie pole może być wytworzone np. przez duży elektromagnes. Linie przerywane na rysunku 30.8 wskazują umowne granice obszaru pola magnetycznego; pola rozproszone na brzegach tego obszaru są pominięte. Twoim zadaniem jest przesuwanie ramki w prawo ze stałą prędkością  $\vec{v}$ .

**Zmiana strumienia.** Sytuacje przedstawione na rysunkach 30.8 i 30.1 nie różnią się w istotny sposób. W obydwu przypadkach pole magnetyczne i przewodząca ramka poruszają się względem siebie, a strumień pola przechodzący przez ramkę zmienia się w czasie. Prawdą jest, że na rysunku 30.1 strumień ulega zmianie, gdyż zmienia się wektor  $\vec{B}$ , natomiast na rysunku 30.8 strumień ulega zmianie, gdyż zmienia się ta część powierzchni

**Rys. 30.8.** Zamknięta przewodząca ramka jest wyciągana ze stałą prędkością  $\vec{v}$  z obszaru, w którym istnieje pole magnetyczne. Podczas ruchu ramki indukuje się w niej prąd o natężeniu *I*, płynący w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Na odcinki ramki znajdujące się nadal w polu magnetycznym działają siły  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$ 



ramki, która wciąż znajduje się w polu magnetycznym. Ta różnica nie jest jednak istotna, natomiast zasadniczą różnicą między dwoma układami jest to, że dla układu na rysunku 30.8 obliczenia wykonuje się znacznie łatwiej. Obliczmy więc teraz szybkość, z jaką wykonujesz pracę mechaniczną, gdy przesuwasz ramkę ruchem jednostajnym, tak jak na rysunku 30.8.

*Szybkość wykonywania pracy.* Jak zobaczysz, należy przyłożyć stałą siłę  $\vec{F}$  do ramki, aby przesuwać ją ze stałą prędkością  $\vec{v}$ , gdyż przeciwstawia się temu siła magnetyczna o takiej samej wartości, działająca na ramkę w przeciwnym kierunku. Z równania (7.48) wynika, że szybkość, z jaką wykonywana jest praca — czyli moc — jest równa

$$P = Fv, (30.6)$$

gdzie F jest wartością przyłożonej siły. Chcielibyśmy znaleźć wyrażenie opisujące P w zależności od wartości indukcji magnetycznej B i właściwości ramki, a mianowicie jej rozmiaru L i oporu R stawianego prądowi.

W miarę przesuwania ramki w prawo na rysunku 30.8 maleje część jej powierzchni, która znajduje się w polu magnetycznym. Tak więc strumień przechodzący przez ramkę również maleje i zgodnie z prawem Faradaya w ramce powstaje prąd indukowany. To właśnie obecność tego prądu jest przyczyną powstawania siły, która zgodnie z regułą Lenza przeciwstawia się ruchowi ramki.

*Indukowana SEM.* Aby wyznaczyć natężenie prądu, zastosujemy najpierw prawo Faradaya. Jeśli *x* oznacza długość tej części ramki, która wciąż znajduje się w polu magnetycznym, to pole powierzchni tej części jest równe *Lx*. Zatem zgodnie z równaniem (30.2) wartość strumienia przechodzącego przez ramkę jest równa

$$\Phi_B = BS = BLx. \tag{30.7}$$

Gdy x maleje, maleje również strumień. Zgodnie z prawem Faradaya zmniejszanie się strumienia indukuje SEM w pętli. Pomijając znak minus w równaniu (30.4) i stosując równanie (30.7), możemy zapisać wartość SEM jako

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BLx) = BL\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = BLv, \qquad (30.8)$$

gdzie dx/dt zastąpiliśmy prędkością v, z jaką porusza się ramka.

Na rysunku 30.9 pokazano ramkę jako obwód elektryczny: indukowana SEM  $\mathcal{E}$  przedstawiona jest po lewej stronie, a całkowity opór R ramki — po prawej stronie rysunku. Kierunek prądu indukowanego o natężeniu I wynika z reguły prawej dłoni (rys. 30.5b) dla malejącego strumienia; zastosowanie tej reguły mówi nam, że indukowany prąd płynie w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, a SEM o wartości  $\mathcal{E}$  musi mieć ten sam kierunek.

*Indukowany prąd.* Aby wyznaczyć wartość natężenia indukowanego prądu, nie możemy zastosować drugiego prawa Kirchhoffa, ponieważ — jak zobaczymy w podrozdziale 30.3 — dla indukowanej SEM nie możemy zdefiniować różnicy potencjałów. Możemy jednak zastosować równanie  $I = \mathcal{E}/R$ . Wykorzystując równanie (30.8), otrzymujemy

$$I = \frac{BLv}{R}.$$
(30.9)



**Rys. 30.9.** Obwód zastępczy poruszającej się ramki przedstawionej na rysunku 30.8

Trzy odcinki ramki na rysunku 30.8, przez które płynie prąd, znajdują się w polu magnetycznym, zatem na te odcinki będą działały siły do nich prostopadłe. Wiemy z równania (28.26), że siły te mogą być zapisane w postaci

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B}. \tag{30.10}$$

Siły działające na trzy odcinki ramki na rysunku 30.8 są oznaczone jako  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$ . Zauważ jednak, że ze względu na symetrię, siły  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$  mają jednakowe wartości i są przeciwnie skierowane, a więc wzajemnie się równoważą. Pozostaje tylko siła  $\vec{F}_1$ , która jest skierowana przeciwnie do siły  $\vec{F}$ , jaką działasz na ramkę. Tak więc  $\vec{F} = -\vec{F}_1$ .

Zauważ, że kąt między wektorem  $\vec{B}$  i wektorem długości  $\vec{L}$  jest równy 90° dla odcinka po lewej stronie ramki. Biorąc to pod uwagę oraz korzystając z równania (30.10) w celu wyznaczenia wartości  $\vec{F}_1$ , możemy napisać

$$F = F_1 = ILB\sin 90^\circ = ILB.$$
(30.11)

Podstawiając równanie (30.9) do równania (30.11), otrzymujemy więc

$$F = \frac{B^2 L^2 v}{R}.$$
(30.12)

Ponieważ B, L i R są stałymi, więc prędkość v, z jaką przesuwamy ramkę, będzie stała, o ile wartość siły, jaką działamy na ramkę, będzie również stała.

*Szybkość wykonywania pracy.* Podstawiając równanie (30.12) do równania (30.6), możemy znaleźć szybkość, z jaką wykonujesz pracę, starając się wyciągnąć ramkę z obszaru pola magnetycznego

$$P = Fv = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$
 (szybkość wykonywania pracy). (30.13)

*Energia termiczna.* Na zakończenie naszych rozważań wyznaczmy szybkość wydzielania się energii termicznej w ramce podczas wyciągania jej ze stałą prędkością z obszaru pola magnetycznego. Obliczamy ją z równania (26.27)

$$P = I^2 R. aga{30.14}$$

Podstawiając zamiast I wyrażenie (30.9), otrzymujemy

$$P = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \qquad \text{(szybkość wydzielania się energii termicznej),}$$
(30.15)

czyli wyrażenie dokładnie równe szybkości wykonywania pracy nad ramką (30.13). Tak więc praca wykonywana podczas przesuwania ramki w polu magnetycznym ulega w całości przekształceniu w energię termiczną w ramce.

#### **Prady wirowe**

Wyobraź sobie, że przewodzącą ramkę z rysunku 30.8 zastąpiliśmy litą przewodzącą płytą. Jeżeli teraz spróbujemy usunąć płytę z obszaru pola magnetycznego, podobnie jak zrobiliśmy to z ramką (rys. 30.10a), to w wyniku względnego ruchu pola i płyty popłynie w niej prąd indukowany. Tak



**Rys. 30.10.** a) Podczas usuwania przewodzącej płyty z obszaru pola magnetycznego indukują się w niej *prądy wirowe*. Pokazano umowny obwód zamknięty, w którym płynie prąd wirowy. b) Przewodząca płyta może wahać się wokół osi, przechodząc przez obszar pola magnetycznego. Gdy płyta dostaje się w obszar pola lub go opuszcza, indukują się w niej prądy wirowe

więc znów, w wyniku istnienia prądów indukowanych, napotkamy siłę przeciwdziałającą ruchowi płyty i będziemy musieli wykonać pracę. Jednakże elektrony przewodnictwa, które tworzą prąd indukowany w płycie, nie muszą poruszać się wzdłuż jednego toru, tak jak w przypadku pętli. Elektrony tak krążą wewnątrz płyty, jak gdyby znalazły się w wirze wodnym. Taki prąd nazywamy *prądem wirowym*. Możemy go przedstawić, tak jak na rysunku 30.10a, *jak gdyby* płynął wzdłuż pojedynczego toru.

Podobnie jak w przypadku przewodzącej ramki (rys. 30.8), prąd indukowany w płycie powoduje, że energia mechaniczna zostaje rozproszona w postaci energii termicznej. Rozpraszanie jest bardziej widoczne w układzie przedstawionym na rysunku 30.10b. Przewodząca płyta, która może swobodnie obracać się wokół osi, waha się, przechodząc przez obszar pola magnetycznego. Za każdym razem, gdy płyta dostaje się w obszar pola lub go opuszcza, część energii mechanicznej płyty przekształcana jest w energię termiczną. Po kilku wahaniach cała energia mechaniczna zostaje zużyta, a ogrzana płyta po prostu pozostaje bez ruchu zawieszona na osi.

# Sprawdzian 3

Na rysunku przedstawiono cztery ramki z drutu o długości boków równej albo L, albo 2L. Wszystkie cztery ramki poruszają się z taką samą stałą prędkością, przechodząc przez obszar jednorodnego pola magnetycznego  $\vec{B}$  o indukcji skierowanej przed płaszczyznę rysunku. Uszereguj cztery ramki pod względem maksymalnej wartości indukowanej SEM w czasie ich ruchu w polu, zaczynając od największej wartości.

# **30.3.** INDUKOWANE POLA ELEKTRYCZNE

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **30.16** stwierdzić, że zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne i to niezależnie od obecności przewodzącej pętli;
- 30.17 zastosować prawo Faradaya do wyrażenia pola elektrycznego indukowanego wzdłuż zamkniętego konturu (który może, ale nie musi być powiązany z obecnością przewod-

#### Podstawowe fakty.

• Zmiana strumienia magnetycznego indukuje SEM nawet wtedy, gdy powierzchnia, dla której wyznaczamy strumień, nie jest ograniczona pętlą przewodzącą tylko dowolną zadaną linią. Zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne  $\vec{E}$  w każdym punkcie takiej linii, a indukowana SEM jest związana z polem  $\vec{E}$  zależnością

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

nika) do szybkości zmian  $\frac{d\Phi}{dt}$  strumienia magnetycznego przez powierzchnię ograniczoną konturem;

30.18 stwierdzić, że dla indukowanych pól elektrycznych nie można określić potencjału elektrycznego.

 Używając pola elektrycznego, można zapisać prawo Faradaya w ogólnej postaci

$$\oint ec{E} \cdot \mathrm{d}ec{s} = -rac{\mathrm{d} arPsi_B}{\mathrm{d} t}$$
 (prawo Faradaya).

Zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne  $\vec{E}$ .



# Indukowane pola elektryczne

Wyobraź sobie, że pierścień miedziany o promieniu r umieszczamy w jednorodnym, zewnętrznym polu magnetycznym, tak jak pokazano na rysunku 30.11a. Pole zajmuje walcowy obszar o promieniu R, przy czym pomijamy pola rozproszone. Przypuśćmy, że zwiększamy ze stałą szybkością wartość indukcji magnetycznej, na przykład zwiększając odpowiednio natężenie prądu w uzwojeniu elektromagnesu, który to pole wytwarza. Strumień magnetyczny wewnątrz pierścienia będzie się również zmieniał ze stałą szybkością i zgodnie z prawem Faradaya w pierścieniu pojawi się indukowana SEM, a więc popłynie prąd indukowany. Na podstawie reguły Lenza możemy wywnioskować, że kierunek prądu indukowanego na rysunku 30.11a będzie przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

Jeżeli w pierścieniu miedzianym płynie prąd, to wzdłuż tego pierścienia musi istnieć pole elektryczne, ponieważ jest ono niezbędne do wykonania pracy przy przemieszczaniu elektronów przewodnictwa. Co więcej, źródłem tego pola elektrycznego musi być zmienny strumień magnetyczny. To **indukowane pole elektryczne**  $\vec{E}$  rzeczywiście istnieje, podobnie jak pole elektryczne wytworzone przez ładunki nieruchome. Obydwa pola działają siłą  $q_0\vec{E}$  na cząstkę o ładunku  $q_0$ .

Rozumując w ten sposób, dochodzimy do użytecznego i pouczającego sformułowania prawa indukcji Faradaya.

#### Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne.

Uderzającą cechą tego sformułowania jest to, że pole elektryczne jest indukowane nawet wtedy, gdy nie ma pierścienia miedzianego. Oznacza to, że pole elektryczne pojawiłoby się nawet wtedy, gdyby zmienne pole magnetyczne występowało w próżni.

Aby uściślić te pojęcia, przeanalizujmy rysunek 30.11b, który jest bardzo podobny do rysunku 30.11a, z wyjątkiem tego, że miedziany pierścień został zastąpiony kołowym konturem o promieniu r. Podobnie jak poprzednio zakładamy, że wartość indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  rośnie ze stałą szybkością dB/dt. Z właściwości symetrii wynika, że wektor natężenia pola elektrycznego indukowanego w różnych punktach konturu musi być do niego styczny, jak pokazano na rysunku 30.11b<sup>1</sup>. Zatem kołowy kontur jest jednocześnie linią pola. Kontur o promieniu r nie jest czymś szczególnym, tak więc linie pola elektrycznego wytworzonego przez zmieniające się pole magnetyczne muszą tworzyć układ współśrodkowych okręgów, tak jak pokazano na rysunku 30.11c.

Gdy wartość indukcji magnetycznej *rośnie* w czasie, istnieje pole elektryczne przedstawione na rysunku 30.11c w postaci linii pola o kształcie okręgów. Gdy wartość indukcji magnetycznej jest *stała* w czasie, pole elektryczne nie jest indukowane. Gdy wartość indukcji magnetycznej *maleje* 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Z właściwości symetrii wynika, że możliwe jest także, aby linie pola  $\vec{E}$  były skierowane *radialnie*, a nie stycznie do konturu. Jednakże istnienie takich radialnych linii oznaczałoby, że wokół osi symetrii istnieją rozłożone symetrycznie swobodne ładunki, na których mogłyby się zaczynać i kończyć linie pola elektrycznego. Takich ładunków jednak nie ma.

pierścień

kołowy

**Rys. 30.11.** a) Gdy indukcja magnetyczna zwiększa się ze stałą szybkością, w pierścieniu miedzianym o promieniu *r* pojawia się prąd indukowany o stałym natężeniu. b) Indukowane pole elektryczne istnieje nawet wtedy, gdy usuniemy pierścień. Pole elektryczne pokazane jest w czterech punktach. c) Pełny rozkład pola elektrycznego przedstawiony w postaci linii pola. d) Cztery podobne kontury zamknięte o takim samym polu powierzchni. Wzdłuż konturów 1 i 2, które leżą całkowicie w obszarze zmieniającego się pola magnetycznego, indukują się jednakowe SEM. Mniejsza SEM jest indukowana wzdłuż konturu 3, który tylko częściowo leży w tym obszarze. Natomiast SEM nie jest indukowana wzdłuż konturu 4, który znajduje się całkowicie poza obszarem pola magnetycznego

w czasie (ze stałą szybkością), linie pola elektrycznego są znów współśrodkowymi okręgami, jak na rysunku 30.11c, ale tym razem są skierowane przeciwnie. To właśnie mamy na myśli, mówiąc: "Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne."

#### Nowe sformułowanie prawa Faradaya

Wyobraźmy sobie cząstkę o ładunku  $q_0$  poruszającą się po kołowym torze przedstawionym na rysunku 30.11b. Praca *W* wykonana nad cząstką przez indukowane pole elektryczne podczas jednego okrążenia wynosi  $W = \mathcal{E}q_0$ , gdzie  $\mathcal{E}$  jest indukowaną SEM równą pracy na jednostkę ładunku wykonanej podczas ruchu ładunku próbnego po okręgu. Z drugiej strony praca jest równa

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = (q_0 E)(2\pi r), \qquad (30.16)$$

gdzie  $q_0 E$  jest wartością siły działającej na ładunek próbny, a  $2\pi r$  jest długością drogi, wzdłuż której ta siła działa. Porównując obydwa wyrażenia określające pracę W i skracając  $q_0$  po obydwu stronach, otrzymujemy

$$\mathcal{E} = 2\pi r E. \tag{30.17}$$

Możemy teraz tak przekształcić równanie (30.16), by otrzymać bardziej ogólne wyrażenie umożliwiające obliczenie pracy wykonanej nad cząstką o ładunku  $q_0$ , poruszającą się wzdłuż dowolnego konturu zamkniętego

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$
 (30.18)

(Pętelka na znaku całki oznacza, że należy wykonać całkowanie wzdłuż konturu zamkniętego). Podstawiając  $\mathcal{E}q_0$  zamiast *W*, otrzymujemy

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{30.19}$$

Ta całka redukuje się do wyrażenia (30.17), jeśli obliczymy ją w szczególnym przypadku przedstawionym na rysunku 30.11b.

*Czym jest SEM*? Równanie (30.19) pozwala na rozszerzenie pojęcia indukowanej SEM. Indukowana SEM oznaczała dotychczas pracę na jednostkę ładunku, wykonaną w celu podtrzymania prądu indukowanego przez zmienny strumień magnetyczny. Indukowana SEM mogła również oznaczać pracę na jednostkę ładunku wykonaną nad naładowaną cząstką, poruszającą się po torze zamkniętym w zmiennym polu magnetycznym. Jednakże z równania (30.19) i z rysunku 30.11b wynika, że indukowana SEM może istnieć również wtedy, gdy nie ma prądu ani cząstki. Indukowana SEM jest sumą (a ściślej mówiąc całką) wielkości  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ , obliczoną wzdłuż zamkniętego konturu, gdzie  $\vec{E}$  jest polem elektrycznym indukowanym przez zmienne pole magnetyczne, a d $\vec{s}$  jest wektorowym elementem długości wzdłuż konturu zamkniętego.

Łącząc równanie (30.19) oraz prawo Faradaya (30.4) ( $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ ), możemy napisać to prawo w postaci

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(prawo Faradaya).} \tag{30.20}$$

To równanie oznacza po prostu, że zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne. Zmienne pole magnetyczne występuje po prawej stronie tego równania, a pole elektryczne — po lewej.

Prawo Faradaya w postaci równania (30.20) może być zastosowane do *dowolnego* zamkniętego konturu, który można narysować w zmiennym polu magnetycznym. Na rysunku 30.11d przedstawiono cztery takie przykładowe kontury, o takim samym kształcie i polu powierzchni, umieszczone w różnych miejscach w zmiennym polu magnetycznym. Indukowane SEM  $\mathcal{E} (= \oint \vec{E} \cdot d\vec{s})$  są takie same dla konturów 1 i 2, gdyż obydwa kontury leżą całkowicie w obszarze pola magnetycznego i dlatego d $\Phi_B/dt$ ma w obydwu przypadkach taką samą wartość. Ten wniosek jest prawdziwy, mimo iż wektory natężenia pola elektrycznego w punktach położonych wzdłuż każdego z konturów są różne, jak wskazują kształty linii pola elektrycznego na rysunku. Dla konturu 3 indukowana SEM ma mniejszą wartość, gdyż wartość strumienia  $\Phi_B$  objętego konturem (a więc i wartość  $d\Phi_B/dt$ ) jest mniejsza. Dla konturu 4 indukowana SEM jest równa zeru, mimo iż w każdym punkcie konturu istnieje pole elektryczne.

#### Nowe spojrzenie na potencjał elektryczny

Indukowane pola elektryczne są wytwarzane nie przez ładunki nieruchome (statyczne), tylko przez zmienny strumień magnetyczny. Choć pola elektryczne wytwarzane tymi dwoma sposobami działają tak samo na cząstki naładowane, istnieje między nimi ważna różnica. Najprostszym przejawem tej różnicy jest fakt, że linie indukowanego pola elektrycznego tworzą zamknięte pętle, takie jak na rysunku 30.11c, natomiast linie pola wytworzonego przez ładunki statyczne nigdy nie są zamknięte, gdyż muszą zaczynać się na ładunkach dodatnich, a kończyć na ładunkach ujemnych. Oznacza to, że linia pola wytwarzana przez ładunek nie może zawrócić i połączyć się sama ze sobą tak jak linie pola przedstawione na rysunku 30.11c. Ogólnie mówiąc, różnica między polami elektrycznymi wytwarzanymi przez indukcję i przez ładunki statyczne może być określona następująco:

Potencjał elektryczny można zdefiniować tylko dla pól elektrycznych wytwarzanych przez ładunki statyczne. Nie można go zdefiniować dla pól elektrycznych wytwarzanych przez indukcję.

To stwierdzenie może być zrozumiałe, jeśli rozważymy, co dzieje się z naładowaną cząstką, która wykonuje jedno okrążenie po kołowym torze przedstawionym na rysunku 30.11b. Cząstka wyruszyła z pewnego punktu i po powrocie do tego samego punktu okazało się, że działała na nią SEM  $\mathcal{E}$ o wartości np. 5 V. Oznacza to, że nad cząstką została wykonana praca, równa 5 J na każdy 1 C jej ładunku (1 V = 1 J/1 C), a więc cząstka powinna znaleźć się teraz w punkcie o potencjale większym o 5 V. Jednakże jest to niemożliwe, gdyż cząstka znajduje się z powrotem w tym samym punkcie, w którym potencjał nie może mieć przecież jednocześnie dwóch różnych wartości. Nie można zatem zdefiniować potencjału dla pól elektrycznych wytworzonych przez zmienne pola magnetyczne.

Możemy spojrzeć na to bardziej ogólnie, przytaczając równanie (24.18), które definiuje różnicę potencjałów między punktem początkowym a końcowym w polu elektrycznym  $\vec{E}$ 

$$V_{\rm k} - V_{\rm p} = -\int_{\rm p}^{\rm \kappa} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{30.21}$$

W rozdziale 24 nie mówiliśmy jeszcze o prawie indukcji Faradaya, tak więc pola elektryczne zastosowane do wyprowadzenia równania (24.18) pochodziły od ładunków statycznych. Jeśli w równaniu (30.21) punkt początkowy pokrywa się z punktem końcowym, to łączący je kontur jest zamkniętą pętlą, wartości  $V_p$  i  $V_k$  są takie same, a równanie (30.21) redukuje się do

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0. \tag{30.22}$$

Jednakże w obecności zmiennego strumienia magnetycznego ta całka *nie jest* równa zeru, ale zgodnie z równaniem (30.20) jest równa  $-d\Phi_B/dt$ . Zatem przypisanie potencjału elektrycznego indukowanemu polu elektrycznemu doprowadziło nas do sprzeczności. Wynika stąd wniosek, że potencjał elektryczny nie ma sensu fizycznego dla pól elektrycznych związanych ze zjawiskiem indukcji.

# Sprawdzian 4

Na rysunku przedstawiono pięć oznaczonych literami obszarów, w których istnieje jednorodne pole magnetyczne skierowane albo przed płaszczyznę rysunku, albo za płaszczyznę rysunku, przy czym kierunek ten zaznaczono tylko dla obszaru *a*. Wartość indukcji magnetycznej rośnie z tą samą stałą szybkością we wszystkich pięciu obszarach. Przekroje wszystkich obszarów mają jednakowe pola. Na rysunku przedstawiono również cztery ponumerowane kontury, wzdłuż których całka  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$  ma wartość podaną niżej w pewnych jednostkach. Ustal, czy pola magnetyczne w obszarach *b–e* są skierowane za czy przed płaszczyznę rysunku.



#### Przykład 30.04. Pole elektryczne indukowane przez zmienne pole magnetyczne

Przyjmij, że na rysunku 30.11b mamy R = 8,5 cm, a dB/dt = 0,13 T/s.

a) Znajdź wyrażenie określające wartość natężenia E indukowanego pola elektrycznego w punktach znajdujących się w obszarze pola magnetycznego w odległości r od środka obszaru. Oblicz wartość tego wyrażenia dla r = 5,2 cm.

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Zgodnie z prawem Faradaya, pole elektryczne jest indukowane przez zmienne pole magnetyczne.

**Obliczenia:** Aby obliczyć wartość natężenia pola E, stosujemy prawo Faradaya w postaci równania (30.20). Naszym celem jest wyznaczenie natężenia E w punktach, leżących w obszarze pola magnetycznego, dlatego wybieramy kołowy kontur całkowania o promieniu  $r \leq R$ . Korzystając z właściwości symetrii, można przyjąć, że natężenie pola  $\vec{E}$  na rysunku 30.11b jest w każdym punkcie styczne do konturu. Wektorowy element długości d $\vec{s}$  jest również wszędzie styczny do konturu, więc iloczyn skalarny  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  w równaniu (30.20) musi mieć wartość Eds we wszystkich punktach tego konturu. Możemy także przyjąć, korzystając z właściwości symetrii, że natężenie E ma taką samą wartość we wszystkich punktach kołowego konturu całkowania. Zatem lewa strona równania (30.20) przybiera postać

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint E ds = E \oint ds = E(2\pi r). \quad (30.23)$$

(Całka  $\oint ds$  jest równa obwodowi  $2\pi r$  kołowego konturu całkowania).

W następnym etapie musimy obliczyć prawą stronę równania (30.20). Indukcja  $\vec{B}$  pola przechodzącego przez powierzchnię *S* objętą konturem całkowania jest stała i skierowana prostopadle do tej powierzchni, zatem strumień magnetyczny jest dany równaniem (30.2)

$$\Phi_B = BS = B(\pi r^2). \tag{30.24}$$

Podstawiając to równanie oraz równanie (30.23) do równania (30.20) i opuszczając znak minus, otrzymujemy

$$E(2\pi r) = (\pi r^2) \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},$$

czyli

$$E = \frac{r}{2} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(odpowiedź).} \tag{30.25}$$

Równanie (30.25) określa wartość natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie, dla którego  $r \leq R$ , czyli w obszarze, w którym istnieje pole magnetyczne. Podstawiając dane, otrzymujemy wartość natężenia pola  $\vec{E}$  dla r = 5,2 cm

$$E = \frac{(5,2 \cdot 10^{-2} \text{ m})}{2} (0,13 \text{ T/s}) = 0,0034 \text{ V/m}$$
  
= 3,4 mV/m (odpowiedź).

**b**) Znajdź wyrażenie określające wartość natężenia E indukowanego pola elektrycznego w punktach znajdujących się poza obszarem pola magnetycznego, w odległości r od osi obszaru, w którym występuje pole magnetyczne. Oblicz wartość tego wyrażenia dla r = 12,5 cm.

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Tak jak poprzednio, pole elektryczne jest indukowane przez zmienne pole magnetyczne, z tym wyjątkiem, że wybieramy kontur całkowania o promieniu  $r \ge R$ , gdyż zamierzamy obliczyć wartość natężenia E w punktach znajdujących się poza obszarem pola magnetycznego. Postępując tak jak w punkcie (a), otrzymamy znów równanie (30.23), jednak równanie (30.25) przybiera inną postać, gdyż kontur całkowania znajduje się teraz poza obszarem pola magnetycznego, więc strumień magnetycznynego objęty przez nowy kontur jest strumieniem przechodzącym przez powierzchnię  $\pi R^2$  obszaru pola magnetycznego.

Obliczenia: Możemy zatem napisać

$$\Phi_B = BS = B(\pi R^2). \tag{30.26}$$

Podstawiając to równanie i równanie (30.23) do równania (30.20) (bez znaku minus), a następnie rozwiązując je względem E, otrzymujemy

$$E = \frac{R^2}{2r} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{odpowied}\hat{z}). \tag{30.27}$$

Ponieważ E nie jest równe zeru, widzimy, że pole elektryczne jest indukowane również w punktach poza obszarem zmiennego pola magnetycznego. Jest to ważny wynik, dzięki któremu (jak się przekonamy w podrozdziale 31.6) możliwe jest działanie transformatora. Po podstawieniu danych z równania (30.27) otrzymujemy wartość E dla r = 12,5 cm

$$E = \frac{(8.5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{(2)(12.5 \cdot 10^{-2} \text{ m})}(0.13 \text{ T/s}) = 3.8 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}$$
  
= 3.8 mV/m (odpowiedź).

Równania (30.25) i (30.27) dają ten sam wynik dla r = R. Na rysunku 30.12 przedstawiono wykres E(r) wykonany na podstawie tych dwóch równań. Zauważ, że linie naszkicowane przy użyciu tych równań łączą się dla r = R.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **30.4.** CEWKI I INDUKCYJNOŚĆ

#### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 30.19 opisać cewkę;
- **30.20** zastosować związek między indukcyjnością cewki L, całkowitym strumieniem  $N\Phi_B$  oraz natężeniem I prądu płynącego przez cewkę;

#### Podstawowe fakty

• Cewka to urządzenie pozwalające na wytworzenie ustalonego pola magnetycznego w określonym obszarze przestrzeni. Gdy przez każdy z N zwojów cewki płynie prąd o natężeniu I, uzwojenie cewki jest sprzężone przez wspólny strumień  $\Phi_B$ . Indukcyjność cewki jest określona jako

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \qquad \text{(definicja indukcyjności)}.$$

Jednostką indukcyjności jest henr (H) określony jako



1 henr = 1 H = 1 T 
$$\cdot$$
 m<sup>2</sup>/ A.

 Indukcyjność na jednostkę długości dla długiego solenoidu w pobliżu jego środka wynosi

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \qquad \text{(solenoid)}$$

gdzie S jest polem obszaru ograniczanego przez jeden zwój cewki, a n — liczbą zwojów na jednostkę długości.

# Cewki i indukcyjność

E(r).

Przekonaliśmy się w rozdziale 25, że kondensator może służyć do wytworzenia pola elektrycznego o zadanej z góry wartości natężenia. Przyjęliśmy wtedy układ równoległych płyt jako podstawowy rodzaj kondensatora. Podobnie **cewka**, oznaczona na schemacie obwodu symbolem 'WWD-, może być zastosowana do wytworzenia pola magnetycznego o zadanej wartości indukcji. Będziemy traktować długi solenoid (dokładniej: krótki odcinek w pobliżu środka długiego solenoidu, co pozwala na zaniedbanie efektów brzegowych) jako podstawowy rodzaj cewki.

Jeżeli przepuścimy prąd o natężeniu *I* przez uzwojenie takiego solenoidu, traktowanego jako model idealnej cewki, to prąd wytworzy strumień



Rys. 30.12. Wykres natężenia indukowanego pola elektrycznego

magnetyczny  $\Phi_B$  w środkowej części solenoidu. **Indukcyjność** cewki definiujemy wówczas za pomocą tego strumienia jako

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \qquad \text{(definicja indukcyjności)}, \qquad (30.28)$$

gdzie N jest liczbą zwojów. O uzwojeniu cewki mówimy, że jest *sprzężone* przez wspólny strumień, a iloczyn  $N\Phi_B$  nazywamy *magnetycznym strumie-niem sprzężonym*. Indukcyjność L jest zatem miarą strumienia sprzężonego wytworzonego przez cewkę na jednostkę natężenia prądu.

Jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest tesla razy metr kwadratowy, zatem jednostką indukcyjności jest tesla razy metr kwadratowy na amper ( $T \cdot m^2/A$ ). Taka jednostka nosi nazwę **henr** (H), od nazwiska amerykańskiego fizyka Josepha Henry'ego, niezależnego odkrywcy prawa indukcji, współczesnego Faradayowi. Zatem

1 henr = 1 H = 1 T 
$$\cdot$$
 m<sup>2</sup>/ A. (30.29)

Do końca tego rozdziału będziemy zakładać, że w pobliżu wszystkich omawianych cewek, niezależnie od ich układu przestrzennego, nie ma żadnych materiałów magnetycznych, takich jak żelazo. Takie materiały mogłyby zniekształcić pole magnetyczne cewki.

#### Indukcyjność solenoidu

Przeanalizujmy długi solenoid o polu przekroju *S*. Ile wynosi indukcyjność na jednostkę długości w pobliżu środka tego solenoidu? Aby zastosować równanie definiujące indukcyjność (30.28), musimy obliczyć strumień sprzężony wytworzony przez prąd o danym natężeniu, płynący w uzwojeniu solenoidu. Rozważmy odcinek solenoidu o długości *l* znajdujący się w pobliżu jego środka. Strumień sprzężony w tej części solenoidu jest równy

$$N\Phi_B = (nl)(BS),$$

gdzie n jest liczbą zwojów na jednostkę długości solenoidu, a B — wartością indukcji magnetycznej we wnętrzu solenoidu.

Wartość indukcji B jest dana równaniem (29.23)

$$B=\mu_0 In,$$

tak więc z równania (30.28) otrzymujemy

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{(nl)(BS)}{I} = \frac{(nl)(\mu_0 In)(S)}{I} = \mu_0 n^2 lS.$$
(30.30)

Zatem indukcyjność na jednostkę długości dla długiego solenoidu w pobliżu jego środka wynosi

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \qquad \text{(solenoid)}. \tag{30.31}$$

Indukcyjność, podobnie jak pojemność, zależy tylko od kształtu elementu. Zależność od kwadratu liczby zwojów na jednostkę długości jest czymś, czego należało się spodziewać. Jeżeli np. zwiększymy trzykrotnie *n*, to nie tylko zwiększymy trzykrotnie liczbę zwojów, ale również zwiększymy trzykrotnie strumień ( $\Phi_B = BS = \mu_0 InS$ ) przechodzący przez każdy



Proste cewki, za pomocą których Michael Faraday odkrył prawo indukcji. W tamtych czasach artykuły takie jak drut izolowany nie były dostępne w handlu. Podobno Faraday izolował druty, owijając je paskami odciętymi od jednej z halek swojej żony (dzięki uprzejmości The Royal Institution/Bridgeman Art Library/NY)

zwój, mnożąc w ten sposób strumień sprzężony  $N\Phi_B$ , a więc i indukcyjność *L*, przez czynnik 9.

Jeżeli długość solenoidu jest znacznie większa od jego promienia, to wyrażenie (30.30) jest dobrym przybliżeniem indukcyjności solenoidu. To przybliżenie nie uwzględnia rozchodzenia się linii pola magnetycznego w pobliżu końców solenoidu, tak samo jak wzór na pojemność kondensatora płaskiego ( $C = \varepsilon_0 S/d$ ) nie uwzględnia rozproszonych pól elektrycznych w pobliżu brzegów płytek kondensatora.

Pamiętając, że *n* jest liczbą zwojów na jednostkę długości, wnioskujemy z równania (30.30), że indukcyjność może być zapisana jako iloczyn przenikalności magnetycznej  $\mu_0$  i wielkości o wymiarze długości. Oznacza to, że  $\mu_0$  może być wyrażone w henrach na metr:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \,\mathrm{T} \cdot \,\mathrm{m/A} = 4\pi \cdot 10^{-7} \,\mathrm{H/m}. \tag{30.32}$$

Ostatnia równość podaje jednostki najczęściej używane w definicji przenikalności magnetycznej.

# **30.5.** samoindukcja

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 30.22 stwierdzić, że w cewce, przez którą płynie prąd o zmiennym w czasie natężeniu, pojawia się SEM samoindukcji;
- 30.23 zastosować związek między SEM samoindukcji dla cewki, indukcyjnością cewki L oraz szybkością zmian natężenia prądu dI/dt;

#### Podstawowe fakty

• Jeśli przez cewkę płynie prąd o zmiennym w czasie natężeniu *I*, to w cewce pojawia się SEM samoindukcji równa 30.24 zastosować regułę Lenza w celu wyznaczenia kierunku SEM samoindukcji pojawiającej się w cewce przy zmianie natężenia prądu płynącego przez cewkę i wykazać, że SEM samoindukcji przeciwdziała zmianie natężenia prądu, dążąc do utrzymania natężenia początkowego.

• Kierunek  $\mathcal{E}_L$  można wyznaczyć z reguły Lenza: SEM samoindukcji przeciwdziała zmianom, w wyniku których powstaje.

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$



**Rys. 30.13.** Jeżeli zmieniamy natężenie prądu w cewce, przesuwając suwak opornika, to *podczas zmiany natężenia prądu* pojawia się w cewce SEM samoindukcji  $\mathcal{E}_L$ 

# Samoindukcja

Jeżeli dwie cewki znajdują się blisko siebie, to płynący w jednej z nich prąd o natężeniu I, wytwarza strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przechodzący również przez drugą cewkę. Przekonaliśmy się, że jeśli zmienimy ten strumień, zmieniając natężenie prądu, to zgodnie z prawem Faradaya w drugiej cewce pojawi się indukowana SEM. Jednak indukowana SEM pojawi się również w pierwszej cewce.

Indukowana SEM  $\mathcal{E}_L$  występuje w każdej cewce, w której natężenie prądu się zmienia.

Takie zjawisko (rys. 30.13) nazywamy **samoindukcją**, a pojawiająca się SEM jest nazywana **SEM samoindukcji**. Podlega ona prawu Faradaya tak samo jak każda indukowana SEM.

Z równania (30.28) wynika, że dla dowolnej cewki

$$N\Phi_B = LI. \tag{30.33}$$

Z prawa Faradaya wynika, że

$$\mathcal{E}_L = -\frac{\mathrm{d}(N\Phi_B)}{\mathrm{d}t}.$$
(30.34)

Łącząc równania (30.33) i (30.34), możemy napisać

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$
 (SEM samoindukcji). (30.35)

Tak więc w dowolnej cewce, solenoidzie lub toroidzie pojawia się SEM samoindukcji, jeżeli tylko natężenie prądu zmienia się w czasie. Wartość natężenia prądu nie wpływa na wartość indukowanej SEM, istotna jest natomiast szybkość zmian natężenia prądu.

*Kierunek.* Z reguły Lenza wynika kierunek SEM samoindukcji. Znak minus w równaniu (30.35) wskazuje, że zgodnie z tą regułą SEM samoindukcji  $\mathcal{E}_L$  ma taki kierunek, aby przeciwstawiać się zmianie natężenia pradu *I*. Znak minus możemy opuścić, jeżeli interesuje nas tylko wartość bezwzględna  $\mathcal{E}_L$ .

Przypuśćmy, że przez cewkę przepuszczamy prąd o natężeniu I, które rośnie w czasie z szybkością dI/dt (rys. 30.14a). Zgodnie z regułą Lenza ten wzrost natężenia prądu płynącego przez cewkę jest "zmianą", której musi przeciwstawić się samoindukcja. Oznacza to, że w cewce pojawia się SEM samoindukcji skierowana tak, by przeciwdziałać wzrostowi natężenia prądu i próbować (bezskutecznie) utrzymać warunki początkowe, co przedstawiono na rysunku 30.14a. Jeżeli natomiast natężenie prądu będzie malało, SEM samoindukcji przybierze kierunek przeciwdziałający temu spadkowi (rys. 30.14b), również starając się utrzymać warunki początkowe.

**Potencjał elektryczny.** Przekonaliśmy się w podrozdziale 30.3, że nie możemy zdefiniować potencjału elektrycznego dla pola elektrycznego (a więc i SEM), jeśli te wielkości są indukowane przez zmienny strumień magnetyczny. Oznacza to, że w przypadku SEM samoindukcji powstającej w cewce z rysunku 30.13 nie możemy określić potencjału wewnątrz cewki, czyli tam, gdzie strumień się zmienia. Jednak nadal możemy definiować potencjał w punktach obwodu poza cewką, czyli tam, gdzie pola elektryczne zostały wytworzone przez ładunki i związane z nimi potencjały elektryczne.

W szczególności możemy zdefiniować wynikającą z samoindukcji różnicę potencjałów  $U_L$  na końcach cewki, czyli między jej doprowadzeniami, o których zakładamy, że znajdują się poza obszarem zmieniającego się strumienia. Dla cewki idealnej (o znikomo małym oporze) wartość  $U_L$  jest równa wartości SEM samoindukcji  $\mathcal{E}_L$ .

Jeżeli natomiast uzwojenie cewki ma opór r, cewkę taką zastępujemy w myśli cewką idealną o SEM samoindukcji równej  $\mathcal{E}_L$  oraz opornikiem r(który znajduje się poza obszarem zmieniającego się strumienia). Podobnie jak w przypadku rzeczywistego źródła o SEM  $\mathcal{E}$  i oporze wewnętrznym rróżnica potencjałów na zaciskach rzeczywistej cewki różni się od jej SEM. Jeżeli nie powiemy wprost, że cewki są rzeczywiste, to będziemy zakładać, że cewki omawiane tutaj są cewkami idealnymi.



**Rys. 30.14.** a) Natężenie prądu *I* rośnie, a w cewce powstaje SEM samoindukcji  $\mathcal{E}_L$ i ma taki kierunek, że przeciwstawia się wzrostowi natężenia prądu. Strzałkę oznaczającą  $\mathcal{E}_L$  możemy narysować wzdłuż pojedynczego zwoju cewki lub obok cewki. Obie możliwości są pokazane na rysunku. b) Natężenie prądu *I* maleje, a SEM samoindukcji ma taki kierunek, że przeciwstawia się spadkowi natężenia prądu



### Sprawdzian 5

Na rysunku przedstawiono SEM  $\mathcal{E}$  indukowaną w cewce. Który z podpunktów opisuje poprawnie prąd płynący w cewce: a) stały i skierowany w prawo, b) stały i skierowany w lewo, c) rosnący i skierowany w prawo, d) malejący i skierowany w prawo, e) rosnący i skierowany w lewo, f) malejący i skierowany w lewo?

# **30.6.** OBWODY *RL*

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 30.25 naszkicować schematyczny diagram obwodu RL, w którym natężenie prądu rośnie;
- 30.26 zapisać drugie prawo Kirchhoffa (w postaci równania różniczkowego) dla obwodu RL, w którym natężenie prądu rośnie;
- **30.27** zastosować rozwiązanie *I*(*t*) opisujące zależność natężenia prądu od czasu dla obwodu *RL*, w którym natężenie prądu rośnie;
- **30.28** znaleźć zależność od czasu różnicy potencjałów na oporniku  $U_R$ , szybkości zmian natężenia prądu  $\frac{dI}{dt}$  oraz SEM na cewce dla obwodu RL, w którym natężenie prądu rośnie;
- 30.29 obliczyć indukcyjną stałą czasową;
- **30.30** naszkicować schematyczny diagram obwodu *RL*, w którym natężenie prądu maleje;

- 30.31 zapisać drugie prawo Kirchhoffa (w postaci równania różniczkowego) dla obwodu RL, w którym natężenie prądu maleje;
- **30.32** zastosować rozwiązanie *I*(*t*) opisujące zależność natężenia prądu od czasu dla obwodu *RL*, w którym natężenie prądu maleje;
- **30.33** znając zależność natężenia prądu od czasu dla obwodu *RL*, w którym natężenie prądu maleje, znaleźć zależność od czasu różnicy potencjałów na oporniku  $U_R$ , szybkości zmian natężenia prądu  $\frac{dI}{dt}$  oraz SEM na cewce;
- **30.34** określić natężenie prądu płynącego przez cewkę znajdującą się w obwodzie *RL* oraz SEM na tej cewce chwilę po tym, gdy natężenie prądu zaczyna się zmieniać (warunek początkowy) oraz po upływie długiego czasu i osiągnięciu stanu ustalonego (warunek końcowy).

#### Podstawowe fakty

 Nagłe przyłożenie stałej SEM *E* do obwodu o jednym oczku zawierającym opornik *R* i cewkę *L* powoduje stopniowe zwiększanie się natężenia prądu do granicznej wartości *E*/*R* zgodnie ze wzorem

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_L})$$

(wzrost natężenia prądu).

- Występująca w tym wzorze wielkość  $\tau_L (= L/R)$  decyduje o szybkości wzrostu natężenia i jest nazywana indukcyjną stałą czasową obwodu.
- Gdy źródło stałej SEM zostanie nagle odłączone, natężenie prądu będzie się zmniejszać od wartości I<sub>0</sub> zgodnie ze wzorem

 $I = I_0 e^{-t/\tau_L}$  (zmniejszanie się natężenia prądu).

# Obwody RL

Z podrozdziału 27.4 dowiedziałeś się, że jeśli nagle przyłożymy SEM  $\mathcal{E}$  do obwodu o jednym oczku, który zawiera opornik *R* i kondensator *C*, to ładunek na kondensatorze nie osiągnie natychmiast swojej wartości  $C\mathcal{E}$  w stanie równowagi, ale będzie zmierzał do niej w sposób wykładniczy

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau_C}).$$
 (30.36)

Szybkość gromadzenia się ładunku jest określona pojemnościową stałą czasową  $\tau_C$ , zdefiniowaną w równaniu (27.36) jako

$$\tau_C = RC. \tag{30.37}$$

Jeżeli nagle odłączymy SEM od tego samego obwodu, to ładunek nie zniknie natychmiast, ale będzie zmierzał do zera w sposób wykładniczy:

$$q = q_0 \mathrm{e}^{-t/\tau_C}.$$
 (30.38)

Stała czasowa  $\tau_C$  opisuje zarówno zanikanie, jak i gromadzenie się ładunku.

Podobne opóźnienie wzrostu (lub spadku) natężenia prądu pojawi się podczas włączania (lub wyłączania) SEM  $\mathcal{E}$  w obwodzie o jednym oczku, który zawiera opornik R i cewkę L. Na przykład, gdy klucz S na rysunku 30.15 zamyka obwód w punkcie a, natężenie prądu w oporniku zaczyna rosnąć. Gdyby nie było cewki, natężenie prądu wzrosłoby bardzo szybko do stałej wartości  $\mathcal{E}/R$ . Jednak ze względu na obecność cewki, w obwodzie pojawia się SEM samoindukcji  $\mathcal{E}_L$ . Zgodnie z regułą Lenza, ta SEM przeciwstawia się wzrostowi natężenia prądu, co oznacza, że jest przeciwnie skierowana niż SEM źródła. Tak więc prąd w oporniku płynie pod wpływem różnicy dwóch SEM, jednej stałej  $\mathcal{E}$ źródła i drugiej zmiennej  $\mathcal{E}_L$  (= -L dI/dt), wynikającej z samoindukcji. Tak długo, jak długo występuje  $\mathcal{E}_L$ , natężenie prądu płynącego przez opornik będzie mniejsze niż  $\mathcal{E}/R$ .

Wraz z upływem czasu natężenie prądu rośnie coraz wolniej, a wartość SEM samoindukcji, proporcjonalna do dI/dt, maleje. Zatem natężenie prądu w obwodzie zmierza asymptotycznie do wartości  $\mathcal{E}/R$ .

Możemy uogólnić ten wynik w sposób następujący:

Początkowo cewka przeciwdziała zmianom natężenia płynącego przez nią prądu. Po dłuższym czasie cewka działa jak zwykły przewód łączący elementy obwodu.

Zbadamy teraz to zjawisko od strony ilościowej. Jeżeli klucz na rysunku 30.15 zamyka obwód w punkcie *a*, to obwód jest równoważny obwodowi przedstawionemu na rysunku 30.16. Zastosujemy do tego obwodu drugie prawo Kirchhoffa, wychodząc z punktu *x* na rysunku i poruszając się zgodnie z kierunkiem prądu o natężeniu *I*, czyli w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

- Opornik. Poruszamy się wzdłuż opornika zgodnie z kierunkiem prądu o natężeniu I, tak więc potencjał elektryczny maleje o IR. Zatem, przechodząc od punktu x do punktu y, obserwujemy zmianę potencjału równą – IR.
- 2. *Cewka*. Natężenie prądu *I* ulega zmianie, tak więc w cewce pojawia się SEM samoindukcji  $\mathcal{E}_L$ . Wartość bezwzględna  $\mathcal{E}_L$  wynika z równania (30.35) i wynosi *L* d*I*/d*t*. Na rysunku 30.16  $\mathcal{E}_L$  jest skierowana do góry, gdyż prąd płynie w dół przez cewkę, a jego natężenie *I* rośnie. Zatem, przechodząc od punktu *y* do punktu *z*, a więc przeciwnie do kierunku  $\mathcal{E}_L$ , obserwujemy zmianę potencjału równą -L d*I*/d*t*.
- 3. Źródło. Wracając od punktu z do punktu wyjścia x, obserwujemy zmianę potencjału, równą + £, związaną z SEM źródła. Tak więc z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że

$$-IR - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \mathcal{E} = 0,$$



**Rys. 30.15.** Obwód *RL*. Gdy klucz S jest połączony z punktem *a*, natężenie prądu rośnie i dąży do granicznej wartości  $\mathcal{E}/R$ 



**Rys. 30.16.** Obwód przedstawiony na rysunku 30.15 z kluczem ustawionym w położeniu *a*. Stosujemy drugie prawo Kirchhoffa w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, zaczynając w punkcie *x* 

czyli

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = \mathcal{E} \qquad \text{(obwód } RL\text{)}. \tag{30.39}$$

Równanie (30.39) jest równaniem różniczkowym zawierającym zmienną I oraz jej pierwszą pochodną dI/dt. Aby rozwiązać to równanie, poszukujemy takiej funkcji I(t), która po podstawieniu I(t) i jej pierwszej pochodnej spełnia równanie (30.39), a także spełnia warunek początkowy I(0) = 0.

Równanie (30.39) wraz z warunkiem początkowym mają dokładnie taką samą postać jak równanie (27.32) opisujące obwód RC, jeżeli q zastąpimy przez I, R przez L, a 1/C przez R. Rozwiązanie równania (30.39) musi więc mieć dokładnie taką samą postać jak rozwiązanie równania (27.33), jeśli dokonamy tych samych podstawień. To rozwiązanie jest dane wyrażeniem

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}), \qquad (30.40)$$

które możemy napisać jako

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}) \qquad (\text{wzrost natężenia prądu}). \tag{30.41}$$

Indukcyjna stała czasowa  $\tau_L$  jest równa

$$au_L = \frac{L}{R}$$
 (stała czasowa). (30.42)

Przeanalizujmy wyrażenie (30.41) w dwóch przypadkach: w chwili zamknięcia klucza (t = 0) oraz po upływie długiego czasu od zamknięcia klucza ( $t \to \infty$ ). Jeżeli podstawimy t = 0 do równania (30.41), to funkcja wykładnicza przyjmie wartość  $e^{-0} = 1$ . Tak więc z równania (30.41) wynika, że natężenie prądu jest w chwili początkowej równe I = 0, czego należało się spodziewać. Jeśli następnie będziemy zmierzać z t do nieskończoności, to funkcja wykładnicza będzie zmierzać do  $e^{-\infty} = 0$ . Zatem z równania (30.41) wynika, że natężenie prądu zmierza do wartości stanu ustalonego  $\mathcal{E}/R$ .

Możemy także przeanalizować różnice potencjałów występujące w obwodzie. Na rysunku 30.17 pokazano, jak zmienia się w czasie różnica potencjałów  $U_R$  (= IR) na oporniku i różnica potencjałów  $U_L$  (= L dI/dt) na cewce dla pewnych szczególnych wartości  $\mathcal{E}$ , L i R. Porównaj ten rysunek z analogicznym rysunkiem dla obwodu RC (rys. 27.16).

Aby wykazać, że wielkość  $\tau_L$  (= L/R) ma wymiar czasu (a tak być musi, gdyż argument funkcji wykładniczej jest bezwymiarowy), przekształcamy jednostkę henr na om w następujący sposób:

$$1 \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{\Omega}} = 1 \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{\Omega}} \left( \frac{1 \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{1 \mathrm{H} \cdot \mathrm{A}} \right) \left( \frac{1 \mathrm{\Omega} \cdot \mathrm{A}}{1 \mathrm{V}} \right) = 1 \mathrm{s}$$

Wyrażenie w pierwszym nawiasie jest współczynnikiem przeliczeniowym, wynikającym z równania (30.35), natomiast wyrażenie w drugim nawia-

#### 30.6. POLE MAGNETYCZNE I DEFINICJA WEKTORA $\vec{B}$ 355

różnica potencjałów na oporniku rośnie, a różnica potencjałów na cewce maleje

**Rys. 30.17.** Zależność od czasu: a) różnicy potencjałów  $U_R$ na oporniku w obwodzie przedstawionym na rysunku 30.16, b) różnicy potencjałów  $U_L$  na cewce w tym samym obwodzie. Małe trójkąciki przedstawiają kolejne przedziały czasowe, równe indukcyjnej stałej czasowej  $\tau_L = L/R$ . Wykres został sporządzony dla  $R = 2000 \ \Omega$ , L = 4 H oraz  $\mathcal{E} = 10$  V



sie jest współczynnikiem przeliczeniowym, wynikającym z zależności U = IR.

*Stała czasowa.* Fizyczne znaczenie stałej czasowej wynika z równania (30.41). Jeżeli podstawimy do tego równania  $t = \tau_L = L/R$ , to otrzymamy

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-1}) \approx 0.63 \frac{\mathcal{E}}{R}.$$
 (30.43)

Tak więc stała czasowa  $\tau_L$  oznacza czas, jaki musi upłynąć, aby natężenie prądu w obwodzie osiągnęło około 63% swojej końcowej wartości w stanie ustalonym  $\mathcal{E}/R$ . Różnica potencjałów  $U_R$  na oporniku jest proporcjonalna do natężenia prądu *I*, zatem wykres natężenia prądu rosnącego w funkcji czasu ma taki sam kształt jak wykres  $U_R$  na rysunku 30.17a.

**Zmniejszanie się natężenia prądu.** Załóżmy, że klucz S zamykający obwód przedstawiony na rysunku 30.15 znajduje się w punkcie *a* dostatecznie długo, aby natężenie prądu osiągnęło stan ustalony  $\mathcal{E}/R$ . Jeżeli teraz przestawimy klucz w położenie *b*, to źródło zostanie odłączone od obwodu. (Przełączenie do punktu *b* musi w rzeczywistości nastąpić na chwilę przed przerwaniem połączenia z punktem *a*. Taki klucz jest nazywany kluczem *bezprzerwowym*). Bez źródła natężenie prądu płynącego przez opornik będzie się zmniejszało. Prąd nie może jednak przestać płynąć natychmiast; jego natężenie będzie stopniowo malało do zera. Równanie różniczkowe opisujące zmniejszanie się natężenia można wyprowadzić, podstawiając  $\mathcal{E} = 0$  w równaniu (30.39)

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR = 0. \tag{30.44}$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego, spełniające warunki początkowe  $I(0) = I_0 = \mathcal{E}/R$ , może być napisane przez analogię do równań (27.38) i (27.39)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L} = I_0 e^{-t/\tau_L} \qquad \text{(zmniejszanie się natężenia prądu).}$$
(30.45)

Widzimy, że ta sama stała czasowa  $\tau_L$  decyduje zarówno o zwiększaniu się natężenia prądu (równanie (30.41)), jak i o jego zmniejszaniu (równanie (30.45)).

W równaniu (30.45)  $I_0$  oznacza natężenie prądu w chwili t = 0. W naszym przypadku było to  $\mathcal{E}/R$ , ale równie dobrze może to być jakakolwiek inna wartość początkowa.



### Sprawdzian 6

Na rysunku przedstawiono trzy obwody składające się z takich samych źródeł, cewek i oporników. Uszereguj obwody ze względu na natężenia prądu płynącego przez źródło: a) tuż po zamknięciu klucza, b) po upływie długiego czasu, rozpoczynając od największej wartości. (Jeśli jest to dla ciebie zbyt trudne, zapoznaj się najpierw z poniższym przykładem i spróbuj jeszcze raz).



#### Przykład 30.05. Obwód RL tuż po zamknięciu klucza i po upływie długiego czasu

Na rysunku 30.18a przedstawiono obwód składający się z trzech identycznych oporników o oporze  $R = 9 \Omega$ , dwóch identycznych cewek o indukcyjności L = 2 mHi źródła doskonałego o SEM  $\mathcal{E} = 18 \text{ V}.$ 

**a**) Jakie będzie natężenie prądu *I*, który popłynie przez źródło tuż po zamknięciu klucza?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Tuż po zamknięciu klucza każda cewka będzie usiłowała przeciwdziałać zmianie natężenia płynącego przez nią prądu.

**Obliczenia:** Ponieważ natężenie prądu w każdej z cewek jest równe zeru przed zamknięciem klucza, więc będzie ono także równe zeru chwilę później. Zatem bezpośrednio po zamknięciu klucza cewka zachowuje się jak przerwa w obwodzie, co pokazano na rysunku 30.18b. Mamy więc obwód o jednym oczku, dla którego drugie prawo Kirchhoffa daje

$$\mathcal{E} - IR = 0.$$

Podstawiając dane, otrzymujemy

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{18 \text{ V}}{9 \Omega} = 2 \text{ A}$$
 (odpowiedź).

**b**) Jakie będzie natężenie prądu *I* płynącego przez źródło po długim czasie od zamknięcia klucza?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Ρ

Po długim czasie od zamknięcia klucza natężenia prądów osiągają stan ustalony, a cewki działają jak zwykłe przewody połączeniowe, co pokazano na rysunku 30.18c.

**Obliczenia:** Mamy teraz obwód z trzema identycznymi opornikami połączonymi równolegle. Z równania (27.23) wynika, że opór równoważny wynosi  $R_{\rm rw} =$  $R/3 = (9 \ \Omega)/3 = 3 \ \Omega$ . Drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu równoważnego, pokazanego na rysunku 30.18d, daje  $\mathcal{E} - IR_{\rm rw} = 0$ , stąd



**Rys. 30.18.** a) Obwód *RL* o wielu oczkach, z otwartym kluczem. b) Obwód równoważny tuż po zamknięciu klucza. c) Obwód równoważny po upływie długiego czasu. d) Obwód o jednym oczku równoważny obwodowi c)

#### Przykład 30.06. Obwód RL dla czasów pośrednich

Solenoid ma indukcyjność 53 mH i opór 0,37  $\Omega$ . Ile czasu upłynie do momentu, w którym natężenie prądu osiągnie połowę końcowej wartości w stanie ustalonym, jeżeli solenoid dołączymy do źródła? (Mamy teraz do czynienia z *rzeczywistym solenoidem*, jako że musimy uwzględnić jego niezerowy opór wewnętrzny).

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Możemy w myśli podzielić solenoid na opór i indukcyjność połączone szeregowo ze źródłem, tak jak na rysunku 30.16. Zastosowanie drugiego prawa Kirchhoffa prowadzi wtedy do równania (30.39), którego rozwiązaniem jest wyrażenie (30.41) opisujące natężenie prądu *I* w obwodzie. **Obliczenia:** Zgodnie z tym rozwiązaniem natężenie prądu *I* rośnie wykładniczo od zera do końcowej wartości w stanie ustalonym  $\mathcal{E}/R$ . Niech  $t_0$  oznacza czas potrzebny do tego, aby natężenie prądu *I* osiągnęło połowę wartości końcowej. Z równania (30.41) otrzymujemy wówczas

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t_0/\tau_L}).$$

Rozwiązujemy to równanie względem  $t_0$ , skracając  $\mathcal{E}/R$ , przenosząc funkcję wykładniczą na jedną stronę i obliczając logarytm naturalny obydwu stron. Otrzymujemy wtedy

$$t_0 = \tau_L \ln 2 = \frac{L}{R} \ln 2 = \frac{53 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{0,37 \Omega} \ln 2 = 0,1 \text{ s}$$
 (odpowiedź).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **30.7.** ENERGIA ZMAGAZYNOWANA W POLU MAGNETYCZNYM

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

30.35 opisać wyprowadzenie wzoru na energię zgromadzoną w polu magnetycznym cewki w obwodzie *RL* zawierającym źrodło stałej SEM; 30.36 zastosować związek między energią zgromadzoną w polu magnetycznym cewki w obwodzie RL, indukcyjności tej cewki L oraz natężeniem I prądu płynącego przez cewkę.

#### Podstawowe fakty \_

• Energia magnetyczna zmagazynowana w polu magnetycznym cewki o indukcyjności *L*, przez którą płynie prąd o natężeniu I, wyraża się wzorem  $E_B = \frac{1}{2}LI^2$ 

(energia magnetyczna).

## Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

Gdy odsuwamy od siebie dwie cząstki naładowane różnoimiennie, możemy powiedzieć, że w polu elektrycznym wytwarzanym przez te cząstki gromadzona jest elektryczna energia potencjalna. Energię tę można odzyskać, jeżeli pozwolimy, aby cząstki znów zbliżyły się do siebie. W ten sam sposób możemy rozpatrywać energię zmagazynowaną w polu magnetycznym, tyle że mamy teraz do czynienia z prądami, a nie z ładunkami elektrycznymi.

Aby wyprowadzić wzór opisujący ilościowo zmagazynowaną energię, przeanalizujmy ponownie rysunek 30.16, na którym przedstawiono źródło

SEM  $\mathcal{E}$  połączone z opornikiem R i cewką L. Równanie (30.39), które przytaczamy tu jeszcze raz:

$$\mathcal{E} = L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR, \qquad (30.46)$$

jest równaniem różniczkowym, opisującym wzrost natężenia prądu w tym obwodzie. Przypominamy, że równanie to wynika bezpośrednio z drugiego prawa Kirchhoffa, które z kolei wyraża zasadę zachowania energii w obwodzie o jednym oczku. Jeżeli pomnożymy obie strony równania (30.46) przez *I*, to otrzymamy równanie

$$\mathcal{E}I = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I^2R,\tag{30.47}$$

które ma następującą interpretację fizyczną dotyczącą pracy i energii:

- 1. Jeżeli ładunek dq przepływa przez źródło SEM o wartości  $\mathcal{E}$  w czasie dt, to źródło wykonuje nad tym ładunkiem pracę  $\mathcal{E}$ dq. Szybkość, z jaką źródło wykonuje pracę, wynosi  $(\mathcal{E}$ dq)/dt, czyli  $\mathcal{E}I$ . Tak więc lewa strona równania (30.47) wyraża szybkość, z jaką źródło SEM dostarcza energię do pozostałych części obwodu.
- **2.** Ostatni składnik po prawej stronie równania (30.47) wyraża szybkość, z jaką energia wydziela się na oporniku w postaci energii termicznej.
- 3. Z zasady zachowania energii wynika, że energia, która jest dostarczona do obwodu, ale nie wydziela się w postaci energii termicznej, musi być zmagazynowana w polu magnetycznym cewki. Równanie (30.47) opisuje zasadę zachowania energii w obwodach RL, a więc środkowy składnik musi wyrażać szybkość  $dE_B/dt$ , z jaką energia magnetyczna  $E_B$  jest gromadzona w polu magnetycznym.

Tak więc

$$\frac{\mathrm{d}E_B}{\mathrm{d}t} = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$
(30.48)

Możemy napisać to równanie w postaci

$$\mathrm{d}E_B = LI\mathrm{d}I.$$

Całkując obie strony, otrzymujemy

$$\int_{0}^{E_B} \mathrm{d}E_B = \int_{0}^{I} LI \,\mathrm{d}I,$$

czyli

$$E_B = \frac{1}{2}LI^2$$
 (energia magnetyczna). (30.49)

Jest to wyrażenie określające całkowitą energię zmagazynowaną w cewce L, w której płynie prąd o natężeniu I. Zauważ podobieństwo tego wyrażenia do wyrażenia określającego energię zmagazynowaną w kondensatorze o pojemności C i ładunku q

$$E_E = \frac{q^2}{2C}.\tag{30.50}$$

(Zmienna  $I^2$  jest odpowiednikiem  $q^2$ , a stała L jest odpowiednikiem 1/C).

#### Przykład 30.07. Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

Cewka ma indukcyjność 53 mH i opór 0,35  $\Omega$ .

**a)** Ile wynosi energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki, gdy przyłożymy do niej SEM 12 V, a natężenie prądu osiągnie stan ustalony?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Energia zmagazynowana w dowolnej chwili w polu magnetycznym cewki zależy od natężenia prądu płynącego przez cewkę w tej samej chwili, zgodnie z równaniem (30.49) ( $E_B = \frac{1}{2}LI^2$ ).

**Obliczenia:** Aby wyznaczyć energię  $E_{B\infty}$  zgromadzoną w stanie ustalonym, musimy najpierw obliczyć natężenie prądu w tym stanie. Z równania (30.41) wynika, że natężenie prądu w stanie ustalonym jest równe

$$I_{\infty} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12 \text{ V}}{0.35 \Omega} = 34.3 \text{ A.}$$
 (30.51)

Stąd po podstawieniu otrzymujemy

$$E_{B\infty} = \frac{1}{2}LI_{\infty}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(53 \cdot 10^{-3} \text{ H})(34,3 \text{ A})^2 = 31 \text{ J}$$
  
(odpowiedź).

**b**) Po jakim czasie, licząc w stałych czasowych, w polu magnetycznym zostanie zmagazynowana energia równa połowie energii w stanie ustalonym?

*Obliczenia:* Teraz musimy odpowiedzieć na pytanie, dla jakiego czasu *t* spełnione jest równanie

$$E_B = \frac{1}{2} E_{B\infty}.$$

Korzystając dwukrotnie z równania (30.49), możemy napisać ten warunek w następującej postaci:

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

# **30.8.** GĘSTOŚĆ ENERGII POLA MAGNETYCZNEGO

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

30.37 stwierdzić, że z występowaniem pola magnetycznego związana jest pewna energia;

#### Podstawowe fakty

• Gęstość energii zmagazynowanej w polu magnetycznym w danym punkcie (może to być np. punkt leżący wewnątrz cewki, ale też dowolny inny) można wyrazić za pomocą warto-

 $\frac{1}{2}LI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}LI_{\infty}^2,$ 

$$I = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) I_{\infty}.$$
 (30.52)

Oznacza to, że gdy natężenie prądu wzrasta od wartości początkowej równej zeru do wartości granicznej  $I_{\infty}$ , połowa końcowej wartości energii w polu magnetycznym zostanie zmagazynowana właśnie wtedy, gdy natężenie prądu *I* osiągnie wartość daną równaniem (30.52). Z drugiej strony, *I* jest wyznaczone w równaniu (30.41), a  $I_{\infty}$  (patrz równanie (30.51)) jest równe  $\mathcal{E}/R$ , tak więc równanie (30.52) przybiera postać

$$\frac{\mathcal{E}}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}R}$$

Po skróceniu  $\mathcal{E}/R$  i przekształceniu tego równania możemy napisać

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,293,$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{t}{\tau_L} = -\ln 0,293 = 1,23,$$

czyli

czyli

 $t \approx 1,2\tau_L$  (odpowiedź).

Zatem energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki, w której płynie prąd, osiągnie połowę wartości w stanie ustalonym po upływie 1,2 stałych czasowych od momentu przyłożenia SEM.

**30.38** zastosować związek między gęstością energii pola magnetycznego *u*<sub>B</sub> i wartością indukcji magnetycznej *B*.

ści indukcji magnetycznej B w tym punkcie jako

 $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$  (gęstość energii magnetycznej).

# Gęstość energii pola magnetycznego

Rozważmy odcinek l w pobliżu środka długiego solenoidu o polu przekroju S. Przez solenoid płynie prąd o natężeniu I, a objętość solenoidu o długości l jest równa Sl. Energia  $E_B$  zmagazynowana przez odcinek solenoidu o długości l musi znajdować się całkowicie w tej objętości, gdyż pole magnetyczne na zewnątrz solenoidu jest w przybliżeniu równe zeru. Ponadto zmagazynowana energia musi być rozłożona równomiernie we wnętrzu solenoidu, gdyż pole magnetyczne jest tam (w przybliżeniu) jednorodne.

Zatem energia zmagazynowana w jednostce objętości wynosi

 $u_B = \frac{E_B}{Sl}.$ 

 $E_B = \frac{1}{2}LI^2,$ 

Ponieważ

wiec

$$u_B = \frac{LI^2}{2Sl} = \frac{L}{l} \frac{I^2}{2S}.$$
 (30.53)

Wielkość L oznacza tutaj indukcyjność odcinka solenoidu długości l.

Podstawiając wyrażenie L/l z równania (30.31), otrzymujemy

$$u_B = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2, \qquad (30.54)$$

gdzie *n* jest liczbą zwojów na jednostkę długości. Korzystając z równania (29.23) ( $B = \mu_0 In$ ), możemy zapisać *gęstość energii* jako

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$
 (gęstość energii magnetycznej). (30.55)

To równanie określa gęstość zmagazynowanej energii w dowolnym punkcie, w którym indukcja magnetyczna jest równa *B*. Choć wyprowadziliśmy to równanie, rozpatrując szczególny przypadek solenoidu, równanie (30.55) jest słuszne dla wszystkich pól magnetycznych, bez względu na to, w jaki sposób zostały wytworzone. Równanie to można porównać z równaniem (25.25)

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2, \qquad (30.56)$$

które określa gęstość energii (w próżni) w dowolnym punkcie w polu elektrycznym. Zauważ, że zarówno  $u_B$ , jak i  $u_E$  są proporcjonalne do kwadratów wielkości opisujących, odpowiednio, pola *B* i *E*.

### Sprawdzian 7

W tabeli podano liczbę zwojów na jednostkę długości, natężenie prądu i pole przekroju dla trzech solenoidów. Uszereguj solenoidy pod względem gęstości energii magnetycznej wewnątrz każdego z nich, zaczynając od największej wartości.

Solenoid	Liczba zwojów na jednostkę długości	Natężenie prądu	Pole przekroju
а	$2n_1$	$I_1$	$2S_1$
b	$n_1$	$2I_1$	$S_1$
С	$n_1$	$I_1$	$6S_1$

# **30.9.** INDUKCJA WZAJEMNA

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

30.39 opisać indukcję wzajemną dwóch cewek i naszkicować odpowiedni układ;

30.40 obliczyć indukcyjność wzajemną jednej cewki względem

#### Podstawowe fakty \_

• Gdy cewki 1 i 2 znajdują się w niewielkiej odległości, zmiana natężenia prądu płynącego przez jedną z cewek powoduje indukowanie SEM w drugiej cewce. Ta indukcja wzajemna jest opisywana równaniami

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

drugiej (lub ogólniej, względem przewodu, w którym płynie prąd o zmiennym w czasie natężeniu);

30.41 wyrazić SEM indukowaną w jednej cewce przez prąd płynący w drugiej cewce za pomocą indukcyjności wzajemnej i szybkości zmian natężenia prądu w drugiej cewce.

oraz

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

gdzie M jest indukcyjnością wzajemną cewek, a jej jednostką jest henr.

# Indukcja wzajemna

W tym podrozdziale powrócimy do przypadku dwóch oddziałujących ze sobą cewek, omawianego po raz pierwszy w podrozdziale 30.2. Teraz potraktujemy ten przypadek w sposób trochę bardziej ogólny. Widzieliśmy już, że jeśli dwie cewki znajdują się blisko siebie, tak jak pokazano na rysunku 30.2, to prąd stały o natężeniu I w jednej cewce wytwarza strumień magnetyczny  $\Phi$ , który przenika przez drugą cewkę (*sprzęgając się* z drugą cewką). Jeżeli natężenie prądu I zmienia się w czasie, to zgodnie z prawem Faradaya w drugiej cewce pojawi się SEM  $\mathcal{E}$ . Nazywamy to zjawisko **indukcją wzajemną**, aby wskazać na wzajemne oddziaływanie dwóch cewek, w odróżnieniu od *samoindukcji* występującej w jednej cewce.

Spójrzmy teraz na zjawisko indukcji wzajemnej z ilościowego punktu widzenia. Na rysunku 30.19a przedstawiono dwie okrągłe, ciasno nawinięte cewki, położone blisko siebie i mające wspólną oś symetrii. Cewka 1 jest elementem obwodu zawierającego regulowany opornik nastawiony na pewną konkretną wartość oporu *R* oraz źródło, więc płynie przez nią prąd o pewnym stałym natężeniu  $I_1$ . Prąd ten wytwarza pole magnetyczne, przedstawione na rysunku za pomocą linii pola  $\vec{B}_1$ . Cewka 2 jest dołączona do czułego miernika, ale nie jest zasilana ze źródła. Strumień magnetyczny  $\Phi_{21}$  (czyli strumień przechodzący przez cewkę 2, ale związany z prądem w cewce 1) sprzęga się z  $N_2$  zwojami cewki 2.

Definiujemy indukcyjność wzajemną  $M_{21}$  cewki 2 względem cewki 1 za pomocą równania

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1},\tag{30.57}$$

które ma taką samą postać jak równanie (30.28)

$$L = N\Phi/I, \tag{30.58}$$

będące definicją indukcyjności. Równanie (30.57) może być zapisane jako

$$M_{21}I_1 = N_2\Phi_{21}. (30.59)$$



Jeżeli teraz, zmieniając R, spowodujemy, że natężenie prądu  $I_1$  będzie się zmieniać w czasie, to

$$M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t}.$$
 (30.60)

Prawa strona tego równania, zgodnie z prawem Faradaya, jest równa wartości bezwzględnej SEM  $\mathcal{E}_2$ , która pojawia się w cewce 2 w wyniku zmiany natężenia prądu w cewce 1. Zatem przy uwzględnieniu znaku minus wskazującego kierunek SEM otrzymujemy równanie

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t},\tag{30.61}$$

które można porównać z równaniem (30.35), opisującym samoindukcję  $(\mathcal{E} = -LdI/dt)$ .

**Zamiana cewek.** Zamieńmy teraz rolami cewki 1 i 2, tak jak to pokazano na rysunku 30.19b. Innymi słowy, dołączamy cewkę 2 do źródła zewnętrznego, a płynący w tej cewce prąd o natężeniu  $I_2$  wytwarza strumień magnetyczny  $\Phi_{12}$ , sprzężony z cewką 1. Jeżeli natężenie prądu  $I_2$ będzie się zmieniać w czasie, to rozumując tak jak poprzednio, otrzymamy

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}.$$
 (30.62)

Widzimy więc, że SEM indukowana w jednej z cewek jest proporcjonalna do szybkości zmian natężenia prądu w drugiej cewce. Mogłoby się wydawać, że stałe proporcjonalności  $M_{21}$  i  $M_{12}$  są różne. Okazuje się jednak, że są one w istocie takie same, choć faktu tego nie jesteśmy w stanie tu dowieść. Mamy więc

$$M_{21} = M_{12} = M, (30.63)$$

a równania (30.61) i (30.62) możemy napisać jako

**Rys. 30.19.** Indukcja wzajemna. a) Przepływ prądu przez cewkę 1 jest źródłem pola magnetycznego, które znajduje się także wewnątrz cewki 2. Jeśli natężenie  $I_1$  tego prądu będzie się zmieniać wskutek zmiany oporu R, to w cewce 2 powstanie indukowana SEM i miernik podłączony do cewki 2 wskaże przepływ prądu. b) Zamieniamy rolami cewki 1 i 2

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{30.64}$$

oraz

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}.\tag{30.65}$$

#### Przykład 30.08. Indukcja wzajemna dwóch równoległych cewek

Na rysunku 30.20 przedstawiono dwie okrągłe, ciasno nawinięte cewki. Mniejsza cewka (o promieniu  $R_2$ i o  $N_2$  zwojach) umieszczona jest współosiowo i w jednej płaszczyźnie z większą cewką (o promieniu  $R_1$ i o  $N_1$  zwojach).

a) Wyprowadź wzór opisujący indukcyjność wzajemną M tego układu cewek przy założeniu, że  $R_1 \gg R_2$ .

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Indukcyjność wzajemna M tego układu cewek jest równa stosunkowi strumienia sprzężonego  $(N\Phi)$  w jednej z cewek do natężenia prądu I w drugiej cewce wytwarzającego ten strumień. Powinniśmy zatem założyć, że w cewkach płyną prądy, a następnie obliczyć strumień sprzężony w jednej z cewek.

**Obliczenia:** Pole magnetyczne wytworzone przez mniejszą cewkę, a obejmujące większą cewkę jest niejednorodne — nie ma stałej wielkości ani kierunku. Tak więc strumień przenikający przez większą cewkę, a wytworzony przez mniejszą cewkę jest niejednorodny i trudny do obliczenia. Natomiast mniejsza cewka jest dostatecznie mała, aby przyjąć, że przenikające przez nią pole magnetyczne wytworzone przez większą cewkę jest w przybliżeniu jednorodne. Stąd, aby wyznaczyć M, zakładamy, że w większej cewce płynie prąd o natężeniu  $I_1$  i obliczamy strumień sprzężony  $N_2\Phi_{21}$  w mniejszej cewce

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}.$$
 (30.66)

Z równania (30.2) wynika, że strumień  $\Phi_{21}$  przepływający przez każdy zwój mniejszej cewki jest równy

$$\Phi_{21} = B_1 S_2$$

gdzie  $B_1$  jest wartością indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez większą cewkę w miejscu, gdzie znaj-



**Rys. 30.20.** Mała cewka jest umieszczona w środku dużej cewki. Możemy wyznaczyć indukcyjność wzajemną cewek, przepuszczając przez dużą cewkę prąd o natężeniu  $I_1$ 

duje się mniejsza cewka, a  $S_2 = \pi R_2^2$  jest polem powierzchni jednego zwoju. Tak więc strumień sprzężony w mniejszej cewce (o  $N_2$  zwojach) jest równy

$$N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 S_2. \tag{30.67}$$

Aby wyznaczyć  $B_1$  w miejscu zajmowanym przez mniejszą cewkę, możemy zastosować równanie (29.26)

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

podstawiając z równe zeru, gdyż obie cewki znajdują się w jednej płaszczyźnie. Zgodnie z tym równaniem, każdy zwój większej cewki wytwarza pole magnetyczne o indukcji  $\mu_0 I_1/2R_1$  w miejscu, w którym znajduje się mniejsza cewka. Zatem wartość indukcji całkowitego pola magnetycznego wytworzonego w tym miejscu przez większą cewkę (o  $N_1$  zwojach) wynosi

$$B_1 = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}.$$
 (30.68)

Podstawienie wyrażeń (30.68) w miejsce  $B_1$  oraz  $\pi R_2^2$ w miejsce  $S_2$  w równaniu (30.67) daje

$$N_2 \Phi_{21} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R_2^2 I_1}{2R_1}$$

Podstawiając ten wynik do równania (30.66), otrzymujemy więc

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{2R_1} \qquad \text{(odpowiedź).}$$
(30.69)

**b**) Jaka jest wartość M dla  $N_1 = N_2 = 1200$  zwojów,  $R_2 = 1,1$  cm i  $R_1 = 15$  cm?

Obliczenia: Z równania (30.69) wynika, że

$$M = \frac{(\pi)(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m})(1200)(1200)(0,011 \text{ m})^2}{(2)(0,15 \text{ m})}$$
  
= 2,29 \cdot 10^{-3} H \approx 2, 3 mH (odpowiedź).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

### Podsumowanie

**Strumień magnetyczny** *Strumień magnetyczny*  $\Phi_B$  przechodzący przez powierzchnię *S* w polu magnetycznym *B* jest zdefiniowany jako

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}, \qquad (30.1)$$

gdzie całka jest obliczana po powierzchni. Jednostką strumienia magnetycznego w układzie SI jest weber, przy czym 1 Wb = 1 T  $\cdot$  m<sup>2</sup>. Jeżeli  $\vec{B}$  jest prostopadłe do powierzchni i jednorodne w obrębie tej powierzchni, to równanie (30.1) przybiera postać

$$\Phi_B = BS$$
 ( $\vec{B} \perp S, \vec{B}$  jednorodne). (30.2)

**Prawo indukcji Faradaya** Jeżeli strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przechodzący przez powierzchnię ograniczoną zamkniętą przewodzącą pętlą zmienia się w czasie, to w pętli pojawia się prąd oraz SEM. To zjawisko nazywamy *indukcją elektromagnetyczną*. Indukowana SEM wynosi

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$
 (prawo Faradaya). (30.4)

Jeżeli zastąpimy pętlę ciasno nawiniętą cewką o N zwojach, to otrzymamy indukowaną SEM równą

$$\mathcal{E} = -N \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}.$$
(30.5)

**Reguła Lenza** Prąd indukowany ma taki kierunek, że pole magnetyczne *wytwarzane przez ten prąd* przeciwstawia się zmianie strumienia magnetycznego, która indukuje prąd. Indukowana SEM ma taki sam kierunek, jak prąd indukowany.

**SEM i indukowane pole elektryczne** SEM jest indukowana przez zmienny strumień magnetyczny nawet wtedy, gdy Rozważmy teraz przypadek, w którym zamieniamy cewki rolami, tzn. zakładamy, że w mniejszej cewce płynie prąd o natężeniu  $I_2$  i usiłujemy obliczyć M z równania (30.57) w postaci

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}.$$

Obliczenie  $\Phi_{12}$ , czyli niejednorodnego strumienia pola magnetycznego mniejszej cewki przenikającego przez większą cewkę, nie jest rzeczą łatwą. Gdybyśmy wykonali obliczenia numeryczne za pomocą komputera, otrzymalibyśmy jednak, tak jak poprzednio, *M* równe 2,3 mH! Zapamiętaj jednak, że zachodzenie równości (30.63)  $(M_{21} = M_{12} = M)$  wcale nie jest tak łatwo wykazać.

ramka, wewnątrz której strumień się zmienia, jest hipotetyczną krzywą, a nie rzeczywistym przewodnikiem. Zmienny strumień magnetyczny indukuje pole elektryczne  $\vec{E}$  w każdym punkcie krzywej, a indukowana SEM jest związana z wektorem  $\vec{E}$  zależnością

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S},\tag{30.19}$$

gdzie całkujemy wzdłuż zamkniętej krzywej. Korzystając z równania (30.19), możemy zapisać prawo Faradaya w najbardziej ogólnej postaci

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(prawo Faradaya).} \qquad (30.20)$$

Zmienne pole magnetyczne indukuje pole elektryczne  $\vec{E}$ .

**Cewki Cewka** jest elementem, który może być wykorzystany do wytworzenia w pewnym obszarze pola magnetycznego o znanej indukcji. Jeżeli w każdym z *N* zwojów cewki płynie prąd o natężeniu *I*, to strumień magnetyczny sprzęga te zwoje. **Indukcyjność** *L* cewki jest zdefiniowana jako

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \qquad \text{(definicja indukcyjności)}. \tag{30.28}$$

Jednostką indukcyjności w układzie SI jest **henr**, przy czym: 1 henr = 1 H = 1 T  $\cdot$  m<sup>2</sup>/ A. Dla długiego solenoidu o polu powierzchni przekroju *S* i *n* zwojach na jednostkę długości indukcyjność na jednostkę długości w pobliżu środka solenoidu wynosi

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \qquad \text{(solenoid)}. \tag{30.31}$$

**Samoindukcja** Jeżeli natężenie prądu *I* płynącego przez cewkę zmienia się w czasie, to w cewce jest indukowana SEM.

Ta SEM samoindukcji jest równa

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$
 (SEM samoindukcji). (30.35)

Kierunek  $\mathcal{E}_L$  możemy wyznaczyć na podstawie reguły Lenza: SEM samoindukcji działa tak, aby przeciwstawić się zmianie, która ją wywołała.

**Szeregowe obwody** *RL* Jeżeli przyłożymy stałą SEM do obwodu o jednym oczku, zawierającego opór *R* i indukcyjność *L*, to natężenie prądu będzie rosło do wartości stacjonarnej  $\mathcal{E}/R$  zgodnie z równaniem

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau_L}) \qquad \text{(wzrost natężenia prądu).} \quad (30.41)$$

Wielkość  $\tau_L$  (= L/R) to **indukcyjna stała czasowa**. Gdy odłączymy źródło stałej SEM, natężenie prądu będzie zanikać, począwszy od wartości  $I_0$ , zgodnie z równaniem

$$I = I_0 e^{-t/\tau_L}$$
 (zmniejszanie się natężenia prądu).  
(30.45)

**Energia magnetyczna** Jeżeli w cewce o indukcyjności *L* płynie prąd o natężeniu *I*, to w polu magnetycznym cewki

### Pytania

1 Jeżeli kołowy przewód na rysunku 30.21, znajdujący się w jednorodnym polu magnetycznym, zwiększy swoją śred-

nicę na skutek rozszerzalności cieplnej, to prąd indukowany popłynie w nim w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Czy pole magnetyczne jest skierowane za, czy przed płaszczyznę rysunku?





**2** Przedstawiona na rysunku 30.22a przewodząca pętla została umieszczona kolejno w sześciu jednorodnych polach magnetycznych. Wektor indukcji każdego z tych pól był równoległy do osi z, która jest skierowana przed płaszczyznę rysunku. Na rysunku 30.22b przedstawiono zależność składowej z indukcji magnetycznej, oznaczonej przez  $B_z$ , od czasu t dla każdego z tych pól. (Linie 1 i 3 są równoległe, podobnie linie 4 i 6, linie 2 i 5 są zaś równoległe do osi czasu). Uszereguj pola magnetyczne ze względu na SEM indukowaną w pętli, zaczynając od największej SEM skierowanej zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a kończąc na największej SEM skierowanej przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.



Rys. 30.22. Pytanie 2

zmagazynowana jest energia

$$E_B = \frac{1}{2}LI^2$$
 (energia magnetyczna). (30.49)

Jeżeli *B* oznacza wartość indukcji magnetycznej w dowolnym punkcie (wewnątrz cewki lub gdzie indziej), to gęstość zmagazynowanej energii jest w tym punkcie równa

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$
 (gęstość energii magnetycznej). (30.55)

**Indukcja wzajemna** Jeżeli dwie cewki (oznaczone jako 1 i 2) znajdują się blisko siebie, to prąd o zmiennym natężeniu w jednej z cewek indukuje SEM w drugiej cewce. Indukcja wzajemna jest opisana równaniami

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{30.64}$$

oraz

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t},\tag{30.65}$$

gdzie M (mierzone w henrach) jest indukcyjnością wzajemną.

**3** Na rysunku 30.23 przedstawiono długi prosty przewód, w którym płynie prąd o natężeniu *I*. Przewód biegnie obok trzech prostokątnych ramek o długościach boków *L*, 1,5*L* i 2*L*, nie stykając się z nimi. Ramki są umieszczone w takiej odległości, aby nawzajem na siebie nie oddziaływały. Ramki 1 i 3 są położone symetrycznie w stosunku do długiego przewodu. Uszereguj ramki pod względem indukowanego w nich natężenia prądu, zaczynając od największej wartości, jeżeli natężenie prądu *I*: a) jest stałę, b) rośnie.



Rys. 30.23. Pytanie 3

**4** Na rysunku 30.24 przedstawiono dwa obwody, w których przewodzący pręt jest przesuwany wzdłuż przewodu w kształcie litery U z taką samą prędkością *v*, w takim samym jedno-



Rys. 30.24. Pytanie 4

rodnym polu magnetycznym. Równoległe odcinki przewodu są od siebie odległe o 2L w obwodzie 1 i o L w obwodzie 2. Prąd indukowany w obwodzie 1 płynie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. a) Czy pole magnetyczne jest skierowane za, czy przed płaszczyznę rysunku? b) Czy prąd indukowany w obwodzie 2 płynie zgodnie, czy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara? c) Czy SEM indukowana w obwodzie 1 jest większa, mniejsza, czy taka sama jak w obwodzie 2?

**5** Na rysunku 30.25 przedstawiono obszar w kształcie koła, w którym jednorodne pole magnetyczne o wartości induk-

b

**Rys. 30.25.** Pytanie 5

Rys. 30.26. Pytanie 6

cji malejącej w czasie jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Przedstawiono również cztery kontury w kształcie okręgów. Uszereguj kontury całkowania pod względem wartości  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ , zaczynając od największej wartości.

6 Na rysunku 30.26 przedstawiono pętle utworzoną z przewódu wygiętego w następujący sposób: fragment *bc* jest ćwiartką okręgu, fragment *ac* składa się z dwóch prostopadłych odcinków równej długości, a fragment *ab* jest odcinkiem. Poniżej podano trzy możliwe zależności indukcji

pola magnetycznego w obszarze zajmowanym przez pętlę od czasu: (1)  $\vec{P}_{i} = 2\hat{i} + 7\hat{i} = 5t\hat{k}$ 

(1) 
$$\vec{B}_1 = 5\hat{i} + 7\hat{j} - 5t\hat{k},$$
  
(2)  $\vec{B}_2 = 5t\hat{i} - 4\hat{j} - 15\hat{k},$   
(3)  $\vec{B}_3 = 2\hat{i} - 5t\hat{j} - 12\hat{k},$ 

gdzie indukcja magnetyczna jest wyrażona w militeslach, a czas w sekundach. Nie wykonując pisemnych obliczeń, uszereguj te trzy zależności pod względem a) pracy na jednostkę ładunku wykonanej przy indukowaniu prądu w pętli oraz b) natężenia indukowanego prądu, poczynając od największych wartości. c) Dla każdej zależności określ kierunek, w jakim płynie indukowany prąd.

7 Na rysunku 30.27 przedstawiono obwód zawierający dwa takie same oporniki i cewkę idealną. Czy natężenie prądu płynącego przez środkowy opornik będzie mniejsze, większe, czy takie samo jak w drugim oporniku: a) tuż po zamknię-



Rys. 30.27. Pytanie 7

ciu klucza S, b) po upływie długiego czasu od zamknięcia klucza S, c) tuż po ponownym otwarciu klucza S, d) po upływie długiego czasu od ponownego otwarcia klucza S?

8 Klucz w obwodzie na rysunku 30.15 został połączony

z punktem *a*, a następnie, po dłuższym czasie, został przełączony do punktu *b*. Natężenie prądu płynącego w cewce w wyniku tego przełączenia jest przedstawione na rysunku 30.28 dla czterech zestawów wartości oporu *R* i indukcyjności *L*: 1)  $R_0$  i  $L_0$ , 2)  $2R_0$  i  $L_0$ , 3)  $R_0$ i  $2L_0$ , 4)  $2R_0$  i  $2L_0$ . Przyporządkuj zestawy danych poszczególnym wykresom.



Rys. 30.28. Pytanie 8

**9** Na rysunku 30.29 przedstawiono trzy obwody składające się z jednakowych źródeł, cewek i oporników. Uszereguj obwody pod względem natężenia prądu płynącego przez opornik R: a) po upływie długiego czasu od zamknięcia klucza, b) tuż po ponownym otwarciu klucza następującym po upływie długiego czasu oraz c) po upływie długiego czasu od ponownego otwarcia klucza.



**10** Na rysunku 30.30 przedstawiono zależność od czasu różnicy potencjałów  $U_R$  na opor-

niky počenčjalow  $\mathcal{O}_R$  na opor niku w trzech obwodach połączonych tak jak na rysunku 30.16. Obwody zawierają taki sam opór R i SEM  $\mathcal{E}$ , ale różnią się wartością indukcyjności L. Uszereguj obwody pod względem wartości L, zaczynając od największej.



**Rys. 30.30.** Pytanie 10

**11** Na rysunku 30.31 przedstawiono trzy sytuacje, w których przewodząca pętla leży częściowo w obszarze, w którym znajduje się pole magnetyczne. Wartość indukcji każdego z tych pól albo rośnie, albo maleje, co zaznaczono na ry-





sunku. W każdej sytuacji pętla jest zamknięta źródłem prądu. Dla których sytuacji SEM żródła i SEM indukowana mają ten sam kierunek?

**12** Na rysunku 30.32 przedstawiono cztery sytuacje, w których prostokątna ramka przewodząca jest wyciągana z tą samą stałą prędkością z obszaru, w którym znajduje się pole magnetyczne, takie samo dla wszystkich sytuacji i skierowane za płaszczyznę rysunku. Długość krawędzi ramki wynosi albo L, albo 2L, co można odczytać z rysunku. Uszereguj te sytuacje ze względu na a) wartość siły zewnętrznej umożliwiającej taki ruch ramki oraz na b) szybkości przemiany energii

w energię termiczną wydzielaną w ramce, poczynając od wartości największych.



## Zadania

Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
 Liczba kropek określa stopień trudności zadania
 Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual* Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
 Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
 Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

#### Podrozdział 30.1 Prawo Faradaya i reguła Lenza

•1 Kołowa ramka o średnicy 10 cm (widziana z boku na rysunku 30.33) jest umieszczona w taki sposób, że wektor

 $\vec{N}$  normalny do płaszczyzny ramki tworzy kąt  $\theta = 30^{\circ}$  z kierunkiem jednorodnego pola magnetycznego o wartości indukcji 0,5 T. Ramka jest obracana w taki sposób, że  $\vec{N}$  zakreśla powierzchnię stożka wokół kierunku pola ze stałą szybkością 100 obrotów/min, kąt  $\theta$  pozostaje zaś podczas tego ruchu stały. Jaka jest SEM indukowana w ramce?



Rys. 30.33. Zadanie 1

•2 Wykonany z elastycznego materiału przewód został rozciągnięty i tworzy kołową ramkę o promieniu 12 cm. Płaszczyzna ramki jest prostopadła do jednorodnego pola magnetycznego o wartości indukcji 0,8 T. Po zwolnieniu naciągu promień ramki zaczyna się zmniejszać z chwilową prędkością 75 cm/s. Jaka SEM jest wtedy indukowana w ramce?

•3 ssm www Na rysunku 30.34 cewka o 120 zwojach, promieniu 1,8 cm i oporze 5,3 Ω jest umieszczona współosiowo z solenoidem o średnicy 3,2 cm, dla którego gęstość nawinięcia jest równa 220 zwojów/cm. Natężenie





prądu płynącego przez ten solenoid zmniejsza się liniowo od wartości 1,5 A do zera w czasie  $\Delta t = 25$  ms. Wyznacz natężenie prądu indukowanego w tym czasie w cewce.

•4 Przewodząca pętla o promieniu 12 cm i oporze 8,5  $\Omega$  znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego wartość indukcji zmienia się w sposób przedstawiony na rysunku 30.35. Skala osi poziomej jest wyznaczona przez

 $t_s = 6$  s, a skala osi pionowej przez  $B_s = 0,5$  T. Płaszczyzna pętli jest prostopadła do wektora *B*. Wyznacz SEM indukowaną w pętli w przedziałach czasu: a) od 0 do 2 s, b) od 2 s do 4 s oraz c) od 4 s do 6 s.

•5 Na rysunku 30.36 przedstawiono zamkniętą, przewodzącą ramkę z drutu w kształcie okręgu o promieniu R = 2 m. Ramka ma opór 4  $\Omega$ , a środek okręgu znajduje się w punkcie, przez który przechodzi długi prosty przewód. W chwili t = 0





prąd w przewodzie płynie w prawo, a jego natężenie jest równe 5 A. Później natężenie prądu zmienia się zgodnie z zależnością  $I = 5 \text{ A} - (2 \text{ A/s}^2)t^2$ . (Prosty przewód jest izolowany, tak więc nie ma połączenia elektrycznego między nim a ramką). Jakie jest natężenie prądu indukowanego w ramce dla t > 0? •6 Na rysunku 30.37a przedstawiono obwód składający się z idealnego źródła o SEM  $\mathcal{E} = 6$  V, opornika *R* oraz niewielkiej pętli o polu powierzchni 5 cm<sup>2</sup>. W przedziale czasu od t = 10 s do t = 20 s w obszarze zajmowanym przez pętlę włączono zewnętrzne pole magnetyczne. Pole to jest jednorodne, jego wektor indukcji jest skierowany za płaszczyznę rysunku 30.37a, a wartość indukcji ma postać B = at, gdzie *B* jest wyrażone w teslach, *t* w sekundach, współczynnik *a* jest zaś pewną stałą. Na rysunku 30.37b przedstawiono zależność natężenia prądu płynącego w obwodzie od czasu przed włączone, oraz po wyłączeniu pola. Skala osi pionowej jest wyznaczona przez  $I_s = 2$  mA. Wyznacz wartość współczynnika *a* w wyrażeniu na wartość indukcji pola.





•7 Strumień magnetyczny przenikający przez pętlę pokazaną na rysunku 30.38 rośnie zgodnie z zależnością  $\Phi_B = 6t^2 + 7t$ , gdzie  $\Phi_B$  jest wyrażone w miliweberach, a *t* w sekundach. a) Jaka jest wartość SEM indukowanej w pętli, gdy t = 2 s? b) Czy prąd płynący przez opornik *R* jest skierowany w lewo, czy w prawo?



•8 Jednorodne pole magnetyczne jest prostopadłe do płaszczyzny kołowej ramki o średnicy 10 cm, wykonanej z drutu o średnicy 2,5 mm i oporności  $1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ . Z jaką szybkością powinno się zmieniać w czasie pole magnetyczne, aby w ramce pojawił się prąd indukowany o natężeniu 10 A?

•9 Niewielką pętlę o polu powierzchni 6,8 mm<sup>2</sup> umieszczono współosiowo wewnątrz długiego solenoidu o gęstości nawinięcia 854 zwojów/cm. W solenoidzie płynie prąd

zmienny o przebiegu sinusoidalnym, którego amplituda wynosi 1,28 A, a częstość kołowa jest równa 212 rad/s. Wyznacz amplitudę SEM indukowanej w pętli.

••10 Na rysunku 30.39 przedstawiono pętlę przewodzącą składającą się z dwóch leżących w prostopadłych płaszczyznach, przystających półokręgów o promieniu 3,7 cm.



Rys. 30.39. Zadanie 10

Pętlę taką można wykonać, zaginając płaską pętlę kołową wzdłuż średnicy tak, by półokręgi stały się prostopadłe. Jednorodne pole magnetyczne ma indukcję o wartości początkowej 76 mT i kierunku prostopadłym do linii zgięcia, przy czym wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  tworzy kąt 45° z każdą z płaszczyzn zawierających półokręgi. Wartość indukcji magnetycznej zmiejsza się ze stałą prędkością do zera w przedziale czasu 4,5 ms. Wyznacz: a) wartość oraz b) kierunek (zgodny czy przeciwny do ruchu wskazówek zegara, gdy patrzeć na pętlę wzdłuż wektora  $\vec{B}$ ) SEM indukowanej w pętli w tym przedziale czasu.

••11 Prostokątna cewka o N zwojach, długości a i szerokości b jest obracana z częstotliwością v w jednorodnym polu magnetycznym  $\vec{B}$ , jak pokazano na rysunku 30.40. Cewka jest połączona z obracającymi się wraz z nią pierścieniami, po których ślizgają się metalowe szczotki w celu zapewnienia kontaktu elektrycznego. a) Wykaż, że SEM indukowana w cewce jest funkcją czasu i ma postać

$$\mathcal{E} = 2\pi\nu NabB\sin(2\pi\nu t) = \mathcal{E}_0\sin(2\pi\nu t).$$

Tak właśnie działają powszechnie używane prądnice prądu zmiennego. b) Dla jakiej wartości *Nab* w ramce będzie indukowana SEM o amplitudzie  $\mathcal{E}_0 = 150$  V, jeśli ramka obracana jest z prędkością 60 obrotów/s w jednorodnym polu magnetycznym o wartości indukcji 0,5 T?





••12 Na rysunku 30.41 przedstawiono prostokątną ramkę o bokach L = 40 cm i W = 25 cm znajdującą się w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ . Wyznacz a) wartość  $\mathcal{E}$ oraz b) kierunek (zgodny czy przeciwny do ruchu wskazówek zegara,



**Rys. 30.41.** Zadanie 12

względnie "nie dotyczy" dla  $\mathcal{E} = 0$ ) SEM indukowanej w ramce dla  $\vec{B} = (4 \cdot 10^{-2} \text{ T/m}) y \hat{k}$ . Wyznacz c) wartość oraz d) kierunek SEM indukowanej w ramce dla  $\vec{B} =$  $(6 \cdot 10^{-2} \text{ T/s}) t \hat{k}$ . Wyznacz e) wartość oraz f) kierunek SEM indukowanej w ramce dla  $\vec{B} = (8 \cdot 10^{-2} \text{ T/(m \cdot s)}) yt \hat{k}$ . Wyznacz g) wartość oraz h) kierunek SEM indukowanej w ramce dla  $\vec{B} = (3 \cdot 10^{-2} \text{ T/(m \cdot s)}) xt \hat{j}$ . Wyznacz i) wartość oraz j) kierunek SEM indukowanej w ramce dla  $\vec{B} =$  $(5 \cdot 10^{-2} \text{ T/(m \cdot s)}) xt \hat{i}$ .

••13 ilw Sto zwojów izolowanego drutu miedzianego nawinięto na drewniany walcowy rdzeń o polu przekroju poprzecznego równym  $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ . Oba końce drutu są dołączone do opornika. Całkowity opór obwodu jest równy 13  $\Omega$ . Ile ładunku przepłynie przez ustalony punkt obwodu, jeżeli indukcja przyłożonego z zewnątrz, jednorodnego pola magnetycznego w rdzeniu skierowanego wzdłuż jego osi zmieni się od 1,6 T w jednym kierunku do 1,6 T w kierunku przeciwnym?

••14 W sytuacji przedstawionej na rysunku 30.42a wartość indukcji jednorodnego pola magnetycznego rośnie w czasie w sposób przedstawiony na rysunku 30.42b, gdzie skala osi poziomej jest zadana przez  $t_s = 3$  s, a skala osi pionowej przez  $B_s = 9$  mT. Na rysunku 30.42a przedstawiono także leżącą w płaszczyźnie rysunku kołową pętlę przewodzącą o polu powierzchni  $8 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>. Zależność całkowitego ładunku przepływającego przez punkt *A* tej pętli jest przedstawiona na rysunku 30.42c, gdzie skala osi pionowej przez  $q_s = 6$  mC. Wyznacz opór pętli.



Rys. 30.42. Zadanie 14

••15 <sup>60</sup> Ramka z drutu w kształcie kwadratu o boku 2 m jest ułożona prostopadle do linii jednorodnego pola magnetycznego, przy czym połowa powierzchni ramki znajduje się

w polu, tak jak pokazano na rysunku 30.43. W obwodzie ramki znajduje się idealne źródło o SEM równej 20 V. Jeżeli wartość indukcji pola zmienia się w czasie zgodnie z zależnością B = 0,042 - 0,87t, gdzie B jest wyrażone w teslach, a tw sekundach, to: a) jaka jest całkowita SEM w obwodzie oraz b) jaki jest kierunek wypadkowego prądu?



**Rys. 30.43.** Zadanie 15

••16 •• Na rysunku 30.44a przedstawiono ramkę z drutu, która ma kształt prostokąta o bokach W = 20 cm i H =30 cm; opór ramki wynosi 5 m $\Omega$ . Wnętrze ramki zostało podzielone na trzy jednakowe obszary, w których występują pola magnetyczne, odpowiednio,  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  i  $\vec{B}_3$ . Pola te są jednorodne, a wektor indukcji każdego z nich jest skierowany przed płaszczyznę rysunku. Na rysunku 30.44b przedstawiono zależność składowej z każdego z tych pól od czasu, przy czym skala osi poziomej jest zadana przez  $t_s = 2$  s, a skala osi pionowej przez  $B_s = 4 \mu T$  oraz  $B_b = -2.5B_s$ . Wyznacz a) wartość natężenia prądu płynącego w ramce oraz b) kierunek prądu.





••17 Mała kołowa ramka o polu powierzchni 2 cm<sup>2</sup> jest umieszczona w płaszczyźnie dużej kołowej ramki o promieniu 1 m tak, że ich środki się pokrywają. Natężenie prądu w dużej ramce jest zmieniane równomiernie od 200 A do -200 A (co oznacza także zmianę kierunku prądu) w ciągu 1 s, począwszy od t = 0. Wyznacz indukcję magnetyczną pola wytworzonego w środku ramki przez prąd płynący w dużej ramce w chwilach: a) t = 0, b) t = 0,5 s oraz c) t = 1 s. d) Czy w przedziale czasu od t = 0 do t = 1 s zmienia się kierunek pola  $\vec{B}$ ? Wewnętrzna ramka jest mała, więc przyjmij, że pole  $\vec{B}$  pochodzące od dużej ramki jest jednorodne w obszarze zajmowanym przez małą ramkę. e) Jaka SEM jest indukowana w małej ramce w chwili t = 0,5 s?

••18 Na rysunku 30.45 przedstawiono dwie proste szyny przewodzące, które tworzą kąt prosty. Przewodzący pręt, połączony elektrycznie z szynami, rozpoczyna ruch w wierz-chołku kąta w chwili t = 0 i porusza się ze stałą prędkością 5,2 m/s. Pole magnetyczne o indukcji B = 0,35 T jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. Oblicz: a) strumień magne-

tyczny przechodzący przez trójkąt utworzony z szyn i pręta w chwili t = 3 s, b) SEM wzdłuż obwodu trójkąta w tej samej chwili. c) Jeżeli zapiszemy SEM jako  $\mathcal{E} = at^n$ , gdzie *a* i *n* są stałymi, to jaka będzie wartość *n*?



••19 ilw Prądnica składa się z cewki o 100 zwojach drutu, z których każdy ma kształt prostokątnej ramki o bokach 50 cm i 30 cm. Cewka umieszczona jest w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B = 3,5 T, początkowo prostopadłym do płaszczyzny cewki. Jaka jest maksymalna wartość wytwa-rzanej SEM, gdy pętla wiruje z prędkością 1000 obrotów/min wokół osi prostopadłej do kierunku  $\vec{B}$ ?

••20 W pewnym miejscu wektor indukcji ziemskiego pola magnetycznego ma wartość B = 0,59 gausów i jest nachylony w dół pod kątem 70° do poziomu. Płaska, ułożona poziomo cewka z drutu ma promień 10 cm, 1000 zwojów i całkowity opór 85  $\Omega$ . Do cewki jest dołączony miernik o oporze 140  $\Omega$ . Cewkę obrócono wokół średnicy o kąt półpełny, tak że znów jest ułożona poziomo. Ile ładunku przepłynęło przez miernik podczas obrotu cewki?

••21 Na rysunku 30.46 przedstawiono sztywny przewód wygięty w kształcie półokręgu o promieniu a = 2 cm, który jest obracany z częstością kołową 40 obrotów/s w jednorod-



**Rys. 30.46.** Zadanie 21

nym polu magnetycznym o indukcji 20 mT. Jakie są: a) częstotliwość, b) amplituda SEM indukowanej w obwodzie?

••22 Prostokątna ramka o polu 0,15 m<sup>2</sup> obraca się w jednorodnym polu magnetycznym. Wyznacz SEM indukowaną w ramce w chwili, gdy kąt między wektorem indukcji magnetycznej i wektorem normalnym do płaszczyzny ramki jest równy  $\pi/2$  i przyrasta z szybkością 0,6 rad/s.

••23 ssm Na rysunku 30.47 przedstawiono dwie równoległe ramki o wspólnej osi. Mniejsza ramka (o promieniu r) znajduje się nad większą ramką (o promieniu R), tak że ich środki znajdują się w odległości  $x \gg R$ . Wskutek tego pole magnetyczne wytworzone przez prąd o natężeniu I, płynący w większej ramce



Rys. 30.47. Zadanie 23

przeciwnie do ruchu wskazówek zegara jest niemal jednorodne w obszarze zajmowanym przez mniejszą ramkę. Załóżmy, że x rośnie ze stałą prędkością dx/dt = v. a) Podaj wyrażenie na strumień magnetyczny przenikający przez powierzchnię ograniczoną mniejszą ramką jako funkcję x. (*Wskazówka*: Patrz równanie (29.27)). Dla mniejszej ramki b) podaj wyrażenie na indukowaną SEM oraz c) wyznacz kierunek prądu indukowanego.

••24 Kawałek drutu został wygięty w kształcie trzech łuków, każdy o promieniu r =10 cm, jak pokazano na rysunku 30.48. Każdy łuk jest ćwiartką okręgu, przy czym *ab* leży w płaszczyźnie *xy*, *bc* w płaszczyźnie *yz*, a *ca* w płaszczyźnie *zx*. a) Jeśli kierunek wektora indukcji magnetycznej jednorodnego pola jest zgodny z dodatnim kie-



Rys. 30.48. Zadanie 24

runkiem osi x, to jaka jest wartość SEM wytworzonej w obwodzie, gdy B rośnie z szybkością 3 mT/s? b) Jaki jest kierunek prądu w łuku bc? •••25 • W dwóch długich równoległych przewodach miedzianych o średnicy 2,5 mm płyną w przeciwnych kierunkach prądy o natężeniu 10 A. a) Zakładając, że osie przewodów są oddalone o 20 mm, oblicz strumień magnetyczny na metr istniejący w obszarze między tymi osiami. b) Jaka wyrażona w procentach część strumienia znajduje się wewnątrz przewodów? c) Wykonaj polecenie z punktu (a) dla prądów płynących w tym samym kierunku.

•••26 • Układ przewodów przedstawiony na rysunku 30.49 jest opisany parametrami a = 12 cm, i b = 16 cm. Natężenie prądu w długim prostym przewodzie jest dane

zależnością  $I = 4,5t^2 - 10t$ , gdzie *I* jest wyrażone w amperach, a *t* w sekundach. a) Oblicz SEM w kwadratowej ramce dla t = 3 s. b) Jaki jest kierunek prądu indukowanego w ramce?

•••27 iiw Na rysunku 30.50 przedstawiono kwadratową, przewodzącą ramkę, której boki mają długość 2 cm. Pole magnetyczne jest skierowane przed płaszczyznę rysunku; wartość jego indukcji jest dana wzorem  $B = 4t^2y$ , gdzie *B* jest wyrażone w teslach, *t* w sekundach, a *y* w metrach. Dla t = 2,5 s a) wyznacz SEM w ramce oraz b) podaj kierunek SEM.

•••28 • Na rysunku 30.51 przedstawiono prostokątną, przewodzącą ramkę o długości a = 2,2 cm, szerokości b = 0,8 cm i oporze R = 0,4 m $\Omega$ , umieszczoną w pobliżu nieskończenie długiego przewodu, w którym





płynie prąd o natężeniu I = 4,7 A. Ramka oddala się od przewodu ze stałą prędkością v = 3,2 mm/s. Dla chwili, w której odległość środka ramki od przewodu jest równa r = 1,5b, wyznacz a) wartość strumienia magnetycznego przechodzącego przez ramkę oraz b) natężenie prądu w ramce.

# Podrozdział 30.2 Zjawisko indukcji i przekazywanie energii

•29 Na rysunku 30.52 przedstawiono metalowy pręt przesuwany z prędkością  $\vec{v}$  po dwóch metalowych szynach połączonych na jednym końcu metalowym paskiem. Pole magnetyczne o wartości indukcji B = 0.35 T jest skierowane przed płaszczyznę rysunku. a) Jaka SEM jest indukowana w obwodzie, jeśli szyny są oddalone o 25 cm, a prędkość pręta

jest równa 55 cm/s? b) Ile wynosi natężenie prądu płynącego w pręcie, jeśli ma on opór 18  $\Omega$ , a opór szyn i paska jest znikomo mały? c) Z jaką szybkością energia jest przekształcana w energie termiczną?



Rys. 30.52. Zadania 29 i 35

•30 Na rysunku 30.53a przedstawiono kołową pętlę leżącą w płaszczyźnie prostopadłej do osi solenoidu tak, że środki pętli i solenoidu się pokrywają. Promień pętli jest równy 6 cm, promień solenoidu wynosi 2 cm, a jego gęstość uzwojenia to 8000 zwojów/m. Przez solenoid płynie prąd  $I_{sol}$ , którego zależność od czasu *t* pokazano na rys. 30.53b; skala osi poziomej jest wyznaczona przez  $t_s = 2$  s, a skala osi pionowej przez  $I_s = 1$  A. Na rysunku 30.53c pokazano zależność energii  $E_t$  wydzielanej w pętli jako energia termiczna; skala osi pionowej jest wyznaczona przez  $E_s = 100$  hJ. Ile wynosi opór pętli?



•31 ssm ilw Odcinek drutu miedzianego o długości 50 cm

i średnicy 1 mm tworzy kołową ramkę umieszczoną prostopadle do kierunku wektora indukcji, którego wartość rośnie ze stałą szybkością 10 mT/s. Z jaką szybkością wydziela się w ramce energia termiczna?

•32 Antena w kształcie ramki o polu powierzchni  $S = 2 \text{ cm}^2$ i oporze  $R = 5,21 \,\mu\Omega$  jest ustawiona prostopadle do kierunku wektora indukcji jednorodnego pola magnetycznego o początkowej wartości indukcji równej 17  $\mu\Omega$ . Wartość indukcji maleje liniowo do zera w przedziale czasu 2,96 ms. Wyznacz całkowitą energię termiczną wydzielaną w ramce podczas zmniejszania indukcji pola.

••33 •• Na rysunku 30.54 przedstawiono pręt długości L = 10 cm, poruszany ze stałą prędkością v = 5 m/s wzdłuż poziomych szyn. Układ złożony z szyn, pręta oraz łączącego szyny paska tworzy przewodzącą pętlę. Opór pręta jest równy 0,4  $\Omega$ , opór pozostałych elementów obwodu można pominąć. Prąd o natężeniu I = 100 A płynący przez długi



Rys. 30.54. Zadanie 33

przewód prostoliniowy leżący w odległości a = 10 mm od ramki jest źródłem (niejednorodnego) pola magnetycznego w obszarze zawierającym ramkę. Wyznacz a) SEM oraz b) natężenie prądu indukowanego w ramce. c) Z jaką szybkością w pręcie wydzielana jest energia termiczna? d) Jaka jest wartość siły zewnętrznej, którą należy przyłożyć do pręta, aby poruszał się on ze stałą prędkością? e) Wyznacz szybkość wykonywania pracy nad prętem.

••34 Na rysunku 30.55 długa prostokątna przewodząca ramka o szerokości L, oporze

*R* i masie *m* jest początkowo zawieszona w jednorodnym polu magnetycznym  $\vec{B}$  skierowanym poziomo za płaszczyznę rysunku. Pole istnieje tylko powyżej linii *aa*. Gdy ramka zaczyna spadać, porusza się ruchem przyspieszonym, aż do osiągnięcia pewnej prędkości granicznej  $v_g$ . Pomijając opór powietrza, podaj wyrażenie na tę prędkość graniczną.





••35 Przewodzący pręt pokazany na rysunku 30.52 ma długość *L* i jest przesuwany bez tarcia ze stałą prędkością  $\vec{v}$  po poziomych przewodzących szynach. Szyny połączone są na jednym końcu metalowym paskiem. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$ , skierowane przed płaszczyznę rysunku, przenika przez obszar, w którym porusza się pręt. Przyjmij, że L = 10 cm, v = 5 m/s, a B = 1,2 T. Wyznacz a) wartość oraz b) kierunek (w górę czy w dół) SEM indukowanej w pręcie? Wyznacz c) natężenie prądu płynącego w obwodzie i d) kierunek prądu? Przyjmij, że opór pręta jest równy 0,4  $\Omega$ , a opór szyn i paska metalowego jest znikomo mały. e) Z jaką szybkością wydziela się energia termiczna w pręcie? f) Jaka siła musi być przyłożona z zewnątrz do pręta, aby jego ruch odbywał się ze stałą prędkością? g) Z jaką szybkością siła zewnętrzna wykonuje pracę nad prętem?

#### Podrozdział 30.3 Indukowane pola elektryczne

•36 Na rysunku 30.56 przedstawiono dwa obszary  $R_1$  i  $R_2$ w kształcie kół o promieniach  $r_1 = 20$  cm i  $r_2 = 30$  cm. W obszarze  $R_1$  istnieje jednorodne pole magnetyczne o indukcji  $B_1 = 50$  mT, skierowane za płaszczyznę rysunku, a w obszarze  $R_2$  — jednorodne pole magnetyczne o indukcji  $B_2 = 75$  mT, skiero-



Rys. 30.56. Zadanie 36

wane przed płaszczyznę rysunku (pomiń jakiekolwiek pola rozproszone). Wartości indukcji obydwu pól maleją z szyb-

kością 8,5 mT/s. Oblicz całkę  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$  wzdłuż: a) konturu 1, b) konturu 2, c) konturu 3.

•37 ssm ilw Długi solenoid ma średnicę 12 cm. Prąd o natężeniu *I* płynący w uzwojeniu solenoidu wytwarza w jego wnętrzu jednorodne pole magnetyczne o indukcji B = 30 mT. Zmniejszanie natężenia prądu *I* powoduje zmniejszanie indukcji magnetycznej z szybkością 6,5 mT/s. Oblicz wartość natężenia indukowanego pola elektrycznego w odległości: a) 2,2 cm, b) 8,2 cm od osi solenoidu.

••38 • W pewnym obszarze w kształcie walca, którego oś jest równoległa do osi z, występuje pole magnetyczne, dla którego wektor indukcji jest skierowany wzdłuż osi z, a wartość indukcji zmienia się zgodnie z zależnością B = at, gdzie B jest wyrażone w teslach, t zaś w sekundach. Na rysunku 30.57

przedstawiono zależność wartości pola elektrycznego indukowanego przez zmienne pole magnetyczne od odległości r od osi walca, przy czym skala pozioma jest wyznaczona przez  $r_s = 4$  cm, a skala osi pionowej przez  $E_s =$  $300 \,\mu$ N/C. Wyznacz wartość współczynnika a.



**Rys. 30.57.** Zadanie 38

••39 Wartość indukcji magnetycznej wewnątrz walcowego magnesu o średnicy przekroju równej 3,3 cm zmienia się sinusoidalnie między skrajnymi wartościami 29,6 T i 30 T z częstotliwością 15 Hz. (Osiąga się to dzięki przepływowi prądu o zmiennym natężeniu w przewodzie nawiniętym wokół magnesu trwałego.) Wyznacz amplitudę wartości pola elektrycznego indukowanego przez taką zmianę pola magnetycznego.

#### Podrozdział 30.4 Cewki i indukcyjność

•40 Indukcyjność ciasno nawiniętej cewki o 400 zwojach wynosi 8 mH. Oblicz przenikający przez cewkę strumień magnetyczny, jeżeli natężenie prądu jest równe 5 mA.

•41 Okrągła cewka o promieniu 10 cm składa się z 30 ciasno nawiniętych zwojów. Zewnętrzne pole magnetyczne o wartości indukcji 2,6 mT jest skierowane prostopadle do płaszczyzny cewki. a) Jaki strumień magnetyczny przenika przez

zwoje cewki, jeżeli nie płynie w niej prąd? b) Gdy w cewce płynie w pewnym kierunku prąd o natężeniu 3,8 A, wówczas wypadkowy strumień przenikający przez cewkę jest równy zeru. Ile wynosi indukcyjność cewki?

••42 Na rysunku 30.58 przedstawiono pasek miedziany o szerokości W = 16 cm wygięty w taki sposób, że tworzy rurkę o promieniu R = 1,8 cm oraz dwie płaskie, równoległe części. W pasku pły-



Rvs. 30.58. Zadanie 42

nie prąd o natężeniu I = 35 mA, rozłożony równomiernie w całej szerokości, tak że mamy w praktyce do czynienia z cewką o jednym zwoju. Przyjmij, że pole magnetyczne na zewnątrz tej rurki jest znikomo małe, a pole wewnątrz rurki jednorodne. Wyznacz: a) pole magnetyczne wewnątrz rurki, b) indukcyjność rurki (bez płaskich części).

••43 Dwa jednakowe, długie, równoległe przewody mają równe promienie a = 1,53 mm, w przewodach płyną zaś prądy o takich samych natężeniach, ale przeciwnych kierunkach. Odległość między osiami przewodów jest równa d = 14,2 cm. Zaniedbując strumień magnetyczny wewnątrz przewodów i uwzględniając jedynie strumień magnetyczny na zewnątrz przewodów, wyznacz indukcyjność tego układu przewodów na jednostkę długości przewodów.

#### Podrozdział 30.5 Samoindukcja

•44 Przez cewkę o indukcyjności 12 H płynie prąd o natężeniu 2 A. Dla jakiej szybkości zmian natężenia w cewce powstanie indukowana SEM o wartości 60 V?

•45 W pewnej chwili natężenie prądu i SEM samoindukcji są skierowane tak jak pokazano na rysunku 30.59. a) Czy natę-

żenie prądu rośnie, czy maleje?
b) Indukowana SEM wynosi
17 V, a szybkość zmian natężenia prądu jest równa 25 kA/s.
Oblicz indukcyjność cewki.

••46 Prąd o natężeniu *I* płynący w cewce o indukcyjności 4,6 H zmienia się w czasie, w sposób pokazany na rysunku 30.60, przy czym skala osi poziomej jest zadana przez  $t_s =$ 6 ms, a skala osi pionowej przez  $I_s = 8$  A. Cewka ma opór 12  $\Omega$ . Oblicz wartość indukowanej



Rys. 30.59. Zadanie 45





SEM w przedziałach czasu: a) od t = 0 do t = 2 ms, b) od t = 2 ms do t = 5 ms, c) od t = 5 ms do t = 6 ms. (Nie bierz pod uwage zmian natężenia na końcach przedziałów).

••47 Połączenie szeregowe cewek. Dwie cewki o indukcyjnościach  $L_1$  i  $L_2$  są połączone szeregowo i znajdują się w dużej odległości, tak że pole magnetyczne jednej cewki nie wpływa na pole magnetyczne drugiej. a) Wykaż, że indukcyjność równoważna jest równa

$$L_{\rm rw} = L_1 + L_2.$$

(*Wskazówka*: Przypomnij sobie wyprowadzenie wzorów dla połączenia szeregowego oporników i kondensatorów. Który przypadek odpowiada omawianemu tutaj?) b) Jak można uogólnić wzór z punktu (a) na przypadek *N* cewek połączonych szeregowo?

••48 Połączenie równoległe cewek. Dwie cewki o indukcyjnościach  $L_1$  i  $L_2$  są połączone równolegle i znajdują się
w dużej odległości, tak że pole magnetyczne jednej cewki nie wpływa na pole magnetyczne drugiej. a ) Wykaż, że indukcyjność równoważna jest równa

$$1/L_{\rm rw} = 1/L_1 + 1/L_2$$

(*Wskazówka*: Przypomnij sobie wyprowadzenie wzorów dla połączenia równoległego oporników i kondensatorów. Który przypadek odpowiada oma-

wianemu tutaj?) b) Jak można uogólnić wzór z punktu (a) na przypadek *N* cewek połączonych równolegle?



wiony na rysunku 30.61 został podłączony do źródła prądu o zmiennym natężeniu, przy

••49 Układ cewek przedsta-

**Rys. 30.61.** Zadanie 49

czym  $L_1 = 30$  mH,  $L_2 = 50$  mH,  $L_3 = 20$  mH i  $L_4 = 15$  mH. Wyznacz indukcyjność zastępczą układu. (Zapoznaj się najpierw z zadaniami 47 i 48).

#### Podrozdział 30.6 Obwody RL

•50 W ciągu 5 s natężenie prądu w obwodzie *RL* wzrasta do jednej trzeciej wartości w stanie ustalonym. Wyznacz indukcyjną stałą czasową.

•51 ilw Natężenie prądu w obwodzie *RL* zmniejsza się od 1 A do 10 mA w ciągu pierwszej sekundy po odłączeniu źródła od obwodu. Oblicz opór *R* w obwodzie, jeśli *L* jest równe 10 H.

•52 W obwodzie przedstawionym na rysunku 30.15 klucz został połączony z punktem *a* w chwili t = 0. Wyznacz stosunek  $\mathcal{E}_L/\mathcal{E}$  SEM samoindukcji cewki do SEM źródła a) tuż po chwili t = 0 oraz b) w chwili  $t = 2\tau_L$ . c) W jakiej chwili wyrażonej jako wielokrotność  $\tau_L$  rozważany stosunek  $\mathcal{E}_L/\mathcal{E}$ jest równy 0,5?

•53 ssm Solenoid o indukcyjności 6,3  $\mu$ H jest połączony szeregowo z opornikiem 1,2 k $\Omega$ . a) Jeżeli dołączymy do obwodu źródło o SEM 14 V, to po jakim czasie natężenie prądu w oporniku osiągnie 80% wartości końcowej? b) Jakie jest natężenie prądu w oporniku dla  $t = \tau_L$ ?

•54 W obwodzie przedstawionym na rysunku 30.62 mamy  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}, R_1 = 10 \Omega,$  $R_2 = 20 \Omega, R_3 = 30 \Omega \text{ oraz}$ L = 2 H. Wyznacz natężenia prądów a)  $I_1$ , b)  $I_2$  bezpośrednio po zamknięciu klucza S. (Przyjmij, że natężenia



Rys. 30.62. Zadanie 54

prądów płynących w kierunku zaznaczonym strzałką są dodatnie, a w przeciwnym — ujemne). Wyznacz natężenia prądów c)  $I_1$ , d)  $I_2$  po upływie długiego czasu. Po upływie długiego czasu klucz zostaje ponownie otwarty. Wyznacz natężenia prądów e)  $I_1$ , f)  $I_2$  bezpośrednio po ponownym otwarciu klucza S. Wyznacz natężenia prądów g)  $I_1$ , h)  $I_2$  po upływie długiego czasu od ponownego otwarcia klucza S.

•55 ssm W chwili t = 0 do szeregowego obwodu *RL* podłączono źródło prądu. Wyznacz, po jakim czasie wyrażonym jako wielokrotność  $\tau_L$  prąd płynący w obwodzie będzie o 0,1% mniejszy od wartości w stanie ustalonym.

•56 Na rysunku 30.63 przedstawiono układ składający się z cewki o 25 zwojach i z idealnego źródła o SEM równej 16 V. Na rysunku 30.64 przedstawiono zależność strumienia magnetycznego  $\Phi$  przez pojedynczy zwój od natężenia prądu płynącego przez cewkę. Skala osi poziomej jest wyznaczona przez  $I_s = 2$  A, a skala osi pionowej jest wyznaczona przez  $\Phi_s = 4 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{m}^2$ . Jeśli klucz S zostanie zamknięty w chwili t = 0, jaka będzie szybkość zmian natężenia prądu  $\frac{dI}{dt}$  w chwili  $t = 1.5\tau_L$ ?



••57 W układzie przedstawionym na rysunku 30.65  $R = 15 \Omega$ , L = 5 H, SEM idealnego źródła jest równa  $\mathcal{E} = 10$  V, a bezpiecznik w górnej części obwodu jest idealnym bezpiecznikiem 3 A: gdy płynie przez niego prąd o natężeniu mniejszym niż 3 A, opór bezpiecznika jest zerowy, a gdy prąd ten osiągnie wartość 3 A, bezpiecznik przepala się i od tej chwili ma opór nieskończony. W chwili t = 0 klucz S został za-

mknięty. a) Kiedy bezpiecznik się przepali? (*Wskazówka*: Wzoru (30.41) nie można tutaj zastosować; należy zastanowić się nad wzorem (30.39)). b) Naszkicuj wykres zależności natężenia prądu *I* płynącego przez opornik od czasu. Zaznacz chwilę, w której bezpiecznik przepala się.





••58 •• Wyobraź sobie, że SEM źródła w obwodzie na rysunku 30.16 zmienia się w czasie w taki sposób, że natężenie prądu jest dane zależnością I(t) = 3 + 5t, gdzie I jest wyrażone w amperach, a t w sekundach. Przyjmij  $R = 4 \Omega$ , L = 6 H i wyprowadź wzór określający SEM źródła jako funkcję czasu. (*Wskazówka*: Zastosuj drugie prawo Kirchhoffa).

•••59 ssm www W obwodzie przedstawionym na rysunku 30.66 klucz S został zamknięty w chwili t = 0. Od tego czasu źródło prądu stałego, zmieniając swoją SEM, utrzymuje stałe natężenie prądu *I* przepływającego przez zamknięty klucz. a) Wyprowadź zależność natężenia prądu w cewce od czasu. b) W jakiej chwili natężenie prądu płynącego przez opornik jest równe natężeniu prądu płynącego przez cewkę?



Rys. 30.66. Zadanie 59

•••60 Drewniany rdzeń o przekroju kwadratowym tworzy pierścień o wewnętrznej średnicy 10 cm i zewnętrznej średnicy 12 cm. Na takim rdzeniu nawinięto jedną warstwę drutu o średnicy 1 mm i oporze na jednostkę długości  $0,02 \Omega/m$ . Dla otrzymanego w ten sposób "toroidu" oblicz: a) indukcyjność, b) indukcyjną stałą czasową. Pomiń grubość izolacji drutu.

## Podrozdział 30.7 Energia zmagazynowana w polu magnetycznym

•61 ssm Cewka jest połączona szeregowo z opornikiem 10 k $\Omega$ . Po dołączeniu baterii o SEM 50 V do tych dwóch elementów natężenie prądu osiąga wartość 2 mA po upływie 5 ms. a) Oblicz indukcyjność cewki. b) Oblicz energię zmagazynowaną w cewce w tej chwili.

•62 Cewka o indukcyjności 2 H i oporze 10  $\Omega$  została nagle dołączona do idealnego źródła o SEM  $\mathcal{E} = 100$  V. Dla t = 0,1 s, licząc od momentu dołączenia źródła, oblicz szybkość, z jaką: a) energia jest gromadzona w polu magnetycznym, b) energia termiczna jest wydzielana w oporniku, c) energia jest dostarczana przez źródło.

•63 ilw W chwili t = 0 dołączono źródło prądu do szeregowo połączonych opornika i cewki. Zakładając, że indukcyjna stała czasowa wynosi 37 ms, wyznacz czas, po jakim szybkość, z jaką energia jest zamieniana na energię termiczną w oporniku, będzie równa szybkości, z jaką energia jest gromadzona w cewce.

•64 W chwili t = 0 dołączono źródło prądu do szeregowo połączonych opornika i cewki. W jakiej chwili wyrażonej jako wielokrotność indukcyjnej stałej czasowej energia zgromadzona w polu magnetycznym cewki będzie równa połowie wartości tej energii w stanie ustalonym?

••65 • W obwodzie przedstawionym na rysunku 30.16, przyjmij, że  $\mathcal{E} = 10$  V,  $R = 6,7 \Omega$ , a L = 5,5 H. Idealne źródło zostaje dołączone w chwili t = 0. a) Ile energii dostarcza źródło podczas pierwszych 2 s? b) Jaka część tej energii jest zmagazynowana w polu magnetycznym cewki? c) Jaka część tej energii jest zamieniana na energię termiczną w oporniku?

## Podrozdział 30.8 Gęstość energii pola magnetycznego

•66 W kołowej ramce o promieniu 50 mm płynie prąd o natężeniu 100 A. Dla środka ramki oblicz: a) wartość indukcji magnetycznej, b) gęstość energii w środku ramki. •67 ssm Solenoid długości 85 cm ma pole przekroju poprzecznego równe 17 cm<sup>2</sup>. Solenoid składa się z 950 zwojów, w których płynie prąd o natężeniu 6,6 A. a) Oblicz gęstość energii pola magnetycznego wewnątrz solenoidu. b) Wyznacz całkowitą energię zmagazynowaną w polu magnetycznym. Pomiń straty energiii na końcach solenoidu.

•68 Toroidalna cewka o indukcyjności 90 mH obejmuje obszar o objętości 0,02 m<sup>3</sup>. Ile wynosi natężenie prądu płynącego w cewce, jeżeli średnia gęstość energii wewnątrz toroidu jest równa 70 J/m<sup>3</sup>?

•69 ilw Jaka musi być wartość natężenia jednorodnego pola elektrycznego, jeżeli ma ono mieć taką samą gęstość energii jak pole magnetyczne o indukcji 0,5 T?

••70 T Na rysunku 30.67a przedstawiono przekrój poprzeczny układu składającego się z dwóch bardzo długich, równoległych przewodów prostoliniowych. Stosunek natężenia prądu  $I_1$  płynącego w przewodzie 1 do natężenia prądu  $I_2$  płynącego w przewodzie 2 jest równy  $I_1/I_2 = 1/3$ . Położenie przewodu 1 jest ustalone, a położenie przewodu 2 opisywane współrzędną x można zmieniać dla x > 0; zmiana ta powoduje zmianę gęstości



Rys. 30.67. Zadanie 70

energii pola magnetycznego  $u_B$  w początku układu współrzędnych. Na rysunku 30.67b przedstawiono zależność  $u_B$ od położenia x przewodu 2. Krzywa ta ma dla  $x \to \infty$  asymptotę  $u_B = 0.96$  nJ/m<sup>3</sup>, a skala osi poziomej jest wyznaczona przez  $x_8 = 60$  cm. Wyznacz prądy: a)  $I_1$ , b)  $I_2$ .

••71 W kawałku drutu miedzianego płynie prąd o natężeniu 10 A, rozłożony równomiernie w przekroju poprzecznym. Oblicz gęstość energii: a) pola magnetycznego, b) pola elektrycznego na powierzchni drutu. Średnica drutu jest równa 2,5 mm, a jego opór na jednostkę długości — 3,3  $\Omega$ /km.

#### Podrozdział 30.9 Indukcja wzajemna

•72 Cewka 1 ma indukcyjność  $L_1 = 25$  mH i  $N_1 = 100$  zwojów. Cewka 2 ma indukcyjność  $L_2 = 40$  mH i  $N_2 = 200$  zwojów. Cewki są sztywno umocowane, a ich indukcyjność wzajemna *M* wynosi 3 mH. Prąd o natężeniu 6 mA płynący w pierwszej cewce zmienia się z szybkością 4 A/s. a) Jaki strumień magnetyczny  $\Phi_{12}$  przenika przez cewkę 1 i b) jaka powstaje tam SEM samoindukcji? c) Jaki strumień magnetyczny  $\Phi_{21}$  przenika przez cewkę 2 i d) jaka powstaje tam SEM indukcji wzajemnej?

•73 ssm Dwie cewki mają ustalone położenia. Gdy w cewce 1 nie płynie prąd, a natężenie prądu w cewce 2 rośnie

z szybkością 15 A/s, SEM w cewce 1 wynosi 25 mV. a) Jaka jest indukcyjność wzajemna cewek? b) Jaki strumień przechodzi przez cewkę 2, gdy nie płynie w niej prąd, a natężenie prądu w cewce 1 jest równe 3,6 A?

•74 Dwa solenoidy są częścią cewki zapłonowej w samochodzie. Gdy natężenie prądu w jednym solenoidzie maleje od wartości 6 A do zera, w drugim solenoidzie jest indukowana SEM o wartości 30 kV. Ile wynosi indukcyjność wzajemna solenoidów?

a

 $\hat{I}R$ 

N zwojów

С

1.

Rys. 30.68. Zadanie 75

\*\*\*\*\*

Rvs. 30.69. Zadanie 76

••75 ilw Prostokątna ramka o N ciasno nawiniętych zwojach jest umieszczona w pobliżu długiego prostego przewodu, jak pokazano na rysunku 30.68. Ile wynosi indukcyjność wzajemna układu ramka-przewód dla N = 100, a = 1 cm, b = 8 cm i l = 30 cm?

••76 Cewka C o N zwojach otacza długi solenoid S o promieniu R i n zwojach na jednostkę długości, jak pokazano na rysunku 30.69. a) Wykaż, że indukcyjność wzajemna układu cewka–solenoid

wyrażona jest wzorem  $M = \mu_0 \pi R^2 n N$ . b) Wytłumacz, dlaczego M nie zależy od kształtu i wymiarów cewki, a także od tego, czy cewka jest ciasno, czy luźno nawinięta.

••77 ssm Dwie cewki połączone tak jak pokazano na rysunku 30.70, mają indukcyjności  $L_1$  i  $L_2$ . Ich indukcyjność wzajemna wynosi M. a) Wykaż, że to połączenie można zastąpić jedną cewką o indukcyjności równoważnej

$$L_{\rm rw} = L_1 + L_2 + 2M.$$

b) Jak powinny być połączone cewki na rysunku 30.70, aby ich indukcyjność równoważna była równa

$$L_{\rm rw} = L_1 + L_2 - 2M?$$

(To zadanie jest podobne do zadania 47, ale bardziej ogólne, bo nie wymagamy, aby odległość między cewkami była duża).





## Zadania dodatkowe

**78** W chwili t = 0 do końców układu złożonego z cewki o indukcyjności 23 mH i opornika o pewnym nieznanym oporze *R* przyłożono różnicę potencjałów 12 V. W chwili t = 0,15 ms prąd płynący przez cewkę zmieniał się z szybkością 280 A/s. Wyznacz *R*.

**79** ssm W obwodzie na rysunku 30.71 SEM idealnego źródła prądu wynosi  $\mathcal{E} = 10$  V, ponadto  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ , a L = 5 H. W chwili t = 0 klucz S został zamknięty. Ile wynoszą tuż po zamknięciu klucza: a) natężenie prądu  $I_1$  w oporniku  $R_1$ , b) natężenie prądu  $I_2$  w oporniku  $R_2$ , c) natężenie

prądu  $I_{\rm S}$  płynącego przez klucz, d) różnica potencjałów  $U_2$  na oporniku  $R_2$ , e) różnica potencjałów  $U_L$  na cewce L oraz f) szybkość zmian  $dI_2/dt$ ? Ile wynoszą po upływie długiego czasu od zamknięciu klucza: g)  $I_1$ , h)  $I_2$ , i)  $I_{\rm S}$ , j)  $U_2$ , k)  $U_L$  oraz l)  $dI_2/dt$ ?



Rys. 30.71. Zadanie 79

**80** Dla układu przedstawionego na rysunku 30.63 przyjmij  $R = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 8 \mu \text{H}$  oraz SEM idealnego źródła prądu  $\mathcal{E} = 20 \text{ V}$ . Po upływie jakiego czasu od zamknięcia klucza natężenie prądu płynącego przez obwód jest równe 2 mA?

81 ssm Na rysunku 30.72a przedstawiono prostokątną pętlę przewodzącą o oporze  $R = 0,02 \Omega$ , wysokości H = 1,5 cm i szerokości D = 2,5 cm przesuwaną ze stałą prędkością przez dwa obszary, w których znajduje się jednorodne pole magnetyczne. Na rysunku 30.72b przestawiono zależność natężenia prądu *I* indukowanego w pętli od położenia prawej





krawędzi pętli określonego współrzędną *x*. Skala osi pionowej jest wyznaczona przez  $I_s = 3 \mu A$ , przy czym prąd płynący w pętli ma natężenie  $I_s$  i jest skierowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara, gdy pętla zaczyna wchodzić w obszar 1. Wyznacz a) wartość oraz b) kierunek (przed czy za płaszczyznę rysunku) pola magnetycznego w obszarze 1, a także c) wartość oraz d) kierunek (przed czy za płaszczyznę rysunku) pola magnetycznego w obszarze 2.

82 Jednorodne pole magnetyczne o indukcji B jest prostopadłe do płaszczyzny kołowej ramki przewodzącej o promieniu r. Wartość indukcji magnetycznej zmienia się w czasie zgodnie ze wzorem  $B = B_0 e^{-t/\tau}$ , gdzie  $B_0$  i  $\tau$  są pewnymi stałymi. Podaj wyrażenie na SEM indukowaną w pętli w zależności od czasu.

**83** W chwili t = 0 w obwodzie przedstawionym na rysunku 30.63 zamknięto klucz S, co spowodowało przepływ prądu przez cewkę o indukcyjności 15 mH i opornik o oporze 20  $\Omega$ . W jakiej chwili SEM indukowana w cewce jest równa różnicy potencjałów na oporniku?

**84** The Na rysunku 30.73a przedstawiono przekrój przez dwa obszary w kształcie współosiowych walców, w których występuje zmienne pole magnetyczne. Obszar 1 ma promień  $r_1$ , występujące w nim pole magnetyczne jest skierowane przed płaszczyznę rysunku, a wartość jego indukcji rośnie. Obszar 2 ma promień  $r_2$ , występujące w nim pole magnetyczne jest skierowane przed płaszczyznę rysunku, a wartość jego indukcji może zmieniać się w czasie. Wyobraż sobie, że na osi walców umieszczono przewodzący pierścień o promie-

niu R i zmierzono wartość  $\mathcal{E}$  indukowanej w pierścieniu SEM. Na rysunku 30.73b przedstawiono zależność  $\mathcal{E}$  od kwadratu promienia pierścienia  $R^2$ , przy czym maksymalna wartość  $R^2$ odpowiada promieniowi zewnetrznego walca. Skala osi pionowej jest wyznaczona przez  $\mathcal{E}_{s} = 20$  nV. Wyznacz prędkości zmiany: a)  $dB_1/dt$ indukcji magnetycznej w obszarze 1 oraz b)  $dB_2/dt$  indukcji magnetycznej w obszarze 2. c) Czy wartość indukcji magnetycznej  $\vec{B}_2$  w obszarze 2 rośnie, maleje, czy pozostaje stała?

85 ssm Na rysunku 30.74 przedstawiono przekrój poprzeczny obszaru w kształcie walca o promieniu R, w którym znajduje sie jednorodne pole magnetyczne o indukcji  $\vec{B}$ . Wartość  $\vec{B}$  zmniejsza się ze stałą szybkością 10 mT/s. Wyznacz i zapisz w notacji wektorowej początkowe przyspieszenie elektronu znajdującego się początkowo a) w punkcie a odległym od osi walca o r = 5 cm, b) w punkcie b leżącym na osi walca oraz c) w punkcie c odległym od osi walca o r = 5 cm.



Rys. 30.74. Zadanie 85

**86 W** obwodzie przedstawionym na rysunku 30.75a klucz S pozostawał połączony z punktem *A* tak długo, że na-

tężenie prądu płynącego przez cewkę o indukcyjności  $L_1 = 5 \text{ mH}$  i opornik o oporze  $R_1 = 25 \Omega$  ustaliło się. Podobnie, w obwodzie przedstawionym na rysunku 30.75b klucz S pozostawał połączony z punktem A tak długo, że natężenie prądu płynącego przez cewkę o indukcyjności  $L_1 = 3 \text{ mH}$  i opornik o oporze  $R_1 = 30 \Omega$  ustaliło się. Stosunek strumienia magnetycznego  $\Phi_{02}$  przez jeden zwój cewki 2 do strumienia magnetycznego  $\Phi_{01}$  przez jeden zwój cewki 1 jest równy  $\Phi_{02}/\Phi_{01} = 1,5$ . W chwili t = 0 oba klucze S zostały jednocześnie połączone z odpowiednimi punktami B. W jakiej chwili strumienie magnetyczne przez jeden zwój każdej z cewek będą sobie równe?





87 ssm Kwadratowa ramka przewodząca o krawędzi 20 cm i oporze 20  $\Omega$  znajduje się w płaszczyźnie prostopadłej do jednorodnego pola magnetycznego, którego wartość indukcji jest równa B = 2 T. Gdy oddala się od siebie dwie przeciwległe krawędzie ramki, pozostałe dwie przybliżają się, co prowadzi do zmniejszenia pola ramki przy ustalonym obwodzie. Wiedząc, że pole ramki zostało zmniejszone do zera w czasie  $\Delta t = 0,2$  s, wyznacz indukowane w ramce a) średnią SEM oraz b) średnie natężenie prądu.

**88** Gdy natężenie prądu płynącego przez cewkę o 150 zwojach jest równe 2 mA, strumień magnetyczny przez jeden zwój cewki wynosi 50 nT · m<sup>2</sup>. a) Jaka jest indukcyjność cewki? Jaka będzie b) indukcyjność tej cewki oraz c) strumień przez jeden zwój cewki, gdy natężenie prądu zostanie zwiększone do 4 mA? d) Jaka jest największa wartość  $\mathcal{E}$  SEM indukowanej w cewce, gdy natężenie prądu przez nią płynącego jest dane zależnością I = 3 mA cos(377*t*), gdzie czas *t* jest wyrażony w sekundach?

**89** Do cewki o indukcyjności 2 H i oporze 10  $\Omega$  dołączono nagle idealne źródło prądu o SEM  $\mathcal{E} = 100$  V. a) Jakie będzie natężenie prądu w stanie ustalonym? b) Jaka będzie wówczas energia pola magnetycznego w cewce?

**90** Jaki czas musi upłynąć od odłączenia źródła prądu od obwodu RL (L = 2 H,  $R = 3 \Omega$ ), by różnica potencjałów na oporniku zmniejszyła się do 10% swej początkowej wartości?

**91** ssm W obwodzie przedstawionym na rysunku 30.76 mamy  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ , L = 50 mH, SEM idealnego źródła wynosi zaś  $\mathcal{E} = 40 \text{ V}$ . Po upływie długiego czasu od otwarcia klucza S został on zamknięty w chwili t = 0. Wyznacz, jakie wartości tuż po zamknięciu klucza będą miały a) natężenie prądu  $I_{źr}$  płynącego przez źródło oraz b) szybkość jego zmian  $\frac{dI_{ir}}{dt}$ . Wyznacz jakie wartości w chwili  $t = 3 \,\mu s$  będą miały c) natężenie prądu  $I_{ir}$  płynącego przez źródło oraz d) szybkość jego zmian  $\frac{dI_{ir}}{dt}$ . Wyznacz, jakie wartości po upływie długiego czasu od zamknięciu klucza będą miały e) natężenie prądu



Rys. 30.76. Zadanie 91

 $I_{zr}$  płynącego przez źródło oraz f) szybkość jego zmian  $\frac{dI_{zr}}{dt}$ .

**92** Strumień sprzężony przez cewkę o oporze  $0,75 \Omega$  jest równy 26 mWb, gdy przez cewkę tę płynie prąd o natężeniu 5,5 A. a) Wyznacz indukcyjność cewki. b) Gdyby do takiej cewki podłączyć nagle idealne źródło prądu o SEM równej 6 V, po jakim czasie natężenie prądu płynącego przez cewkę wzrosłoby od zera do 2,5 A?

**93** Obwód przedstawiony na rysunku 30.63 zawiera idealne źródło o SEM 12 V, opornik 12  $\Omega$  i cewkę. W chwili t = 0 klucz został zamknięty. Z jaką szybkością energia jest przekazywana ze źródła do pola magnetycznego w cewce w chwili  $t = 1,61\tau_L$ ?

**94** Długi walcowy solenoid o 100 zwojach/cm ma promień 1,6 cm. Załóż, że pole magnetyczne w solenoidzie jest jednorodne i równoległe do jego osi. a) Jaka jest indukcyjność tego solenoidu na jednostkę długości? b) Przyjmując, że prąd płynący przez solenoid zmienia się z szybkością 13 A/s, wyznacz SEM indukowaną w solenoidzie na metr długości.

**95** Na rysunku 30.77 elementy obwodu mają następujące parametry:  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $L_1 = 0.3$  H,  $L_2 = 0.2$  H,

a idealne źródło prądu ma SEM  $\mathcal{E} = 6$  V. a) Z jaką szybkością zmienia się natężenie prądu płynącego przez cewkę  $L_1$  tuż po zamknięciu klucza? b) Jakie jest natężenie prądu płynącego przez cewkę  $L_1$  w stanie ustalonym?



Rys. 30.77. Zadanie 95

**96** Kwadratowa ramka przewodząca znajduje się w prostopadłym do płaszczyzny ramki jednorodnym polu magnetycznym o wartości indukcji 0,24 T. Długość każdej krawędzi ramki zmniejsza się z szybkością 5 cm/s. Wyznacz SEM indukowaną w ramce w chwili, gdy długość krawędzi ramki jest równa 12 cm. **97** W chwili t = 0 do cewki o indukcyjności L = 50 mH i oporze  $R = 180 \Omega$  przyłożono nagle różnicę potencjałów 45 V. Z jaką szybkością rośnie natężenie prądu w chwili t = 1,2 ms?

**98** Pewna cewka o gęsto nawiniętym uzwojeniu ma indukcyjność taką, że gdy płynący przez nią prąd zmienia się z szybkością 5 A/s, w cewce indukuje się SEM o wartości 3 mV. Gdy natomiast przez cewkę tę płynie stały prąd o natężeniu 8 A, strumień magnetyczny przez jeden zwój cewki jest równy 40  $\mu$ Wb. a) Oblicz indukcyjność tej cewki. b) Ile zwojów ma ta cewka?

**99** Pole magnetyczne w naszej Galaktyce ma indukcję o wartości około  $10^{-10}$  T. Ile energii zmagazynowane jest w sześcianie o krawędzi 10 lat świetlnych? (Dla porównania, najbliższa Słońcu gwiazda leży w odległości 4,3 lat świetlnych, a promień Galaktyki to około  $8 \cdot 10^4$  lat świetlnych).

100 Na rysunku 30.78 przedstawiono kawałek drutu, który został wygiety w kształt łuku okregu o wierzchołu O i promieniu r = 24 cm. Prosty kawałek drutu *OP* może obracać się wokół punktu O, ślizgając się po wygiętym drucie. Prosty kawałek drutu OQ zamyka obwód. Każdy z trzech kawałków drutu ma przekrój poprzeczny o polu 1,2 mm<sup>2</sup> i oporność  $1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ . Cały układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o wartości indukcji B = 0.15 T; pole to jest prostopadłe do płaszczyzny rysunku i skierowane przed nia. Kawałek drutu OP porusza się z jednostajnym przyspieszeniem kątowym 12 rad/s<sup>2</sup>, przy czym w chwili początkowej spoczywa on w położeniu  $\theta = 0$ . Wyznacz zależność między katem  $\theta$  (wyrażonym w radianach) oraz a) oporem obwodu i b) strumieniem magnetycznym przez obwód. c) Dla jakiej wartości  $\theta$  natężenie prądu indukowanego w obwodzie osiąga maksimum i d) ile wynosi ta maksymalna wartość?



Rys. 30.78. Zadanie 100

**101** Toroid o 500 zwojach, przez który płynie prąd o natężeniu 0,8 A, ma przekrój poprzeczny w kształcie kwadratu o boku 5 cm i promień wewnętrzny równy 15 cm. Ile wynosi strumień magnetyczny przez przekrój poprzeczny?

## R O Z D Z I A Ł 31

# Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny

## **31.1.** DRGANIA ELEKTROMAGNETYCZNE W OBWODACH LC

## Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **31.01** naszkicować schemat obwodu drgającego *LC*, wyjaśnić, jakie wielkości fizyczne drgają, i opisać, co dzieje się podczas jednego okresu tych drgań;
- **31.02** naszkicować wykresy przebiegu czasowego różnicy potencjałów i natężenia prądu płynącego przez cewkę w obwodzie *LC* oraz zaznaczyć okres drgań *T* na każdym z tych wykresów;
- **31.03** wyjaśnić analogię między układem drgającym klocek--sprężyna a obwodem drgającym *LC*;
- 31.04 zastosować związek między częstością kołową ω drgań obwodu LC (i wielkościami pokrewnymi: częstotliwością ν i okresem drgań T) oraz indukcyjnością cewki i pojemnością kondensatora w tym obwodzie;
- **31.05** przedstawić wyprowadzenie równania różniczkowego dla ładunku *q* w obwodzie *LC*, stosując analogię z układem klocek–sprężyna, i przedstawić rozwiązanie tego równania;
- **31.06** obliczyć ładunek q na kondensatorze w obwodzie LC

## Podstawowe fakty

 W obwodzie drgającym LC energia jest w sposób okresowy przekazywana między polem elektrycznym w kondensatorze i polem magnetycznym w cewce; chwilowe wartości tych energii mają postać

$$E_E = \frac{q^2}{2C}$$
 oraz  $E_B = \frac{LI^2}{2}$ ,

gdzie *q* jest chwilową wartością ładunku na kondensatorze, a *I* jest chwilową wartością natężenia prądu płynącego przez cewkę.

- Całkowita energia *E* równa  $E_E + E_B$  pozostaje stała.
- Z zasady zachowania energii wynika następujące równanie różniczkowe opisujące drgania w obwodzie *LC* (o zerowym oporze):

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}q = 0$$
 (drgania w obwodzie  $LC$ ).

w dowolnej chwili i określić amplitudę  $q_{\rm max}$  drgań tego ładunku;

- **31.07** wyznaczyć natężenie prądu *I* płynącego przez cewkę w obwodzie *LC* w zależności od czasu, wychodząc od wyrażenia na ładunek *q* na kondensatorze;
- **31.08** obliczyć natężenie prądu *I* płynącego przez cewkę w obwodzie *LC* w dowolnej chwili i określić amplitudę *I*<sub>max</sub> drgań natężenia prądu;
- **31.09** zastosować związek między amplitudą drgań ładunku  $q_{\text{max}}$ , amplitudą drgań natężenia prądu  $I_{\text{max}}$  oraz częstością kołową  $\omega$  tych drgań;
- **31.10** wyznaczyć energię elektryczną  $E_E$ , energię magnetyczną  $E_B$  i energię całkowitą na podstawie rozwiązań dla ładunku q i natężenia prądu I w obwodzie LC;
- **31.11** naszkicować wykres zależności energii elektrycznej  $E_E$ , energii magnetycznej  $E_B$  i energii całkowitej w obwodzie LC od czasu;
- **31.12** wyznaczyć największe wartości energii elektrycznej  $E_E$  i energii magnetycznej  $E_B$  oraz obliczyć energię całkowitą.
- Rozwiązanie tego równania różniczkowego ma postać

$$q = q_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$
 (ladunek),

gdzie  $q_{\max}$  jest amplitudą drgań ładunku (maksymalnym ładunkiem na kondensatorze), a częstość kołowa tych drgań to

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- Faza początkowa  $\phi$  może być wyznaczona z warunków początkowych (dla t = 0).
- Natężenie prądu w dowolnej chwili t jest dane wzorem

 $I = -\omega q_{\text{max}} \sin(\omega t + \phi)$  (natężenie prądu),

gdzie  $\omega q_{\text{max}}$  jest amplitudą drgań tego natężenia.

## 0 fizyce

Rozważaliśmy dotąd podstawowe właściwości fizyczne pola elektrycznego i magnetycznego, a w szczególności energię tych pól, którą można gromadzić w kondensatorach i cewkach. Zajmiemy się teraz pewnymi zastosowaniami tej wiedzy związanymi z przekazywaniem energii między różnymi układami. Przykładem może być sposób, w jaki energia produkowana w elektrowni jest przekazywana do twojego domu, by zasilać twój komputer. Znaczenie tego typu zastosowań jest obecnie tak wielkie, że trudno byłoby nawet oszacować ich wartość pieniężną — bez nich nie byłoby przecież współczesnej cywilizacji.

W większości miejsc na świecie energia elektryczna nie jest przekazywana za pomocą prądu stałego, tylko w formie prądu o sinusoidalnie drgającym natężeniu (prąd taki nazywamy zmiennym), a wyzwaniem, przed którym stają zarówno fizycy, jak i inżynierowie, jest projektowanie urządzeń do skutecznego przesyłania tej energii i korzystania z niej. Z tego względu zajmiemy się najpierw badaniem drgań występujących w obwodach zawierających cewkę o indukcyjności L i kondensator o pojemności C.

## Drgania obwodu LC: opis jakościowy

Spośród dwuelementowych obwodów elektrycznych składających się z opornika *R*, kondensatora *C* lub cewki *L*, dotychczas omówiliśmy połączenie szeregowe *RC* (w podrozdziale 27.4) oraz *RL* (w podrozdziale 30.6). Okazało się, że wartości ładunku, natężenia prądu i różnicy potencjałów występujących w tych dwóch rodzajach obwodów rosną lub maleją wykładniczo. Skala czasowa tego wzrostu lub zaniku określona jest *stałą czasową*  $\tau$ , która może być albo pojemnościowa, albo indukcyjna.

Zbadamy teraz dwuelementową kombinację LC. Zobaczysz, że w tym przypadku ładunek, natężenie prądu i różnica potencjałów nie zanikają wykładniczo w czasie, ale zmieniają się sinusoidalnie (z okresem T i częstością kołową  $\omega$ ). Powstające w wyniku tego drgania pola elektrycznego w kondensatorze i pola magnetycznego w cewce nazywamy **drganiami elektromagnetycznymi**, a obwód elektryczny LC nazywamy obwodem drgającym.

Rysunki 31.1 od (a) do (h) ilustrują kolejne fazy drgań w prostym obwodzie *LC*. Z równania (25.21) wynika, że energia zmagazynowana w polu elektrycznym kondensatora w dowolnej chwili jest równa

$$E_E = \frac{q^2}{2C},\tag{31.1}$$

gdzie q jest ładunkiem na okładkach kondensatora w tej właśnie chwili. Z równania (30.49) wynika natomiast, że energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki w dowolnej chwili jest równa

$$E_B = \frac{LI^2}{2},\tag{31.2}$$

gdzie I jest natężeniem prądu płynącego wtedy przez cewkę.

Załóżmy, że w chwili początkowej ładunek q na okładkach kondensatora na rysunku 31.1 ma wartość maksymalną  $q_{max}$  i że natężenie prądu pły-



**Rys. 31.1.** Osiem faz jednego cyklu drgań w obwodzie *LC*, w którym brak oporu elektrycznego. Wykresy słupkowe przy każdym rysunku ilustrują ilość zmagazynowanej energii pola magnetycznego i elektrycznego. Pokazane są również linie pola magnetycznego cewki i linie pola elektrycznego kondensatora. a) Maksymalny ładunek na kondensatorze, prąd nie płynie. b) Kondensator rozładowuje się, natężenie prądu rośnie. c) Kondensator całkowicie rozładowany, natężenie prądu osiąga maksimum. d) Kondensator ładuje się w kierunku przeciwnym niż w punkcie (a), natężenie prądu maleje. e) Kondensator całkowicie naładowany ze znakiem przeciwnym niż w punkcie (a), prąd nie płynie. f) Kondensator rozładowuje się, prąd płynie w przeciwnym kierunku niż w punkcie (b), natężenie prądu rośnie. g) Kondensator całkowicie rozładowany, natężenie prądu osiąga maksimum. h) Kondensator ładuje się, natężenie prądu maleje

nącego przez cewkę jest równe zeru. Ten początkowy stan obwodu jest pokazany na rysunku 31.1a. Załączone wykresy słupkowe energii wskazują, że w momencie, w którym prąd nie płynie przez cewkę, a ładunek na kondensatorze osiąga maksimum, energia  $E_B$  pola magnetycznego jest równa zeru, a energia  $E_E$  pola elektrycznego ma wartość maksymalną. Podczas drgań obwodu następuje przemiana jednego rodzaju energii w drugi, ale całkowita energia jest zachowana.

Kondensator zaczyna teraz rozładowywać się przez cewkę, a dodatnie nośniki ładunku poruszają się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, tak jak pokazano na rysunku 31.1b. Oznacza to, że powstaje prąd elektryczny *I* równy dq/dt, który płynie w dół cewki. W miarę zmniejszania się ładunku na okładkach kondensatora energia zmagazynowana w polu elektrycznym kondensatora również maleje. Energia ta jest przekazywana polu magnetycznemu, które pojawia się wokół cewki w wyniku przepływu prądu. Tak więc natężenie pola elektrycznego maleje, a indukcja magnetyczna wzrasta w miarę jak energia przepływa *od* pola elektrycznego *do* pola magnetycznego. W końcu kondensator traci całkowicie swój ładunek (rys. 31.1c), a zatem również traci pole elektryczne i energię w nim zmagazynowaną. Tak więc energia zostaje całkowicie przekazana polu magnetycznemu cewki. Indukcja magnetyczna osiąga maksimum, a natężenie prądu płynącego przez cewkę osiąga maksymalną wartość  $I_{max}$ .

Chociaż ładunek na okładkach kondensatora jest teraz równy zeru, prąd musi nadal płynąć w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdyż cewka nie pozwala na gwałtowny zanik natężenia prądu. Prąd płynąc przez obwód nadal przenosi dodatnie ładunki z górnej okładki kondensatora do dolnej (rys. 31.1d). Energia przekazywana jest teraz z powrotem od cewki do kondensatora w miarę jak natężenie pola elektrycznego we wnętrzu kondensatora rośnie. Podczas tego przepływu energii natężenie prądu stopniowo maleje. Gdy energia zostanie w końcu w całości przekazana do kondensatora (rys. 31.1e), natężenie prądu zmaleje do zera. Stan przedstawiony na rysunku 31.1e jest więc podobny do stanu początkowego, ale kondensator jest teraz naładowany przeciwnie.

Następnie kondensator zaczyna się znowu rozładowywać, tym razem jednak prąd płynie w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (rys. 31.1f). Rozumując tak jak poprzednio, widzimy, że natężenie prądu płynącego zgodnie z ruchem wskazówek zegara wzrasta do maksimum (rys. 31.1g), a następnie maleje (rys. 31.1h), aż w końcu obwód powraca do stanu początkowego (rys. 31.1a). Następnie cały cykl powtarza się z częstotliwością  $\nu$ , a więc z częstością kołową  $\omega = 2\pi\nu$ . W idealnym obwodzie *LC*, nie zawierającym oporu, przepływ energii zachodzi wyłącznie między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki. Dzięki zachowaniu energii drgania powtarzają się bez końca. Nie muszą się one zaczynać w momencie, w którym cała energia jest zgromadzona w polu elektrycznym; dowolna faza cyklu drgań może być stanem początkowym.

Aby wyznaczyć zależność ładunku q od czasu, możemy dołączyć woltomierz i zmierzyć zmienną w czasie różnicę potencjałów (czyli *napięcie*)  $U_C$  między okładkami kondensatora C. Z równania (25.1) wynika, że

$$U_C = \left(\frac{1}{C}\right)q$$

co pozwala znaleźć q. Aby zmierzyć natężenie prądu, możemy połączyć szeregowo z kondensatorem i cewką opornik o niewielkim oporze R i zmierzyć zmieniającą się w czasie różnicę potencjałów  $U_R$  między jego końców-kami;  $U_R$  jest proporcjonalne do I zgodnie z zależnością

## $U_R = IR.$

Zakładamy tutaj, że opór R jest tak mały, iż jego wpływ na zachowanie obwodu można pominąć. Zmiany w czasie  $U_C$  i  $U_R$ , a zatem q i I pokazane są na rysunku 31.2. Wszystkie cztery wielkości zmieniają się sinusoidalnie.

W rzeczywistym obwodzie *LC* drgania nie będą zachodzić bez końca, gdyż zawsze istnieje pewien opór elektryczny, który odbiera energię od pola elektrycznego i magnetycznego, powodując jej rozpraszanie w postaci energii termicznej (obwód może się nawet rozgrzać). Drgania wzbudzone w obwodzie będą zanikać, jak pokazano na rysunku 31.3. Porównaj ten rysunek z rysunkiem 15.17, na którym przedstawiono zanik drgań mechanicznych spowodowany tarciem w układzie klocek–sprężyna.



**Rys. 31.2.** a) Różnica potencjałów między okładkami kondensatora w obwodzie na rysunku 31.1 jako funkcja czasu. Ta wielkość jest proporcjonalna do ładunku na okładkach kondensatora. b) Różnica potencjałów proporcjonalna do natężenia prądu w obwodzie na rysunku 31.1. Litery odnoszą się do faz cyklu drgań oznaczonych na rysunku 31.1



**Rys. 31.3.** Przebieg na ekranie oscyloskopu pokazujący, że drgania w obwodzie *RLC* w rzeczywistości zanikają, gdyż energia jest rozpraszana na oporniku w postaci energii termicznej (dzięki uprzejmości Agilent Technologies)



## Sprawdzian 1

Naładowany kondensator i cewka są połączone szeregowo w chwili t = 0. Używając okresu drgań T jako jednostki, określ, po jakim czasie następujące wielkości osiągną wartości maksymalne: a) ładunek na okładkach kondensatora, b) napięcie między okładkami kondensatora o znaku jak na początku cyklu, c) energia zmagazynowana w polu elektrycznym, d) natężenie prądu.

## Analogiczne układy drgające: elektryczny i mechaniczny

Przypatrzmy się bliżej obwodowi drgającemu przedstawionemu na rysunku 31.1 i układowi drgającemu klocek–sprężyna. W układzie klocka i sprężyny występują dwa rodzaje energii. Jedną jest energia potencjalna ściskanej lub rozciąganej sprężyny, drugą — energia kinetyczna poruszającego się klocka. Te dwa rodzaje energii opisane są przez dobrze znane wyrażenia podane w kolumnie energii po lewej stronie tabeli 31.1.

Tabela	31.1.	Porównanie	energii v	w dwóch	układach	drgającyc	h

Układ klocek–sprężyna		Obwód LC			
element	energia	element	energia		
sprężyna	potencjalna, $\frac{1}{2}kx^2$	kondensator	elektryczna, $\frac{1}{2}(1/C)q^2$		
klocek	kinetyczna, $\frac{1}{2}mv^2$	cewka	magnetyczna, $\frac{1}{2}LI^2$		
v = dx/dt		I :	$I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$		

W kolumnie energii po prawej stronie tabeli przedstawione są dwa rodzaje energii występującej w obwodzie drgającym LC. Porównując obie kolumny, możemy zauważyć analogię między wyrażeniami określającymi dwie pary energii — mechaniczne energie układu klocek–sprężyna i elektromagnetyczne energie obwodu LC. Równania dla v i I, umieszczone na dole tabeli, pozwalają zobaczyć tę analogię bardziej szczegółowo. Wynika z nich, że q jest odpowiednikiem x, a I — odpowiednikiem v (w każdym równaniu różniczkujemy pierwszą z tych wielkości, aby otrzymać kolejną). Z tej analogii wynika więc, że w wyrażeniach opisujących energię 1/C jest odpowiednikiem k, a L — odpowiednikiem m. Zatem

q odpowiada $x$ ,	1/C odpowiada $k$ ,
I odpowiada $v$ ,	L odpowiada m.

Nasuwa się więc myśl, że w obwodzie *LC* kondensator od strony matematycznej odgrywa rolę sprężyny w układzie klocek–sprężyna, natomiast cewka odgrywa rolę klocka.

W podrozdziale 15.1 podaliśmy, że częstość kołowa drgań w układzie klocek–sprężyna (bez tarcia) wynosi

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(układ klocek-sprężyna).} \tag{31.3}$$

Zgodnie z wymienionymi wyżej analogiami, aby znaleźć częstość kołową

drgań w obwodzie LC (bez oporu elektrycznego), należy zamiast k podstawić 1/C, a zamiast m podstawić L, otrzymując

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{(obwód } LC\text{)}. \tag{31.4}$$

## Drgania obwodu LC: opis ilościowy

Wykażemy teraz, że równanie (31.4) określające częstość kołową drgań w obwodzie *LC* jest poprawne. Jednocześnie zbadamy jeszcze dokładniej analogię między drganiami w obwodzie *LC* a drganiami klocka i sprężyny. Na początku rozszerzymy nieco nasze wcześniejsze wiadomości dotyczące mechanicznego układu klocek–sprężyna.

## Układ drgający klocek-sprężyna

W rozdziale 15 analizowaliśmy drgania w układzie klocek–sprężyna, używając pojęcia przepływu energii. W trakcie wstępnych rozważań nie wyprowadziliśmy podstawowego równania różniczkowego opisującego te drgania. Zrobimy to właśnie teraz.

Całkowita energia E układu klocek–sprężyna może być zapisana w dowolnej chwili jako

$$E = E_{\rm k} + E_{\rm p} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2, \qquad (31.5)$$

gdzie  $E_k$  i  $E_p$  oznaczają odpowiednio energię kinetyczną poruszającego się klocka i energię potencjalną rozciąganej lub ściskanej sprężyny. Jeżeli założymy, że układ porusza się bez tarcia, to całkowita energia E nie będzie się zmieniała w czasie, mimo że v i x ulegają zmianie. Inaczej mówiąc, dE/dt = 0, co prowadzi do

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.$$
(31.6)

Podstawiając związki v = dx/dt i  $dv/dt = d^2x/dt^2$ , otrzymujemy

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$
 (drgania w układzie klocek–sprężyna). (31.7)

Równanie (31.7) jest podstawowym *równaniem różniczkowym* opisującym drgania układu klocek–sprężyna bez uwzględnienia tarcia.

Rozwiązanie ogólne równania (31.7), czyli funkcja x(t) opisująca drgania układu klocek–sprężyna, to (por. równanie (16.3))

$$x = x_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$
 (przemieszczenie), (31.8)

gdzie  $x_{\text{max}}$  jest amplitudą drgań mechanicznych (oznaczoną przez  $x_{\text{m}}$  w rozdziale 15),  $\omega$  oznacza częstość kołową drgań, a  $\phi$  jest fazą początkową.

## Obwód drgający LC

Rozważmy teraz drgania w obwodzie *LC* bez uwzględnienia oporu elektrycznego, postępując dokładnie tak jak w przypadku układu klocek–sprężyna. Całkowita energia E w obwodzie drgającym LC w dowolnej chwili dana jest wzorem

$$E = E_B + E_E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C},$$
(31.9)

gdzie  $E_B$  jest energią zmagazynowaną w polu magnetycznym cewki, a  $E_E$  jest energią zmagazynowaną w polu elektrycznym kondensatora. Założyliśmy brak oporu elektrycznego w obwodzie, więc energia nie ulega przekształceniu w energię termiczną i E nie zmienia się w czasie. Inaczej mówiąc, dE/dt musi się równać zeru, co prowadzi do

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = LI \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0.$$
(31.10)

Jednakże I = dq/dt, a  $dI/dt = d^2q/dt^2$ . Podstawiając te zależności do równania (31.10), otrzymujemy

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad (\text{drgania w obwodzie } LC). \qquad (31.11)$$

Jest to *równanie różniczkowe*, które opisuje drgania w obwodzie *LC* bez uwzględnienia oporu elektrycznego. Równania (31.11) i (31.7) mają dokładnie taką samą postać matematyczną.

## Zmiany ładunku i natężenia prądu

Rozwiązania identycznych równań różniczkowych muszą być matematycznie identyczne. Ponieważ q jest odpowiednikiem x, więc rozwiązanie ogólne równania (31.11) może być napisane przez analogię do równania (31.8)

$$q = q_{\text{max}} \cos(\omega t + \phi)$$
 (ładunek), (31.12)

gdzie  $q_{\text{max}}$  oznacza amplitudę zmian ładunku,  $\omega$  jest częstością kołową drgań elektromagnetycznych, a  $\phi$  jest fazą początkową. Różniczkując równanie (31.12) względem czasu, otrzymujemy wyrażenie opisujące natężenie prądu

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega \, q_{\mathrm{max}} \sin(\omega t + \phi) \qquad \text{(natężenie prądu).} \tag{31.13}$$

Amplituda  $I_{\text{max}}$  zmieniającego się sinusoidalnie natężenia prądu wynosi

$$I_{\max} = \omega \, q_{\max}, \tag{31.14}$$

możemy więc przepisać równanie (31.13) w postaci

$$I = -I_{\max}\sin(\omega t + \phi). \tag{31.15}$$

## Częstości kołowe

Możemy sprawdzić, czy wyrażenie (31.12) jest rozwiązaniem równania (31.11), podstawiając wyrażenie (31.12) i jego drugą pochodną względem

czasu do równania (31.11). Pierwsza pochodna wyrażenia (31.12) jest dana równaniem (31.13), natomiast druga pochodna wynosi

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 q_{\max} \cos(\omega t + \phi).$$

Podstawiając q i  $d^2q/dt^2$  do równania (31.11), otrzymujemy

$$-L\omega^2 q_{\max}\cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C}q_{\max}\cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Po skróceniu przez  $q_{\text{max}} \cos(\omega t + \phi)$  i przekształceniach otrzymujemy ostatecznie

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Tak wiec równanie (31.12) jest rzeczywiście rozwiazaniem równania (31.11), jeżeli  $\omega$  przyjmuje stała wartość  $1/\sqrt{LC}$ . Zauważ, że to wyrażenie określające  $\omega$  jest dokładnie równe wyrażeniu (31.4).

Faza początkowa  $\phi$  w równaniu (31.12) jest określona przez warunki, które występują w pewnej chwili, np. t = 0. Jeżeli z tych warunków wynika, że  $\phi = 0$  dla t = 0, to z równania (31.12) otrzymujemy dla tej chwili  $q = q_{\text{max}}$ , natomiast z równania (31.13) otrzymujemy I = 0; są to właśnie warunki początkowe odpowiadające drganiom na rysunku 31.1a.

## Zmiany energii elektrycznej i magnetycznej

Z równań (31.1) i (31.12) wynika, że energia elektryczna zmagazynowana w obwodzie LC w dowolnej chwili t jest równa

$$E_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_{\text{max}}^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi).$$
(31.16)

Zgodnie z równaniami (31.2) i (31.13) energia magnetyczna jest równa

$$E_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}L\omega^2 q_{\max}^2 \sin^2(\omega t + \phi).$$

Podstawiając  $\omega$  z równania (31.4), otrzymujemy więc

$$E_B = \frac{q_{\text{max}}^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi). \qquad (31.17)$$

Na rysunku 31.4 przedstawiono wykresy  $E_E(t)$  i  $E_B(t)$  dla przypadku  $\phi = 0$ . Zauważ, że:

- 1. Wartości maksymalne  $E_E$  i  $E_B$  są jednakowe i wynoszą  $q_{\text{max}}^2/2C$ .
- W dowolnej chwili suma E<sub>E</sub> i E<sub>B</sub> ma stałą wartość q<sup>2</sup><sub>max</sub>/2C.
   Gdy E<sub>E</sub> osiąga maksymalną wartość, E<sub>B</sub> jest równe zeru, i na odwrót.

## Sprawdzian 2

Maksymalna wartość różnicy potencjałów na kondensatorze w obwodzie drgającym LC wynosi 17 V, a maksymalna wartość energii pola elektrycznego w kondensatorze jest równa 160 µJ. W pewnej chwili różnica potencjałów na kondensatorze wynosi 5 V, a energia 10 µJ. Ile wynosi wtedy: a) siła elektromotoryczna (SEM) indukowana w cewce, b) energia zmagazynowana w polu magnetycznym?





**Rys. 31.4.** Energie magnetyczna  $E_B$ i elektryczna  $E_E$  zmagazynowane w obwodzie przedstawionym na rysunku 31.1 zilustrowane jako funkcje czasu. Zauważ, że suma energii pozostaje stała. Wielkość T oznacza okres drgań

## Przykład 31.01. Obwód drgający LC : zmiany potencjału i szybkość zmian natężenia prądu

Kondensator o pojemności  $1,5\mu$ F został naładowany do różnicy potencjałów 57 V wskutek podłączenia do źródła prądu, które następnie usunięto. W chwili t = 0 kondensator zwarto cewką o indukcyjności 12 mH, tak że powstał obwód drgający *LC* przedstawiony na rysunku 31.1.

**a**) W jaki sposób różnica potencjałów  $U_L(t)$  na cewce zależy od czasu?

## **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Natężenie prądu i różnica potencjałów w obwodzie (zarówno na cewce, jak i na kondensatorze) zmieniają się sinusoidalnie. 2) Do obwodu drgającego możemy zastosować drugie prawo Kirchhoffa dokładnie w taki sam sposób, jak robiliśmy to w rozdziale 27, omawiając obwody prądu stałego.

*Obliczenia:* W dowolnej chwili *t* z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że w obwodzie na rysunku 31.1

$$U_L(t) = U_C(t),$$
 (31.18)

czyli różnica potencjałów  $U_L$  na cewce musi być zawsze równa różnicy potencjałów  $U_C$  na kondensatorze, tak aby całkowita różnica potencjałów w obwodzie była równa zeru. Zatem wyznaczymy  $U_L(t)$ , jeśli będziemy potrafili wyznaczyć  $U_C(t)$ , a  $U_C(t)$  możemy obliczyć, znając q(t) i wykorzystując równanie (25.1) (q = CU).

Gdy drgania rozpoczynają się w chwili t = 0, napięcie  $U_C(t)$  ma maksymalną wartość, a więc ładunek qna okładkach kondensatora musi również osiągać maksimum. Zatem faza początkowa  $\phi$  musi być równa zeru; z równania (31.12) otrzymujemy więc

$$q = q_{\max} \cos \omega t. \tag{31.19}$$

(Zauważmy, że ta kosinusidalna zależność rzeczywiście daje maksymalną wartość  $q (= q_{\text{max}})$ , gdy t = 0). Aby obliczyć różnicę potencjałów  $U_C(t)$ , dzielimy obie strony równania (31.19) przez C

$$\frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C} \cos \omega t$$

i stosujemy równanie (25.1), aby napisać

$$U_C = U_{C \max} \cos \omega t. \tag{31.20}$$

Wielkość  $U_{C \max}$  oznacza tutaj amplitudę zmian napięcia  $U_C$  między okładkami kondensatora. Następnie, podstawiając  $U_C = U_L$  z równania (31.18), otrzymujemy

$$U_L = U_{C\max} \cos \omega t. \tag{31.21}$$

Wartości liczbowe po prawej stronie tego równania możemy obliczyć, jeśli zauważymy, że amplituda  $U_{C \max}$ jest równa początkowemu (maksymalnemu) napięciu 57 V na kondensatorze.

Następnie z równania (31.4) obliczamy

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{[(0,012 \text{ H})(1,5 \cdot 10^{-6} \text{ F})]^{1/2}}$$
  
= 7454 rad/s \approx 7500 rad/s.

Zatem równanie (31.21) przybiera postać

$$U_L = (57 \text{ V}) \cos[(7500 \text{ rad/s})t]$$
 (odpowiedź).

**b**) Jaka jest maksymalna szybkość  $(dI/dt)_{max}$  zmian natężenia prądu *I* płynącego w obwodzie?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Jeżeli ładunek na okładkach kondensatora zmienia się zgodnie z równaniem (31.12), to natężenie prądu dane jest równaniem (31.13). Ponieważ  $\phi = 0$ , więc równanie to przybiera postać

$$I = -\omega q_{\max} \sin \omega t$$
.

**Obliczenia:** Różniczkując powyższe równanie względem czasu, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\omega \, q_{\max} \sin \omega t) = -\omega^2 q_{\max} \cos \omega t.$$

Możemy uprościć to równanie, podstawiając  $CU_{C \max}$ zamiast  $q_{\max}$  (gdyż znamy C i  $U_{C \max}$ , ale nie znamy  $q_{\max}$ ) oraz  $1/\sqrt{LC}$  zamiast  $\omega$ , zgodnie ze wzorem (31.4). Otrzymujemy wtedy

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{LC}CU_{C\max}\cos\omega t = -\frac{U_{C\max}}{L}\cos\omega t.$$

Widzisz więc, że szybkość zmian natężenia prądu jest również funkcją zmieniającą się sinusoidalnie, a maksymalna szybkość zmian jest równa

$$\frac{U_{C \max}}{L} = \frac{57 \text{ V}}{0,012 \text{ H}} = 4750 \text{ A/s} \approx 4800 \text{ A/s}$$
(odpowiedź)

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

## **31.2.** DRGANIA TŁUMIONE W OBWODZIE RLC

## Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- **31.13** naszkicować schemat tłumionego obwodu *RLC* i wyjaśnić, dlaczego drgania w tym obwodzie są tłumione;
- **31.14** wyprowadzić równanie różniczkowe dla ładunku *q* zgromadzonego na kondensatorze, wychodząc od wzorów na energię pola i szybkość strat energii w tłumionym obwodzie *RLC*;
- **31.15** zastosować rozwiązanie dla *q* w tłumionym obwodzie *RLC*;

#### Podstawowe fakty \_

• Jeśli do obwodu *LC* dołączyć rozpraszający energię opór *R*, drgania w takim obwodzie są tłumione. Zachodzi wówczas

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad \text{(obwód } RLC\text{)}.$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest wyrażenie

- **31.16** stwierdzić, że w tłumionym obwodzie *RLC* amplituda drgań ładunku i amplituda energii pola elektrycznego maleją wykładniczo w czasie;
- **31.17** zastosować związek między częstością kołową  $\omega'$  w tłumionym obwodzie *RLC* i częstością kołową  $\omega$  drgań w obwodzie *LC* powstającym wskutek usunięcia opornika *R*;
- **31.18** zastosować wyrażenie na zależność energii pola elektrycznego w tłumionym obwodzie *RLC* od czasu.

$$q = q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi),$$

w którym:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}.$$

Rozważamy tu jedynie przypadek niewielkiego oporu R, a więc słabego tłumienia; mamy wówczas  $\omega' \approx \omega$ .

## Drgania tłumione w obwodzie RLC

Obwód zawierający opór, indukcyjność i pojemność nazywamy obwodem RLC. W tym podrozdziale będziemy zajmować się tylko szeregowymi obwodami RLC, podobnymi do obwodu przedstawionego na rysunku 31.5. Jeśli w obwodzie występuje opór elektryczny, to całkowita energia elektromagnetyczna E (suma energii elektrycznej i magnetycznej) nie jest już stała, ale maleje w czasie, gdyż jest przekształcana na oporniku w energię termiczną. Z powodu strat energii, amplitudy drgań ładunku, natężenia prądu i różnicy potencjałów stopniowo maleją; takie drgania nazywamy drganiami tłumionymi. Jak się przekonasz, są one tłumione dokładnie w taki sam sposób, jak drgania tłumionego układu klocek–sprężyna, omówionego w podrozdziale 15.5.

Aby zbadać drgania w obwodzie RLC, zapiszemy wyrażenie określające całkowitą energię elektromagnetyczną E w dowolnej chwili. Energia elektromagnetyczna nie jest gromadzona na oporniku, możemy zatem zastosować wzór (31.9)

$$E = E_B + E_E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}.$$
 (31.22)

Teraz jednak całkowita energia elektromagnetyczna maleje, gdyż jest przekształcana w energię termiczną. Zgodnie z równaniem (26.27) szybkość tej zmiany wynosi

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -I^2 R,\tag{31.23}$$

**Rys. 31.5.** Szeregowy obwód *RLC*. Gdy ładunek zgromadzony w obwodzie przepływa tam i z powrotem przez opornik, energia elektromagnetyczna ulega rozproszeniu w postaci energii termicznej, tłumiąc drgania (czyli zmniejszając ich amplitudę)

gdzie znak minus wskazuje, że E maleje. Różniczkując równanie (31.22) względem czasu, a następnie podstawiając wynik do równania (31.23), otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -I^2R$$

Podstawiając dq/dt za *I* oraz  $d^2q/dt^2$  za dI/dt, otrzymujemy:

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad \text{(obwód RLC)}. \tag{31.24}$$

Jest to równanie różniczkowe, opisujące drgania tłumione w obwodzie *RLC*.

Ładunek. Rozwiązaniem równania (31.24) jest wyrażenie

$$q = q_{\text{max}} e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi), \qquad (31.25)$$

w którym:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2},$$
 (31.26)

gdzie  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , tak jak w układzie nietłumionym. Równanie (31.25) określa, w jaki sposób ładunek na okładkach kondensatora zmienia się w tłumionym obwodzie *RLC*; to równanie jest odpowiednikiem równania (15.42), które określa przemieszczenie w tłumionym układzie klocek--sprężyna.

Równanie (31.25) opisuje drgania sinusoidalne (wyrażone funkcją kosinus) o malejącej wykładniczo amplitudzie  $q_{\max}e^{-Rt/2L}$  (czyli czynniku przy funkcji kosinus). Częstość kołowa  $\omega'$  drgań tłumionych jest zawsze mniejsza niż częstość kołowa  $\omega$  drgań nietłumionych; jednak będziemy tu zajmować się tylko przypadkami, w których *R* jest na tyle małe, że częstość  $\omega'$  jest w przybliżeniu równa częstości  $\omega$ .

*Energia.* Znajdziemy teraz wyrażenie określające całkowitą energię elektromagnetyczną *E* obwodu jako funkcję czasu. Jedną z metod może być obliczenie energii pola elektrycznego w kondensatorze, danej równaniem (31.1) ( $E_E = q^2/2C$ ). Podstawiając wyrażenie (31.25) do równania (31.1), otrzymujemy

$$E_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{[q_{\max}e^{-Rt/2L}\cos(\omega't+\phi)]^2}{2C} = \frac{q_{\max}^2}{2C}e^{-Rt/L}\cos^2(\omega't+\phi).$$
(31.27)

Tak więc energia pola elektrycznego zmienia się okresowo, zgodnie z funkcją kosinus do kwadratu, a amplituda tych zmian maleje wykładniczo w czasie.

### Przykład 31.02. Tłumiony obwód RLC: amplituda drgań ładunku

Szeregowy obwód *RLC* zawiera indukcyjność *L* = 12 mH, pojemność *C* = 1,6  $\mu$ F i opór *R* = 1,5  $\Omega$ ; w chwili *t* = 0 obwód ten zaczyna drgać.

**a)** Po jakim czasie *t* amplituda drgań ładunku w obwodzie osiągnie 50% swojej początkowej wartości? (Zauważ, że nie znamy tej początkowej wartości).

#### 31.3. DRGANIA WYMUSZONE: TRZY PROSTE OBWODY 389

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Amplituda zmian ładunku maleje wykładniczo w funkcji czasu t. Zgodnie ze wzorem (31.25) amplituda ładunku w dowolnej chwili t wynosi  $q_{\text{max}}e^{-Rt/2L}$ , gdzie  $q_{\text{max}}$  jest amplitudą w chwili t = 0.

**Obliczenia:** Chcemy określić moment, w którym amplituda zmaleje do wartości  $0.5 q_{\text{max}}$ , czyli

$$q_{\max} \mathrm{e}^{-Rt/2L} = 0.5 \, q_{\max}.$$

Możemy teraz zredukować  $q_{\text{max}}$  (jak widać, możemy rozwiązać zadanie, nie znając początkowego ładunku). Obliczając logarytm naturalny z obydwu stron równania (w celu wyeliminowania funkcji wykładniczej), mamy

$$-\frac{Rt}{2L} = \ln 0.5.$$

Wyznaczając t i podstawiając dane, otrzymujemy

$$t = -\frac{2L}{R} \ln 0.5 = -\frac{(2)(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})(\ln 0.5)}{1.5 \Omega}$$
  
= 0.0111 s \approx 11 ms (odpowiedź).

b) Ile pełnych drgań wykona obwód w tym czasie?

## **PODSTAWOWE FAKTY**

Czas jednego pełnego cyklu drgań jest równy okresowi  $T = 2\pi/\omega$ , gdzie częstość kołowa drgań w obwodzie *LC* jest dana wzorem (31.4) ( $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ).

**Obliczenia:** W przedziale czasu  $\Delta t = 0,0111$  s liczba pełnych drgań jest równa

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{0,0111 \text{ s}}{2\pi[(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})(1,6 \cdot 10^{-6} \text{ F})]^{1/2}} \approx 13 \qquad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

Tak więc w czasie około 13 pełnych drgań amplituda zmaleje o 50%. Tłumienie to jest słabsze niż pokazane na rysunku 31.3, gdzie w czasie jednego cyklu drgań amplituda maleje nieco więcej niż o 50%.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

## **31.3.** DRGANIA WYMUSZONE: TRZY PROSTE OBWODY

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 31.19 odróżniać prąd zmienny od prądu stałego;
- 31.20 zapisać SEM źródła prądu zmiennego jako funkcję czasu i określić amplitudę SEM oraz częstość kołową drgań wymuszonych;
- 31.21 zapisać natężenie prądu wytwarzanego przez źródło prądu zmiennego jako funkcję czasu i określić amplitudę zmian tego natężenia oraz przesunięcie fazowe względem SEM;
- **31.22** narysować schematyczny diagram (szeregowego) obwodu *RLC* ze źródłem prądu zmiennego;
- **31.23** odróżniać częstość drgań wymuszonych  $\omega_w$  od częstości drgań swobodnych  $\omega$ ;
- 31.24 określić warunek rezonansu oraz zachowanie amplitudy natężenia prądu dla rezonansu (szeregowego) obwodu *RLC* z drganiami wymuszonymi;
- 31.25 narysować schemat każdego z trzech podstawowych obwodów (obciążenie czysto oporowe, czysto pojemnościowe i czysto indukcyjne) oraz naszkicować odpowiednie wykresy

i diagramy wskazowe dla różnicy potencjałów U(t) oraz natężenia prądu I(t);

- **31.26** zastosować wzory dla różnicy potencjałów *U*(*t*) oraz natężenia prądu *I*(*t*) dla każdego z trzech podstawowych obwodów;
- 31.27 określić na diagramie wskazowym każdego z trzech podstawowych obwodów prędkość kątową, amplitudę, rzut na oś pionową i kąt obrotu;
- 31.28 określić dla każdego z trzech podstawowych obwodów przesunięcie fazowe oraz przedstawić je zarówno za pomocą względnej orientacji wskazów natężenia prądu i różnicy potencjałów, jak i przy użyciu wyrażeń "wyprzedza" i "opóźnia się";
- **31.29** zastosować związek między amplitudą różnicy napięć  $U_{\text{max}}$  i amplitudą natężenia prądu  $I_{\text{max}}$  dla każdego z trzech podstawowych obwodów;
- **31.30** obliczyć reaktancję pojemnościową *X<sub>C</sub>* i reaktancję indukcyjną *X<sub>L</sub>*.

#### Podstawowe fakty

• W szeregowym obwodzie RLC mogą występować drgania wymuszone przez zewnetrzna, zmienna SEM

 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_{\rm w} t$ ,

gdzie  $\omega_w$  nazywamy częstością drgań wymuszonych.

Nateżenie pradu płynacego w takim obwodzie ma postać

 $I = I_{\max} \sin(\omega_{\rm w} t - \phi),$ 

 $dzie \phi$  jest przesunieciem fazowym nateżenia pradu.

 Dla pradu zmiennego amplituda różnicy potencjałów na oporniku spełnia zależność  $U_{R \max} = I_{\max}R$ ; natężenie prądu jest zgodne w fazie z różnicą potencjałów.

• Dla kondensatora zachodzi  $U_{C \max} = I_{\max} X_C$ , gdzie  $X_C =$  $\frac{1}{\omega_{\rm wC}}$  jest reaktancją pojemnościową; natężenie prądu wyprzedza różnice potenciałów o 90° ( $\phi = -90^\circ = -\pi/2$  rad).

• Dla cewki zachodzi  $U_{L \max} = I_{\max} X_L$ , gdzie  $X_L = \frac{1}{\omega_w L}$  jest reaktancją indukcyjną; natężenie prądu opóźnia się względem różnicy potencjałów o 90° ( $\phi = +90^\circ = +\pi/2$  rad).

## **Prad zmienny**

Drgania w obwodzie RLC nie będą zanikać, jeśli zewnętrzne źródło SEM dostarczy dostatecznie dużo energii, aby uzupełnić straty spowodowane rozpraszaniem energii w oporniku R. Instalacje elektryczne w mieszkaniach, biurach i fabrykach, zawierające niezliczone obwody RLC, pobierają energię z lokalnych elektrowni. W większości krajów energia jest dostarczana przy użyciu napięć i natężeń pradu zmieniających się w czasie taki prad nazywamy pradem zmiennym (w skrócie ac od ang. alternating current). Prad wytwarzany w baterii nie zmienia się w czasie i nazywamy go pradem stałym (dc od ang. direct current). Te zmienne napięcia i natężenia prądu zależą sinusoidalnie od czasu, zmieniając kierunek (w Europie 100 razy na sekunde, co odpowiada czestotliwości 50 Hz; w Ameryce Północnej częstotliwość zmian napięcia i natężenia prądu w sieci elektrycznej wynosi 60 Hz).

Drgające elektrony. Na pierwszy rzut oka taki sposób przesyłania energii może wydać się dziwny. Widzieliśmy już, że prędkość unoszenia elektronów przewodnictwa w domowej instalacji elektrycznej jest równa w typowych warunkach  $4 \cdot 10^{-5}$  m/s. Jeżeli teraz zmieniamy kierunek ruchu elektronów co 1/120 sekundy, to w ciągu połowy okresu takie elektrony mogą przebyć drogę równą zaledwie  $3 \cdot 10^{-7}$  m. W takim tempie typowy elektron może przemieścić się obok około 10 atomów w przewodzie elektrycznym, zanim zacznie się poruszać w przeciwnym kierunku. Być może jesteś ciekaw, jak w takim razie elektron może gdziekolwiek dotrzeć?

Tym pytaniem, choć kłopotliwym, nie musimy się jednak zajmować, gdyż elektrony przewodnictwa nie muszą "gdziekolwiek dotrzeć". Kiedy mówimy, że nateżenie pradu w przewodniku wynosi jeden amper, oznacza to, że ładunki przemieszczają się w tempie jednego kulomba na sekundę przez dowolną płaszczyznę przecinającą ten przewodnik. Szybkość, z jaką ładunki przechodzą przez tę płaszczyznę, nie ma w istocie znaczenia; jeden amper może odpowiadać wielu ładunkom poruszającym się bardzo wolno lub zaledwie kilku, ale poruszającym się bardzo szybko. Ponadto sygnał wysyłany do elektronów, aby zmieniły swój kierunek ruchu – pochodzący od zmiennej SEM dostarczanej przez prądnicę elektrowni - rozchodzi się wzdłuż przewodnika z prędkością bliską prędkości światła. Wszystkie elektrony, niezależnie od tego, gdzie się znajdują, otrzymują instrukcję zmiany kierunku niemalże w tej samej chwili. W końcu zauważmy, że w wielu

390

urządzeniach, takich jak żarówki lub tostery, kierunek ruchu jest nieistotny, jeśli tylko elektrony poruszają się i dostarczają energię do urządzenia, zderzając się z jego atomami.

Dlaczego prąd zmienny? Podstawową korzyścią ze stosowania prądu zmiennego jest to, że zmiany natężenia prądu powodują zmiany pola magnetycznego otaczającego przewodnik. Dzięki temu możliwe jest zastosowanie prawa indukcji Faradaya, co oznacza między innymi, że możemy dowolnie podwyższać (zwiększać) lub obniżać (zmniejszać) amplitudę napięcia zmiennego, korzystając z urządzenia zwanego transformatorem, o czym przekonamy się jeszcze w tym rozdziale. Dodatkową korzyścią jest to, że prąd zmienny jest łatwiejszy (niż prąd stały) do stosowania w obrotowych urządzeniach elektrycznych, takich jak prądnice i silniki.

**SEM i natężenie prądu.** Na rysunku 31.6 pokazano prosty model prądnicy prądu zmiennego. Przewodząca ramka jest obracana w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , zatem w ramce indukuje się sinusoidalnie zmienna SEM

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_{\rm w} t. \tag{31.28}$$

*Częstość kołowa*  $\omega_w$  SEM jest równa prędkości kątowej, z jaką ramka porusza się w polu magnetycznym; *faza* SEM jest równa  $\omega_w t$ , natomiast *amplituda* jest równa  $\mathcal{E}_{max}$ , gdzie indeks max oznacza wartość maksymalną. Gdy obracająca się ramka jest częścią obwodu zamkniętego, SEM wytwarza (*wymusza*) w obwodzie prąd sinusoidalnie zmienny o tej samej częstości kołowej  $\omega_w$ , która nazywana jest dlatego **częstością kołową drgań wymuszonych**. Natężenie prądu można zapisać w postaci

$$I = I_{\max} \sin(\omega_{\rm w} t - \phi), \qquad (31.29)$$

gdzie  $I_{\text{max}}$  jest amplitudą natężenia prądu wymuszonego. (Faza początkowa natężenia prądu jest zwyczajowo zapisywana ze znakiem minus). Wprowadzamy fazę początkową  $\phi$  w równaniu (31.29), gdyż natężenie prądu I może być przesunięte w fazie względem SEM  $\mathcal{E}$ . (Jak się przekonamy, faza początkowa zależy od tego, do jakiego obwodu dołączona jest prądnica). Możemy również zapisać natężenie prądu I za pomocą **częstotliwości drgań wymuszonych**  $v_w$ , podstawiając  $2\pi v_w$  zamiast  $\omega_w$ w równaniu (31.29).

## Drgania wymuszone

Przekonaliśmy się, że jeśli pobudzimy do drgań ładunek, napięcie i natężenie prądu, to zarówno w nietłumionym obwodzie *LC*, jak i w tłumionym obwodzie *RLC* (z dostatecznie małym oporem *R*) drgania te zachodzą z częstością kołową  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Takie drgania nazywamy *drganiami swobodnymi* (niezależnymi od jakiejkolwiek zewnętrznej SEM), a częstość kołowa  $\omega$  jest nazywana **częstością kołową drgań swobodnych** obwodu.

Jeśli jednak do obwodu *RLC* dołączona jest zewnętrzna zmienna SEM, dana wzorem (31.28), to drgania ładunku, napięcia i natężenia prądu nazywamy *drganiami wymuszonymi*. Te drgania zawsze zachodzą z częstością kołową drgań wymuszonych  $\omega_w$ .



**Rys. 31.6.** Podstawowym elementem prądnicy prądu zmiennego jest przewodząca ramka obracająca się w zewnętrznym polu magnetycznym. W praktyce zmienna SEM indukowana w cewce składającej się z wielu zwojów jest odbierana dzięki pierścieniom ślizgowym przymocowanym do obracającego się uzwojenia. Każdy pierścień dołączony jest do jednego końca uzwojenia i jest połączony elektrycznie z resztą obwodu prądnicy za pomocą przewodzących szczotek, które ślizgają się po pierścieniach podczas obracania się uzwojenia



**Rys. 31.7.** Obwód o jednym oczku zawierający opornik, kondensator i cewkę. Źródło, oznaczone sinusoidalną falą w kółku, wytwarza zmienną SEM, która powoduje przepływ prądu zmiennego; kierunki SEM i prądu zaznaczone są w pewnej wybranej chwili



**Rys. 31.8.** Opornik połączony jest ze źródłem prądu zmiennego

Niezależnie od częstości drgań swobodnych obwodu, wymuszone drgania ładunku, napięcia i natężenia prądu zawsze zachodzą z częstością kołową drgań wymuszonych  $\omega_w$ .

Jednakże, jak zobaczysz w podrozdziale 31.4, amplituda drgań w bardzo dużym stopniu zależy od tego, jak bliska częstości kołowej drgań swobodnych  $\omega$  jest częstość kołowa drgań wymuszonych  $\omega_w$ . Gdy obie częstości kołowe się pokrywają, amplituda  $I_{max}$  natężenia prądu w obwodzie osiąga maksimum, a taki przypadek nazywamy **rezonansem**.

## Trzy proste obwody

W dalszej części tego rozdziału dołączymy zewnętrzne źródło zmiennej SEM do szeregowego obwodu *RLC*, pokazanego na rysunku 31.7. Następnie znajdziemy wyrażenie, które opisuje amplitudę  $I_{max}$  i fazę początkową  $\phi$  natężenia prądu zmiennego jako funkcji amplitudy  $\mathcal{E}_{max}$  i częstości kołowej  $\omega_w$  zewnętrznej SEM. Najpierw jednak przeanalizujmy trzy prostsze obwody, z których każdy składa się z zewnętrznego źródła SEM i tylko jednego elementu obwodu: *R*, *L* lub *C*. Zaczniemy od obwodu zawierającego tylko opornik *R*, a więc od obciążenia czysto *oporowego*.

## Obciążenie oporowe

Na rysunku 31.8 przedstawiono obwód składający się z opornika o oporze R i źródła prądu zmiennego o SEM wyrażonej wzorem (31.28). Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa mamy

$$\mathcal{E} - U_R = 0$$

Podstawiając równanie (31.28), otrzymujemy

$$U_R = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_{\mathrm{w}} t.$$

Amplituda  $U_{R \max}$  różnicy potencjałów (czyli napięcia) na końcach opornika jest równa amplitudzie  $\mathcal{E}_{\max}$  zmiennej SEM, możemy więc napisać

$$U_R = U_{R\max} \sin \omega_{\rm w} t. \tag{31.30}$$

Korzystając z definicji oporu (R = U/I), możemy teraz wyrazić natężenie prądu  $I_R$  płynącego przez opornik jako

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{U_R \max}{R} \sin \omega_{\rm w} t.$$
(31.31)

Korzystając z równania (31.29), to samo natężenie prądu możemy również zapisać w postaci:

$$I_R = I_{R\max} \sin(\omega_w t - \phi), \qquad (31.32)$$

gdzie  $I_{R \max}$  oznacza amplitudę natężenia prądu  $I_R$  płynącego przez opornik.

Porównując równania (31.31) i (31.32), zauważymy, że dla obciążenia czysto oporowego faza początkowa jest równa  $\phi = 0^{\circ}$ . Widzimy również, że amplitudy napięcia i natężenia prądu są związane zależnością

$$U_{R\max} = I_{R\max}R \qquad \text{(opornik)}. \tag{31.33}$$



dla obciażenia oporowego

**Rys. 31.9.** a) Zależności czasowe natężenia prądu  $I_R$  i napięcia  $U_R$  na oporniku przedstawione są na tym samym wykresie. Obie te wielkości drgają w zgodnej fazie i wykonują jeden pełny cykl drgań w ciągu jednego okresu T. b) Diagram wskazowy pokazujący sytuacje opisaną w punkcie (a)

Chociaż wyprowadziliśmy tę zależność dla obwodu z rys. 31.8a, jest ona słuszna dla dowolnego opornika w dowolnym obwodzie prądu zmiennego.

Porównując wzory (31.30) i (31.31), widzimy, że obie zmieniające się w czasie wielkości  $U_R$  i  $I_R$  zależą od czasu jak funkcja sin  $\omega_w t$ , a ich faza początkowa wynosi  $\phi = 0^\circ$ . Zatem obie te wielkości drgają w zgodnej fazie, co oznacza, że ich odpowiadające sobie maksima (i minima) występują w tej samej chwili. Ilustruje to rysunek 31.9a, który jest wykresem funkcji  $U_R(t)$  i  $I_R(t)$ . Zauważ, że drgania  $U_R$  i  $I_R$  nie zanikają, ponieważ źródło dostarcza energii do obwodu, aby wyrównać straty energii rozpraszanej na oporniku R.

Zmieniające się w czasie wielkości  $U_R$  i  $I_R$  mogą być również przedstawione geometrycznie jako *wskazy*. Przypomnij sobie, że w podrozdziale 17.10 zdefiniowaliśmy wskazy jako wektory obracające się wokół początku układu współrzędnych. Na rysunku 31.9b pokazane są wskazy, które przedstawiają napięcie i natężenie prądu w oporniku z rysunku 31.8 w pewnej chwili *t*. Te wskazy mają następujące właściwości:

- **Prędkość kątowa.** Obydwa wskazy obracają się wokół początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara z prędkością kątową równą częstości kołowej  $\omega_w$  napięcia  $U_R$  i natężenia prądu  $I_R$ .
- **Długość.** Długość każdego wskazu odpowiada amplitudzie wielkości zależnej od czasu, czyli  $U_{R \max}$  w przypadku napięcia, a  $I_{R \max}$  w przypadku natężenia prądu.
- **Rzut.** Rzut wskazu na oś *pionową* przedstawia wartość chwilową (w chwili t) wielkości zależnej od czasu, czyli  $U_R$  w przypadku napięcia, a  $I_R$  w przypadku natężenia prądu.
- *Kąt obrotu.* Kąt obrotu każdego wskazu jest równy fazie wielkości zmieniającej się w czasie, określonej w chwili *t*. Na rysunku 31.9b napięcie ma taką samą fazę jak natężenie prądu. Oznacza to, że obydwa wskazy mają zawsze tę samą fazę  $\omega_w t$  i ten sam kąt obrotu, a więc obracają się razem.

Podążaj w myśli za obracającymi się wskazami. Czy widzisz, że po obrocie o kąt  $\omega_w t = 90^\circ$  wskazy są skierowane pionowo w górę i pokazują, że

wtedy  $U_R = U_{R \max}$ , a  $I_R = I_{R \max}$ ? Taki sam wynik dają równania (31.30) i (31.32).

## Sprawdzian 3

Jeżeli zwiększymy częstość SEM w obwodzie z obciążeniem czysto oporowym, to czy: a) amplituda  $U_{R \max}$ , b) amplituda  $I_{R \max}$  zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie taka sama?

## Przykład 31.03. Obciążenie czysto oporowe: różnica potencjałów i natężenie prądu

Na rysunku 31.8 opór *R* jest równy 200  $\Omega$ , a źródło wytwarza sinusoidalnie zmienną SEM o amplitudzie  $\mathcal{E}_{\text{max}} = 36$  V i częstotliwości  $\nu_{\text{w}} = 50$  Hz.

a) Jakie jest napięcie  $U_R(t)$  na oporniku R jako funkcja czasu i jaka jest amplituda  $U_{R \max}$  funkcji  $U_R(t)$ ?

## **PODSTAWOWE FAKTY**

W obwodzie z czysto oporowym obciążeniem napięcie  $U_R(t)$  na oporze jest zawsze równe SEM  $\mathcal{E}(t)$  wytwarzanej w źródle.

**Obliczenia:** W rozważanej sytuacji mamy  $U_R(t) = \mathcal{E}(t)$  i  $U_{R \max} = \mathcal{E}_{\max}$ . Ponieważ  $\mathcal{E}_{\max}$  jest dane, możemy napisać:

$$U_{R \max} = \mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$$
 (odpowiedź).

W celu znalezienia  $U_R(t)$  stosujemy równanie (31.28) i zapisujemy

$$U_R(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_{\rm w} t, \qquad (31.34)$$

a następnie podstawiamy  $\mathcal{E}_{max} = 36 \text{ V i}$ 

$$\omega_{\rm w} = 2\pi\nu_{\rm w} = 2\pi(50 \,{\rm Hz}) = 100\pi \,{\rm Hz},$$

otrzymując dla t wyrażonego w sekundach

$$U_R(t) = (36 \text{ V}) \sin(100\pi t) \qquad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

Dla wygody możemy pozostawić argument funkcji sinus w tej postaci. Możemy również zapisać go jako  $(314 \text{ rad/s})t \text{ lub } (314 \text{ s}^{-1})t.$ 

**b**) Jakie jest natężenie prądu  $I_R(t)$  płynącego przez opór i amplituda  $I_{R \max}$  natężenia prądu  $I_R(t)$ ?

## **PODSTAWOWE FAKTY**

W obwodzie prądu zmiennego z czysto oporowym obciążeniem zmienne natężenie prądu  $I_R(t)$  płynącego przez opór jest *zgodne w fazie* ze zmiennym napięciem  $U_R(t)$  na tym oporze, tzn. faza początkowa  $\phi$  dla natężenia prądu jest równa zeru.

**Obliczenia:** Możemy zapisać równanie (31.29) w postaci

$$I_R = I_{R\max} \sin(\omega_w t - \phi) = I_{R\max} \sin \omega_w t. \quad (31.35)$$

Z równania (31.33) wyznaczamy amplitudę  $I_{R \max}$ 

$$I_{R\max} = \frac{U_{R\max}}{R} = \frac{36 \text{ V}}{200 \Omega} = 0,18 \text{ A} \quad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

Podstawiając tę wartość oraz  $\omega_{\rm w} = 2\pi \nu_{\rm w} = 100\pi$  Hz do równania (31.35), otrzymujemy dla *t* wyrażonego w sekundach

$$I_R = (0, 18 \text{ A}) \sin(100\pi t) \qquad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.



**Rys. 31.10.** Kondensator dołączony jest do źródła prądu zmiennego

## Obciążenie pojemnościowe

Na rysunku 31.10 przedstawiono obwód, składający się z kondensatora i źródła prądu zmiennego o SEM wyrażonej wzorem (31.28). Stosując drugie prawo Kirchhoffa i postępując jak przy wyprowadzaniu wzoru (31.30), znajdujemy napięcie na okładkach kondensatora

$$U_C = U_{C \max} \sin \omega_{\rm w} t, \qquad (31.36)$$

gdzie  $U_{C \max}$  jest amplitudą zmiennego napięcia na kondensatorze. Z definicji pojemności wynika

$$q_C = CU_C = CU_{C\max}\sin\omega_{\rm w}t. \tag{31.37}$$

Interesuje nas jednak natężenie prądu, a nie ładunek. Dlatego różniczkujemy równanie (31.37) i otrzymujemy

$$I_C = \frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} = \omega_{\mathrm{w}} C U_{C\,\mathrm{max}} \cos \omega_{\mathrm{w}} t. \tag{31.38}$$

Dokonamy teraz dwóch modyfikacji równania (31.38). Po pierwsze, aby zachować symetrię oznaczeń, wprowadzamy wielkość  $X_C$ , nazywaną **reaktancją pojemnościową** kondensatora i zdefiniowaną jako

$$X_C = \frac{1}{\omega_{\rm w}C}$$
 (reaktancja pojemnościowa). (31.39)

Jej wartość zależy nie tylko od pojemności, ale także od częstości kołowej drgań wymuszonych  $\omega_w$ . Wiemy z definicji pojemnościowej stałej czasowej ( $\tau = RC$ ), że jednostka pojemności *C* może być wyrażona w układzie SI jako sekunda podzielona przez om. Podstawienie tej jednostki do wzoru (31.39) prowadzi do wniosku, że jednostką  $X_C$  w układzie SI jest *om*, dokładnie tak, jak dla oporu *R*.

Po drugie, zastępujemy  $\cos \omega_w t$  w równaniu (31.38) funkcją sinus, przesuniętą w fazie

$$\cos \omega_{\rm w} t = \sin(\omega_{\rm w} t + 90^\circ).$$

Możesz sprawdzić tę tożsamość, przesuwając wykres funkcji sinus o 90° w kierunku ujemnym.

Po tych dwóch modyfikacjach równanie (31.38) przybiera postać

$$I_C = \left(\frac{U_C \max}{X_C}\right) \sin(\omega_{\rm w} t + 90^\circ). \tag{31.40}$$

Korzystając z równania (31.29), możemy również zapisać natężenie prądu  $I_C$  płynącego przez kondensator na rysunku 31.10 jako

$$I_C = I_{C \max} \sin(\omega_w t - \phi), \qquad (31.41)$$

gdzie  $I_{C \text{ max}}$  jest amplitudą  $I_C$ . Porównując równania (31.40) i (31.41), widzimy, że dla czysto pojemnościowego obciążenia faza początkowa natężenia prądu jest równa  $-90^{\circ}$ . Widzimy również, że amplitudy napięcia i natężenia prądu związane są zależnością

$$U_{C \max} = I_{C \max} X_C$$
 (kondensator). (31.42)

Chociaż wyprowadziliśmy tę zależność dla obwodu z rysunku 31.10, jest ona słuszna dla dowolnej pojemności w dowolnym obwodzie.

Porównanie wzorów (31.36) i (31.40) lub rzut oka na rysunek 31.11a wskazuje, że wielkości  $U_C$  i  $I_C$  są przesunięte w fazie o 90°, co odpowiada jednej czwartej okresu. Widzimy ponadto, że  $I_C$  wyprzedza  $U_C$ . Oznacza to, że gdybyśmy śledzili natężenie prądu  $I_C$  i napięcie  $U_C$  w obwodzie na rysunku 31.10, to okazałoby się, że  $I_C$  osiąga maksimum ćwierć okresu przed  $U_C$ .





Ten związek między  $I_C$  i  $U_C$  pokazany jest w postaci diagramu wskazowego na rysunku 31.11b. Gdy wskazy przedstawiające te dwie wielkości obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, wskaz oznaczony jako  $I_{C \max}$  rzeczywiście wyprzedza wskaz oznaczony jako  $U_{C \max}$  o kąt równy 90°. Oznacza to, że wskaz  $I_{C \max}$  pokryje się z osią pionową ćwierć okresu przed wskazem  $U_{C \max}$ . Przekonaj się, że diagram wskazowy na rysunku 31.11b jest zgodny ze wzorami (31.36) i (31.40).

## Sprawdzian 4

Na rysunku (a) pokazano wykres funkcji  $S(t) = \sin(\omega_w t)$  i trzech innych krzywych sinusoidalnych A(t), B(t), C(t) o postaci  $\sin(\omega_w t - \phi)$ . a) Uszereguj te trzy krzywe według wartości  $\phi$ , zaczynając od największej (dodatniej) wartości, a kończąc na najmniejszej (ujemnej). b) Przyporządkuj poszczególne krzywe wskazom na rysunku (b). c) Która krzywa wyprzedza pozostałe?



## Przykład 31.04. Obciążenie czysto pojemnościowe: różnica potencjałów i natężenie prądu

Na rysunku 31.10 pojemność *C* jest równa 18  $\mu$ F, a źródło wytwarza sinusoidalnie zmienną SEM o amplitudzie  $\mathcal{E}_{max} = 36$  V i częstotliwości  $\nu_w = 50$  Hz.

a) Jakie jest napięcie  $U_C(t)$  na kondensatorze i amplituda  $U_{C \max}$  napięcia  $U_C(t)$ ?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

W obwodzie z obciążeniem czysto pojemnościowym napięcie  $U_C(t)$  na kondensatorze jest zawsze równe SEM  $\mathcal{E}(t)$  wytwarzanej przez źródło. **Obliczenia:** W rozważanej sytuacji mamy  $U_C(t) = \mathcal{E}(t)$ i  $U_{C \max} = \mathcal{E}_{\max}$ . Ponieważ  $\mathcal{E}_{\max}$  jest dane, możemy napisać

$$U_{C \max} = \mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$$
 (odpowiedź).

W celu znalezienia  $U_C(t)$  stosujemy równanie (31.28) i zapisujemy

$$U_C(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_{\rm w} t, \qquad (31.43)$$

a następnie podstawiamy  $\mathcal{E}_{max} = 36 \text{ V}$  i  $\omega_w = 2\pi v_w = 2\pi (50 \text{ Hz}) = 100\pi \text{ Hz}$  do równania (31.43), otrzymu-

jąc dla t wyrażonego w sekundach

$$U_C(t) = (36 \text{ V}) \sin(100\pi t)$$
 (odpowiedź).

**b**) Jakie jest natężenie prądu  $I_C(t)$  w obwodzie i amplituda  $I_{C \max}$  natężenia prądu  $I_C(t)$ ?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

W obwodzie prądu zmiennego z czysto pojemnościowym obciążeniem zmienne natężenie prądu  $I_C(t)$  płynącego przez kondensator wyprzedza zmienne napięcie  $U_C(t)$  o 90°, tzn. faza początkowa  $\phi$  dla natężenia prądu jest równa –90°, czyli – $\pi/2$  rad.

*Obliczenia:* Możemy więc zapisać równanie (31.29) w postaci:

$$I_{C} = I_{C \max} \sin(\omega_{w}t - \phi) = I_{C \max} \sin(\omega_{w}t + \pi/2).$$
(31.44)

## Obciążenie indukcyjne

Na rysunku 31.12 przedstawiono obwód składający się z cewki i źródła prądu zmiennego o SEM wyrażonej wzorem (31.28). Stosując drugie prawo Kirchhoffa i postępując, jak przy wyprowadzaniu wzoru (31.30), znajdujemy napięcie na cewce

$$U_L = U_{L\max} \sin \omega_{\rm w} t, \qquad (31.45)$$

gdzie  $U_{L \max}$  jest amplitudą  $U_L$ . Napięcie na cewce o indukcyjności L, w której natężenie prądu zmienia się z szybkością  $dI_L/dt$ , może być zapisane na podstawie wzoru (30.35) ( $\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$ ) jako

$$U_L = L \frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t}.\tag{31.46}$$

Łącząc równania (31.45) i (31.46), otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} = \frac{U_L\max}{L}\sin\omega_\mathrm{w}t.$$
(31.47)

Interesuje nas jednak natężenie prądu, a nie jego pochodna względem czasu. Dlatego całkujemy

$$I_L = \int dI_L = \frac{U_L \max}{L} \int \sin \omega_w t dt = -\left(\frac{U_L \max}{\omega_w L}\right) \cos \omega_w t. \quad (31.48)$$

Dokonamy teraz dwóch modyfikacji tego równania. Po pierwsze, aby zachować symetrię oznaczeń, wprowadzamy wielkość  $X_L$  nazywaną **reaktancją indukcyjną** cewki i zdefiniowaną jako

$$X_L = \omega_{\rm w} L$$
 (reaktancja indukcyjna). (31.49)

Amplitudę  $I_{C \max}$  można znaleźć z równania (31.42) ( $U_{C \max} = I_{C \max} X_C$ ), jeśli najpierw obliczymy reaktancję pojemnościową  $X_C$ . Z równania (31.39) ( $X_C = 1/\omega_w C$ ), pamiętając że  $\omega_w = 2\pi v_w$ , otrzymujemy

$$X_C = \frac{1}{2\pi\nu_{\rm w}C} = \frac{1}{(2\pi)(50 \text{ Hz})(18 \cdot 10^{-6} \text{ F})} = 177 \ \Omega.$$

Zatem z równania (31.42) wynika, że amplituda natężenia prądu wynosi

$$I_{C \max} = \frac{U_{C \max}}{X_C} = \frac{36 \text{ V}}{177 \Omega} = 0,203 \text{ A} \text{ (odpowiedź)}.$$

Podstawiając tę wartość i  $\omega_w = 2\pi v_w = 100\pi$  Hz do równania (31.44), otrzymujemy dla *t* wyrażonego w sekundach

$$I_C = (0,203 \text{ A}) \sin(100\pi t + \pi/2)$$
 (odpowiedź).



**Rys. 31.12.** Cewka dołączona jest do źródła prądu zmiennego

Wartość  $X_L$  zależy od częstości kołowej źródła  $\omega_w$ . Jednostka indukcyjnej stałej czasowej  $\tau_L$  wskazuje, że jednostką  $X_L$  w układzie SI jest *om*, dokładnie tak jak dla  $X_C$  i *R*.

Po drugie, zastępujemy  $-\cos \omega_w t$  w równaniu (31.48) funkcją sinus przesuniętą w fazie

$$-\cos\omega_{\rm w}t = \sin(\omega_{\rm w}t - 90^\circ)$$

Możesz sprawdzić tę tożsamość, przesuwając wykres funkcji sinus o 90° w kierunku dodatnim.

Po tych dwóch modyfikacjach równanie (31.48) przybiera postać

$$I_L = \left(\frac{U_{L\max}}{X_L}\right)\sin(\omega_{\rm w}t - 90^\circ). \tag{31.50}$$

Stosując równanie (31.29), możemy również zapisać natężenie prądu  $I_L$  płynącego przez cewkę jako

$$I_L = I_{L\max} \sin(\omega_w t - \phi), \qquad (31.51)$$

gdzie  $I_{L \text{ max}}$  jest amplitudą  $I_L$ . Porównując równania (31.50) i (31.51), widzimy, że dla czysto indukcyjnego obciążenia faza początkowa natężenia prądu jest równa +90°. Widzimy również, że amplitudy napięcia i natężenia prądu związane są zależnością

$$U_{L\max} = I_{L\max} X_L \qquad \text{(cewka)}. \tag{31.52}$$

Chociaż wyprowadziliśmy tę zależność dla obwodu na rysunku 31.12, jest ona słuszna dla dowolnej indukcyjności w dowolnym obwodzie.

Porównanie wzorów (31.45) i (31.50) lub przyjrzenie się rysunkowi 31.13a wskazuje, że wielkości  $I_L$  i  $U_L$  są przesunięte w fazie o 90°. W tym przypadku jednak  $I_L$  opóźnia się w stosunku do  $U_L$ . Oznacza to, że gdybyśmy śledzili natężenie prądu  $I_L$  i napięcie  $U_L$  w obwodzie na rysunku 31.12, to okazałoby się, że  $I_L$  osiąga maksimum ćwierć okresu *po*  $U_L$ . Tę samą informację zawiera również diagram wskazowy, przedstawiony na rysunku 31.13b. Gdy wskazy obracają się razem w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, wskaz oznaczony jako  $I_{L \text{ max}}$ rzeczywiście opóźnia się o kąt równy 90° względem wskazu oznaczonego jako  $U_L$  max. Przekonaj się, że rysunek 31.13b odpowiada równaniom (31.45) i (31.50).

## Sprawdzian 5

Jeżeli zwiększymy częstość żródła w obwodzie z obciążeniem czysto pojemnościowym, to czy: a) amplituda  $U_{C \max}$ , b) amplituda  $I_{C \max}$  zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie taka sama? Gdyby natomiast obwód taki miał obciążenie czysto indukcyjne, to czy: c) amplituda  $U_{L \max}$ , d) amplituda  $I_{L \max}$  zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie taka sama?



**Rys. 31.13.** a) Natężenie prądu w cewce opóźnia się względem napięcia o  $90^{\circ}(=\pi/2 \text{ rad})$ . b) Diagram wskazowy pokazujący tę samą sytuację

### Sztuka rozwiązywania zadań

**Przesunięcie fazy w obwodach prądu zmiennego:** W tabeli 31.2 zestawiono zależności między natężeniem prądu I a napięciem U dla każdego z trzech dotychczas omówionych rodzajów obwodów. Gdy przyłożone zmienne napięcie powoduje przepływ prądu zmiennego, natężenie prądu ma taką samą fazę jak napięcie na oporniku, wyprzedza napięcie na kondensatorze, a opóźnia się względem napięcia na cewce.

Tabela 31.2. Zależności fazowe i amplitudowe dla zmiennych natężeń prądu i napięć

Element obwodu	Symbol	Opór lub reaktancja	Natężenie prądu	Faza początkowa $\phi$	Związek amplitud
opornik	R	R	w takiej samej fazie jak $U_R$	$0^{\circ} (= 0 \text{ rad})$	$U_{R\max} = I_{R\max}R$
kondensator	С	$X_C = 1/\omega_{\rm w}C$	wyprzedza $U_C$ o 90° (= $\pi/2$ rad)	$-90^{\circ}(=-\pi/2 \text{ rad})$	$U_{C\max} = I_{C\max} X_C$
cewka	L	$X_L = \omega_{\rm w} L$	opóźnia się względem $U_L$ o 90° (= $\pi/2$ rad)	$+90^{\circ}(=+\pi/2 \text{ rad})$	$U_{L\max} = I_{L\max} X_L$

#### Przykład 31.05. Obciążenie czysto indukcyjne: różnica potencjałów i natężenie prądu

Na rysunku 31.12 indukcyjność L jest równa 276 mH, a źródło wytwarza sinusoidalnie zmienną SEM o amplitudzie  $\mathcal{E}_{max} = 36$  V i częstotliwości  $v_w = 50$  Hz.

**a**) Jakie jest napięcie  $U_L(t)$  na cewce i amplituda  $U_{L \max}$  napięcia  $U_L(t)$ ?

## **PODSTAWOWE FAKTY**

W obwodzie z obciążeniem czysto indukcyjnym napięcie  $U_L(t)$  na cewce jest zawsze równe SEM  $\mathcal{E}(t)$  wytwarzanej przez źródło.

**Obliczenia:** W rozważanej tu sytuacji mamy  $U_L(t) = \mathcal{E}(t)$  i  $U_{L \max} = \mathcal{E}_{\max}$ . Ponieważ  $\mathcal{E}_{\max}$  jest dane, możemy napisać

$$U_{L \max} = \mathcal{E}_{\max} = 36 \text{ V}$$
 (odpowiedź).

W celu znalezienia  $U_L(t)$  stosujemy równanie (31.28) i zapisujemy

$$U_L(t) = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_{\rm w} t, \qquad (31.53)$$

a następnie podstawiamy  $\mathcal{E}_{max} = 36 \text{ V i } \omega_w = 2\pi \nu_w = 2\pi (50 \text{ Hz}) = 100\pi \text{ Hz}$  do równania (31.53), otrzymując dla *t* wyrażonego w sekundach

$$U_L(t) = (36 \text{ V}) \sin(100\pi t)$$
 (odpowiedź).

**b**) Jakie jest natężenie prądu  $I_L(t)$  w obwodzie i amplituda  $I_{L \max}$  natężenia prądu  $I_L(t)$ ?

#### PODSTAWOWE FAKTY

W obwodzie prądu zmiennego z czysto indukcyjnym obciążeniem zmienne natężenie prądu  $I_L(t)$  płynącego przez cewkę opóźnia się względem zmiennego napięcia  $U_L(t)$  o 90°.

**Obliczenia:** Ponieważ faza początkowa  $\phi$  dla natężenia prądu jest równa +90°, czyli + $\pi/2$  rad, więc równanie (31.29) możemy zapisać w postaci:

$$I_L = I_{L \max} \sin(\omega_w t - \phi) = I_{L \max} \sin(\omega_w t - \pi/2).$$
(31.54)

Amplitudę  $I_{L \max}$  możemy obliczyć z równania (31.52) ( $U_{L \max} = I_{L \max} X_L$ ), jeśli najpierw obliczymy reaktancję indukcyjną  $X_L$ . Z równania (31.49) ( $X_L = \omega_w L$ ), pamiętając, że  $\omega_w = 2\pi v_w$ , otrzymujemy

$$X_L = 2\pi v_W L = (2\pi)(50 \text{ Hz})(276 \cdot 10^{-3} \text{ H}) = 86,7 \Omega.$$

Zatem z równania (31.52) wynika, że amplituda natężenia prądu wynosi

$$I_{L \max} = \frac{U_{L \max}}{X_L} = \frac{36 \text{ V}}{86,7 \Omega} = 0.415 \text{ A} \text{ (odpowiedź)}.$$

Podstawiając tę wartość i  $\omega_w = 2\pi v_w = 100\pi$  do równania (31.54), otrzymujemy dla *t* wyrażonego w sekundach

$$I_L = (0,415 \text{ A}) \sin(100\pi t - \pi/2)$$
 (odpowiedź).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

## **31.4.** OBWÓD SZEREGOWY RLC

## Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 31.31 naszkicować schemat obwodu szeregowego RLC;
- **31.32** określić warunki, dla których obwód *RLC* ma charakter indukcyjny, pojemnościowy lub znajduje się w rezonansie;
- 31.33 naszkicować wykresy różnicy potencjałów U i natężenia prądu I oraz diagramy wskazowe dla obwodu o charakterze indukcyjnym, obwodu o charakterze pojemnościowym i obwodu w rezonansie, określając, czy natężenie prądu wyprzedza, czy opóźnia się względem SEM;
- **31.34** obliczyć impedancję *Z*;
- **31.35** zastosować związek między amplitudą natężenia prądu  $I_{\text{max}}$ , amplitudą SEM  $\mathcal{E}_{\text{max}}$  i impedancją Z;
- 31.36 zastosować związek między fazą początkową φ oraz amplitudami różnicy potencjałów U<sub>L max</sub> i U<sub>C max</sub> oraz zwią-

#### Podstawowe fakty.

• W szeregowym obwodzie *RLC* z zewnętrzną SEM w postaci:

 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_{\rm W} t$ 

i natężeniem prądu w postaci

$$I = I_{\max} \sin(\omega_{\rm w} t - \phi)$$

amplituda natężenia prądu jest dana wzorem

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$
$$= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega_w L - \frac{1}{\omega_w C})^2}} \text{ (amplituda natężenia prądu).}$$

• Faza początkowa  $\phi$  jest dana wzorem

zek między fazą początkową  $\phi$ , oporem R oraz reaktancjami  $X_L$  i  $X_C$ ;

- 31.37 określić, dla jakich wartości fazy początkowej \u03c6 obwód ma charakter indukcyjny, pojemnościowy lub znajduje się w rezonansie;
- **31.38** zastosować związek między częstością drgań wymuszonych  $\omega_w$ , częstością drgań swobodnych  $\omega$ , indukcyjnością Li pojemnością C;
- **31.39** naszkicować wykres amplitudy natężenia prądu od stosunku  $\omega_w/\omega$ , określić, które obszary na wykresie odpowiadają obwodowi o charakterze indukcyjnym, obwodowi o charakterze pojemnościowym i obwodowi w rezonansie oraz opisać, jak zmienia się naszkicowana krzywa przy wzroście oporu.

$$tg\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$
 (faza początkowa).

Impendancja Z obwodu jest określona wzorem

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
 (definicja impedancji).

 Relacja między amplitudami natężenia prądu i SEM oraz impedancją ma postać

$$T_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{Z}.$$

• Amplituda natężenia prądu osiąga wartość maksymalną  $I_{\rm max} = \mathcal{E}_{\rm max}/R$ , gdy częstość drgań wymuszonych  $\omega_{\rm W}$  jest równa częstości drgań swobodnych  $\omega$ ; tę sytuację nazywamy rezonansem. Wówczas  $X_C = X_L$ ,  $\phi = 0$ , a natężenie prądu jest zgodne w fazie z SEM.

## Obwód szeregowy RLC

Jesteśmy teraz przygotowani do tego, aby zmienną SEM opisaną wzorem (31.28)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_{\rm W} t$$
 (przyłożona SEM), (31.55)

przyłożyć do pełnego obwodu RLC przedstawionego na rysunku 31.7. Elementy R, L i C są połączone szeregowo, a więc przez każdy z nich płynie ten sam prąd o natężeniu

$$I = I_{\max} \sin(\omega_{\rm w} t - \phi). \tag{31.56}$$

Naszym zadaniem jest wyznaczenie amplitudy  $I_{\text{max}}$  i początkowej fazy  $\phi$  natężenia prądu oraz określenie, jak wielkości te zależą od częstości drgań wymuszonych  $\omega_{\text{w}}$ . Rozwiązanie ułatwią nam diagramy wskazowe, wprowadzone w podrozdziale 31.3 do analizy trzech prostych obwodów: z obciążeniem pojemnościowym, indukcyjnym i oporowym. Będziemy

w szczególności wykorzystywać związek między wskazami różnicy potencjałów i natężenia prądu dla każdego z tych trzech obwodów. Okaże się, że obwody szeregowe *RLC* można podzielić na trzy rodzaje: obwody o charakterze indukcyjnym, obwody o charakterze pojemnościowym oraz obwody w rezonansie.

## Amplituda natężenia prądu

Przeanalizujmy najpierw rysunek 31.14a, na którym przedstawiono wskaz odpowiadający natężeniu prądu określonemu wzorem (31.56) w pewnej chwili t. Długość wskazu oznacza amplitudę  $I_{\text{max}}$ , rzut wskazu na oś pionową — wartość natężenia prądu I w chwili t, a kąt obrotu wskazu — fazę  $\omega_{\text{w}}t - \phi$  natężenia prądu w chwili t.

Na rysunku 31.14b przedstawiono wskazy odpowiadające napięciom na elementach R, L i C w tej samej chwili t. Kąt, który tworzy każdy z nich ze wskazem odpowiadającym natężeniu prądu  $I_{\text{max}}$  (rys. 31.14a), jest zgodny z tabelą 31.2

*Opornik*: Natężenie prądu ma taką samą fazę co napięcie, tak więc kąt obrotu wskazu napięcia  $U_{R \max}$  jest taki sam, jak kąt obrotu wskazu  $I_{\max}$ .

*Kondensator*: Natężenie prądu wyprzedza napięcie o 90°, tak więc kąt obrotu wskazu napięcia  $U_{C \max}$  jest o 90° mniejszy od kąta obrotu wskazu  $I_{\max}$ .

*Cewka*: Natężenie prądu opóźnia się względem napięcia o 90°, tak więc kąt obrotu wskazu napięcia  $U_{L \max}$  jest o 90° większy od kąta obrotu wskazu  $I_{\max}$ .

Na rysunku 31.14b pokazano także chwilowe wartości napięć  $U_R$ ,  $U_C$  i  $U_L$  na elementach R, C i L w chwili t. Te napięcia są określone rzutami odpowiednich wskazów na oś pionową wykresu.

Na rysunku 31.14c przedstawiono wskaz odpowiadający przyłożonej SEM (wzór (31.55)). Długość wskazu oznacza amplitudę SEM  $\mathcal{E}_{max}$ , rzut wskazu na oś pionową — wartość  $\mathcal{E}$  w chwili t, a kąt obrotu wskazu fazę  $\omega_w t$  SEM w chwili t.

Rys. 31.14. a) Wskaz odpowiadający natężeniu prądu zmiennego w obwodzie RLC na rysunku 31.7 w chwili t. Pokazana jest amplituda Imax, wartość chwilowa I i faza ( $\omega_{\rm W}t - \phi$ ). b) Wskazy odpowiadające napięciom na cewce, oporniku i kondensatorze, zorientowane w stosunku do wskazu natężenia prądu na rysunku (a). c) Wskaz odpowiadający zmiennej SEM wytwarzającej prąd o natężeniu przedstawionym na rysunku (a). d) Wskaz SEM jest równy wektorowej sumie trzech wskazów napięcia z rysunku (b). Dodano tutaj wskazy  $U_{L \max}$  i  $U_{C \max}$ , aby otrzymać wskaz wypadkowy  $U_{L \max} - U_{C \max}$ 



Z drugiego prawa Kirchhoffa wynika, że w dowolnej chwili suma napięć  $U_R$ ,  $U_C$  i  $U_L$  jest równa przyłożonej SEM  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = U_R + U_C + U_L. \tag{31.57}$$

Tak więc w chwili *t* rzut  $\mathcal{E}$  na rysunku 31.14c jest równy algebraicznej sumie rzutów  $U_R$ ,  $U_C$  i  $U_L$  na rysunku 31.14b. Równość ta jest spełniona w każdej chwili, gdyż wskazy wirują wspólnie. Oznacza to, że wskaz  $\mathcal{E}_{max}$ na rysunku 31.14c musi być równy wektorowej sumie trzech wskazów napięcia  $U_{R \max}$ ,  $U_{C \max}$  i  $U_{L \max}$  na rysunku 31.14b.

Ten warunek zilustrowano na rysunku 31.14d, gdzie wskaz  $\mathcal{E}_{max}$  jest narysowany jako suma wskazów  $U_{R \max}$ ,  $U_{L \max}$  i  $U_{C \max}$ . Wskazy  $U_{L \max}$ i  $U_{C \max}$  są skierowane przeciwnie, obliczenie sumy wektorowej możemy zatem uprościć, dodając najpierw wskazy  $U_{L \max}$  i  $U_{C \max}$ , aby otrzymać pojedynczy wskaz  $U_{L \max} - U_{C \max}$ . Następnie dodajemy ten pojedynczy wskaz i wskaz  $U_{R \max}$ , otrzymując wskaz wypadkowy. Ten wskaz wypadkowy jest oczywiście równy  $\mathcal{E}_{\max}$ .

Obydwa trójkąty na rysunku 31.14d są trójkątami prostokątnymi. Stosując twierdzenie Pitagorasa do któregokolwiek z nich, otrzymujemy

$$\mathcal{E}_{\max}^2 = U_{R\max}^2 + (U_{L\max} - U_{C\max})^2.$$
(31.58)

Biorąc pod uwagę związki amplitud różnicy potencjałów zamieszczone w prawej kolumnie tabeli 31.2, równanie to można napisać jako

$$\mathcal{E}_{\max}^2 = (I_{\max}R)^2 + (I_{\max}X_L - I_{\max}X_C)^2, \qquad (31.59)$$

a następnie przekształcić do postaci

$$U_{\rm max} = \frac{\mathcal{E}_{\rm max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$
 (31.60)

Mianownik wyrażenia (31.60) nazywamy **impedancją** Z obwodu dla określonej częstości kołowej drgań wymuszonych  $\omega_w$ 

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \text{(definicja impedancji)}. \qquad (31.61)$$

Możemy więc zapisać równanie (31.60) jako

$$u_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{Z}.$$
 (31.62)

Jeżeli podstawimy za  $X_C$  i  $X_L$  wyrażenia (31.39) i (31.49), to równanie (31.60) będziemy mogli zapisać w sposób bardziej czytelny:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_{w}L - \frac{1}{\omega_{w}C}\right)^2}} \qquad \text{(amplituda natężenia prądu).}$$
(31.63)

W tym momencie nasze zadanie zostało wykonane w połowie: znaleźliśmy wyrażenie określające amplitudę natężenia prądu  $I_{\text{max}}$  jako funkcję przyłożonej SEM i elementów obwodu szeregowego *RLC*.

Wartość  $I_{\text{max}}$  zależy od różnicy między  $\omega_{\text{w}}L$  a  $\frac{1}{\omega_{\text{w}}C}$  w równaniu (31.63) lub, co jest równoważne, od różnicy między  $X_L$  a  $X_C$  w równaniu (31.60). W obydwu równaniach nie ma przy tym znaczenia, która z dwóch wielkości jest większa, ponieważ ich różnica jest zawsze podniesiona do kwadratu.

Prąd omawiany w tym podrozdziale jest prądem w *stanie ustalonym*, czyli prądem, który ustala się w obwodzie, gdy zmienna SEM jest przyłożona przez pewien czas. Bezpośrednio po dołączeniu SEM do obwodu pojawia się krótkotrwały *stan przejściowy*. W tym stanie elementy indukcyjne i pojemnościowe "zaczynają działać", a czas trwania stanu przejściowego (przed osiągnięciem stanu ustalonego) jest określony stałymi czasowymi  $\tau_L = L/R$  i  $\tau_C = RC$ . Natężenie prądu w stanie przejściowym może być duże i może na przykład uszkodzić silnik elektryczny podczas jego uruchamiania, jeżeli stanów przejściowych nie uwzględniono przy projektowaniu obwodów silnika.

## Faza początkowa

Analizując trójkąt utworzony przez wskazy po prawej stronie rysunku 31.14d i korzystając z tabeli 31.2, możemy napisać

$$tg \phi = \frac{U_{L \max} - U_{C \max}}{U_{R \max}} = \frac{I_{\max} X_L - I_{\max} X_C}{I_{\max} R},$$
 (31.64)

skąd

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad \text{(faza początkowa).} \qquad (31.65)$$

To jest druga połowa naszego zadania: równanie określające fazę początkową  $\phi$  w przedstawionym na rysunku 31.7 szeregowym obwodzie *RLC* pobudzanym sinusoidalnie. W istocie równanie to daje nam trzy różne wyniki dla fazy początkowej, w zależności od względnych wartości  $X_L$  i  $X_C$ :

- $X_L > X_C$ : o takim obwodzie mówimy, że ma *charakter indukcyjny*. Z równania (31.65) wynika, że w tym przypadku faza  $\phi$  jest dodatnia, co oznacza, że wskaz  $I_{\text{max}}$  wiruje za wskazem  $\mathcal{E}_{\text{max}}$  (rys. 31.15a). Wykresy  $\mathcal{E}$  i I jako funkcje czasu są podobne do przedstawionych na rysunku 31.15b. (Rysunki 31.14c i d zostały wykonane przy założeniu, że  $X_L > X_C$ ).
- $X_C > X_L$ : o takim obwodzie mówimy, że ma *charakter pojemnościowy*. Z równania (31.65) wynika, że w tym przypadku faza  $\phi$  jest ujemna, co oznacza, że wskaz  $I_{\text{max}}$  wiruje przed wskazem  $\mathcal{E}_{\text{max}}$  (rys. 31.15c). Wykresy  $\mathcal{E}$  i I jako funkcje czasu są podobne do przedstawionych na rysunku 31.15d.
- $X_C = X_L$ : o takim obwodzie mówimy, że jest w *rezonansie*, czyli w stanie, który omówimy za chwilę. Z równania (31.65) wynika, że w tym przypadku  $\phi = 0^\circ$ , co oznacza, że wskazy  $\mathcal{E}_{max}$  i  $I_{max}$  wirują razem (rys. 31.15e). Wykresy  $\mathcal{E}$  i I jako funkcje czasu są podobne do przedstawionych na rysunku 31.15f.

Jako przykład przeanalizujmy dwa krańcowe przypadki: W obwodzie *czysto indukcyjnym* na rysunku 31.12, gdzie  $X_L$  jest różne od zera, a  $X_C = R = 0$ , z równania (31.65) wynika, że  $\phi = +90^\circ$  (największa możliwa wartość  $\phi$ ), zgodnie z rysunkiem 31.13b. W obwodzie *czysto pojemnościowym* na rysunku 31.10, gdzie  $X_C$  jest różne od zera, a  $X_L = R = 0$ , z równania



(31.65) wynika, że  $\phi = -90^{\circ}$  (najmniejsza możliwa wartość  $\phi$ ), zgodnie z rysunkiem 31.11b.

#### Rezonans

Równanie (31.63) przedstawia amplitudę  $I_{\text{max}}$  natężenia prądu w obwodzie RLC jako funkcję częstości kołowej  $\omega_{\text{w}}$  zewnętrznego źródła zmiennej SEM. Dla danego oporu R amplituda osiąga maksimum, gdy wyrażenie  $\omega_{\text{w}}L - \frac{1}{\omega_{\text{w}}C}$  w mianowniku jest równe zeru, tzn. wtedy, gdy

czyli  $\omega_{\rm w}L = \frac{1}{\omega_{\rm w}C},$   $\omega_{\rm w} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (maksimum *I*). (31.66)

Częstość kołowa drgań swobodnych  $\omega$  w obwodzie *RLC* jest także równa  $1/\sqrt{LC}$ , zatem maksymalna wartość  $I_{\text{max}}$  występuje wtedy, gdy częstość

**Rys. 31.15.** Diagramy wskazowe oraz wykresy zmiennej SEM  $\mathcal{E}$  i zmiennego natężenia prądu w obwodzie *RLC* przedstawionym na rysunku 31.7. Na diagramie wskazowym (a) i wykresie (b) natężenie prądu *I* opóźnia się w stosunku do wymuszającej SEM  $\mathcal{E}$ , a faza początkowa  $\phi$  natężenia prądu jest dodatnia. Na rysunkach (c) i (d) natężenie prądu *I* wyprzedza wymuszającą SEM  $\mathcal{E}$ , a jego faza początkowa  $\phi$  jest ujemna. Na rysunkach (e) i (f) natężenie prądu *I* ma taką samą fazę jak wymuszająca SEM  $\mathcal{E}$ , a jego faza początkowa  $\phi$  jest równa zeru kołowa drgań wymuszonych odpowiada częstości kątowej drgań swobodnych, tzn. w rezonansie. Zatem w obwodzie RLC rezonans i maksimum amplitudy  $I_{max}$  natężenia prądu występuje dla

$$\omega_{\rm w} = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
 (rezonans). (31.67)

*Krzywe rezonansowe.* Na rysunku 31.16 pokazano trzy *krzywe rezonansowe* dla drgań sinusoidalnych w trzech szeregowych obwodach *RLC* różniących się tylko wartością *R*. Każda krzywa osiąga maksimum amplitudy  $I_{\text{max}}$  natężenia prądu, gdy stosunek  $\omega_w/\omega$  jest równy 1. Jednakże maksymalna wartość  $I_{\text{max}}$  maleje wraz ze wzrostem *R* (maksymalna wartość  $I_{\text{max}}$  jest zawsze równa  $\mathcal{E}/R$ ; aby zobaczyć, że tak jest, podstaw równanie (31.61) do równania (31.62)). Ponadto szerokość krzywych wzrasta



**Rys. 31.16.** *Krzywe rezonansowe* obwodu *RLC* z rysunku 31.7, otrzymane dla  $L = 100 \mu$ H, C = 100 pF i trzech wartości *R*. Amplituda  $I_{\text{max}}$  natężenia prądu zmiennego zależy od tego, jak bliska częstości kołowej drgań swobodnych  $\omega$  jest częstość kołowa drgań wymuszonych  $\omega_{\text{w}}$ . Poziome strzałki przy każdej krzywej wskazują jej *szerokość połówkową*, czyli szerokość w połowie maksimum, co jest miarą ostrości rezonansu. Po lewej stronie punktu  $\omega_{\text{w}}/\omega = 1$  obwód ma charakter pojemnościowy ( $X_C > X_L$ ), po prawej zaś — charakter indukcyjny ( $X_L > X_C$ )

wraz ze wzrostem R (szerokość krzywych na rysunku 31.16 jest mierzona w połowie maksymalnej wartości  $I_{max}$ ).

Aby zrozumieć sens fizyczny rysunku 31.16, zastanówmy się, jak zmieniają się wartości reaktancji  $X_L$  i  $X_C$ , gdy zwiększamy częstość kołową drgań wymuszonych  $\omega_w$ , zaczynając od wartości znacznie mniejszych od częstości kołowej drgań swobodnych  $\omega$ . Dla małych wartości  $\omega_w$  reaktancja  $X_L$  (=  $\omega_w L$ ) jest mała, a reaktancja  $X_C$  (=  $\frac{1}{\omega_w C}$ ) jest duża. Tak więc obwód ma charakter pojemnościowy, a o impedancji decyduje duża wartość  $X_C$ , która powoduje, że natężenie prądu jest małe.

Gdy zwiększamy  $\omega_w$ , reaktancja  $X_C$  ciągle przeważa, ale jej wartość maleje, podczas gdy wartość reaktancji  $X_L$  rośnie. Zmniejszenie wartości ich różnicy powoduje zmniejszenie impedancji, a zatem wzrost natężenia prądu, co widzimy po lewej stronie każdej krzywej rezonansowej na rysunku 31.16. Gdy rosnąca reaktancja  $X_L$  i malejąca reaktancja  $X_C$  osiągną taką samą wartość, natężenie prądu osiąga maksimum, a obwód jest w rezonansie, co zachodzi przy  $\omega_w = \omega$ .

Jeśli dalej będziemy zwiększać  $\omega_w$ , to rosnąca reaktancja  $X_L$  zaczyna przeważać nad malejącą reaktancją  $X_C$ . Całkowita impedancja rośnie na skutek wzrostu ich różnicy, a natężenie prądu maleje, co widać po prawej stronie każdej krzywej rezonansowej na rysunku 31.16. Podsumowując: dla małych częstości kołowych o przebiegu krzywej rezonansowej decyduje reaktancja pojemnościowa, dla dużych częstości kołowych decyduje reaktancja indukcyjna, a rezonans występuje dla średnich częstości (gdy reaktancje  $X_L$  i  $X_C$  są sobie równe).

## Sprawdzian 6

Dla trzech pobudzanych sinusoidalnie szeregowych obwodów *RLC* impedancje pojemnościowe i indukcyjne wynoszą odpowiednio: 1) 50  $\Omega$ , 100  $\Omega$ ; 2) 100  $\Omega$ , 50  $\Omega$ ; 3) 50  $\Omega$ , 50  $\Omega$ . a) Czy w danym obwodzie natężenie prądu wyprzedza przyłożoną SEM, opóźnia się w stosunku do niej, czy obie wielkości mają jednakową fazę? b) Który obwód jest w rezonansie?

## Przykład 31.06. Amplituda natężenia prądu, impedancja i faza początkowa

Przyjmijmy, że w obwodzie przedstawionym na rysunku 31.7 mamy  $R = 200 \Omega$ ,  $C = 18 \mu$ F, L = 276 mH,  $\nu_w = 50$  Hz, a  $\mathcal{E}_{max} = 36$  V. (Są to dane, z których korzystaliśmy we wcześniejszych przykładach).

**a**) Jaka jest amplituda  $I_{max}$  natężenia prądu?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

Zgodnie z równaniem (31.62) amplituda  $I_{\text{max}}$  natężenia prądu zależy od amplitudy  $\mathcal{E}_{\text{max}}$  wymuszającej SEM i od impedancji Z w obwodzie ( $I_{\text{max}} = \mathcal{E}_{\text{max}}/Z$ ).

**Obliczenia:** Powinniśmy zatem obliczyć Z w zależności od oporu R, reaktancji pojemnościowej  $X_C$  i reaktancji

indukcyjnej  $X_L$  obwodu. Całkowitym oporem w obwodzie jest znany opór R. Całkowita reaktancja pojemnościowa obwodu wynika ze znanej pojemności i, jak to wcześniej obliczyliśmy, wynosi  $X_C = 177 \ \Omega$ . Całkowita reaktancja indukcyjna obwodu wynika ze znanej indukcyjności i, jak to wcześniej obliczyliśmy, wynosi  $X_L = 86,7 \ \Omega$ . Tak więc impedancja obwodu jest równa

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
  
=  $\sqrt{(200 \ \Omega)^2 + (86,7 \ \Omega - 177 \ \Omega)^2} = 219 \ \Omega.$ 

Stąd

$$I_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{Z} = \frac{36 \text{ V}}{219 \Omega} = 0,164 \text{ A} \quad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

**b**) Jaka jest faza początkowa  $\phi$  natężenia prądu w obwodzie, w stosunku do wymuszającej SEM?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Zgodnie z równaniem (31.65) faza początkowa zależy od reaktancji indukcyjnej, reaktancji pojemnościowej i oporu obwodu.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

## **31.5.** MOC W OBWODACH PRĄDU ZMIENNEGO

#### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 31.40 zastosować związki między amplitudami i wartościami skutecznymi natężenia prądu, różnicy potencjałów i SEM;
- 31.41 naszkicować wykresy przedstawiające dla źródła prądu zmiennego dołączonego do kondensatora, cewki lub opornika — sinusoidalną zależność natężenia prądu i różnicy potencjałów od czasu oraz zaznaczyć amplitudy i wartości skuteczne;
- **31.42** zastosować związek między średnią mocą *P*<sub>śr</sub>, skutecznym natężeniem prądu *I*<sub>sk</sub> oraz oporem *R*;
- **31.43** obliczyć moc dostarczaną do każdego z elementów drgającego obwodu *RLC*;

#### Podstawowe fakty \_

• W szeregowym obwodzie *RLC* średnia moc *P*<sub>śr</sub> dostarczana przez źródło jest równa prędkości, z jaką energia termiczna jest wydzielana na oporniku

 $P_{\rm sr} = I_{\rm sk}^2 R = \mathcal{E}_{\rm sk} I_{\rm sk} \cos \phi.$ 

## Moc w obwodach prądu zmiennego

W obwodzie *RLC*, przedstawionym na rysunku 31.7, energia jest dostarczana przez źródło prądu zmiennego. Pewna część dostarczonej energii jest gromadzona w polu elektrycznym kondensatora, inna część — w polu magnetycznym cewki, jeszcze inna jest rozpraszana na oporniku jako energia termiczna. W stanie ustalonym średnia energia zgromadzona w obwodzie pozostaje stała. Tak więc energia elektromagnetyczna przekazywana jest od źródła do opornika, gdzie ulega rozproszeniu.

Stosując równania (26.27) i (31.29), chwilową szybkość rozpraszania energii na oporniku (czyli moc chwilową) można zapisać jako

$$P = I^2 R = [I_{\max} \sin(\omega_w t - \phi)]^2 R = I_{\max}^2 R \sin^2(\omega_w t - \phi), \quad (31.68)$$

**Obliczenia:** Rozwiązując równanie (31.65) względem  $\phi$ , otrzymujemy

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = \operatorname{arctg} \frac{86,7 \ \Omega - 177 \ \Omega}{200 \ \Omega}$$
$$= -24,3^\circ = -0,424 \text{ rad} \qquad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

Ujemna wartość fazy początkowej jest zgodna z tym, że obciążenie ma charakter pojemnościowy, tzn.  $X_C > X_L$ . Natężenie prądu wyprzedza SEM źródła.

- 31.44 wyjaśnić, co w obwodzie drgającym *RLC* dzieje się:
  a) z wartością zmagazynowanej energii, b) energią, którą źródło prądu zmiennego dostarcza do obwodu;
- **31.45** zastosować związek między współczynnikiem mocy  $\cos \phi$ , oporem *R* i impedancją *Z*;
- **31.46** zastosować związek między mocą średnią  $P_{\text{sr}}$ , skuteczną SEM  $\mathcal{E}_{\text{sk}}$ , skutecznym natężeniem prądu  $I_{\text{sk}}$  i współczynnikiem mocy  $\cos \phi$ ;
- 31.47 stwierdzić, dla jakiego współczynnika mocy, szybkość przekazywania energii do obciążenia oporowego jest największa.

• Skrót "sk" oznacza "skuteczny"; wartości skuteczne związane są z amplitudami drgań w następujący sposób:  $I_{\rm sk} = I_{\rm max}/\sqrt{2}$ ,  $U_{\rm sk} = U_{\rm max}/\sqrt{2}$  i  $\mathcal{E}_{\rm sk} = \mathcal{E}_{\rm max}/\sqrt{2}$ . Czynnik  $\cos\phi$ nazywany jest współczynnikiem mocy.

#### 408 ROZDZIAŁ 31. DRGANIA ELEKTROMAGNETYCZNE I PRĄD ZMIENNY



**Rys. 31.17.** a) Wykres funkcji sin $\theta$ . Wartość uśredniona po okresie jest równa zeru. b) Wykres funkcji sin<sup>2</sup>  $\theta$ . Wartość uśredniona po okresie jest równa  $\frac{1}{2}$ 

natomiast *średnia* szybkość rozpraszania energii na oporniku (czyli moc średnia) jest równa uśrednionej w czasie wartości wyrażenia (31.68). W czasie jednego pełnego okresu średnia wartość funkcji sin $\theta$ , gdzie  $\theta$ może oznaczać dowolną zmienną, jest równa zeru (rys. 31.17a), ale średnia wartość funkcji sin<sup>2</sup>  $\theta$  wynosi  $\frac{1}{2}$  (rys. 31.17b). (Zauważ na rysunku 31.17b, że zacieniowane obszary pod krzywą znajdujące się nad prostą poziomą oznaczoną +1/2, wypełniają dokładnie niezacieniowane miejsca pod tą prostą). Tak więc na podstawie równania (31.68) możemy napisać

$$P_{\rm sr} = \frac{I_{\rm max}^2 R}{2} = \left(\frac{I_{\rm max}}{\sqrt{2}}\right)^2 R.$$
 (31.69)

Wyrażenie  $I_{\text{max}}/\sqrt{2}$  nazywamy wartością skuteczną natężenia prądu I

$$I_{\rm sk} = \frac{I_{\rm max}}{\sqrt{2}}$$
 (wartość skuteczna natężenia prądu). (31.70)

Możemy teraz napisać równanie (31.69) w postaci

$$P_{\text{sr}} = I_{\text{sk}}^2 R \qquad (\text{moc srednia}). \tag{31.71}$$

Równanie (31.71) ma tę samą postać matematyczną co równanie (26.27) ( $P = I^2 R$ ); stąd wniosek, że używając wartości skutecznej natężenia prądu, możemy obliczyć średnią szybkość rozpraszania energii w obwodach prądu zmiennego (moc średnią) dokładnie w taki sam sposób jak w obwodach prądu stałego.

Można również zdefiniować wartości skuteczne napięć i SEM w obwodach prądu zmiennego:

$$U_{\rm sk} = \frac{U_{\rm max}}{\sqrt{2}}$$
 i  $\mathcal{E}_{\rm sk} = \frac{\mathcal{E}_{\rm max}}{\sqrt{2}}$  (wartości skuteczne napięcia i SEM).  
(31.72)

Przyrządy pomiarowe prądu zmiennego, takie jak amperomierze i woltomierze, pokazują zwykle wartości skuteczne  $I_{sk}$ ,  $U_{sk}$  i  $\mathcal{E}_{sk}$ . Jeśli więc włączysz woltomierz prądu zmiennego do domowego gniazdka sieciowego i odczytasz 230 V, oznacza to napięcie skuteczne. *Maksymalna* wartość napięcia w gniazdku wynosi  $\sqrt{2} \cdot (230 \text{ V})$ , czyli 325 V. Także naukowcy i inżynierowie mówią zazwyczaj o wartościach skutecznych, a nie maksymalnych.

Współczynnik proporcjonalności  $1/\sqrt{2}$  we wzorach (31.70) i (31.72) jest taki sam dla wszystkich trzech zmiennych, zatem równania (31.62) i (31.60) mogą być zapisane jako

$$I_{\rm sk} = \frac{\mathcal{E}_{\rm sk}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_{\rm sk}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$
(31.73)

i w istocie jest to postać, jakiej prawie zawsze używamy.

Możemy zastosować związek  $I_{sk} = \mathcal{E}_{sk}/Z$ , aby przekształcić równanie (31.71) do równoważnej i użytecznej postaci

$$P_{\rm sr} = \frac{\mathcal{E}_{\rm sk}}{Z} I_{\rm sk} R = \mathcal{E}_{\rm sk} I_{\rm sk} \frac{R}{Z}.$$
(31.74)
Z rysunku 31.14d, tabeli 31.2 i równania (31.62) wynika jednak, że R/Z jest równe kosinusowi fazy początkowej  $\phi$ 

$$\cos\phi = \frac{U_{R\max}}{\mathcal{E}_{\max}} = \frac{I_{\max}R}{I_{\max}Z} = \frac{R}{Z}.$$
(31.75)

Równanie (31.74) przybiera więc postać

$$P_{\text{sr}} = \mathcal{E}_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \cos \phi \qquad (\text{moc srednia}), \qquad (31.76)$$

gdzie czynnik  $\cos \phi$  nazywamy **współczynnikiem mocy**. Ponieważ  $\cos \phi = \cos(-\phi)$ , wyrażenie (31.76) nie zależy od znaku fazy początkowej  $\phi$ .

Aby uzyskać maksymalną szybkość przekazywania energii do obciążenia oporowego w obwodzie *RLC* (czyli maksymalną moc), współczynnik mocy cos  $\phi$  powinien być możliwie bliski jedności. Jest to równoważne wymaganiu, aby faza początkowa  $\phi$  w równaniu (31.29) była możliwie bliska zera. Jeśli obwód ma na przykład charakter silnie indukcyjny, to warto włączyć szeregowo dodatkową pojemność do obwodu. (Przypomnijmy, że włączenie szeregowo dodatkowej pojemności zmniejsza wypadkową pojemność *C*<sub>rw</sub> całego układu). Zmniejszenie *C*<sub>rw</sub> powoduje zmniejszenie fazy początkowej i wzrost współczynnika mocy we wzorze (31.76). Aby to osiągnąć, zakłady energetyczne umieszczają szeregowo kondensatory w swoich systemach przesyłowych.

# Sprawdzian 7

a) Załóżmy, że w pobudzanym sinusoidalnie obwodzie *RLC* natężenie prądu wyprzedza SEM. Czy powinniśmy zwiększyć, czy zmniejszyć pojemność, aby zwiększyć szybkość przekazywania energii do obciążenia oporowego? b) Czy taka zmiana spowoduje przesunięcie rezonansowej częstości kołowej obwodu w kierunku częstości kołowej SEM, czy też w kierunku przeciwnym?

# Przykład 31.07. Drgania wymuszone w obwodzie RLC: współczynnik mocy i moc średnia

Szeregowy obwód *RLC* zasilany SEM  $\mathcal{E}_{sk} = 230$  V o częstotliwości  $v_w = 50$  Hz składa się z oporu  $R = 200 \Omega$ , indukcyjności o reaktancji  $X_L = 80 \Omega$  i pojemności o reaktancji  $X_C = 150 \Omega$ .

**a**) Jaki jest współczynnik mocy  $\cos \phi$  i faza początkowa  $\phi$  tego obwodu?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Współczynnik mocy  $\cos \phi$  możemy obliczyć ze wzoru (31.75), jeśli znamy opór *R* i impedancję *Z* ( $\cos \phi = R/Z$ ).

**Obliczenia:** Do obliczenia Z zastosujemy równanie (31.61)

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
  
=  $\sqrt{(200 \ \Omega)^2 + (80 \ \Omega - 150 \ \Omega)^2} = 211.9 \ \Omega.$ 

Równanie (31.75) daje nam wtedy

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} = \frac{200 \ \Omega}{211.9 \ \Omega} = 0.9438 \approx 0.944$$
(odpowiedź).

Wyznaczając stąd  $\phi$ , otrzymujemy

$$\phi = \arccos 0.944 = \pm 19.3^{\circ}.$$

Chociaż obliczenie wartości fukcji arccos na kalkulatorze daje tylko wartość dodatnią, musimy pamiętać, że 0,944 jest wartością kosinusa kąta zarówno +19,3°, jak i -19,3°. Aby rozstrzygnąć, który znak jest poprawny, musimy się zastanowić, czy natężenie prądu wyprzedza, czy opóźnia się w fazie w stosunku do przyłożonej SEM. Ponieważ  $X_C > X_L$ , obwód ma charakter pojemnościowy, a więc natężenie prądu wyprzedza SEM. Zatem  $\phi$  musi być ujemne

$$\phi = -19.3^{\circ}$$
 (odpowiedź).

Moglibyśmy znaleźć  $\phi$  z równania (31.65). Na kalkulatorze otrzymalibyśmy wtedy wartość ujemną kąta.

**b**) Z jaką średnią szybkością  $P_{\text{śr}}$  energia jest rozpraszana na oporniku?

# **PODSTAWOWE FAKTY**

Zadanie to można rozwiązać na dwa sposoby. 1) Sposób pierwszy polega na tym, że przy założeniu stanu stacjonarnego w obwodzie szybkość rozpraszania energii na oporniku jest równa szybkości, z jaką energia jest dostarczana do obwodu, zgodnie z równaniem (31.76) ( $P_{\rm sk} = \mathcal{E}_{\rm sk} I_{\rm sk} \cos \phi$ ). 2) Drugim sposobem rozwiązania jest wykorzystanie faktu, że zgodnie z równaniem (31.71) szybkość rozpraszania energii na oporniku *R* zależy od kwadratu wartości skutecznej natężenia prądu  $I_{\rm sk}$  płynącego przez ten opornik.

**Sposób pierwszy:** Wartość skuteczna SEM  $\mathcal{E}_{sk}$  jest dana, a wartość cos  $\phi$  została już obliczona w części (a). Wartość skuteczna natężenia prądu  $I_{sk}$  jest określona przez wartość skuteczną przyłożonej SEM i przez impedancję obwodu (która jest znana), zgodnie ze wzorem (31.73)

$$I_{\rm sk} = \frac{\mathcal{E}_{\rm sk}}{Z}$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (31.76), otrzymujemy

$$P_{\text{sr}} = \mathcal{E}_{\text{sk}} I_{\text{sk}} \cos \phi = \frac{\mathcal{E}_{\text{sk}}^2}{Z} \cos \phi$$
$$= \frac{(230 \text{ V})^2}{211.9 \Omega} (0.9438)$$
$$= 235.6 \text{ W} \qquad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

Sposób drugi: Zamiast tego możemy napisać po prostu

$$P_{\text{sr}} = I_{\text{sk}}^2 R = \frac{\mathcal{E}_{\text{sk}}^2}{Z^2} R$$
  
=  $\frac{(230 \text{ V})^2}{(211,9 \Omega)^2} (200 \Omega)$   
= 235,6 W (odpowiedź).

c) Jaka powinna być pojemność  $C_n$ , aby uzyskać maksymalną wartość  $P_{\text{sr}}$ , jeżeli pozostałe parametry obwodu pozostają bez zmiany?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Średnia szybkość  $P_{\text{śr}}$ , z jaką energia jest dostarczana i rozpraszana, osiąga wartość maksymalną, gdy obwód jest w rezonansie z przyłożoną SEM. 2) Rezonans występuje dla  $X_C = X_L$ .

**Obliczenia:** Z danych zadania wynika, że  $X_C > X_L$ , tak więc musimy zmniejszyć  $X_C$ , aby uzyskać rezonans. Jak widać z równania (31.39) ( $X_C = 1/\omega_w C$ ), oznacza to, że musimy zwiększyć wartość *C* tak, aby otrzymać wartość  $C_n$ .

Stosując równanie (31.39), możemy zapisać warunek  $X_C = X_L$  w postaci

$$\frac{1}{\omega_{\rm w}C_{\rm n}} = X_L$$

Podstawiając  $2\pi v_w$  zamiast  $\omega_w$  (gdyż dane jest  $v_w$ , a nie  $\omega_w$ ), a następnie rozwiązując równanie względem  $C_n$ , znajdujemy

$$C_{n} = \frac{1}{2\pi\nu_{w}X_{L}}$$
  
=  $\frac{1}{(2\pi)(50 \text{ Hz})(80 \Omega)}$   
=  $3.98 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 39.8 \ \mu\text{F}$  (odpowiedź)

Postępując jak w części (b), można wykazać, że dla wartości  $C_n$  średnia moc  $P_{\text{śr}}$  rozpraszana w obwodzie osiągnęłoby maksymalną wartość

$$P_{\text{śr,max}} = 264,5 \text{ W}.$$

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **31.6.** TRANSFORMATORY

# Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 31.48 określić, dlaczego w linii przesyłowej powinien płynąć prąd o wysokim napięciu i małym natężeniu;
- 31.49 określić rolę transformatorów na końcach linii przesyłowej;
- 31.50 obliczyć energię rozpraszaną w linii przesyłowej;
- **31.51** rozpoznać obwód pierwotny i wtórny w transformatorze;
- 31.52 zastosować związek między napięciami na uzwojeniu pierwotnym i wtórnym transformatora oraz liczbą zwojów w każdym z tych uzwojeń;
- 31.53 odróżnić transformator podwyższający napięcie od transformatora obniżającego napięcie;

#### Podstawowe fakty

• (Idealny) transformator składa się z żelaznego rdzenia, na który nawinięte jest uzwojenie pierwotne o  $N_{\rm p}$  zwojach i uzwojenie wtórne o  $N_{\rm w}$  zwojach. Jeśli do uzwojenia pierwotnego dołączyć źródło prądu zmiennego, związek między napięciami na uzwojeniu pierwotnym i uzwojeniu wtórnym ma postać

$$U_{\rm w} = U_{\rm p} \frac{N_{\rm w}}{N_{\rm p}}$$
 (transformacja napięcia).

 Związek między natężeniami prądów płynących przez uzwojenia ma postać:

- 31.54 zastosować związek między natężeniami prądu w uzwojeniu pierwotnym i wtórnym transformatora oraz liczbą zwojów w każdym z tych uzwojeń;
- 31.55 zastosować związek między mocą przekazywaną do obwodu pierwotnego i wtórnego idealnego transformatora;
- 31.56 stwierdzić, że opór równoważny uzwojenia wtórnego to opór widziany przez źródło;
- 31.57 zastosować związek między oporem równoważnym i prawdziwym oporem;
- 31.58 wyjaśnić, jaka jest rola transformatora w dopasowaniu impedancji.

$$I_{\rm W} = I_{\rm p} \frac{N_{\rm p}}{N_{\rm w}}$$
 (transformacja prądów).

Opór równoważny uzwojenia wtórnego widziany przez źródło jest równy

$$R_{\rm rw} = \left(\frac{N_{\rm p}}{N_{\rm w}}\right)^2 R$$

gdzie R jest obciążeniem oporowym w obwodzie wtórnym. Odwrotność stosunku  $N_{\rm p}/N_{\rm w}$  nazywamy przekładnią transformatora.

# **Transformatory**

# Warunki transmisji energii

Gdy obwód prądu zmiennego ma tylko obciążenie oporowe, współczynnik mocy w równaniu (31.76) jest równy  $\cos 0^\circ = 1$ , a wartość skuteczna przyłożonej SEM  $\mathcal{E}_{sk}$  jest równa wartości skutecznej napięcia  $U_{sk}$  na obciążeniu. Zatem dla natężenia prądu  $I_{sk}$  płynącego przez obciążenie, energia jest dostarczana i rozpraszana ze średnią szybkością

$$P_{\rm sr} = \mathcal{E}I = IU. \tag{31.77}$$

(W równaniu (31.77) i w dalszej części tego podrozdziału postępujemy zgodnie z ustaloną praktyką i opuszczamy wskaźniki oznaczające wartości skuteczne. Inżynierowie i naukowcy przyjmują, że wszystkie zmienne natężenia prądu i napięcia są określane za pomocą wartości skutecznych; takie są też wskazania mierników). Z równania (31.77) wynika, że mamy pewien zakres swobody w wyborze I oraz U, pod warunkiem, że iloczyn IU ma wymaganą wartość.

W systemie przesyłania energii elektrycznej pożądane jest, aby napięcia były stosunkowo niskie zarówno w miejscu wytwarzania (w elektrowni), jak i w miejscu odbioru (w domu lub w fabryce). Jest to spowodowane względami bezpieczeństwa, a także ułatwia projektowanie wyposażenia elektrycznego. Nikt nie chciałby, aby toster elektryczny działał pod napięciem, powiedzmy 10 kV. Z drugiej strony, przy przesyłaniu energii elektrycznej z elektrowni do użytkownika chcielibyśmy stosować jak najmniejsze natężenia prądu (a co za tym idzie jak najwyższe napięcia), aby zmniejszyć do minimum straty  $I^2 R$  (zwane często *stratami omowymi*) w linii przesyłowej.

Jako przykład przeanalizujmy linię energetyczną o napięciu 735 kV służącą do przesyłania energii elektrycznej z hydroelektrowni La Grande 2 w Quebecu do odległego o 1000 km Montrealu. Przypuśćmy, że natężenie prądu wynosi 500 A, a współczynnik mocy jest bliski jedności. Z równania (31.77) wynika, że średnia szybkość przesyłania energii, czyli moc średnia, wynosi

$$P_{\text{sr}} = \mathcal{E}I = (7,35 \cdot 10^5 \text{ V})(500 \text{ A}) = 368 \text{ MW}$$

Opór linii przesyłowej wynosi około 0,220  $\Omega$ /km, zatem całkowity opór odcinka linii o długości 1000 km jest równy około 220  $\Omega$ . W wyniku istnienia tego oporu szybkość rozpraszania energii, czyli moc tracona, wynosi

$$P_{\text{sr}} = I^2 R = (500 \text{ A})^2 (220 \Omega) = 55 \text{ MW},$$

co odpowiada niemal 15% mocy dostarczanej.

Wyobraź sobie, co by się stało, gdybyśmy dwukrotnie zwiększyli natężenie prądu i dwukrotnie zmniejszyli napięcie. Moc dostarczana przez elektrownię byłaby nadal równa 368 MW, ale teraz moc tracona wynosiłaby około

$$P_{\text{sr}} = I^2 R = (1000 \text{ A})^2 (220 \Omega) = 220 \text{ MW},$$

co stanowi prawie 60% mocy dostarczanej. Stąd wynika ogólna zasada przesyłania energii elektrycznej: stosuj jak największe napięcia i jak najmniejsze natężenia prądu.

# **Transformator idealny**

Powyższa zasada przesyłania energii prowadzi do zasadniczej niezgodności między wymaganiem skutecznego przesyłania (tzn. przy wysokim napięciu), a potrzebą bezpiecznego wytwarzania i używania energii (tzn. przy niskim napięciu). Potrzebne jest więc urządzenie, za pomocą którego moglibyśmy podwyższać (w celu przesyłania) lub obniżać (w celu zastosowania) napięcie zmienne w obwodzie, utrzymując możliwie stałą wartość iloczynu natężenia prądu i napięcia. Takim urządzeniem jest **transformator**. Nie ma on ruchomych części, działa na zasadzie prawa Faradaya i nie ma prostego odpowiednika w obwodach prądu stałego.

*Transformator idealny*, przedstawiony na rysunku 31.18, składa się z dwóch cewek o różnych liczbach zwojów nawiniętych na wspólnym rdzeniu z żelaza. (Cewki są izolowane od rdzenia). W czasie pracy transformatora uzwojenie pierwotne o  $N_p$  zwojach połączone jest ze źródłem prądu zmiennego, którego SEM w dowolnej chwili *t* jest dana wzorem

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t. \tag{31.78}$$

Uzwojenie wtórne o  $N_w$  zwojach jest połączone z oporem obciążenia R, ale zakładamy chwilowo, że klucz S jest otwarty. Tak więc obwód wtórny jest otwarty, a zatem prąd w uzwojeniu wtórnym nie płynie. Przyjmujemy po-



**Rys. 31.18.** Typowy obwód zawierający transformator idealny, czyli dwie cewki nawinięte na wspólnym rdzeniu z żelaza. Źródło prądu zmiennego wytwarza prąd w cewce po lewej stronie (*w uzwojeniu pierwotnym*). Cewka po prawej stronie (*uzwojenie wtórne*) jest połączona z obciążeniem oporowym *R*, gdy klucz S jest zamknięty

nadto, że w transformatorze idealnym opór uzwojenia pierwotnego i wtórnego jest znikomo mały. Dla dobrze zaprojektowanych transformatorów o dużej wydajności straty energii mogą być nie większe od 1%, tak więc nasze założenia są uzasadnione.

W przyjętych przez nas warunkach uzwojenie pierwotne ma charakter czysto indukcyjny, a obwód pierwotny podobny jest do obwodu na rysunku 31.12. Zatem *prąd pierwotny* (zwany również *prądem magnesującym I*mag) o bardzo małym natężeniu jest opóźniony w fazie o 90° w stosunku do napięcia pierwotnego  $U_p$ . Współczynnik mocy w obwodzie pierwotnym (=  $\cos \phi$  w równaniu (31.76)) jest równy zeru, więc moc nie jest przekazywana ze źródła do transformatora.

Jednakże płynący w uzwojeniu pierwotnym zmienny prąd o małym natężeniu  $I_{\text{mag}}$  indukuje zmienny strumień magnetyczny  $\Phi_B$  w rdzeniu. Zadaniem rdzenia jest przede wszystkim zapobieganie rozproszeniu pola magetycznego, tak że cały indukowany strumień przenika również przez nawinięte na tym samym rdzieniu uzwojenie wtórne. Zmienny strumień  $\Phi_B$  powoduje powstanie SEM  $\mathcal{E}_z$  w każdym zwoju uzwojenia wtórnego, równej co do wartości SEM w jednym zwoju uzwojenia pierwotnego. Całkowite napięcie na uzwojeniu pierwotnym jest iloczynem SEM w jednym zwoju oraz liczby zwojów; mamy zatem  $U_p = \mathcal{E}_z N_p$ . Podobnie, dla uzwojenia wtórnego zachodzi  $U_w = \mathcal{E}_z N_w$ . Wobec tego możemy napisać

$$\mathcal{E}_{\rm z} = \frac{U_{\rm p}}{N_{\rm p}} = \frac{U_{\rm w}}{N_{\rm w}}$$

czyli:

$$U_{\rm w} = U_{\rm p} \frac{N_{\rm w}}{N_{\rm p}}$$
 (transformacja napięcia). (31.79)

Jeśli  $N_{\rm w} > N_{\rm p}$ , to rozważane urządzenie nazywamy *transformatorem pod-wyższającym* napięcie, ponieważ *podwyższa* pierwotne napięcie  $U_{\rm p}$  do wyższego napięcia  $U_{\rm w}$ . Podobnie, jeśli  $N_{\rm w} < N_{\rm p}$ , to transformator nazywamy *transformatorem obniżającym* napięcie.

Dopóki klucz S jest otwarty, dopóty energia nie jest dostarczana ze źródła do pozostałej części obwodu. Gdy jednak zamkniemy klucz S, dołączając uzwojenie wtórne do obciążenia oporowego R, energia *będzie* pobierana ze źródła. (W ogólnym przypadku obciążenie mogłoby składać się także z elementów indukcyjnych i pojemnościowych, ale tutaj rozpatrujemy tylko opór R). Zobaczmy, dlaczego tak się dzieje.

- 1. W obwodzie wtórnym pojawia się prąd zmienny o natężeniu  $I_w$ , a moc tracona w obciążeniu oporowym jest równa  $I_w^2 R \ (= U_w^2/R)$ .
- Prąd ten wytwarza swój własny zmienny strumień magnetyczny w rdzeniu, a zgodnie z prawem Faradaya i regułą Lenza ten strumień indukuje w uzwojeniu pierwotnym SEM skierowaną przeciwnie do SEM źródła.
- 3. Napięcie  $U_p$  na uzwojeniu pierwotnym nie może jednak ulec zmianie pod wpływem indukowanej SEM, ponieważ musi być ono zawsze równe SEM  $\mathcal{E}$  dostarczanej przez źródło. Zamknięcie klucza niczego tu nie zmienia.
- 4. W celu podtrzymania  $U_p$  źródło wytwarza teraz w obwodzie pierwotnym, oprócz  $I_{mag}$ , prąd zmienny o natężeniu  $I_p$ . Amplituda i faza

względna prądu  $I_p$  są dokładnie takie, aby SEM indukowana przez  $I_p$  znosiła się z SEM indukowaną tam przez  $I_w$ . Faza początkowa  $I_p$  nie jest równa 90°, jak było w przypadku  $I_{mag}$ , a więc prąd o natężeniu  $I_p$  może dostarczać energię do obwodu pierwotnego.

**Przepływ energii.** Zamierzamy teraz znaleźć związek między  $I_w$  a  $I_p$ . Jednak zamiast szczegółowej analizy powyższego złożonego procesu zastosujemy po prostu zasadę zachowania energii. Moc przekazywana przez źródło do obwodu pierwotnego jest równa  $I_pU_p$ . Z kolei moc przekazywana z obwodu pierwotnego do wtórnego (przez zmienne pole magnetyczne sprzęgające obie cewki) wynosi  $I_wU_w$ . Zakładamy, że energia nie jest tracona podczas tego procesu, zatem z zasady zachowania energii wynika

$$I_{\rm p}U_{\rm p} = I_{\rm w}U_{\rm w}$$

Podstawiając  $U_w$  z równania (31.79), otrzymujemy

$$I_{\rm W} = I_{\rm p} \frac{N_{\rm p}}{N_{\rm w}}$$
 (transformacja prądów). (31.80)

Z równania tego wynika, że natężenie prądu  $I_w$  w obwodzie wtórnym może różnić się od natężenia prądu  $I_p$  w obwodzie pierwotnym w zależności od stosunku liczby zwojów  $N_p/N_w$ . Odwrotność tego stosunku nazywamy *przekładnią transformatora*.

Prąd o natężeniu  $I_p$  zaczyna płynąć w obwodzie pierwotnym na skutek istnienia obciążenia oporowego R w obwodzie wtórnym. Aby wyznaczyć  $I_p$ , podstawiamy do równania (31.80) najpierw  $I_w = U_w/R$ , a następnie podstawiamy  $U_w$  z równania (31.79). Otrzymujemy

$$I_{\rm p} = \frac{1}{R} \left(\frac{N_{\rm w}}{N_{\rm p}}\right)^2 U_{\rm p}.$$
(31.81)

Równanie to ma postać  $I_{\rm p} = U_{\rm p}/R_{\rm rw}$ , gdzie opór równoważny  $R_{\rm rw}$  jest równy

$$R_{\rm rw} = \left(\frac{N_{\rm p}}{N_{\rm w}}\right)^2 R. \tag{31.82}$$

Opór  $R_{\rm rw}$  jest oporem obciążenia "widzianym" przez źródło, które wytwarza napięcie  $U_{\rm p}$  i prąd o natężeniu  $I_{\rm p}$ , jak gdyby było dołączone bezpośrednio do oporu  $R_{\rm rw}$ .

# Dopasowanie impedancji

Równanie (31.82) wskazuje na jeszcze jedno zastosowanie transformatora. Aby uzyskać maksymalne przekazywanie energii ze źródła prądu zmiennego do obciążenia oporowego, opór wewnętrzny źródła i opór obciążenia muszą być jednakowe. Taka sama zasada obowiązuje w obwodach prądu zmiennego, z tą różnicą, że *impedancja* (a nie po prostu opór) źródła musi być dopasowana do impedancji obciążenia. Często ten warunek nie jest spełniony. Na przykład w urządzeniu odtwarzającym dźwięk wzmacniacz ma dużą impedancję, a zestaw głośników — małą. Możemy dopasować impedancje obydwu urządzeń, łącząc je za pomocą transformatora o odpowiednim stosunku liczby zwojów  $N_p/N_w$ .

# Sprawdzian 8

Źródło prądu zmiennego w pewnym obwodzie ma mniejszy opór niż obciążenie w tym obwodzie. Aby zwiększyć wydajność przekazywania energii ze źródła do obciążenia, łączymy te dwa elementy za pomocą transformatora. a) Czy  $N_w$  powinno być większe, czy mniejsze od  $N_p$ ? b) Czy jest to transformator podwyższający, czy obniżający napięcie?

# Przykład 31.08. Transformatory: przekładnia, moc średnia i natężenie skuteczne

Transformator na słupie energetycznym dostosowany jest do napięcia  $U_p = 8,5$  kV po stronie pierwotnej i dostarcza energię elektryczną o napięciu  $U_w = 230$  V do kilku pobliskich domów, przy czym wartości obydwu napięć są wartościami skutecznymi. Zakładamy, że transformator obniżający napięcie jest transformatorem idealnym, obciążenie jest czysto oporowe, a współczynnik mocy jest równy jedności.

**a**) Jaki jest stosunek liczby zwojów  $N_p/N_w$  transformatora?

# **PODSTAWOWE FAKTY**

Związek stosunku liczby zwojów  $N_p/N_w$  z wartościami skutecznymi napięć w obwodzie pierwotnym i wtórnym jest dany równaniem (31.79) ( $U_w = U_p N_w/N_p$ ).

**Obliczenia:** Równanie (31.79) możemy napisać w postaci  $U_{\rm w}$   $N_{\rm w}$  (21.92)

$$\frac{U_{\rm w}}{U_{\rm p}} = \frac{N_{\rm w}}{N_{\rm p}}.$$
(31.83)

Zauważ, że prawa strona tego równania jest przekładnią transformatora. Odwracając obie strony równania (31.83), otrzymujemy

$$\frac{N_{\rm p}}{N_{\rm w}} = \frac{U_{\rm p}}{U_{\rm w}} = \frac{8,5 \cdot 10^3 \,\rm V}{230 \,\rm V} = 36,96 \approx 37$$
(odpowiedź)

**b)** Moc średnia zużywana w domach, do których ten transformator dostarcza napięcie, jest równa 78 kW. Jakie są wartości skuteczne natężeń prądów w obwodzie pierwotnym i wtórnym transformatora?

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Dla obciążenia czysto oporowego współczynnik mocy  $\cos \phi$  jest równy jedności. Zatem dostarczana i zużywana moc średnia dana jest równaniem (31.77) ( $P_{\text{sr}} = \mathcal{E}I = UI$ ).

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

**Obliczenia:** W obwodzie pierwotnym dla  $U_p = 8,5 \text{ kV}$  z równania (31.77) wynika

$$I_{\rm p} = \frac{P_{\rm sr}}{U_{\rm p}} = \frac{78 \cdot 10^3 \,\mathrm{W}}{8.5 \cdot 10^3 \,\mathrm{V}} = 9,176 \,\mathrm{A} \approx 9,2 \,\mathrm{A}$$
 (odpowiedź).

Natomiast w obwodzie wtórnym

$$I_{\rm w} = \frac{P_{\rm sr}}{U_{\rm w}} = \frac{78 \cdot 10^3 \,\text{W}}{230 \,\text{V}} = 339 \,\text{A}$$
 (odpowiedź).

Możesz sprawdzić, że  $I_{\rm w} = I_{\rm p}(N_{\rm p}/N_{\rm w})$ , zgodnie z równaniem (31.80).

c) Jakie jest obciążenie oporowe  $R_w$  w obwodzie wtórnym? Jakie jest odpowiadające temu obciążenie oporowe  $R_p$  w obwodzie pierwotnym?

**Sposób pierwszy:** Możemy za pomocą równania U = IR znaleźć związek między obciążeniem oporowym a wartościami skutecznymi napięcia i natężenia prądu. Dla obwodu wtórnego mamy

$$R_{\rm w} = \frac{U_{\rm w}}{I_{\rm w}} = \frac{230 \text{ V}}{339 \text{ A}} = 0,678 \ \Omega \approx 0,68 \ \Omega$$
(odpowiedź)

Podobnie dla obwodu pierwotnego otrzymujemy

$$R_{\rm p} = \frac{U_{\rm p}}{I_{\rm p}} = \frac{8,5 \cdot 10^3 \text{ V}}{9,176 \text{ A}} = 926 \ \Omega \approx 930 \ \Omega$$
 (odpowiedź).

**Sposób drugi:** Możemy wykorzystać fakt, że  $R_p$  jest oporem równoważnym  $R_{rw}$  "widzianym" od strony pierwotnej transformatora; opór ten można wyznaczyć z równania (31.82) ( $R_{rw} = (N_p/N_w)^2 R$ ). Jeśli podstawimy  $R_p$  zamiast  $R_{rw}$  i  $R_w$  zamiast R, to otrzymamy z tego równania

$$R_{\rm p} = \left(\frac{N_{\rm p}}{N_{\rm w}}\right)^2 R_{\rm rw} = (36,96)^2 (0,678 \ \Omega)$$
$$= 926 \ \Omega \approx 930 \ \Omega \qquad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

# Podsumowanie

Przekazywanie energii w obwodach LC W obwodzie drgającym LC energia jest przekazywana okresowo między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki. Wartości chwilowe obydwu postaci energii to

$$E_E = \frac{q^2}{2C}$$
 oraz  $E_B = \frac{LI^2}{2}$ , (31.1, 31.2)

gdzie q jest wartością chwilową ładunku na okładkach kondensatora, a I — wartością chwilową natężenia prądu płynącego przez cewkę. Całkowita energia  $E (= E_E + E_B)$  pozostaje stała.

Zmiany ładunku i natężenia prądu w obwodach LC Z zasady zachowania energii wynika równanie

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0$$
 (drgania *LC*), (31.11)

czyli równanie różniczkowe opisujące drgania w obwodzie LC niezawierającym oporu. Rozwiązaniem równania (31.11) jest

$$q = q_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$
 (ladunek), (31.12)

gdzie q<sub>max</sub> jest amplitudą ładunku (maksymalną wartością ładunku na okładkach kondensatora), a czestość kołowa drgań swobodnych  $\omega$  jest równa

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$
(31.4)

Faza poczatkowa  $\phi$  w równaniu (31.12) jest określona przez warunki początkowe (w chwili t = 0). Natężenie prądu I w obwodzie w dowolnej chwili t jest równe

$$U = -\omega q_{\text{max}} \sin(\omega t + \phi)$$
 (natężenie prądu), (31.13)

gdzie  $\omega q_{\text{max}}$  jest amplitudą natężenia prądu  $I_{\text{max}}$ .

**Drgania tłumione** Drgania w obwodzie *LC* są tłumione, gdy w obwodzie występuje również element R, na którym energia jest rozpraszana. Wtedy

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad \text{(obwód } RLC\text{)}. \tag{31.24}$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest

$$q = q_{\text{max}} e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi),$$
 (31.25)

gdzie

1

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}.$$
 (31.26)

Rozpatrujemy wyłącznie przypadki małego R, a zatem tłumienie jest również małe. Wtedy  $\omega' \approx \omega$ .

Prądy zmienne; drgania wymuszone Szeregowy obwód RLC może być pobudzony do drgań wymuszonych z często*ścią kołową*  $\omega_w$  przez przyłożenie zewnętrznej zmiennej SEM

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega_{\rm w} t. \tag{31.28}$$

Natężenie prądu wywołanego w obwodzie przez SEM wynosi

$$I = I_{\max} \sin(\omega_{\rm w} t - \phi), \qquad (31.29)$$

gdzie  $\phi$  jest fazą początkową natężenia prądu.

**Rezonans** Amplituda natężenia prądu I<sub>max</sub> w szeregowym obwodzie RLC zasilanym przez zewnętrzną sinusoidalną SEM osiąga maksimum ( $I_{\text{max}} = \mathcal{E}_{\text{max}}/R$ ), gdy częstość kołowa drgań wymuszonych  $\omega_w$  jest równa częstości kołowej drgań swobodnych  $\omega$  obwodu (czyli układ jest w *rezonansie*). Wtedy  $X_C = X_L$ ,  $\phi = 0$ , a natężenie prądu jest zgodne w fazie z SEM.

Obwody z jednym elementem Zmienne napięcie na oporniku ma amplitudę  $U_{R \max} = I_{\max}R$ ; natężenie prądu jest zgodne w fazie z napięciem.

Dla kondensatora  $U_{C \max} = I_{\max} X_C$ , gdzie  $X_C =$  $1/\omega_{\rm w}C$  jest reaktancją pojemnościową; natężenie prądu w tym przypadku wyprzedza napięcie o 90° ( $\phi = -90^\circ =$  $-\pi/2$  rad).

Dla *cewki*  $U_{L \max} = I_{\max} X_L$ , gdzie  $X_L = \omega_w L$  jest reaktancją indukcyjną; natężenie prądu opóźnia się w fazie względem napięcia o 90° ( $\phi = +90^\circ = +\pi/2$  rad).

**Obwody szeregowe RLC** Dla obwodu szeregowego RLC, gdy zewnetrzna SEM jest dana wzorem (31.28), a nateżenie prądu dane wzorem (31.29), możemy zapisać:

$$I_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$
  
=  $\frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{\sqrt{R^2 + (\omega_{\text{w}}L - 1/\omega_{\text{w}}C)^2}}$  (amplituda natężenia prądu).  
(31.60, 31.63)

 $tg\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$ (faza początkowa). (31.65)

Zdefiniowanie impedancji Z obwodu jako

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{(impedancja)} \quad (31.61)$$

pozwala na zapisanie równania (31.60) w postaci  $I_{\text{max}}$  =  $\mathcal{E}_{\rm max}/Z$ .

Moc W obwodzie szeregowym RLC moc średnia Pśr źródła jest równa szybkości, z jaką energia termiczna jest wytwarzana w oporniku

$$P_{\rm sr} = I_{\rm sk}^2 R = \mathcal{E}_{\rm sk} I_{\rm sk} \cos \phi. \qquad (31.71, 31.76)$$

Wskaźnik "sk" oznacza tutaj wartość skuteczna; wartości skuteczne są związane z wartościami maksymalnymi zależnościami  $I_{\rm sk} = I_{\rm max}/\sqrt{2}, U_{\rm sk} = U_{\rm max}/\sqrt{2}$  i  $\mathcal{E}_{\rm sk} = \mathcal{E}_{\rm max}/\sqrt{2}$ . Czynnik  $\cos \phi$  jest zwany **współczynnikiem mocy**.

**Transformatory** Transformator (o którym zakładamy, że jest idealny) składa się z rdzenia żelaznego, na który nawinięte jest uzwojenie pierwotne o  $N_p$  zwojach i uzwojenie wtórne o Nw zwojach. Jeżeli uzwojenie pierwotne jest połączone ze źródłem prądu zmiennego, to napięcia w obwodzie

pierwotnym i wtórnym są związane równaniem

$$U_{\rm w} = U_{\rm p} \frac{N_{\rm w}}{N_{\rm p}}$$
 (transformacja napięcia). (31.79)

Natężenia prądów płynących przez uzwojenia są związane równaniem  $N_{\rm P}$ 

$$I_{\rm w} = I_{\rm p} \frac{r_{\rm p}}{N_{\rm w}}$$
 (transformacja prądów), (31.80)

# Pytania

1 Na rysunku 31.19 przedstawiono trzy obwody drgające *LC* złożone z identycznych cewek i kondensatorów. W pewnej chwili ładunki zgromadzone na okładkach każdego z kondensatorów (a więc i pole elektryczne w kondensatorach) przyjmują wartości maksymalne. Uszereguj obwody w zależności od czasu potrzebnego do całkowitego rozładowania kondensatorów podczas drgań, zaczynając od najdłuższego czasu.



Rys. 31.19. Pytanie 1

**2** Na rysunku 31.20 przedstawiono wykresy napięcia  $U_C$  na kondensatorze w obwodach LC 1 i 2, które zawierają identyczne pojemności i mają taki sam maksymalny ładunek  $q_{\text{max}}$ . Czy: a) indukcyjność L, b) maksymalne natężenie prądu  $I_{\text{max}}$  w obwodzie 1 są większe, mniejsze, czy takie same jak w obwodzie 2?



Rys. 31.20. Pytanie 2

**3** Naładowany kondensator zostaje połączony z cewką w chwili t = 0. Używając okresu *T* drgań jako jednostki, określ, po jakim czasie następujące wielkości osiągną po raz pierwszy maksimum: a)  $E_B$ , b) strumień magnetyczny w cewce, c) dI/dt, d) SEM w cewce?

4 Dla jakich wartości fazy początkowej  $\phi$  w równaniu (31.12) przedstawione na rysunku 31.1 przypadki (a), (c), (e) i (g) mogą zachodzić w chwili t = 0?

5 Na rysunku 31.21 przedstawiono wykres impedancji Zdla obwodu drgającego RCi różnych wartości R i C.



**Rys. 31.21.** Pytanie 5

a opór równoważny widziany przez źródło jest równy

$$R_{\rm rw} = \left(\frac{N_{\rm p}}{N_{\rm w}}\right)^2 R,\qquad(31.82)$$

gdzie R jest obciążeniem oporowym w obwodzie wtórnym. Stosunek  $N_w/N_p$  nazywamy *przekładnią* transformatora.

Uszereguj przedstawione krzywe a, b i c z uwagi na odpowiadającą im wartość R, zaczynając od największej.

**6** Ładunki na okładkach kondensatorów w trzech obwodach drgających *LC* zmieniają się w następujący sposób: 1)  $q = 2\cos 4t$ , 2)  $q = 4\cos t$ , 3)  $q = 3\cos 4t$  (gdzie q jest wyrażone w kulombach, a t w sekundach). Uszereguj obwody w zależności od: a) amplitudy natężenia prądu, b) okresu, zaczynając od największej wartości.

7 Źródło zmiennej SEM o pewnej amplitudzie dołączamy kolejno do opornika, kondensatora i cewki. Po dołączeniu SEM do każdego z elemen-

tów zmieniamy częstotliwość

źródła  $v_w$ , a następnie mierzymy i wykreślamy amplitudę  $I_{max}$  natężenia prądu płynącego przez ten element jako funkcję  $v_w$ . Któremu z trzech elementów odpowiadają poszczególne wykresy na rysunku 31.22?



Rys. 31.22. Pytanie 7

8 Wartości fazy początkowej  $\phi$  dla czterech pobudzanych sinusoidalnie szeregowych obwodów *RLC* wynoszą odpowiednio: 1) -15°, 2) +35°, 3)  $\pi/3$  rad, 4) - $\pi/6$  rad. a) W którym obwodzie obciążenie ma charakter pojemnościowy? b) W którym obwodzie natężenie prądu opóźnia się w stosunku do zmiennej SEM?

**9** Na rysunku 31.23 przedstawiono wykres natężenia prądu I i przyłożonej SEM  $\mathcal{E}$  w szeregowym obwodzie RLC. a) Czy

faza początkowa natężenia prądu jest dodatnia, czy ujemna? b) Czy należy zwiększyć, czy zmniejszyć *L*, aby zwiększyć szybkość przepływu energii do obciążenia oporowego? c) Czy w tym samym celu należy zwiększyć, czy zmniejszyć *C*?



**Rys. 31.23.** Pytanie 9

**10** Na rysunku 31.24 przedstawiono trzy przypadki podobne do pokazanych na rysunku 31.15. Czy częstość kołowa drgań wymuszonych jest większa, mniejsza, czy równa rezonansowej częstości kołowej obwodu dla a) sytuacji 1, b) sytuacji 2 i c) sytuacji 3?



Rys. 31.24. Pytanie 10



wykres natężenia prądu przesunie się w lewo, czy w prawo w stosunku do wykresu SEM, a amplituda tego wykresu wzrośnie, czy zmaleje, jeśli zwiększymy nieco: a) L, b) C, c)  $\omega_{\rm W}$ ?



Rys. 31.25. Pytania 11 i 12

# Zadania

Sadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
 Liczba kropek określa stopień trudności zadania
 Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual* Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
 Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
 Więcj informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

# Podrozdział 31.1. Drgania elektromagnetyczne w obwodach *LC*

•1 Obwód drgający *LC* składa się z cewki o indukcyjności 75 mH i kondensatora o pojemności 3,6  $\mu$ F. Oblicz: a) całkowitą energię w obwodzie, b) maksymalne natężenie prądu, jeśli maksymalny ładunek na okładkach kondensatora jest równy 2,9  $\mu$ C.

•2 Częstotliwość drgań pewnego obwodu *LC* jest równa 200 kHz. W chwili t = 0 ładunek dodatni na okładce *A* kondensatora ma maksymalną wartość. Po jakim najmniejszym czasie t > 0: a) ładunek dodatni na okładce *A* osiągnie ponownie maksimum, b) ładunek dodatni na drugiej okładce kondensatora osiągnie maksimum, c) indukcja magnetyczna pola w cewce osiągnie maksymalną wartość?

•3 W pewnym obwodzie drgającym *LC* energia zamienia się z energii elektrycznej na kondensatorze na energię magnetyczną w cewce w ciągu 1,5 μs. Ile wynoszą: a) okres drgań oraz b) częstotliwość drgań? c) Po jakim czasie od momentu, w którym energia magnetyczna miała wartość maksymalną, osiągnie ona znów maksimum? •4 Jaka jest pojemność obwodu drgającego LC, jeśli maksymalny ładunek na okładkach kondensatora wynosi 1,6  $\mu$ C, a całkowita energia jest równa 140  $\mu$ J?

12 Na rysunku 31.25 przedstawiono wykres nateżenia pradu

*I* i przyłożonej SEM  $\mathcal{E}$  w szeregowym obwodzie *RLC*. a) Czy natężenie pradu wyprzedza, czy opóźnia się w sto-

sunku do SEM? b) Czy obciążenie w obwodzie ma charak-

ter pojemnościowy, czy indukcyjny? c) Czy częstość kołowa SEM  $\omega_w$  jest większa, czy mniejsza od czestości kołowej

zwiększyć prędkość katowa wskazów przy zachowaniu skali

Rys. 31.26. Pytanie 13

drgań swobodnych  $\omega$ ?

diagramu?

13 a) Czy przedstawiony na ry-

sunku 31.26 diagram wskazowy

odpowiada źródłu prądu zmien-

nego dołączonego do opornika, kondensatora czy cewki? b) Czy

długość wskazu natężenia prądu

zwiększy się, czy zmiejszy, jeśli

•5 W obwodzie drgającym LC L = 1,1 mH i  $C = 4 \mu$ F. Maksymalny ładunek na okładkach kondensatora jest równy 3  $\mu$ C. Oblicz maksymalną wartość natężenia prądu.

•6 Ciało o masie 0,5 kg wykonuje drgania harmoniczne na sprężynie, która po rozciągnięciu o 2 mm od stanu równowagi działa siłą zwrotną 8 N. Ile wynoszą: a) częstość kołowa drgań, b) okres drgań? c) Oblicz pojemność w obwodzie *LC* o tym samym okresie drgań, jeżeli L = 5 H.

•7 ssm W obwodzie drgającym *LC* zawierającym cewkę o indukcyjności 1,25 H energia jest równa 5,7  $\mu$ J. Maksymalny ładunek na okładkach kondensatora wynosi 175  $\mu$ C. Dla układu klocek–sprężyna o tym samym okresie drgań i maksymalnej prędkości klocka równej 3,02 mm/s, oblicz: a) masę klocka, b) współczynnik sprężystości sprężyny, c) maksymalne przemieszczenie.

•8 Obwód zamknięty o jednym oczku składa się z cewek  $(L_1, L_2, ...)$ , kondensatorów  $(C_1, C_2, ...)$  i oporników  $(R_1, R_2, ...)$  połączonych szeregowo, np. tak jak pokazano na



Rys. 31.27. Zadanie 8

rysunku 31.27a. Wykaż, że niezależnie od kolejności tych elementów obwód będzie się zachowywał tak jak prosty obwód LC pokazany na rysunku 31.27b. (Wskazówka: Zastosuj drugie prawo Kirchhoffa i zajrzyj do zadania 47 w rozdziale 30).

•9 ilw W obwodzie drgającym LC zawierającym L = 50mH i  $C = 4 \,\mu\text{F}$  w chwili początkowej natężenie prądu ma wartość maksymalna. Po jakim czasie kondensator zostanie po raz pierwszy całkowicie naładowany?

•10 Układy drgające LC są używane w obwodach elektrycznych połączonych z głośnikami i służących do wytwarzania pewnych dźwięków w muzyce elektronicznej. Jaką indukcyjność należy połaczyć z kondensatorem o pojemności 6,7 µF, aby uzyskać częstotliwość 10 kHz, bliską środka zakresu częstotliwości słyszalnych?

••11 ssm www Kondensator o regulowanej pojemności, obejmującej zakres od 10 do 365 pF, tworzy wraz z cewką obwód LC o zmiennej częstotliwości, używany do dostrajania radioodbiornika do sygnału wejściowego. a) Ile wynosi stosunek maksymalnej i minimalnej częstotliwości w przypadku zastosowania takiego kondensatora? Jeżeli ten obwód ma być użyty do otrzymania częstotliwości od 0,54 do 1,60 MHz, to stosunek częstotliwości obliczony w punkcie (a) jest za duży. Zakres zmian może być odpowiednio dobrany przez dodanie kondensatora połączonego równolegle z kondensatorem o zmiennej pojemności. b) Jaka powinna być pojemność tego dodatkowego kondensatora oraz c) jakiej indukcyjności należy użyć, aby uzyskać pożądany zakres częstotliwości?

••12 Jeżeli w obwodzie drgającym LC energia zmagazynowana w polu magnetycznym cewki stanowi w pewnej chwili 75% całkowitej energii obwodu, to a) jaką część maksymalnego ładunku kondensatora stanowi ładunek znajdujący się w tej samej chwili na okładkach kondensatora oraz b) jaką część maksymalnego natężenia prądu w cewce stanowi natężenie prądu płynącego w tej samej chwili przez cewkę?

••13 W obwodzie drgającym  $LC L = 3 \text{ mH i } C = 2.7 \mu\text{F}.$ W chwili t = 0 ładunek na okładkach kondensatora jest równy zeru, a natężenie prądu jest równe 2 A. a) Ile wynosi maksymalny ładunek, który pojawi się na okładkach kondensatora? b) Ile czasu upłynie od chwili t = 0 do pierwszego momentu, w którym energia zmagazynowana w kondensatorze będzie się zwiększała najszybciej, oraz c) jaka jest ta maksymalna szybkość przekazywania energii do kondensatora?

••14 Masz do dyspozycji następujące elementy, których możesz użyć do zbudowania drgającego układu LC: cewkę o indukcyjności 10 mH, kondensator o pojemności 5 µF i kondensator o pojemności 2 µF. Podaj uszeregowane rosnaco cztery wartości częstotliwości drgań, jakie mogą pojawić się w tym obwodzie dla różnych wyborów i połaczeń tych trzech elementów.

••15 ilw W obwodzie drgającym LC składającym się z kondensatora o pojemności 1 nF i cewki o indukcyjności 3 mH maksymalne napięcie wynosi 3 V. Ile wynosza: a) maksymalny ładunek na okładkach kondensatora, b) maksymalne natężenie prądu w obwodzie, c) maksymalna energia, zmagazynowana w polu magnetycznym cewki?

••16 Cewka jest dołączona do kondensatora, którego pojemność może być zmieniana za pomocą pokrętła. Chcielibyśmy, aby częstotliwość drgań obwodu LC zmieniała się liniowo w funkcji kata obrotu pokretła, obejmując zakres od  $2 \cdot 10^5$ do  $4 \cdot 10^5$  Hz, gdy pokretło obracane jest w zakresie od zera do 180°. Wykreśl wartości wymaganej pojemności jako funkcji kata obrotu pokretła dla L = 1 mH.

••17 😳 ilw W obwodzie przedstawionym na rysunku 31.28 mamy  $R = 14 \Omega$ ,  $C = 6.2 \mu$ F, L = 54 mH, SEM idealnego źródła prądu wynosi zaś  $\mathcal{E} = 34$  V. Klucz znajduje sie przez dłuższy czas w położeniu a, a następnie zostaje przełączony do położenia b. Oblicz a) częstotliwość drgań natężenia pradu oraz b) amplitude tych drgań.



Rys. 31.28. Zadanie 17

••18 W drgającym obwodzie *LC* znajduje się kondensator o pojemności 220 nF, a amplitudy drgań natężenia prądu i różnicy potencjałów wynoszą, odpowiednio, 7,5 mA i 250 mV. Wyznacz a) okres drgań, b) maksymalna energie zgromadzoną w kondensatorze, c) maksymalną energię zgromadzoną w cewce, d) maksymalną szybkość zmian natężenia prądu oraz e) maksymalna szybkość przyrostu energii zgromadzonej w cewce.

••19 Stosując drugie prawo Kirchhoffa, wyprowadź równanie różniczkowe (31.11) dla obwodu LC.

••20 • W obwodzie drgającym LC o pojemności C =4 μF maksymalne napięcie na kondensatorze wynosi 1,5 V, a maksymalne nateżenie prądu w cewce to 50 mA. Ile wynoszą: a) indukcyjność L, b) częstotliwość drgań? c) Ile czasu potrzeba, aby ładunek kondensatora wzrósł od zera do wartości maksymalnej?

••21 ilw W obwodzie drgającym LC zawierającym pojemność  $C = 64 \,\mu\text{F}$  natężenie prądu dane jest następującą funkcją czasu:  $I = (1,6) \sin(2500t + 0,68)$ , gdzie t jest wyrażone w sekundach, I w amperach, a faza początkowa w radianach. a) Kiedy, liczac od chwili t = 0, nateżenie pradu osiagnie

maksymalną wartość? Jakie są: b) indukcyjność L, c) całkowita energia w obwodzie?

••22 Pewien obwód zawierający cewkę o indukcyjności  $L_1$ i kondensator o pojemności  $C_1$  drga z częstością kołową  $\omega$ . Inny obwód zawierający cewkę o indukcyjności  $L_2$  i kondensator o pojemności  $C_2$  drga z tą samą częstością kołową. Wyraź za pomocą  $\omega$  częstość kołową drgań obwodu powstałego w wyniku szeregowego połączenia wszystkich opisanych wyżej czterech elementów. Opory pomiń. (*Wskazówka*: Użyj wzorów na pojemność zastępczą i indukcyjność zastępczą; zajrzyj do podrozdziału 25.3 i zadania 47 w rozdziale 30).

••23 W obwodzie drgającym LC L = 25 mH i  $C = 7,8 \mu$ F. W chwili t = 0 natężenie prądu wynosi 9,2 mA, ładunek na okładkach kondensatora jest równy 3,8  $\mu$ C, a kondensator się ładuje. Jakie są: a) całkowita energia w obwodzie, b) maksymalny ładunek na okładkach kondensatora, c) maksymalne natężenie prądu? d) Jeżeli ładunek na okładkach kondensatora jest dany wzorem  $q = q_{\text{max}} \cos(\omega t + \phi)$ , to ile wynosi faza początkowa  $\phi$ ? (e) Przyjmij, że w chwili t = 0kondensator się rozładowuje, a pozostałe dane pozostają bez zmian. Jaka wtedy będzie faza początkowa  $\phi$ ?

# Podrozdział 31.2. Drgania tłumione w obwodzie RLC

••24 C Obwód o jednym oczku składa się z opornika o oporze 7,2  $\Omega$ , cewki o indukcyjności 12 H i kondensatora o pojemności 3,2  $\mu$ F. W chwili początkowej kondensator ma ładunek 6,2  $\mu$ C, a natężenie prądu jest równe zeru. Oblicz ładunek na kondensatorze po N całkowitych cyklach drgań, gdy a) N = 5, b) N = 10 i c) N = 100.

••25 ilw Jaki opór *R* należy połączyć szeregowo z indukcyjnością L = 220 mH i pojemnością  $C = 12 \mu$ F, aby maksymalny ładunek na kondensatorze zmniejszył się do 99% swojej początkowej wartości w czasie 50 cykli drgań? (Przyjmij, że  $\omega' \approx \omega$ ).

••26 Dla szeregowego obwodu drgającego *RLC* oblicz czas, po którym maksymalna energia zgromadzona na kondensatorze w czasie drgań spadnie do połowy wartości początkowej. Przyjmij  $q = q_{\text{max}} \text{ dla } t = 0.$ 

•••27 ssm Wykaż, że względna wartość energii  $\Delta E/E$  traconej w szeregowym obwodzie drgającym *RLC* w czasie jednego cyklu drgań jest z dobrym przybliżeniem opisana wyrażeniem  $2\pi R/\omega L$ . Wielkość  $\omega L/R$  jest często nazywana *dobrocią Q* obwodu. Obwody o dużej dobroci mają mały opór i małą względną wartość energii (=  $2\pi/Q$ ) traconej w czasie jednego cyklu.

### Podrozdział 31.3. Drgania wymuszone: trzy proste obwody

•28 Kondensator o pojemności 1,5  $\mu$ F jest połączony tak jak pokazano na rysunku 31.10 ze źródłem prądu zmiennego o  $\mathcal{E}_{max} = 30$  V. Ile wynosi amplituda natężenia prądu

zmiennego, jeżeli częstotliwość SEM jest równa: a) 1 kHz, b) 8 kHz?

•29 ilw Cewka o indukcyjności 50 mH jest połączona tak jak pokazano na rysunku 31.12 ze źródłem prądu zmiennego o  $\mathcal{E}_{max} = 30$  V. Ile wynosi amplituda natężenia prądu zmiennego, jeżeli częstotliwość SEM jest równa: a) 1 kHz, b) 8 kHz?

•30 Opornik o oporze 50  $\Omega$  jest połączony tak jak pokazano na rysunku 31.8 ze źródłem prądu zmiennego o  $\mathcal{E}_{max} = 30$  V. Ile wynosi amplituda natężenia prądu zmiennego, jeżeli częstotliwość SEM jest równa: a) 1 kHz, b) 8 kHz?

•31 a) Przy jakiej częstotliwości cewka o indukcyjności 6 mH i kondensator o pojemności 10  $\mu$ F będą miały tę samą reaktancję? b) Ile wynosić będzie ta reaktancja? c) Wykaż, że ta częstotliwość jest częstotliwością własną obwodu drgającego złożonego z tych samych elementów *L* i *C*.

••32 • Źródło prądu zmiennego ma SEM  $\mathcal{E}$  o postaci  $\mathcal{E}_{max} \sin \omega_w t$ , gdzie  $\mathcal{E}_{max} = 25$  V, a  $\omega_w = 377$  rad/s. Źródło to dołączono do cewki o indukcyjności 12,7 mH. a) Ile wynosi maksymalna wartość natężenia prądu? b) Ile wynosi SEM źródła, gdy natężenie prądu osiąga wartość maksymalną? c) Ile wynosi natężenie prądu, gdy SEM źródła jest równa –12,5 V, a jej wartość bezwzględna rośnie?

••33 ssm Źródło prądu zmiennego ma SEM  $\mathcal{E}$  o postaci  $\mathcal{E}_{max} \sin(\omega_w t - \pi/4)$ , gdzie  $\mathcal{E}_{max} = 30$  V, a  $\omega_w = 350$  rad/s. Natężenie prądu płynącego w obwodzie dołączonym do źródła wynosi  $I(t) = I_{max} \sin(\omega_w t - 3\pi/4)$ , gdzie  $I_{max} =$ 620 mA. Po jakim czasie, licząc od t = 0, a) SEM osiągnie po raz pierwszy wartość maksymalną, a po jakim b) natężenie prądu osiągnie po raz pierwszy maksimum? c) Obwód składa się z jednego elementu i źródła. Czy jest to kondensator, cewka, czy opornik? Uzasadnij odpowiedź. d) Zależnie od odpowiedzi w punkcie (c) określ, jaka jest wartość pojemności, indukcyjności lub oporu.

••34 Do kondensatora o pojemności 4,15  $\mu$ F dołączono źródło prądu zmiennego, którego SEM ma postać  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \sin \omega_w t$ , gdzie  $\mathcal{E}_{max} = 25$  V, a  $\omega_w = 377$  rad/s. a) Ile wynosi maksymalna wartość natężenia prądu? b) Ile wynosi SEM źródła, gdy natężenie prądu osiąga maksimum? c) Ile wynosi natężenie prądu, gdy SEM źródła jest równa –12,5 V, a jej wartość bezwzględna rośnie?

# Podrozdział 31.4. Obwód szeregowy RLC

•35 ilw Cewkę o indukcyjności 88 mH i nieznanym oporze oraz kondensator o pojemności 0,94 μF połączono szeregowo ze źródłem zmiennej SEM o częstotliwości 930 Hz. Ile wynosi opór cewki, jeżeli różnica faz między przyłożonym napięciem a natężeniem prądu wynosi 75°?

•36 Pewien obwód jest zbudowany z połączonych szeregowo następujących elementów: źródła prądu zmiennego o regulowanej częstotliwości, kondensatora o pojemności *C* oraz

opornika *R*. Na rysunku 31.29 przedstawiono zależność impedancji *Z* od częstości kołowej  $\omega_w$  drgań wymuszonych: odpowiednia linia dąży do wartośći granicznej 500  $\Omega$  dla  $\omega_w \rightarrow \infty$ , a skala osi poziomej jest wyznaczona przez  $\omega_{w,s} = 300$  rad/s. Na rysunku przedstawiono także zależność reaktancji pojemnościowej  $X_C$  kondensatora od  $\omega_w$ . Wyznacz a) *R* oraz b) *C*.



Rys. 31.29. Zadanie 36

•37 Silnik elektryczny ma efektywny opór równy 32  $\Omega$ , a przy pracy pod obciążeniem reaktancja indukcyjna tego silnika wynosi 45  $\Omega$ . Amplituda drgań napięcia na źródle prądu zmiennego jest równa 420 V. Wyznacz amplitudę drgań natężenia prądu.

•38 Na rysunku 31.30 przedstawiono zależność amplitudy

drgań natężenia prądu  $I_{max}$ w obwodzie *RLC* od częstości kołowej  $\omega_w$  drgań wymuszonych, przy czym skala osi pionowej jest wyznaczona przez  $I_{max,s} = 4$  A. Indukcyjność obwodu jest równa 200 µH, a amplituda drgań SEM wynosi 8 V. Wyznacz a) *C* oraz b) *R*.



**Rys. 31.30.** Zadanie 38

•39 Przyjmij, że w obwodzie przedstawionym na rysunku 31.7 mamy  $R = 200 \ \Omega$ ,  $C = 15 \ \mu$ F,  $v_w = 60 \ Hz$  i  $\mathcal{E}_{max} =$ 36 V, cewka zaś została usunięta. Wyznacz a) Z, b)  $\phi$  oraz c)  $I_{max}$ . Naszkicuj diagram wskazowy.

•40 Obwód *RLC* jest podłączony do źródła prądu zmiennego o amplitudzie SEM  $\mathcal{E}_{max} = 6$  V, faza początkowa jest zaś równa +30°. Wyznacz różnicę potencjałów na cewce (z uwzględnieniem znaku) w chwili, gdy różnica potencjałów na kondensatorze osiąga wartość maksymalna +5 V.

•41 ssm W układzie przedstawionym na rysunku 31.7 przyjmij  $R = 200 \Omega$ ,  $C = 70 \mu$ F, L = 230 mH,  $v_w = 60$  Hz oraz  $\mathcal{E}_{max} = 36$  V. Wyznacz: a) Z, b)  $\phi$  oraz c)  $I_{max}$ . Naszkicuj diagram wskazowy.

•42 Pewien obwód składa się ze źródła prądu zmiennego o regulowanej częstotliwości, cewki o indukcyjności L i opornika o oporze R połączonych szeregowo. Na rysunku 31.31 przedstawiono wykres zależność impedancji Z tego obwodu od częstości kołowej  $\omega_w$  drgań wymuszonych, przy czym

skala osi poziomej jest wyznaczona przez  $\omega_{w,s} =$  1600 rad/s. Na wykresie przedstawiono również analogiczną zależność reaktancji  $X_L$  od  $\omega_w$ . Wyznacz a) Roraz b) L.

•43 Przyjmij, że w obwodzie przedstawionym na rysunku 31.7 mamy  $R = 200 \Omega$  i L =



Rys. 31.31. Zadanie 42

320 mH,  $v_w = 60$  Hz i  $\mathcal{E}_{max} = 36$  V, kondensator zaś został usunięty. Wyznacz a) Z, b)  $\phi$  oraz c)  $I_{max}$ . Naszkicuj diagram wskazowy.

••44 • Źródło prądu zmiennego o amplitudzie SEM równej  $\mathcal{E}_{max} = 220$  V i częstotliwości 400 Hz wywołuje drgania szeregowego obwodu *RLC*, w którym  $R = 220 \Omega$ , L = 150 mH, a  $C = 24 \mu$ F. Oblicz: a) reaktancję pojemnościową  $X_C$ , b) impedancję *Z*, c) amplitudę natężenia prądu  $I_{max}$ . Do obwodu dołączono szeregowo drugi kondensator o takiej samej pojemności. Określ, czy wartości d)  $X_C$ , e) *Z*, f)  $I_{max}$  wzrosły, zmalały, czy pozostały takie same.

••46 Pewien obwód składa się ze źródła prądu zmiennego o regulowanej częstotliwości  $v_w$ , opornika o oporze 50  $\Omega$  i kondensatora o pojemności 20 µF połączonych szeregowo. Amplituda SEM jest równa 12 V. a) Narysuj diagram wskazowy i zaznacz na nim wskazy  $U_R$  (różnicy potencjałów na oporniku) i  $U_C$  (różnicy potencjałów na kondensatorze). b) Dla jakiej częstotliwości  $v_w$  drgań wymuszonych wskazy te mają taką samą długość? Dla tej częstotliwości wyznacz także c) fazę początkową wyrażoną w stopniach, d) prędkość kątową, z jaką obracają się wskazy, oraz e) amplitudę natężenia pradu.

••47 ssm www W obwodzie *RLC*, takim jak przedstawiony na rysunku 31.7, mamy  $R = 5 \Omega$ ,  $C = 20 \mu$ F, L = 1 H i  $\mathcal{E}_{max} = 30$  V. a) Dla jakiej częstości kołowej  $\omega_w$  drgań wymuszonych natężenie prądu będzie miało wartość maksymalną odpowiadającą maksimum krzywych rezonansowych z rysunku 31.16? b) Ile wynosi ta wartość maksymalna? Dla jakiej częstości kołowej drgań wymuszonych natężenie prądu będzie równe połowie wartości maksymalnej przy założeniu, że c) ta częstość  $\omega_{w1}$  jest mniejsza od częstości odpowiadającej maksimum oraz d) ta częstość  $\omega_{w2}$  jest większa od częstości odpowiadającej maksimum. e) Jaka jest szerokość połówkowa  $\frac{\omega_{w2}-\omega_{w1}}{\omega_w}$ ? ••48 •• Na rysunku 31.32 przedstawiono obwód drgający *RLC* zawierający dwa identyczne kondensatory i dwa klucze. Amplituda SEM jest równa 12 V, a częstotliwość drgań wymuszonych wynosi 60 Hz. Gdy oba klucze są otwarte, natężenie prądu wyprzedza SEM z fazą początkową równą 30,9°. Gdy klucz S<sub>1</sub> jest zamknięty, a klucz S<sub>2</sub> otwarty, natężenie prądu opóźnia się względem SEM z fazą początkową 15°. Gdy zamknięte są oba klucze, amplituda drgań natężenia prądu wynosi 447 mA. Wyznacz: a) *R*, b) *C*, c) *L*.



Rys. 31.32. Zadanie 48

••49 Solution Na rysunku 31.33 źródło G o regulowanej częstotliwości drgań jest połączone z oporem  $R = 100 \Omega$ , indukcyjnościami  $L_1 = 1,7$  mH i  $L_2 = 2,3$  mH oraz pojemnościami  $C_1 = 4 \mu$ F,  $C_2 = 2,5 \mu$ F i  $C_3 = 3,5 \mu$ F. a) Jaka jest częstotliwość rezonansowa obwodu? (*Wskazówka*:

Zobacz zadanie 47 w rozdziale 30). Jak zmieni się częstotliwość rezonansowa, jeśli: b) zwiększymy wartość R, c) zwiększymy wartość  $L_1$ , d) usuniemy z obwodu pojemność  $C_3$ ?



••50 Źródło prądu zmiennego o regulowanej częstotliwości  $\nu_w$  jest połączone szeregowo z opornikiem 80  $\Omega$  i cewką o indukcyjności 40 mH. Amplituda drgań SEM jest równa 6 V. a) Narysuj diagram wskazowy i zaznacz na nim wskazy  $U_R$  (różnicy potencjałów na oporniku) i  $U_L$  (różnicy potencjałów na cewce). b) Dla jakiej częstotliwości  $\nu_w$  drgań wymuszonych wskazy te mają taką samą długość? Dla tej częstotliwości wyznacz także c) fazę początkową wyrażoną w stopniach, d) prędkość kątową, z jaką obracają się wskazy, oraz e) amplitude natężenia prądu.

••51 ssm Szerokość połówkowa  $\Delta \omega_w$  krzywej rezonansowej, takiej jak ta przedstawiona na rysunku 31.16, to szerokość wykresu dla połowy wartości maksymalnej amplitudy natężenia prądu  $I_{\text{max}}$ . Wykaż, że  $\Delta \omega_w / \omega = R(3C/L)^{1/2}$ , gdzie  $\omega$  jest częstością kołową odpowiadającą rezonansowi. Zauważ, że stosunek  $\Delta \omega_w / \omega$  zwiększa się wraz ze wzrostem *R*, co pokazano na rysunku 31.16.

#### Podrozdział 31.5. Moc w obwodach prądu zmiennego

•52 Woltomierz prądu zmiennego o dużej impedancji dołączono kolejno do cewki, kondensatora i opornika w szeregowym obwodzie zasilanym zmienną SEM o wartości skutecznej 100 V. Za każdym razem odczytano tę samą wartość napięcia. Jakie było wskazanie woltomierza? •53 ssm Klimatyzator podłączony do sieci o napięciu skutecznym 120 V może być przedstawiony jako szeregowe połączenie oporu 12  $\Omega$  i reaktancji indukcyjnej 1,3  $\Omega$ . Oblicz a) impedancję klimatyzatora oraz b) średnią szybkość, z jaką energia jest dostarczana do tego urządzenia.

•54 Jaka jest maksymalna wartość napięcia zmiennego, którego wartość skuteczna jest równa 100 V?

•55 Oblicz natężenie prądu stałego, który wytwarza w pewnym oporniku taką samą ilość energii termicznej jak prąd zmienny o maksymalnym natężeniu 2,6 A.

••56 Do przyciemniania świateł na scenie teatru używa się układu złożonego z cewki o zmiennej indukcyjności L (regulowanej od zera do  $L_{max}$ ), połączonej szeregowo z żarówką B, jak przedstawiono na rysunku 31.34. Obwód jest zasilany napięciem o wartości skutecznej 230 V i częstotliwości 50 Hz, a żarówka jest oznaczona jako "230 V, 1000 W". a) Jaka jest wymagana wartość  $L_{max}$ , jeżeli szybkość rozpraszania energii w żarówce ma się zmieniać w zakresie od górnej granicy 1000 W do wartości 5 razy mniejszej? Przyjmij, że opór żarówki nie zależy od temperatury. b) Czy zamiast cewki można

użyć opornika o zmiennym oporze (regulowanym od zera do  $R_{max}$ )? c) Jeżeli tak, to jaka wartość  $R_{max}$  byłaby potrzebna? d) Dlaczego nie stosuje się takiego rozwiązania?



Rys. 31.34. Zadanie 56

••57 W obwodzie *RLC* pokazanym na rysunku 31.7 przyjmij, że  $R = 5 \Omega$ , L = 86,4 mH,  $v_w = 50$  Hz,  $\mathcal{E}_{max} = 30$  V. Dla jakiej wartości pojemności średnia szybkość rozpraszania energii w oporze będzie: a) największa, b) najmniejsza? Jakie są c) maksymalna wartość szybkości rozpraszania energii i odpowiadające tej wartości d) faza początkowa oraz e) współczynniki mocy? Jakie są f) minimalna wartość szybkości rozpraszania energii i odpowiadające tej wartości g) faza początkowa oraz h) współczynniki mocy?

••58 Wykaż, że w układzie przedstawionym na rysunku 31.35 średnia szybkość rozpraszania energii w oporze R jest największa, gdy R jest równe wewnętrznemu oporowi r źródła prądu zmiennego. (W dyskusji w tekście założyliśmy milczaco, że r = 0).



Rys. 31.35. Zadania 58 i 66

••59 W obwodzie pokazanym na rysunku 31.7 przyjmij  $R = 15 \Omega$ ,  $C = 4.7 \mu$ F i L = 25 mH. Źródło prądu zmiennego dostarcza SEM o napięciu skutecznym 75 V i częstotliwości 550 Hz. a) Jakie jest natężenie skuteczne? Jakie jest napięcie skuteczne na b) oporniku, c) cewce, d) podukładzie złożonym z kondensatora i cewki oraz e) podukładzie złożonym z opornika, kondensatora i cewki. Z jaką średnią prędko-

ścią energia jest rozpraszana w g) oporniku, h) kondensatorze oraz i) cewce?

••60 W szeregowym obwodzie drgającym *RLC*:  $R = 16 \Omega$ ,  $C = 31.2 \mu$ F,  $L = 9.2 \text{ mH i } \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{max}} \sin \omega_w t$ , gdzie  $\mathcal{E}_{\text{max}} = 45$  V, a  $\omega_w = 3000$  rad/s. Dla chwili t = 0.442 ms oblicz: a) szybkość  $P_{zr}$ , z jaką energia jest dostarczana przez źródło, b) szybkość  $P_C$ , z jaką zmienia się energia w kondensatorze, c) szybkość  $P_L$ , z jaką zmienia się energia w cewce, d) szybkość  $P_R$ , z jaką energia jest rozpraszana w oporniku. e) Czy suma  $P_C$ ,  $P_L$  i  $P_R$  jest większa, mniejsza, czy też taka sama jak  $P_{zr}$ ?

••61 ssm www Na rysunku 31.36 przedstawiono źródło prądu zmiennego dołączone za pomocą pary zacisków do "czarnej skrzynki". Skrzynka zawiera obwód *RLC* o nieznanych elementach i połączeniach, być może nawet obwód o wielu oczkach. Pomiary wykonane na zewnątrz skrzynki wykazuja, że:

oraz

$$\mathcal{E}(t) = (75 \text{ V}) \sin \omega_{\text{w}} t$$

$$I(t) = (1, 2 \text{ A}) \sin(\omega_{w}t + 42^{\circ}).$$

a) Jaki jest współczynnik mocy? b) Czy natężenie prądu wyprzedza, czy opóźnia się względem SEM? c) Czy obwód w skrzynce ma charakter indukcyjny, czy pojemnościowy? d) Czy obwód w skrzynce jest w rezonansie? e) Czy w skrzynce musi znajdować sie kondensator? f) A cewka?

g) A opornik? h) Jaka jest średnia szybkość dostarczania energii ze źródła do skrzynki? i) Dlaczego nie musisz znać częstości kołowej  $\omega_w$ , aby odpowiedzieć na te wszystkie pytania?



**Rys. 31.36.** Zadanie 61

#### Podrozdział 31.6. Transformatory

•62 Źródło dostarcza napięcia zmiennego o wartości 100 V do 50-zwojowego uzwojenia pierwotnego transformatora. Jakie jest napięcie w obwodzie wtórnym, jeżeli uzwojenie wtórne ma 500 zwojów?

•63 ssm ilw Transformator ma 500 zwojów w obwodzie pierwotnym i 10 zwojów w obwodzie wtórnym. a) Jakie jest napięcie  $U_w$  przy otwartym obwodzie wtórnym, jeżeli wartość skuteczna napięcia  $U_p$  wynosi 230 V? Jeżeli obwód wtórny jest obciążony oporem 23  $\Omega$ , to jakie są natężenia prądów w obwodzie b) pierwotnym i c) wtórnym?

•64 Na rysunku 31.37 przedstawiono autotransformator, który składa się z pojedynczej cewki nawiniętej na rdzeniu z żelaza. Autotransformator ma trzy zaciski. Między zaciskami  $T_1$  i  $T_2$  znajduje się 200 zwojów, a między zaciskami  $T_2$  i  $T_3 - 800$  zwojów. Dowolne dwa zaciski mogą być wybrane jako "zaciski pierwotne" i dowolne dwa zaciski — jako "zaciski wtórne". a) Wymień wszystkie możliwe stosunki napięcia wtórnego do napięcia pierwotnego, jeżeli transformator jest transformatorem podwyższającym napięcie. b) Wymień wszystkie możliwe stosunki napięcia wtórnego do napięcia pierwotnego, jeżeli transformator jest transformatorem obniżającym napięcie.

••65 Źródło prądu zmiennego dostarcza za pomocą linii przesyłowej o dwóch przewodach SEM do znajdującego





się w odległej fabryce obciążenia oporowego. Tam transformator obniżający napięcie zmniejsza skuteczną wartość napięcia  $U_p$  w linii przesyłowej do mniejszej wartości, gdyż napięcie o takiej wartości jest bezpieczne i wygodne do stosowania w fabryce. Opór linii przesyłowej jest równy 0,3  $\Omega$  na każdy przewód, a moc źródła wynosi 250 kW. Przyjmując  $U_p = 80$  kV, wyznacz a) spadek napięcia na linii przesyłowej oraz b) szybkość  $P_{\text{rozpr}}$ , z jaką energia jest rozpraszana w linii przesyłowej. Przyjmując  $U_p = 8$  kV, wyznacz c) spadek napięcia na linii przesyłowej  $\Delta U$  oraz d) szybkość  $P_{\text{rozpr}}$ , z jaką energia jest rozpraszana w linii przesyłowej jest rozpraszana w linii przesyłowej.

#### Zadania dodatkowe

**66** Niech prostokąt po lewej stronie rysunku 31.35 oznacza wyjście wzmacniacza akustycznego o dużej impedancji i oporze  $r = 1000 \Omega$ . Niech  $R = 10 \Omega$  oznacza cewkę głośnika o małej impedancji. Aby uzyskać maksymalne przekazywanie energii do obciążenia R, musimy mieć R = r, co w tym przypadku nie jest spełnione. Jednakże możemy zastosować transformator do "przekształcenia" oporów, aby zachowywały się tak, jak gdyby były większe lub mniejsze niż są w rzeczywistości. a) Naszkicuj uzwojenia pierwotne i wtórne transformatora, który mógłby być włączony między wzmacniaczem a głośnikiem na rysunku 31.35, tak aby dopasować do siebie impedancje. b) Jaka powinna być przekładnia takiego transformatora?

**67 •** Źródło prądu zmiennego wytwarza SEM  $\mathcal{E}$  o postaci  $\mathcal{E}_{max} \sin(\omega_w t - \pi/4)$ , gdzie  $\mathcal{E}_{max} = 30$  V, a  $\omega_w = 350$  rad/s. Natężenie prądu płynącego w obwodzie dołączonym do źródła wynosi  $I(t) = I_{max} \sin(\omega_w t + \pi/4)$ , gdzie  $I_{max} = 620$  mA. a) Po jakim czasie, licząc od t = 0, SEM osiągnie po raz pierwszy wartość maksymalną? b) Po jakim czasie, licząc od t = 0, natężenie prądu osiągnie po raz pierwszy maksimum? c) Obwód składa się z jednego elementu i źródła. Czy jest to kondensator, cewka, czy opornik? Uzasadnij odpowiedź. d) Zależnie od odpowiedzi w punkcie (c) określ, jaka jest wartość pojemności, indukcyjności lub oporu?

**68** Szeregowy obwód *RLC* jest podłączony do źródła prądu zmiennego o częstotliwości 2000 Hz i amplitudzie SEM 170 V. Indukcyjność cewki jest równa 60 mH, pojemność kondensatora to  $0,4 \,\mu$ F, a opór wynosi 200  $\Omega$ . a) Wyznacz fazę

początkową w radianach. b) Jaka jest amplituda natężenia prądu?

**69** Źródło prądu o częstotliwości 3000 Hz i amplitudzie SEM 120 V jest podłączone do obwodu *RLC* składającego się z opornika 40  $\Omega$ , kondensatora o pojemności 1,6  $\mu$ F i cewki o pojemności 850  $\mu$ F. Wyznacz: a) fazę początkową w radianach, b) amplitudę natężenia prądu. c) Czy obwód ten ma charakter pojemnościowy, indukcyjny, czy też jest w rezonansie?

**70** Cewka o indukcyjności 45 mH ma reaktancję 1,3 kΩ. a) Jaka jest częstotliwość drgań wymuszonych w cewce? b) Ile wynosi pojemność kondensatora, którego reaktancja przy tej samej częstotliwości jest równa reaktancji cewki? Jeżeli częstotliwość drgań wymuszonych zwiększyć dwukrotnie, jakie będą wówczas reaktancje c) cewki oraz d) kondensatora?

**71** Obwód *RLC* jest podłączony do źródła prądu o amplitudzie SEM równej 80 V i amplitudzie natężenia prądu równej 1,25 A. Natężenie prądu wyprzedza SEM o 0,65 rad. Wyznacz a) impedancję oraz b) opór obwodu. c) Czy obwód ten ma charakter pojemnościowy, indukcyjny, czy też jest w rezonansie?

**72** Częstotliwość drgań wymuszonych w obwodzie szeregowym *RLC* jest tak dobrana, że maksymalna wartość różnicy potencjałów na cewce jest 1,5 raza większa od maksymalnej wartości różnicy potencjałów na kondensatorze i 2 razy większa od maksymalnej wartości różnicy potencjałów na oporniku. a) Jaka jest faza  $\phi$  w tym obwodzie? b) Czy obwód ten ma charakter pojemnościowy, indukcyjny, czy też jest w rezonansie? c) Jeżeli opór jest równy 49, 9  $\Omega$ , a amplituda nateżenia prądu wynosi 200 mA, jaka jest amplituda SEM źródła?

**73** Kondensator o pojemności  $158 \,\mu\text{F}$  i cewkę połączono w obwód *LC*, który drga z częstotliwością 8,15 kHz, przy czym amplituda natężenia prądu jest równa 4,21 mA. Wy-znacz a) indukcyjność cewki, b) całkowitą energię zmagazy-nowaną w obwodzie oraz c) maksymalny ładunek na kondensatorze.

74 Drgający obwód *LC* jest zbudowany z cewki o indukcyjności 3 mH i kondensatora o pojemności 10  $\mu$ F. Wyznacz a) częstość kołową drgań oraz b) ich okres. c) W chwili t = 0 ładunek na kondensatorze jest równy 200  $\mu$ C, a natężenie prądu jest zerowe. Naszkicuj wykres przedstawiający ładunek na kondensatorze w funkcji czasu.

**75** W pewnym drgającym obwodzie *RLC* maksymalna wartość SEM źródła to 125 V, a maksymalna wartość natężenia prądu wynosi 3,2 A. Zakładając, że natężenie prądu wyprzedza SEM o 0,982 rad, wyznacz a) impedancję oraz b) opór obwodu. c) Czy obwód ma charakter pojemnościowy, czy indukcyjny?

76 Reaktancja pojemnościowa pewnego kondensatora o pojemności 1,5  $\mu$ F jest równa 12  $\Omega$ . a) Jaka jest częstotliwość

drgań kondensatora? b) Ile będzie wynosić reaktancja pojemnościowa tego kondensatora, jeśli częstotliwość drgań zostanie zwiększona dwukrotnie?

**77** ssm Na rysunku 31.38 przedstawiono źródło prądu trójfazowego przesyłanego za pośrednictwem trzech przewodów. Potencjały na końcach poszczególnych przewodów, mierzone względem tego samego stałego potencjału odniesienia, dane są wyrażeniami:  $V_1 = V_{\text{max}} \sin \omega_w t$  dla przewodu 1,  $V_2 =$  $V_{\text{max}} \sin(\omega_w t - 120^\circ)$  dla przewodu 2 i  $V_3 = V_{\text{max}} \sin(\omega_w t - 240^\circ)$  dla przewodu 3. Niektóre urządzenia elektryczne, takie jak duże silniki stosowane w przemyśle, mają złącza z trzema wtykami i mogą być bezpośrednio podłączone do takich trzech przewodów. W celu zasilania zwykłych urządzeń,

takich jak żarówka, wystarczy podłączyć je do dowolnych dwóch z trzech przewodów. Wykaż, że różnica potencjałów między dowolnymi dwoma przewodami a) drga sinusoidalnie z częstością  $\omega$ oraz b) ma amplitudę  $\sqrt{3}V_{max}$ .



Rys. 31.38. Zadanie 77

**78** Silnik elektryczny podłączony do źródła prądu zmiennego 230 V, 50 Hz wykonuje pracę z szybkością 0,1 KM, gdzie 1 koń mechaniczny = 1 KM = 746 W. a) Jeśli silnik ten pobiera prąd o natężeniu skutecznym 0,65 A, ile wynosi jego efektywny opór przy takim poborze mocy? b) Czy wynik ten jest równy oporowi uzwojenia silnika wyznaczonego omomierzem, gdy silnik jest odłączony od źródła prądu?

**79** ssm a) Jaki ułamek maksymalnego ładunku  $Q_{\text{max}}$  znajduje się na okładkach kondensatora w drgającym obwodzie *LC* w chwili, gdy energia zmagazynowana w polu elektrycznym stanowi 50% energii zmagazynowanej w polu magnetycznym? b) Jaki ułamek okresu drgań upływa do tej chwili od momentu, gdy ładunek zgromadzony na kondensatorze jest maksymalny?

**80** Szeregowy obwód *RLC* jest podłączony do źródła prądu zmiennego o częstotliwości 400 Hz i amplitudzie SEM równej 90 V. W obwodzie tym znajduje się opornik 20  $\Omega$ , kondensator o pojemności 12,1  $\mu$ F i cewka o indukcyjności 24,2 mH. Wyznacz skuteczną różnicę potencjałów a) na oporniku, b) na kondensatorze i c) na cewce. d) Jaka jest średnia szybkość rozpraszania energii w tym obwodzie?

**81** ssm W obwodzie szeregowym *RLC* o częstotliwości drgań wymuszonych równej 60 Hz maksymalna wartość różnicy potencjałów na cewce jest 2 razy większa od maksymalnej wartości różnicy potencjałów na oporniku i 2 razy większa od maksymalnej wartości różnicy potencjałów na kondensatorze. a) O jaką fazę  $\phi$  natężenie prądu opóźnia się względem SEM źródła? b) Jeśli maksymalna wartość SEM źródła jest równa 30 V, jaka powinna być wartość oporu, aby uzyskać maksymalne natężenie prądu równe 300 mA?

**82** W drgającym obwodzie *LC* cewka ma indukcyjność 1,5 mH, a maksymalna wartość energii zmagazynowanej w cewce to 10 μJ. Wyzmacz maksymalną wartość natężenia prądu.

**83** Źródło prądu zmiennego o regulowanej częstotliwości jest podłączone szeregowo do cewki o indukcyjności L = 2,5 mH i kondensatora o pojemności  $C = 3 \mu$ F. Dla jakiej częstotliwości źródła natężenie prądu płynącego w obwodzie jest maksymalne?

**84** Szeregowy obwód *RLC* znajduje się w rezonansie przy częstotliwości drgań wymuszonych równej 6 kHz. Gdy częstotliwość drgań wymuszonych jest równa 8 kHz, obwód ten ma impedancję 1 k $\Omega$  i fazę początkową 45°. Wyznacz a) *R*, b) *L* oraz c) *C* w tym obwodzie.

**85** ssm Obwód *LC* drga z częstotliwością 10,4 kHz. a) Jeśli pojemność kondensatora jest równa  $340 \,\mu\text{F}$ , jaka jest indukcyjność cewki? b) Jeśli maksymalne natężenie prądu w tym obwodzie jest równe 7,2 mA, jaka jest całkowita energia zmagazynowana w obwodzie? c) Jaki jest maksymalny ładunek na kondensatorze?

**86** Silnik elektryczny podłączony do źródła prądu zmiennego o napięciu skutecznym 220 V pobiera prąd o natężeniu skutecznym 3 A. Silnik ten ma opór 24  $\Omega$  i zerową reaktancję pojemnościową. Wyznacz reaktancję indukcyjną tego silnika.

**87** Na rysunku 31.39 przedstawiono obwód zawierający źródło prądu zmiennego 120 V, 60 Hz. Gdy klucz S jest otwarty, natężenie prądu wyprzedza SEM źródła o 20°. Gdy

klucz jest zamknięty w położeniu 1, natężenie prądu opóźnia się względem SEM źródła o 10°. Gdy klucz jest zamknięty w położeniu 2, amplituda natężenia prądu wynosi 2 A. Wyznacz: a) R, b) L, c) C.



Rys. 31.39. Zadanie 87

**88** Drgający obwód *LC* składa się z cewki o indukcyjności L = 8 mH i kondensatora o pojemności  $C = 1,4 \mu$ F. W chwili t = 0 natężenie prądu przyjmuje wartość maksymalną równą 12 mA. a) Wyznacz maksymalny ładunek, jaki gromadzi się na kondensatorze podczas drgań. b) Jaka jest najmniejsza wartość t > 0, dla której szybkość zmian energii w kondensatorze przyjmuje wartość maksymalną? c) Ile wynosi ta maksymalna szybkość?

**89** ssm Dla szeregowego obwodu *RLC* podłączonego do źródła sinusoidalnego prądu zmiennego wykaż, że po zakończeniu jednego pełnego cyklu drgań: a) energia zmagazynowana w kondensatorze jest taka sama jak na początku, b) energia zmagazynowana w cewce jest taka sama jak na początku, c) źródło prądu dostarczyło od początku cyklu energię  $\frac{1}{2}T\mathcal{E}_{max}I_{max}\cos\phi$ , d) na oporniku została od początku cyklu rozproszona energia  $\frac{1}{2}TRI_{max}^2$ . Wykaż, że wielkości podane w (c) i (d) są jednakowe.

**90** Jaka powinna być pojemność kondensatora dołączonego do cewki o indukcyjności 1,3 mH, aby częstotliwość rezonansowa wynosiła 3,5 kHz?

**91** Obwód szeregowy *RLC* o oporze, indukcyjności i pojemności równych, odpowiednio,  $R_1$ ,  $L_1$  i  $C_1$  ma tę samą częstotliwość rezonansową co obwód, w którym wielkości te są równe, odpowiednio,  $R_2$ ,  $L_2$  i  $C_2$ . Wykaż, że jeśli połączysz szeregowo te dwa obwody, to uzyskany obwód będzie miał tę samą częstotliwość rezonansową co każdy z opisanych wyżej podukładów.

**92** Rozważ obwód przedstawiony na rysunku 31.40. Gdy klucz S<sub>1</sub> jest zamknięty, a pozostałe dwa klucze otwarte, stała czasowa obwodu jest równa  $\tau_C$ . Gdy klucz S<sub>2</sub> jest zamknięty, a pozostałe dwa klucze

otwarte, stała czasowa obwodu jest równa  $\tau_L$ . Gdy klucz S<sub>3</sub> jest zamknięty, a pozostałe dwa klucze otwarte, okres drgań obwodu jest równy *T*. Wykaż, że  $T = 2\pi \sqrt{\tau_C \tau_L}$ .





**93** Dla chwili, gdy SEM źródła prądu w obwodzie rozważanym w przykładzie 31.07 jest maksymalna, wyznacz różnice potencjałów: a) na źródle, b) na oporniku, c) na kondensatorze, d) na cewce. e) Dodając powyższe wyniki z odpowiednimi znakami, wykaż, że spełnione jest drugie prawo Kirchhoffa.

# Równania Maxwella: magnetyzm materii

Ζ

Α

Ł



# **32.1.** PRAWO GAUSSA DLA PÓL MAGNETYCZNYCH

32

# Czego się nauczysz?

R

Ζ

D

0

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 32.01 stwierdzić, że najprostszą strukturą magnetyczną jest dipol magnetyczny;
- 32.02 obliczyć strumień magnetyczny  $\Phi_B$ , całkując iloczyn

# Podstawowe fakty

• Najprostszą strukturą magnetyczną jest dipol magnetyczny. Nie stwierdzono istnienia monopoli magnetycznych. Prawo Gaussa dla pól magnetycznych skalarny wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  i skierowanego elementu powierzchni d $\vec{S}$  po powierzchni;

32.03 stwierdzić, że strumień magnetyczny przez powierzchnię Gaussa, która jest powierzchnią zamkniętą, jest równy zeru.

stwierdza, że strumień magnetyczny przez dowolną (zamkniętą) powierzchnię Gaussa jest równy zeru. Z prawa tego wynika, że monopole magnetyczne nie istnieją.

 $\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  (prawo Gaussa dla pól magnetycznych)

# 0 fizyce



**Rys. 32.1.** Niektóre z tuszów do tatuażu zawierają namagnesowane drobinki (fot. Sergei Alesin/Shutterstock)

W tym rozdziale przedstawimy szeroki zakres zagadnień fizycznych, poczynając od nauk podstawowych, do których zalicza się badanie właściwości pola elektrycznego i pola magnetycznego, a kończąc na naukach stosowanych związanych z wykorzystaniem substancji magnetycznych. Na początku tego rozdziału zakończymy omawianie pól elektrycznych i magnetycznych, stwierdzając, że w zasadzie wszystkie prawa fizyki podane w poprzednich jedenastu rozdziałach można zebrać w postaci zaledwie *czterech* równań Maxwella.

Następnie przejdziemy do omawiania właściwości i zastosowań substancji magnetycznych. Wiele badań naukowych dotyczy zrozumienia tego, dlaczego jedne substancje są magnetyczne, a inne nie oraz jak można by ulepszyć istniejące substancje magnetyczne. Zajmujący się tymi badaniami naukowcy i inżynierowie zastanawiają się, dlaczego, na przykład, Ziemia wytwarza pole magnetyczne, a twoje ciało — nie, oraz znajdują niezliczone zastosowana tanich substancji magnetycznych, choćby w samochodach, kuchniach, biurach i szpitalach. Właściwości magnetyczne substancji niekiedy dają o sobie znać w nieoczekiwanych sytuacjach: na przykład, jeśli masz tatuaż i poddasz się badaniu z użyciem rezonansu magnetycznego, silne pola magnetyczne występujące w skanerach mogą zauważalnie napinać twoją skórę, gdyż niektóre tusze do tatuażu zawierają namagnesowane drobinki. Jedna z reklam zachwala natomiast pewne płatki śniadaniowe jako "pełne żelaza", gdyż zawierają one maleńkie kawałeczki tego metalu. Ponieważ drobiny te mają właściwości magnetyczne, można je wydobyć z namoczonych w wodzie lub mleku płatków, przesuwając nad talerzem magnes.

Na początek zajmiemy się jednak prawem Gaussa, ale tym razem w odniesieniu do pól magnetycznych.

# Prawo Gaussa dla pól magnetycznych

Na rysunku 32.2 przedstawiono opiłki żelaza rozsypane na przezroczystej tafli znajdującej się tuż nad magnesem sztabkowym. Opiłki zachowują się w szczególny sposób: ustawiają się zgodnie z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej pola pochodzącego od magnesu, pokazując przebieg linii pola magnetycznego. Linie te wychodzą z jednego końca magnesu, a zbiegają się w drugim końcu. Zgodnie z umową, źródło linii nazywamy *biegunem północnym* magnesu, a przeciwny koniec – *biegunem południowym*. Możemy powiedzieć, że magnes, ze względu na dwa bieguny, jest przykładem **dipola magnetycznego**.

Wyobraź sobie teraz, że łamiemy magnes sztabkowy w taki sposób, w jaki można złamać kawałek kredy (rys. 32.3). Wydawałoby się, że możemy wyodrębnić w ten sposób pojedynczy biegun magnetyczny, który można by nazwać *monopolem magnetycznym*. Jednakże nie potrafimy tego zrobić, nawet gdybyśmy podzielili magnes na pojedyncze atomy, a następnie na elektrony i jądra atomowe. Każda część ma biegun północny i południowy. Tak więc:

 $\bigcirc$ 

Najprostszą strukturą magnetyczną, która może istnieć, jest dipol magnetyczny. Nie stwierdzono istnienia monopoli magnetycznych.

To, że monopole magnetyczne nie istnieją, wynika z prawa Gaussa. Zgodnie z tym prawem, wypadkowy strumień magnetyczny  $\Phi_B$  przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest równy zeru:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{(prawo Gaussa dla pól magnetycznych).}$$
(32.1)

Porównajmy to prawo z prawem Gaussa dla pól elektrycznych:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{wewn}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(prawo Gaussa dla pól elektrycznych)}.$$

W obydwu równaniach całka jest obliczana po *zamkniętej* powierzchni Gaussa. Z prawa Gaussa dla pól elektrycznych wynika, że ta całka (równa wypadkowemu strumieniowi elektrycznemu przenikającemu przez powierzchnię) jest proporcjonalna do wypadkowego ładunku elektrycznego  $q_{\rm wewn}$  znajdującego się wewnątrz powierzchni. Z prawa Gaussa dla



**Rys. 32.2.** Magnes sztabkowy jest dipolem magnetycznym. Opiłki żelaza pokazują kształt linii pola magnetycznego (fot. Awe Inspiring Images/Shutterstock)



**Rys. 32.3.** Po złamaniu magnesu sztabkowego każdy jego fragment staje się osobnym magnesem mającym biegun północny i południowy



**Rys. 32.4.** Linie pola magnetycznego krótkiego magnesu sztabkowego. Krzywe zamknięte zaznaczone na czerwono są przekrojami trójwymiarowych powierzchni Gaussa pól magnetycznych wynika natomiast, że wypadkowy strumień magnetyczny przenikający przez powierzchnię zamkniętą jest równy zeru, gdyż nie ma wypadkowego "ładunku magnetycznego", czyli pojedynczych biegunów magnetycznych otoczonych przez tę powierzchnię. Najprostszą strukturą magnetyczną, która może istnieć, a więc znajdować się wewnątrz powierzchni Gaussa, jest dipol złożony zarówno ze źródła linii pola, jak i miejsca, do którego linie pola zbiegają. Zatem zawsze tyle samo strumienia magnetycznego wpływa do obszaru ograniczonego powierzchnią, ile z niego wypływa, a wypadkowy strumień magnetyczny musi zawsze równać się zeru.

Prawo Gaussa dla pól magnetycznych obowiązuje także dla struktur bardziej skomplikowanych niż dipol magnetyczny. Jest ono słuszne nawet wtedy, gdy powierzchnia Gaussa nie obejmuje całego układu. Powierzchnia Gaussa II w pobliżu magnesu sztabkowego na rysunku 32.4 nie obejmuje żadnych biegunów i możesz z łatwością zauważyć, że wypadkowy strumień magnetyczny przenikający przez tę powierzchnię jest równy zeru. Powierzchnia Gaussa I sprawia więcej trudności. Mogłoby się wydawać, że otacza ona tylko północny biegun magnesu, gdyż obejmuje tylko jego górną część, a nie obejmuje dolnej. Jednakże dolnej granicy powierzchni musimy przypisać biegun południowy, gdyż linie pola magnetycznego tam właśnie dochodzą. (Część magnesu otoczona powierzchnią przypomina kawałek złamanego magnesu na rysunku 32.3). Tak więc w rzeczywistości powierzchnia Gaussa I obejmuje dipol magnetyczny, a wypadkowy strumień magnetyczny przez powierzchnię jest równy zeru.



# **32.2.** INDUKOWANE POLE MAGNETYCZNE

Uszereguj powierzchnie

# Czego się nauczysz?

ale zgodne ze soba.

największej wartości.

Sprawdzian 1

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

32.04 stwierdzić, że zmienne pole elektryczne wytwarza pole magnetyczne;

Na rysunku przedstawiono cztery zamknięte po-

wierzchnie o płaskich ścianach górnych (g) i dol-

nych (d) i zakrzywionych ścianach bocznych.

W tabeli podano wartości pól powierzchni S

ścian górnych i dolnych oraz wartości *B* indukcji magnetycznej jednorodnych pól przecinających prostopadle te ściany. Jednostki *S* i *B* są dowolne,

pod względem wartości strumienia magnetycznego przenikającego ściany boczne, zaczynając od

- 32.05 zastosować związek między indukowanym polem magnetycznym wzdłuż zamkniętego konturu a szybkością zmiany strumienia elektrycznego przez powierzchnię ograniczoną tym konturem;
- 32.06 naszkicować linie indukowanego pola magnetycznego w ładowanym kondensatorze o kołowych okładkach, określając kierunki wektorów pola elektrycznego i magnetycznego;
- 32.06 zastosować uogólnione prawo Ampère'a dla dowolnej sytuacji, w której indukowane jest pole magnetyczne.

#### Podstawowe fakty

• Zmienny strumień pola elektrycznego wytwarza pole magnetyczne *B*. Odpowiednie prawo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \text{(indukowane pole magnetyczne)}.$$

podaje związek między indukowanym polem magnetycznym wzdłuż zamkniętego konturu a szybkością zmian strumienia elektrycznego  $\Phi_E$  przez obszar ograniczony tym konturem.

# Indukowane pole magnetyczne

W rozdziale 30 dowiedzieliśmy się, że zmienny strumień magnetyczny indukuje pole elektryczne, i otrzymaliśmy prawo indukcji Faradaya w postaci

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (\text{prawo indukcji Faradaya}). \qquad (32.2)$$

Wektor  $\vec{E}$  jest tutaj natężeniem pola elektrycznego indukowanego wzdłuż zamkniętego konturu przez zmienny strumień magnetyczny  $\Phi_B$  objęty tym konturem. Właściwości symetrii są bardzo ważne w fizyce, dlatego też mamy ochotę zapytać, czy zjawisko indukcji może zachodzić w przeciwnym kierunku, tzn. czy zmienny strumień elektryczny może indukować pole magnetyczne?

Odpowiedź jest twierdząca; co więcej, równanie opisujące indukowanie pola magnetycznego jest niemal symetrycznym odbiciem równania (32.2). Możemy je zapisać jako

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \text{(indukowane pole magnetyczne).} \quad (32.3)$$

Wektor  $\vec{B}$  jest tutaj indukcją magnetyczną pola indukowanego wzdłuż zamkniętego konturu przez zmienny strumień elektryczny  $\Phi_E$  objęty tym konturem.

*Ładowanie kondensatora.* Jako przykład tego typu zjawiska indukcji rozważymy proces ładowania kondensatora płaskiego o kołowych okładkach (rys. 32.5a). (Chociaż skupimy się teraz na tym szczególnym układzie, zmienny strumień elektryczny, kiedykolwiek się pojawi, będzie zawsze indukował pole magnetyczne). Zakładamy, że ładunek na okładkach naszego kondensatora zwiększa się ze stałą szybkością dzięki przepływowi w jego doprowadzeniach prądu stałego o natężeniu *I*. Zatem wartość natężenia pola elektrycznego między okładkami musi również rosnąć ze stałą szybkością.

Na rysunku 32.5b przedstawiono prawą okładkę kondensatora z rysunku 32.5a, widzianą od strony obszaru między okładkami. Natężenie pola elektrycznego jest skierowane za płaszczyznę rysunku. Rozważmy kontur w kształcie okręgu, przechodzący przez punkt 1, taki że środek konturu leży na osi łaczącej środki okładek kondensatora, a promień konturu jest mniejszy od promienia okładek. Ponieważ natężenie pola elektrycznego przechodzącego przez kontur zmienia się, musi się zmieniać również strumień elektryczny przechodzący przez ten kontur. Zgodnie z równaniem (32.3) ten zmienny strumień indukuje pole magnetyczne wzdłuż konturu.

• Prawo Ampère'a  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p$  określa, jakie pole magnetyczne  $\vec{B}$  jest wytwarzane wzdłuż konturu całkowania przez prąd o natężeniu  $I_p$  przepływający przez powierzchnię ograniczoną tym konturem. Uogólnione prawo Ampère'a ma następującą postać:

 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p \quad (\text{uogólnione prawo Ampère'a}).$ 





przedstawione tu indukowane pole  $\vec{E}$ jest skierowane przeciwnie do indukowanego pola  $\vec{B}$ na poprzednim rysunku



**Rys. 32.6.** Jednorodne pole magnetyczne  $\vec{B}$  w obszarze w kształcie koła. Pole jest skierowane za płaszczyznę rysunku, a jego indukcja rośnie. Pole elektryczne  $\vec{E}$  indukowane przez zmienne pole magnetyczne jest pokazane w czterech punktach leżących na okręgu współśrodkowym z kołowym obszarem. Porównaj ten przypadek z przypadkiem przedstawionym na rysunku 32.5b

Można wykazać doświadczalnie, że pole magnetyczne  $\vec{B}$  istotnie jest indukowane wzdłuż takiego konturu i skierowane tak jak pokazano na rysunku. Indukcja magnetyczna tego pola ma taką samą wartość w każdym punkcie konturu, ma więc symetrię *walcową* wokół osi kondensatora.

Jeżeli teraz rozważymy większy kontur — przechodzący np. przez punkt 2 na zewnątrz okładek na rysunku 32.5a i b — to przekonamy się, że pole magnetyczne będzie indukowane również wzdłuż tego konturu. Zatem gdy pole elektryczne się zmienia, pole magnetyczne jest indukowane między okładkami, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz szczeliny kondensatora. Gdy pole elektryczne przestaje się zmieniać, indukowane pole magnetyczne znika.

Choć równanie (32.3) jest podobne do równania (32.2), równania te różnią się pod dwoma względami. Po pierwsze, w równaniu (32.3) występują dwie dodatkowe wielkości  $\mu_0$  i  $\varepsilon_0$ , ale ich obecność jest wyłącznie skutkiem tego, że używamy jednostek układu SI. Po drugie, w równaniu (32.3) nie ma znaku minus, który występuje w równaniu (32.2). Oznacza to, że indukowane pole elektryczne  $\vec{E}$  jest skierowane przeciwnie niż indukowane pole magnetyczne  $\vec{B}$  wytwarzane w podobnych warunkach. Aby zauważyć tę różnicę, przypatrzmy się rysunkowi 32.6, na którym rosnące pole magnetyczne  $\vec{E}$ , skierowane za płaszczyznę rysunku, indukuje pole elektryczne  $\vec{E}$ . Indukowane pole  $\vec{E}$  jest skierowane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a więc przeciwnie do kierunku indukowanego pola  $\vec{B}$ na rysunku 32.5b.

# Uogólnione prawo Ampère'a

Przypomnij sobie teraz, że lewa strona równania (32.3), czyli całka z iloczynu skalarnego  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  wzdłuż zamkniętego konturu, pojawia się również w innym równaniu, a mianowicie w prawie Ampère'a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \qquad \text{(prawo Ampère'a)}, \qquad (32.4)$$

gdzie  $I_p$  jest natężeniem prądu objętego konturem całkowania. Zatem nasze dwa równania, które opisują pole magnetyczne  $\vec{B}$  wytworzone sposobami innymi niż użycie materiału magnetycznego (tzn. przez przepływ prądu lub zmienne pole elektryczne) zawierają pole magnetyczne wyrażone dokładnie w tej samej postaci. Możemy więc połączyć te dwa równania, otrzymując

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p \qquad (\text{uogólnione prawo Ampère'a}).$$
(32.5)

Gdy istnieje prąd, a nie ma zmiany strumienia elektrycznego (jak w przypadku przewodu, w którym płynie prąd stały), pierwszy składnik po prawej stronie równania (32.5) jest równy zeru, a równanie (32.5) redukuje się do prawa Ampère'a (32.4). Gdy zmienia się strumień elektryczny, ale nie płynie prąd (jak wewnątrz lub na zewnątrz szczeliny ładowanego kondensatora), drugi składnik po prawej stronie równania (32.5) jest równy zeru, a równanie (32.5) redukuje się do równania indukcji (32.3).

# Sprawdzian 2

Na rysunku przedstawiono wykresy natężenia pola elektrycznego E jako funkcji czasu t dla czterech przypadków jednorodnych pól elektrycznych istniejących wewnątrz identycznych obszarów w kształcie koła, pokazanych na rysunku 32.5b. Uszereguj pola pod względem wartości indukcji magnetycznej pól indukowanych na brzegu obszaru, zaczynając od największej wartości.



# Przykład 32.01. Pole magnetyczne wytwarzane przez zmienne pole elektryczne

Kondensator płaski o kołowych okładkach jest tak ładowany, jak pokazano na rysunku 32.5a.

a) Wyprowadź wzór określający indukcję magnetyczną pola w odległości r od osi symetrii dla  $r \leq R$ .

# **PODSTAWOWE FAKTY**

Pole magnetyczne może powstać w wyniku przepływu prądu albo w wyniku indukcji spowodowanej zmiennym strumieniem elektrycznym. Obydwa zjawiska są uwzględnione w równaniu (32.5). Między okładkami kondensatora na rysunku 32.5 nie płynie prąd, ale zmienia się tam strumień elektryczny. Zatem równanie (32.5) redukuje się do postaci

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$
(32.6)

Obliczymy oddzielnie lewą i prawą stronę równania (32.6).

*Lewa strona równania* (32.6): Wybieramy kołowy kontur całkowania o promieniu  $r \leq R$ , pokazany na rysunku 32.5, gdyż chcemy obliczyć indukcję magnetyczną dla  $r \leq R$ , tzn. wewnątrz kondensatora. Wektor indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  jest w każdym punkcie styczny do konturu, podobnie jak wektorowy element długości d $\vec{s}$ . Zatem  $\vec{B}$  i d $\vec{s}$  są albo równoległe, albo antyrównoległe w każdym punkcie konturu. Dla uproszczenia załóżmy, że są one równoległe (ten wybór nie zmienia wyniku końcowego)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds \cos 0^\circ = \oint B ds$$

Dzięki osiowej symetrii okładek możemy także przyjąć, że  $\vec{B}$  ma taką samą wartość w każdym punkcie konturu. Ta więc możemy wynieść *B* przed znak całki po prawej stronie powyższego równania. Całka, która pozostaje, jest równa  $\oint ds$ , czyli po prostu obwodowi  $2\pi r$  konturu. Lewa strona równania (32.6) jest więc równa (*B*)( $2\pi r$ ).

**Prawa strona równania** (32.6): Zakładamy, że pole elektryczne  $\vec{E}$  jest jednorodne między okładkami kondensatora i skierowane prostopadle do okładek. Wtedy strumień elektryczny  $\Phi_E$  przenikający przez kontur jest równy *ES*, gdzie *S* jest polem powierzchni objętej konturem znajdującym się w polu elektrycznym. Tak więc prawa strona równania (32.6) jest równa  $\mu_0 \varepsilon_0 d(ES)/dt$ .

**Zestawienie wyników:** Podstawiając do równania (32.6) wyniki dla lewej i prawej strony, otrzymujemy

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}(ES)}{\mathrm{d}t}.$$

Ponieważ S jest stałe, możemy zapisać d(ES) jako SdE, więc

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 S \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$
 (32.7)

Pole powierzchni *S* ograniczone konturem znajdującym się w polu elektrycznym jest równe całemu polu  $\pi r^2$  wewnątrz konturu, gdyż promień konturu *r* jest mniejszy od promienia okładki *R* (lub jemu równy). Podstawiając *S* równe  $\pi r^2$  do równania (32.7) i wyznaczając *B*, otrzymujemy dla  $r \leq R$ 

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{odpowied} \acute{z}). \quad (32.8)$$

Z tego równania wynika, że wewnątrz kondensatora wartość *B* rośnie liniowo wraz ze wzrostem odległości od osi *r*, od zera w środku okładki aż do wartości maksymalnej przy brzegu okładki (gdy r = R).

**b**) Oblicz wartość indukcji *B* dla r = R/5 = 11 mm i d $E/dt = 1.5 \cdot 10^{12}$  V/(m · s).

Obliczenia: Z odpowiedzi do punktu (a) mamy

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 r \frac{dE}{dt}$$
  
=  $\frac{1}{2}(4\pi \cdot 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m/A})(8,85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))$   
×  $(11 \cdot 10^{-3} \text{ m})(1,5 \cdot 10^{12} \text{ V}/(\text{m} \cdot \text{s}))$   
=  $9,18 \cdot 10^{-8} \text{ T}$  (odpowiedź).

c) Wyprowadź wzór określający wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola dla  $r \ge R$ .

**Obliczenia:** Postępujemy tak, jak w punkcie (a), z tym że teraz wybieramy kontur o promieniu r większym od promienia okładek R, gdyż chcemy wyznaczyć indukcję B na zewnątrz kondensatora. Obliczając lewą i prawą stronę równania (32.6), znów otrzymujemy równanie (32.7). Jednak teraz powinieneś zauważyć, że pole elektryczne istnieje tylko między okładkami kondensatora, a nie na zewnątrz okładek. Zatem pole powierzchni S ograniczone konturem w polu elektrycznym *nie* jest równe całemu polu  $\pi r^2$  wewnątrz konturu, ale jest równe polu powierzchni okładek  $\pi R^2$ .

Podstawiając  $\pi R^2$  zamiast *S* do równania (32.7) i rozwiązując je względem *B*, otrzymujemy dla  $r \ge R$ 

# 32.3. PRĄD PRZESUNIĘCIA

# Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 32.08 stwierdzić, że w uogólnionym prawie Ampère'a pole magnetyczne indukowane wskutek zmian strumienia elektrycznego można sobie wyobrażać jako pochodzące od przepływu fikcyjnego prądu (prądu przesunięcia);
- 32.09 stwierdzić, że dla ładowanego lub rozładowywanego kondensatora prąd przesunięcia można przyjąć za jednorodny w obszarze między okładkami kondensatora;
- 32.10 zastosować związek między szybkością zmian strumienia magnetycznego i odpowiadającym jej prądem przesunięcia;
- 32.11 zastosować związek między prądem przesunięcia a rzeczywistym prądem płynącym podczas ładowania lub rozładowywania kondensatora i stwierdzić, że prąd przesunięcia występuje jedynie wówczas, gdy zmienia się pole elektryczne w kondensatorze;

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{odpowied}\dot{z}). \quad (32.9)$$

Z równania tego wynika, że na zewnątrz kondensatora *B* maleje wraz ze wzrostem odległości *r* od osi, przyjmując wartość maksymalną przy brzegu okładki (gdzie r = R). Podstawiając r = R do równań (32.8) i (32.9), możemy stwierdzić, że te równania są ze sobą zgodne, tzn. dają taką samą maksymalną wartość indukcji *B* na brzegu okładki.

Wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola obliczona w punkcie (b), jest tak mała, że z trudem może być zmierzona za pomocą zwykłych przyrządów. W przeciwieństwie do tego, wartości natężeń indukowanych (zgodnie z prawem Faradaya) pól elektrycznych mogą być łatwo zmierzone. Ta różnica w możliwościach pomiarowych istnieje częściowo dlatego, że indukowana SEM może być łatwo zwielokrotniona przez zastosowanie cewki o wielu zwojach. Nie istnieje równie prosta metoda, która umożliwiałaby zwielokrotnienie indukowanego pola magnetycznego. Jednakże doświadczenie przedstawione w tym przykładzie zostało wykonane, a obecność indukowanego pola magnetycznego została ilościowo potwierdzona.

- 32.12 zapisać (i zastosować) równania opisujące pole magnetyczne wewnątrz i na zewnątrz obszaru, w którym płynie prąd przesunięcia, wykorzystując ich podobieństwo do odpowiednich równań dla pola magnetycznego wytwarzanego wskutek przepływu prądu;
- 32.13 zastosować uogólnione prawo Ampère'a do wyznaczenia pola magnetycznego wytwarzanego wskutek przepływu rzeczywistego prądu i prądu przesunięcia;
- 32.14 naszkicować linie pola magnetycznego indukowanego wskutek przepływu prądu przesunięcia w ładowanym lub rozładowywanym kondensatorze o równoległych okładkach kołowych;
- 32.15 podać równania Maxwella i określić, kiedy stosuje się każde z nich.

#### Podstawowe fakty

 Dla zmiennego w czasie strumienia elektrycznego można zdefiniować fikcyjny prąd przesunięcia

$$I_{\mathrm{prz}} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d} \varPhi_E}{\mathrm{d} t}$$
 (natężenie prądu przesunięcia).

Uogólnione prawo Ampère'a można wówczas zapisać jako

 $\oint \vec{B} \cdot {\rm d}\vec{s} = \mu_0 I_{\rm prz,\,p} + \mu_0 I_p \qquad ({\rm uogólnione\ prawo\ Ampère'a}),$ 

gdzie  $I_{\rm prz,p}$  jest natężeniem prądu przesunięcia objętego konturem całkowania.

 Idea prądu przesunięcia pozwala nam zachować obraz, wedle którego wewnątrz kondensatora nie ma przerwy w przepływie prądu. Jednakże prąd przesunięcia nie polega na przemieszczaniu ładunków.

 Równania Maxwella, zestawione w tabeli 32.1, opisują zjawiska elektromagnetyczne i stanowią podstawę elektromagnetyzmu, włączając w to optykę.

# Prąd przesunięcia

Jeśli porównamy dwa składniki po prawej stronie równania (32.5), to zobaczymy, że iloczyn  $\varepsilon_0(d\Phi_E/dt)$  musi mieć wymiar natężenia prądu. Rzeczywiście, ten iloczyn jest traktowany jako natężenie  $I_{prz}$  fikcyjnego prądu, zwanego **prądem przesunięcia**:

$$I_{\rm prz} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}$$
 (natężenie prądu przesunięcia). (32.10)

"Przesunięcie" nie jest dobrym określeniem, gdyż nic tu nie zostaje przesunięte, ale używamy tego słowa zwyczajowo. Możemy zatem napisać równanie (32.5) w postaci

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{prz},p} + \mu_0 I_p \qquad (\text{uogólnione prawo Ampère'a}), \quad (32.11)$$

gdzie  $I_{\text{prz,p}}$  jest natężeniem prądu przesunięcia objętego konturem całkowania.

Zwróć ponownie uwagę na proces ładowania kondensatora o kołowych okładkach, taki jak pokazano na rysunku 32.7a. Rzeczywisty prąd o natężeniu *I*, który ładuje okładki, powoduje zmianę natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  między okładkami. Fikcyjny prąd przesunięcia o natężeniu  $I_{\text{prz}}$  występujący między okładkami jest związany z tym zmieniającym się polem  $\vec{E}$ . Spróbujmy znaleźć zależność między natężeniami tych prądów.

Ładunek q znajdujący się w pewnej chwili na okładkach jest związany równaniem (25.4) z wartością natężenia E pola między okładkami w tej samej chwili:

$$q = \varepsilon_0 SE, \tag{32.12}$$

gdzie *S* jest polem powierzchni okładek. Aby otrzymać natężenie rzeczywistego prądu *I*, różniczkujemy równanie (32.12) względem czasu

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = I = \varepsilon_0 S \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$
(32.13)

Aby otrzymać natężenie prądu przesunięcia  $I_{prz}$ , korzystamy z równania (32.10). Zakładając, że pole elektryczne  $\vec{E}$  między dwiema okładkami jest jednorodne (pomijamy jakiekolwiek pola rozproszone), możemy zastąpić strumień elektryczny  $\Phi_E$  w tym równaniu przez wyrażenie *ES*. Zatem równanie (32.10) przybiera postać

$$I_{\rm prz} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}(ES)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 S \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$
 (32.14)





*Identyczne wartości.* Porównując równania (32.13) i (32.14), widzimy, że natężenie fikcyjnego prądu przesunięcia  $I_{prz}$  między okładkami jest równe natężeniu rzeczywistego prądu *I* ładującego kondensator:

 $I_{\text{prz}} = I$  (natężenie prądu przesunięcia w kondensatorze). (32.15)

Tak więc możemy traktować fikcyjny prąd przesunięcia o natężeniu  $I_{prz}$  po prostu jako kontynuację rzeczywistego prądu o natężeniu I z jednej okładki, przez szczelinę kondensatora, do drugiej okładki. Pole elektryczne jest równomiernie rozłożone na powierzchni okładek, a więc to samo można powiedzieć o natężeniu fikcyjnego prądu przesunięcia  $I_{prz}$ , co pokazuje ułożenie strzałek prądu na rysunku 32.7b. Chociaż w rzeczywistości żaden ładunek nie przechodzi przez szczelinę między okładkami, pojęcie fikcyjnego prądu przesunięcia  $I_{prz}$  jest przydatne do szybkiego wyznaczania kierunku i wartości indukcji magnetycznej indukowanego pola. Przekonamy się o tym w dalszej części podrozdziału.

# Wyznaczanie indukowanego pola magnetycznego

W rozdziale 29, stosując regułę prawej dłoni (rys. 29.5), wyznaczyliśmy kierunek wektora indukcji magnetycznej pola wytworzonego przez rzeczywisty prąd o natężeniu *I*. Możemy zastosować tę samą regułę do wyznaczenia kierunku wektora indukcji magnetycznej indukowanego pola wy-

tworzonego przez fikcyjny prąd przesunięcia o natężeniu  $I_{prz}$ , tak jak pokazano na rysunku 32.7c w przypadku kondensatora.

Możemy również zastosować  $I_{prz}$  do wyznaczenia wartości indukcji magnetycznej pola indukowanego podczas ładowania kondensatora płaskiego, składającego się z równoległych, kołowych okładek o promieniu *R*. Po prostu traktujemy obszar między okładkami jako hipotetyczny przewód o przekroju kołowym i promieniu *R*, w którym płynie fikcyjny prąd o natężeniu  $I_{prz}$ . Z równania (29.20) wynika, że wartość indukcji magnetycznej w punkcie znajdującym się wewnątrz kondensatora, w odległości *r* od osi jest równa

$$B = \left(\frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{2\pi R^2}\right) r \qquad \text{(wewnątrz kondensatora o kołowych okładkach).}$$
(32.16)

Podobnie z równania (29.17) wynika, że wartość indukcji magnetycznej pola w punkcie znajdującym się na zewnątrz kondensatora w odległości r od osi jest równa

$$B = \frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{2\pi r} \qquad \text{(na zewnątrz kondensatora o kołowych okładkach).}$$
(32.17)

Na rysunku przestawiono jedną okładkę kondensatora płaskiego, widzianą z wnętrza kondensatora. Linie przerywane oznaczają cztery kontury całkowania (kontur *b* biegnie wzdłuż brzegu okładki). Uszereguj kontury pod względem wartości całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  wzdłuż konturu, obliczonej podczas rozładowania kondensatora, zaczynając od największej wartości.



# Przykład 32.02. Zmienne pole elektryczne jako prąd przesunięcia

Kondensator płaski, którego okładki są kołami o promieniu *R*, jest ładowany prądem o natężeniu *I*.

a) Jaka jest wartość całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  w obszarze między okładkami i w odległości r = R/5 od środka, wyrażona przez  $\mu_0$  i *I*?

# PODSTAWOWE FAKTY

Pole elektryczne może być wytwarzane wskutek przepływu prądu lub wskutek zmian strumienia elektrycznego (wzór (32.5)). Między okładkami kondensatora przedstawionego na rysunku 32.5 natężenie prądu jest równe zeru, a zmienny strumień elektryczny możemy zastąpić fikcyjnym prądem przesunięcia. Wówczas całka  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  jest dana równaniem (32.11). Rzeczywisty prąd o natężeniu *I* nie płynie jednak między okładkami, dlatego też równanie to redukuje się do postaci

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{prz,p}}.$$
(32.18)

**Obliczenia:** Chcemy obliczyć  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  dla promienia r = R/5 (wewnątrz kondensatora), więc kontur całkowania obejmuje tylko część  $I_{\text{prz,p}}$  całkowitego natężenia prądu  $I_{\text{prz}}$ . Zakładamy, że prąd o natężeniu  $I_{\text{prz}}$  jest

równomiernie rozłożony na całej powierzchni okładki. Zatem część natężenia prądu przesunięcia objętego konturem jest proporcjonalna do pola powierzchni objętej tym konturem:

$$\frac{\begin{pmatrix} \text{natężenie prądu przesunięcia} \\ I_{\text{prz,p}} \text{objętego konturem} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \text{całkowite natężenie} \\ \text{prądu przesunięcia} I_{\text{prz}} \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} \text{pole powierzchni} \\ \text{objętej konturem } \pi r^2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \text{całkowite pole powie-} \\ \text{rzchni okładek } \pi R^2 \end{pmatrix}}.$$

Stąd

$$I_{\text{prz},p} = I_{\text{prz}} \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (32.18), otrzymujemy

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$
 (32.19)

Podstawienie  $I_{\text{prz}} = I$  (z równania (32.15)) oraz r = R/5 do równania (32.19) prowadzi teraz do

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \frac{(R/5)^2}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{25} \qquad (\text{odpowied} \acute{z}).$$

**b**) Jaka jest wartość indukcji magnetycznej pola indukowanego w punkcie r = R/5 wewnątrz kondensatora wyrażona przez maksymalną wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola?



# Równania Maxwella

Równanie (32.5) jest ostatnim spośród czterech podstawowych równań elektromagnetyzmu, nazywanych *równaniami Maxwella* i przedstawionych w tabeli 32.1. Te cztery równania wyjaśniają zjawiska w bardzo zróżnicowanym zakresie, poczynając od pytania, dlaczego kompas wskazuje kierunek północny, a kończąc na pytaniu, dlaczego samochód rusza, gdy przekręcisz kluczyk w stacyjce. Równania te są podstawą działania takich urządzeń elektromagnetycznych, jak: silnik elektryczny, nadajnik i odbiornik telewizyjny, telefon, skaner, radar i kuchenka mikrofalowa.

Równania Maxwella są podstawą do wyprowadzenia wielu równań, z którymi już się zetknęliśmy, począwszy od rozdziału 21. Są one również punktem wyjścia wielu równań, będących wprowadzeniem do optyki, a które będą omówione w rozdziałach od 33 do 36.

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

Kondensator ma równoległe kołowe okładki, a więc możemy potraktować obszar między okładkami jako fikcyjny przewód o promieniu R, w którym płynie fikcyjny prąd o natężeniu  $I_{prz}$ . Następnie możemy skorzystać z równania (32.40), aby wyznaczyć wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola w dowolnym punkcie wewnątrz kondensatora.

**Obliczenia:** Dla r = R/5, ze wzoru (32.16) otrzymujemy

$$B = \left(\frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{2\pi R^2}\right) r = \frac{\mu_0 I_{\text{prz}}(R/5)}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{10\pi R}.$$
 (32.20)

Ze wzoru (32.16) widać, że maksymalna wartość indukcji magnetycznej  $B_{\text{max}}$  występuje dla r = R i jest równa

$$B_{\text{max}} = \left(\frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{2\pi R^2}\right) R = \frac{\mu_0 I_{\text{prz}}}{2\pi R}.$$
 (32.21)

Dzieląc równanie (32.20) przez równanie (32.21) i przekształcając wynik, otrzymujemy

$$B = \frac{B_{\text{max}}}{5} \qquad (\text{odpowied}\hat{z}).$$

Ten sam wynik moglibyśmy otrzymać za pomocą prostego rozumowania przy mniejszym nakładzie pracy. Z równania (32.16) wynika, że wewnątrz kondensatora indukcja *B* rośnie liniowo wraz z *r*. Dlatego w punkcie położonym w odległości równej  $\frac{1}{5}$  promienia okładki *R*, gdzie występuje *B*<sub>max</sub>, indukcja *B* powinna być równa  $\frac{1}{5}B_{max}$ .

#### Tabela 32.1. Równania Maxwella<sup>1</sup>

Nazwa	Równanie	
prawo Gaussa dla elektryczności	$\oint \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{S} = q_{\rm wewn}/\varepsilon_0$	wiąże wypadkowy strumień elektryczny z wypadkowym ładunkiem elektrycznym objętym powierzchnią Gaussa
prawo Gaussa dla magnetyzmu	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	wiąże wypadkowy strumień magnetyczny z wypadkowym ładunkiem magnetycznym objętym powierzchnią Gaussa
prawo Faradaya	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	wiąże indukowane pole elektryczne ze zmiennym strumieniem magnetycznym
uogólnione prawo Ampère'a	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_{\rm p}$	wiąże indukowane pole magnetyczne ze zmiennym strumieniem elektrycznym oraz z prądem

<sup>1</sup>Zapisane przy założeniu, że nie występują materiały dielektryczne ani magnetyczne.

# **32.4.** MAGNESY

# Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał 32.16 opisać, czym są magnetyty;	niu polem dipola magnetycznego, i określić, na której półkuli znajduje się północny biegun geomagnetyczny;
32.17 stwierdzić, że pole magnetyczne Ziemi jest w przybliże-	32.18 opisać deklinację i inklinację magnetyczną.
Podstawowe fakty	
<ul> <li>Ziemia jest w przybliżeniu dipolem magnetycznym; oś tego dipola jest nieco odchylona od osi obrotu Ziemi, a południowy biegun dipola znajduje się na półkuli północnej.</li> </ul>	<ul> <li>Kierunek lokalnego pola magnetycznego jest opisywany deklinacją magnetyczną (kątem odchylenia od geograficznej północy) i inklinacją magnetyczną (kątem odchylenia od po- ziomu).</li> </ul>

# Magnesy

Pierwszymi znanymi magnesami były kawałki *magnetytu*, czyli minerału, który został *namagnesowany* w sposób naturalny. Gdy starożytni Grecy i Chińczycy odkryli ten rzadko występujący minerał, wydało im się zabawne, że magnetyt może w magiczny sposób przyciągać kawałki metalu. Jednak dopiero znacznie później nauczono się wykorzystywać magnetyt (a także namagnesowane kawałki żelaza) do określania kierunku za pomocą kompasu.

Dzisiaj magnesy i materiały magnetyczne są obecne wszędzie. Właściwości magnetyczne materiałów pochodzą od ich struktury atomowej i elektronowej. Gdy używasz taniego magnesu do przytrzymywania karteczki na drzwiach lodówki, korzystasz właśnie z fizyki kwantowych oddziaływań atomów i subatomowych składników materii, z której zbudowany jest magnes. Zanim jednak zajmiemy się tą fizyką, przyjrzyjmy się bliżej największemu magnesowi, z którego na co dzień korzystamy, a mianowicie Ziemi.

# Magnetyzm ziemski

Ziemia jest ogromnym magnesem; w miejscach znajdujących się w pobliżu powierzchni Ziemi pole magnetyczne może być traktowane w przybliżeniu



**Rys. 32.8.** Pole magnetyczne Ziemi przedstawione jako pole dipola. Oś dipola *MM* tworzy kąt 11,5° z osią obrotu Ziemi *RR*. Południowy biegun dipola znajduje się na półkuli północnej

jako pole pochodzące od wielkiego magnesu sztabkowego (dipola magnetycznego), który usadowił się w środku naszej planety. Na rysunku 32.8 w sposób uproszczony zilustrowano symetryczne pole dipola bez uwzględnienia zniekształceń spowodowanych przez naładowane cząstki docierające do Ziemi od Słońca.

Ziemskie pole magnetyczne jest polem pochodzącym od dipola magnetycznego, a więc związany jest z nim dipolowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}$ . Dla idealnego pola, takiego jak na rysunku 32.8, wartość  $\vec{\mu}$  wynosi  $8 \cdot 10^{22}$  J/T, a kierunek  $\vec{\mu}$  tworzy kąt 11,5° z osią obrotu (*RR*) Ziemi. *Oś dipola (MM* na rysunku 32.8) pokrywa się z kierunkiem wektora  $\vec{\mu}$ i przecina powierzchnię Ziemi na geomagnetycznym biegunie północnym w pobliżu wybrzeża północno-zachodniej Grenlandii i na geomagnetycznym biegunie południowym na Antarktydzie. Linie pola magnetycznego  $\vec{B}$ wybiegają z wnętrza Ziemi na półkuli południowej i zbiegają się na półkuli północnej. Tak więc biegun magnetyczny na półkuli północnej, znany jako "magnetyczny biegun północny", jest w rzeczywistości biegunem południowym ziemskiego dipola magnetycznego.

Kierunek wektora indukcji magnetycznej w dowolnym miejscu na powierzchni Ziemi jest zwykle określany za pomocą dwóch kątów. **Deklinacja magnetyczna** jest kątem (mierzonym w prawo lub w lewo) między kierunkiem północy geograficznej (znajdującej się w punkcie o szerokości geograficznej 90°), a kierunkiem poziomej składowej wektora indukcji. **Inklinacja magnetyczna**, zwana również nachyleniem magnetycznym, jest kątem (mierzonym w górę lub w dół) między płaszczyzną poziomą a kierunkiem wektora indukcji.

**Pomiary.** Za pomocą *magnetometrów* można zmierzyć te kąty i wyznaczyć indukcję magnetyczną z dużą dokładnością. Możemy sobie jednak całkiem dobrze poradzić, używając tylko *kompasu* i *miernika inklinacji* (*inklinometru*). Kompas jest to po prostu magnes w kształcie igły umocowany w taki sposób, że może obracać się swobodnie wokół osi pionowej. Gdy igła znajduje się w płaszczyźnie poziomej, jej północny biegun wskazuje geomagnetyczny biegun północny (który, jak pamiętamy, jest w rzeczywistości biegunem południowym). Kąt między kierunkiem igły a północą geograficzną jest równy deklinacji magnetycznej. Inklinometr jest podobnym magnesem, który może obracać się swobodnie wokół osi poziomej. Jeśli pionowa płaszczyzna obrotu jest ustawiona zgodnie z kierunkiem wskazywanym przez kompas, to kąt między igłą miernika a płaszczyzną poziomą jest równy inklinacji magnetycznej.

W każdym punkcie na powierzchni Ziemi wartość i kierunek zmierzonej indukcji magnetycznej mogą się znacznie różnić od tych dla idealnego pola dipola na rysunku 32.8. W rzeczywistości punkt, w którym wektor indukcji jest skierowany prostopadle do wnętrza Ziemi, nie znajduje się na geomagnetycznym biegunie północnym w Grenlandii, jak by można oczekiwać. Ten punkt, zwany *inklinacyjnym biegunem północnym*, jest położony daleko od Grenlandii, na Wyspach Królowej Elżbiety w północnej Kanadzie.

Ponadto pole obserwowane w wielu miejscach na powierzchni Ziemi zmienia się w czasie. Zmiany kilkuletnie są niewielkie, natomiast zmiany zachodzące w okresie np. stu lat mogą być znaczne. Na przykład mię-

#### 32.5. MAGNETYZM I ELEKTRONY 439



**Rys. 32.9.** Magnetyczny profil dna morskiego po obydwu stronach Grzbietu Śródatlantyckiego. Magma pokrywająca dno morskie wypchnięta przez szczelinę w grzbiecie i rozsuwająca się wraz z płytami tektonicznymi pokazuje zapis magnetycznej historii jądra Ziemi. Kierunek pola magnetycznego wytworzonego przez jądro zmienia się na przeciwny w przybliżeniu co milion lat

dzy rokiem 1580 a 1820 kierunek wskazywany przez kompas w Londynie zmienił się o 35°.

Pomimo takich lokalnych zmian średnie pole dipola zmienia się powoli w takich stosunkowo krótkich okresach czasu. Zmiany zachodzące w dłuższym czasie mogą być badane za pomocą pomiaru słabego magnetyzmu dna oceanu po obu stronach Grzbietu Śródatlantyckiego (rys. 32.9). Dno zostało uformowane przez stopioną magmę, która przesączała się z wnętrza Ziemi przez pęknięcie w grzbiecie, zestalała się, a następnie była odsuwana od grzbietu przez ruch płyt tektonicznych z szybkością kilku centymetrów na rok. W czasie krzepnięcia magma została słabo namagnesowana w kierunku zgodnym z ówczesnym kierunkiem ziemskiego pola magnetycznego. Badania zestalonej magmy na dnie oceanu wykazały, że pole ziemskie zmieniało swoją *biegunowość* (czyli kierunek bieguna północnego i południowego) w przybliżeniu co milion lat. Chociaż sformułowano zarys teorii wyjaśniającej przyczynę tych zmian, to należy stwierdzić, że mechanizm powstawania ziemskiego pola magnetycznego jest w dalszym ciągu nie do końca zrozumiany.

# **32.5.** MAGNETYZM I ELEKTRONY

#### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego rozdziału będziesz umiał...

- **32.19** stwierdzić, że spinowy moment pędu  $\vec{S}$  (nazywany zwykle po prostu spinem) i spinowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}_s$  są wielkościami własnymi charakteryzującymi elektrony (a także protony, neutrony i inne cząstki);
- **32.20** zastosować związek między wektorem spinu  $\vec{S}$  a wektorem spinowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}_s$ ;
- **32.21** stwierdzić, że ani  $\vec{S}$ , ani  $\vec{\mu}_s$  nie mogą być obserwowane (mierzone); można zmierzyć jedynie rzut tych wektorów na wybraną oś (zwykle współrzędne dobieramy tak, by była to oś z);
- **32.22** stwierdzić, że obserwowalne składowe  $S_z$  i  $\mu_{s,z}$  są skwantowane, i wyjaśnić, co to znaczy;

- **32.23** zastosować związek między składową  $S_z$  i spinową magnetyczną liczbą kwantową  $m_s$  oraz określić zakres dozwolonych wartości  $m_s$ ;
- 32.24 rozróżniać ustawienie spinu "do góry" od ustawienia "na dół";
- **32.25** określić wartość liczbową składowej  $\mu_{s,z}$  spinowego momentu magnetycznego i wyrazić tę składową jako wielokrotność magnetonu Bohra  $\mu_{\rm B}$ ;
- **32.26** określić energię elektronu w zewnętrznym polu magnetycznym związaną z ustawieniem jego spinowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}_s$ ;
- **32.27** stwierdzić, że elektron w atomie ma orbitalny moment pędu  $\vec{L}_{orb}$  i związany z nim orbitalny moment magnetyczny  $\vec{\mu}_{orb}$ ;

- **32.28** zastosować związek między orbitalnym momentem pędu  $\vec{L}_{orb}$  i orbitalnym momentem magnetycznym  $\vec{\mu}_{orb}$ ;
- **32.29** stwierdzić, że ani  $\vec{L}_{orb}$ , ani  $\vec{\mu}_{orb}$  nie mogą być obserwowane; można zmierzyć jedynie rzut tych wektorów,  $L_{orb,z}$  i  $\mu_{orb,z}$ , na dowolnie wybraną oś *z*;
- **32.30** zastosować związek między składową  $L_{\text{orb},z}$  orbitalnego momentu pędu i orbitalną magnetyczną liczbą kwantową  $m_{\ell}$  oraz określić zakres dozwolonych wartości  $m_{\ell}$ ;
- **32.31** określić wartość liczbową składowej  $\mu_{orb,z}$  orbitalnego momentu magnetycznego i wyrazić tę składową jako wielokrotność magnetonu Bohra  $\mu_{\rm B}$ ;

#### Podstawowe fakty \_

• Elektron ma swój własny moment pędu nazywany spinowym momentem pędu (lub spinem)  $\vec{S}$  i związany z nim własny spinowy moment magnetyczny

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m}\vec{S}.$$

Składowa spinu mierzona wzdłuż osi z może przyjmować wyłącznie wartości:

$$S_z = m_s \frac{h}{2\pi} \qquad \text{dla } m_s = \pm \frac{1}{2},$$

gdzie  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  jest stałą Plancka.

• Podobnie

$$\mu_{s,z} = \mp \frac{en}{4\pi m} = \mp \mu_{\rm B},$$

gdzie  $\mu_B$  jest magnetonem Bohra

$$\iota_{\rm B} = \frac{eh}{4\pi m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \, {\rm J/T}.$$

• Energia  $E_p$  związana z orientacją spinowego momentu magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$  skierowanym wzdłuż osi z jest równa

$$E_{\rm p} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{\rm zewn} = -\mu_{s,z} B_{\rm zewn}$$

- 32.32 określić energię związaną z ustawieniem orbitalnego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}_{orb}$  elektronu w zewnętrznym polu magnetycznym;
- 32.33 wyznaczyć wartość momentu magnetycznego dla cząstki naładowanej poruszającej się po okręgu oraz dla pierścienia takich cząstek obracajęcego się niczym karuzela ze stałą prędkością kątową;
- 32.34 przedstawić klasyczny model pętli z prądem dla elektronu w atomie i przedyskutować siły działające na taką pętlę w niejednorodnym polu magnetycznym;
- 32.35 rozróżniać diamagnetyzm, paramagnetyzm i ferromagnetyzm.

• Elektron w atomie ma także *orbitalny moment pędu*  $\vec{L}_{orb}$  i związany z nim *orbitalny moment magnetyczny* 

$$\vec{\mu}_{\rm orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{\rm orb}.$$

 Orbitalny moment pędu jest skwantowany, a jego składowa z może przyjmować wyłącznie wartości

$$L_{{
m orb},z} = m_l rac{h}{2\pi},$$
  
dla  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm$ (wartość maksymalna).

• Orbitalny moment magnetyczny spełnia zależność

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \frac{eh}{4\pi m} = -m_l \mu_{\text{B}}.$$

• Energia związana z ustawieniem orbitalnego momentu magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$  skierowanym wzdłuż osi z jest równa

$$E_{\rm p} = -\vec{\mu}_{\rm orb} \cdot \vec{B}_{\rm zewn} = -\mu_{\rm orb,z} B_{\rm zewn}$$

# Magnetyzm i elektrony

Materiały magnetyczne, od magnetytu po tusze do tatuażu, mają właściwości magnetyczne, gdyż znajdują się w nich elektrony. Zapoznaliśmy się już z jednym ze sposobów wytwarzania pola magnetycznego przez elektrony: jeżeli elektrony poruszają się w przewodzie w postaci prądu elektrycznego, to ich ruch wywołuje pole magnetyczne wokół przewodu. Są jeszcze dwa inne sposoby, a każdy z nich związany jest z dipolowym momentem magnetycznym, który wytwarza pole magnetyczne w otaczającej go przestrzeni. Wyjaśnienie tych zjawisk wymaga jednak znajomości fizyki kwantowej, która wykracza poza zakres materiału zawarty w tej książce, dlatego przedstawimy tutaj tylko wyniki.

# Spinowy moment magnetyczny

Elektron ma swój własny moment pędu nazywany **spinowym momentem pędu** (albo po prostu **spinem**)  $\vec{S}$ . Z tym spinem związany jest własny **spinowy moment magnetyczny**  $\vec{\mu}_s$ . (Słowo *własny* oznacza, że  $\vec{S}$  i  $\vec{\mu}_s$  są podstawowymi cechami charakterystycznymi elektronu, tak jak jego masa i ładunek elektryczny). Wektory  $\vec{S}$  i  $\vec{\mu}_s$  są związane równaniem

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m}\vec{S},\tag{32.22}$$

w którym *e* jest ładunkiem elementarnym (1,60 · 10<sup>-19</sup> C), a *m* — masą elektronu (9,11 · 10<sup>-31</sup> kg). Znak minus oznacza, że  $\vec{\mu}_s$  i  $\vec{S}$  są skierowane przeciwnie.

Spin  $\overline{S}$  różni się od momentów pędu omawianych w rozdziale 11 pod dwoma względami:

- 1. Nie możemy zmierzyć wektora  $\vec{S}$ . Możemy jednak zmierzyć jego składową wzdłuż dowolnej osi.
- 2. Mierzona składowa wektora  $\hat{S}$  jest *skwantowana*, co jest ogólnym terminem oznaczającym, że może ona przyjmować tylko pewne wartości. Składowa wektora  $\hat{S}$  może mieć tylko dwie wartości różniące się znakiem.

Załóżmy, że składowa spinu  $\hat{S}$  jest mierzona wzdłuż osi z układu współrzędnych. Składowa  $S_z$  może przyjmować tylko dwie wartości:

$$S_z = m_s \frac{h}{2\pi}$$
 dla  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , (32.23)

gdzie  $m_s$  jest magnetyczną spinową liczbą kwantową, a  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s jest stałą Plancka — wszechobecną stałą fizyki kwantowej. Znaki w równaniu (32.23) mają związek z kierunkiem  $S_z$  wzdłuż osi z. Gdy  $S_z$  jest równoległe do osi z,  $m_s$  jest równe  $+\frac{1}{2}$ , a o elektronie mówimy, że ma spin skierowany w górę. Gdy  $S_z$  jest antyrównoległe do osi z,  $m_s$  jest równe  $-\frac{1}{2}$ , a o elektronie mówimy, że ma spin skierowany w dół.

Nie możemy również zmierzyć spinowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}_s$ . Możemy tylko zmierzyć jego składową wzdłuż dowolnej osi i ta składowa także jest skwantowana. Przyjmuje ona dwie możliwe wartości, równe co do wartości bezwzględnej, ale różniące się znakiem. Można znaleźć związek składowej  $\mu_{s,z}$ , mierzonej wzdłuż osi z, ze składową  $S_z$ , przepisując równanie (32.22) dla składowych z

$$\mu_{s,z} = -\frac{e}{m}S_z$$

Podstawiając  $S_z$  z równania (32.23), otrzymujemy

$$\mu_{s,z} = \mp \frac{eh}{4\pi m},\tag{32.24}$$

gdzie znak plus lub minus oznacza  $\mu_{s,z}$  skierowane odpowiednio równolegle lub antyrównolegle do osi z. Wielkość po prawej stronie nazywamy *magnetonem Bohra* 

$$\mu_{\rm B} = \frac{eh}{4\pi m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{J/T}$$
 (magneton Bohra). (32.25)

Spinowe momenty magnetyczne elektronów i innych cząstek elementarnych mogą być wyrażone w jednostkach  $\mu_B$ . Dla elektronu wartość bezwzględna mierzonej składowej z wektora  $\vec{\mu}$  jest równa

$$|\mu_{s,z}| = \mu_{\rm B}.\tag{32.26}$$

spin elektronu jest skierowany przeciwnie do spinowego momentu magnetycznego tej cząstki



**Rys. 32.10.** Spin  $\vec{S}$ , spinowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}_s$  i wektor indukcji pola  $\vec{B}$  dipola magnetycznego dla elektronu przedstawionego jako kulka o rozmiarach mikroskopowych

(Zgodnie z teorią kwantową, zwaną *elektrodynamiką kwantową* (QED, od ang. *quantum electrodynamics*),  $\mu_{s,z}$  jest w rzeczywistości nieco większe niż  $\mu_B$ , ale będziemy pomijać ten fakt).

*Energia.* Gdy elektron jest umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$ , jego energia  $E_p$  może być związana z ustawieniem spinowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}_s$ , podobnie jak pewna energia jest związana z ustawieniem dipolowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$  ramki z prądem umieszczonej w polu  $\vec{B}_{zewn}$ . Zgodnie z równaniem (28.38), ta energia elektronu jest równa

$$E_{\rm p} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{\rm zewn} = -\mu_{s,z} B_{\rm zewn}, \qquad (32.27)$$

gdzie oś z pokrywa się z kierunkiem  $\vec{B}_{\text{zewn}}$ .

Jeżeli wyobrazimy sobie elektron jako kulkę o rozmiarach mikroskopowych (którą w rzeczywistości nie jest), to możemy przedstawić spin  $\vec{S}$ , spinowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}_s$  i związane z nim pole dipola magnetycznego o indukcji  $\vec{B}$  tak jak na rysunku 32.10. Chociaż używamy tu słowa "spin" (które po angielsku oznacza wirowanie), elektron w rzeczywistości nie wiruje jak bąk. Jak wobec tego coś może mieć moment pędu bez wykonywania ruchu wirowego? Aby odpowiedzieć na to pytanie, znów musielibyśmy skorzystać z praw fizyki kwantowej.

Protony i neutrony również mają swój własny moment pędu zwany spinem i związany z nim własny spinowy moment magnetyczny. Dla protonu te dwa wektory mają taki sam kierunek, a dla neutronu ich kierunki są przeciwne. Nie będziemy badać przyczynków od tych momentów magnetycznych do pola magnetycznego atomów, gdyż ich wartości są około tysiąc razy mniejsze od wartości spinowego momentu magnetycznego elektronu.

# Sprawdzian 4

Na rysunku przedstawiono ustawienie spinu dla dwóch cząstek umieszczonych w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}_{zewn}$ . a) Jeżeli cząstki są elektronami, to które ustawienie spinu odpowiada mniejszej energii potencjalnej? b) Jeżeli natomiast cząstki są protonami, to które ustawienie spinu odpowiada mniejszej energii potencjalnej?



# **Orbitalny moment magnetyczny**

Elektron w atomie ma także moment pędu, zwany **orbitalnym momentem pędu**  $\vec{L}_{orb}$ , oraz towarzyszący mu **orbitalny moment magnetyczny**  $\vec{\mu}_{orb}$ . Te dwie wielkości są związane równaniem

$$\vec{u}_{\rm orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{\rm orb}.$$
 (32.28)

Znak minus oznacza, że  $\vec{\mu}_{orb}$  i  $\vec{L}_{orb}$  są skierowane przeciwnie.

Nie możemy zmierzyć orbitalnego momentu pędu  $\vec{L}_{orb}$ . Możemy tylko zmierzyć jego składową wzdłuż dowolnej osi i ta składowa jest skwan-

towana. Na przykład składowa wzdłuż osi z może przyjmować tylko wartości:

$$L_{\text{orb},z} = m_l \frac{h}{2\pi}$$
 dla  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (\text{wartość maksymalna}),$   
(32.29)

gdzie  $m_l$  jest nazywane magnetyczną orbitalną liczbą kwantową, a "wartość maksymalna" oznacza największą dozwoloną całkowitą wartość  $m_l$ . Znaki w równaniu (32.29) odnoszą się do kierunku  $L_{orb,z}$  wzdłuż osi z.

Orbitalny moment magnetyczny  $\vec{\mu}_{orb}$  elektronu również nie może być zmierzony. Możemy zmierzyć tylko jego składową wzdłuż dowolnej osi i ta składowa jest skwantowana. Zapisując równanie (32.28) dla składowej wzdłuż tej samej osi z, a następnie podstawiając  $L_{orb,z}$  z równania (32.29), możemy zapisać składową z  $\mu_{orb,z}$  orbitalnego momentu magnetycznego

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \frac{eh}{4\pi m} \tag{32.30}$$

lub używając magnetonu Bohra jako jednostki

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \mu_{\text{B}}.\tag{32.31}$$

Gdy umieścimy atom w zewnętrznym polu magnetycznym  $B_{\text{zewn}}$ , jego energia  $E_p$  może być związana z ustawieniem orbitalnego momentu magnetycznego każdego elektronu w atomie. Wartość energii jest równa

$$E_{\rm p} = -\vec{\mu}_{\rm orb} \cdot \vec{B}_{\rm zewn} = -\mu_{\rm orb,z} B_{\rm zewn}, \qquad (32.32)$$

gdy oś z pokrywa się z kierunkiem  $\vec{B}_{zewn}$ .

Chociaż używamy tu słów "orbita" i "orbitalny", elektrony w rzeczywistości nie krążą wokół jądra atomowego po orbitach, jak planety wokół Słońca. Jak zatem elektrony mogą mieć orbitalny moment pędu, nie krążąc po orbitach w potocznym sensie tego słowa? I znów można to wyjaśnić tylko za pomocą fizyki kwantowej.

### Model pętli z prądem dla orbit elektronowych

Równanie (32.28) można wyprowadzić w sposób przedstawiony niżej, nie korzystając z praw fizyki kwantowej. Zakładamy przy tym, że elektron krąży po kołowym torze o promieniu znacznie większym od promienia atomu (stąd nazwa "model pętli z prądem"). Jednakże to wyprowadzenie nie może być stosowane do elektronów w atomie, gdyż do takich elektronów potrzebne jest podejście kwantowe.

Wyobraź sobie, że elektron krąży ze stałą prędkością v po kołowym torze o promieniu r w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, tak jak pokazano na rysunku 32.11. Ruch ujemnie naładowanego elektronu jest równoważny przepływowi umownego prądu o natężeniu I (składającego się z ładunków dodatnich) w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, co również pokazano na rysunku 32.11. Wartość orbitalnego momentu magnetycznego dla takiej *pętli z prądem* możemy otrzymać z równania (28.35) dla N = 1:

$$\mu_{\rm orb} = IS, \tag{32.33}$$



**Rys. 32.11.** Elektron porusza się ze stałą prędkością *v* po kołowym torze o promieniu *r*, obejmującym powierzchnię *S*. Elektron ma orbitalny moment pędu  $\vec{L}_{orb}$  i związany z nim orbitalny moment magnetyczny  $\vec{\mu}_{orb}$ . Prąd o natężeniu *I* składający się z ładunków dodatnich i płynący zgodnie z ruchem wskazówek zegara jest równoważny ruchowi ujemnie naładowanego elektronu w kierunku przeciwnym



**Rys. 32.12.** a) Model pętli z prądem dla elektronu krążącego w atomie, umieszczonej w niejednorodnym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$ . b) Ładunek -eporusza się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara; związany z tym umowny prąd o natężeniu *I* płynie zgodnie z ruchem wskazówek zegara. c) Siły magnetyczne d $\vec{F}$  po lewej i prawej stronie pętli widziane w płaszczyźnie pętli. Wypadkowa siła działająca na pętlę jest skierowana do góry. d) Ładunek -eporusza się teraz zgodnie z ruchem wskazówek zegara. e) Wypadkowa siła działająca na pętlę jest skierowana w dół

gdzie *S* jest polem powierzchni, którą obejmuje pętla. Z reguły prawej dłoni (patrz rys. 29.21) wynika, że dipolowy moment magnetyczny na rysunku 32.11 jest skierowany w dół.

Aby obliczyć wartość wyrażenia (32.33), musimy znać natężenie prądu *I*. Ogólnie, natężenie prądu to szybkość przepływu ładunku przez ustalony punkt w obwodzie. W naszym modelu ładunek o wartości *e* wy-konuje pełne okrążenie (od pewnego punktu z powrotem do tego samego punktu) w czasie  $T = 2\pi r/v$ , tak więc

$$I = \frac{\text{ladunek}}{\text{czas}} = \frac{e}{2\pi r/v}.$$
 (32.34)

Podstawiając tę wielkość i pole powierzchni pętli  $S = \pi r^2$  do równania (32.33), otrzymujemy

$$u_{\rm orb} = \frac{e}{2\pi r/v} \pi r^2 = \frac{evr}{2}.$$
 (32.35)

Aby wyznaczyć orbitalny moment pędu  $\vec{L}_{orb}$  elektronu, korzystamy z równania (11.18),  $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ . Ponieważ  $\vec{r}$  i  $\vec{v}$  są prostopadłe, wartość  $\vec{L}_{orb}$  wynosi

$$L_{\rm orb} = mrv\sin 90^\circ = mrv. \tag{32.36}$$

Wektor  $L_{orb}$  jest skierowany w górę na rysunku 32.11 (patrz rysunek 11.12). Łącząc równania (32.35) i (32.36), zapisując je w postaci wektorowej i zaznaczając przeciwne kierunki wektorów za pomocą znaku minus, otrzymujemy

$$\vec{\mu}_{\rm orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{\rm orb}$$

czyli równanie (32.28). W ten sposób, stosując analizę klasyczną (tzn. niekwantową), otrzymaliśmy taką samą wartość i kierunek orbitalnego momentu magnetycznego, jak w podejściu kwantowym. Być może jesteś ciekaw, dlaczego wyprowadzenie to nie może być stosowane do elektronu w atomie, skoro otrzymaliśmy poprawny wynik dla omówionego przypadku. Okazuje się, że inne wyniki uzyskane za pomocą takiego rozumowania są sprzeczne z doświadczeniem.

# Model pętli z prądem w polu niejednorodnym

W dalszym ciągu traktujemy orbitę elektronu tak jak przedstawioną na rysunku 32.11 pętlę z prądem. Teraz jednak umieszczamy pętlę w niejednorodnym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$ , tak jak na rysunku 32.12a. (Może to być np. rozchodzące się w różnych kierunkach pole w pobliżu północnego bieguna magnesu z rysunku 32.4). Wprowadziliśmy tę zmianę, aby przygotować się do kilku następnych podrozdziałów, w których będziemy omawiać siły działające na materiały magnetyczne umieszczone w niejednorodnym polu magnetycznym. Omówimy te siły, zakładając, że orbity elektronów w materiałach są mikroskopijnymi pętlami z prądem, takimi jak na rysunku 32.12a.

Zakładamy, że wektory indukcji magnetycznej w każdym punkcie kołowego toru elektronu mają taką samą wartość i tworzą taki sam kąt z kierunkiem pionowym, jak pokazano na rysunkach 32.12b i d. Zakładamy także, że wszystkie elektrony w atomie poruszają się przeciwnie (rys. 32.12b) albo zgodnie (rys. 32.12d) z ruchem wskazówek zegara. Związany z tym
umowny prąd o natężeniu *I* płynący wokół pętli oraz orbitalny moment magnetyczny  $\vec{\mu}_{orb}$  wytworzony przez ten prąd przedstawiono na rysunku dla każdego z kierunków ruchu elektronu.

Na rysunkach 32.12c i e przedstawiono elementy długości  $d\vec{L}$  po przeciwnych stronach pętli, zorientowane zgodnie z kierunkiem prądu i widziane w płaszczyźnie orbity. Pokazano również pole  $\vec{B}_{zewn}$  i siłę magnetyczną  $d\vec{F}$  działającą na  $d\vec{L}$ . Przypomnijmy, że zgodnie z równaniem (28.28) na ładunki płynące wzdłuż elementu  $d\vec{L}$  w polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$  działa siła magnetyczna

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{L} \times \vec{B}_{\mathrm{zewn}}.$$
(32.37)

Z równania (32.37) wynika, że po lewej stronie rysunku 32.12c siła d $\vec{F}$  jest skierowana do góry i w prawo. Po prawej stronie siła d $\vec{F}$  ma dokładnie taką samą wartość i jest skierowana do góry i w lewo. Kąty, pod jakimi działają siły są takie same, a więc ich składowe poziome się znoszą, a składowe pionowe dodają. Taki sam wynik otrzymamy dla dowolnych dwóch innych, symetrycznie położonych punktów pętli. Zatem wypadkowa siła działająca na pętlę z prądem na rysunku 32.12b musi być skierowana do góry. Analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że wypadkowa siła działająca na pętlę na rysunku 32.12d jest skierowana w dół. Wkrótce skorzystamy z tych dwóch wyników, gdy będziemy badać zachowanie się materiałów magnetycznych w niejednorodnych polach magnetycznych.

### Materiały magnetyczne

Każdy elektron w atomie ma orbitalny moment magnetyczny i spinowy moment magnetyczny, które dodają się wektorowo. Wypadkowa tych dwóch wielkości dodaje się wektorowo do podobnych wektorów wypadkowych dla wszystkich innych elektronów w atomie. Ponadto wypadkowy wektor dla każdego atomu dodaje się do wypadkowych wektorów dla wszystkich innych atomów w próbce materiału. Jeżeli suma tych wszystkich momentów magnetycznych wytwarza pole magnetyczne, to o materiale mówimy, że ma właściwości magnetyczne. Są trzy główne rodzaje magnetyzmu: diamagnetyzm, paramagnetyzm i ferromagnetyzm.

- 1. Diamagnetyzm wykazują wszystkie powszechnie spotykane materiały, ale jest to zjawisko tak słabe, że jest niedostrzegalne, jeśli materiał wykazuje również magnetyzm jednego z dwóch pozostałych rodzajów. W diamagnetykach słabe momenty magnetyczne są indukowane w atomach, gdy materiał jest umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$ . Suma tych wszystkich indukowanych momentów magnetyczne. Momenty magnetyczne, wraz z ich wypadkowe pole magnetyczne. Momenty magnetyczne, wraz z ich wypadkowym polem znikają, gdy usuniemy  $\vec{B}_{zewn}$ . Termin *diamagnetyk* zwykle odnosi się do materiałów, które wykazują tylko diamagnetyzm.
- 2. Paramagnetyzm wykazują materiały zawierające pierwiastki przejściowe, pierwiastki ziem rzadkich (lantanowce) oraz aktynowce (patrz dodatek G). Każdy atom takiego materiału ma trwały wypadkowy moment magnetyczny, ale momenty są zorientowane przypadkowo i materiał jako całość nie wytwarza wypadkowego pola magnetycznego. Jed-

nakże zewnętrzne pole magnetyczne  $\vec{B}_{zewn}$  może częściowo uporządkować momenty magnetyczne atomów, wytwarzając wypadkowe pole magnetyczne w materiale. Uporządkowanie i związane z nim pole znika, gdy usuniemy  $\vec{B}_{zewn}$ . Termin *paramagnetyk* zwykle odnosi się do materiałów, dla których paramagnetyzm jest dominującą właściwością.

3. Ferromagnetyzm jest właściwością żelaza, niklu i niektórych innych pierwiastków (a także związków i stopów tych pierwiastków). Momenty magnetyczne niektórych elektronów w tych materiałach są uporządkowane, dzięki czemu powstają obszary o dużym momencie magnetycznym. Zewnętrzne pole  $\vec{B}_{zewn}$  może wówczas porządkować momenty magnetyczne tych obszarów, wytwarzając silne pole magnetyczne w próbce materiału. To pole się częściowo utrzymuje, gdy usuniemy  $\vec{B}_{zewn}$ . Zwykle używamy terminu *materiał ferromagnetyczny* lub *materiał magnetyczny*, gdy odnosimy się do materiałów, dla których ferromagnetyzm jest dominującą właściwością.

W następnych trzech podrozdziałach zbadamy te trzy rodzaje magnetyzmu.

# **32.6.** DIAMAGNETYZM

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

32.36 stwierdzić, że w wykonanej z diamagnetyka próbce umieszczonej w zewnętrznym polu magnetycznym powstaje magnetyczny moment dipolowy i określić ustawienie tego momentu względem pola magnetycznego; 32.37 opisać siły działające na wykonaną z diamagnetyka próbkę w niejednorodnym polu magnetycznym i wynikający stąd ruch próbki.

### Podstawowe fakty

 Diamagnetyki przejawiają właściwości magnetyczne wyłącznie w zewnętrznym polu magnetycznym; stają się one wówczas dipolami magnetycznymi ustawionymi przeciwnie do kierunku pola zewnętrznego.

 Znajdujące się w niejednorodnym polu magnetycznym diamagnetyki są wypychane z obszarów silniejszego pola.

### Diamagnetyzm

Nie możemy na razie omówić diamagnetyzmu, stosując prawa fizyki kwantowej, ale możemy dostarczyć klasycznego wyjaśnienia tego zjawiska na podstawie modelu pętli z prądem, przedstawionego na rysunkach 32.11 i 32.12. Na wstępie przyjmijmy, że w atomie diamagnetyka każdy elektron może krążyć po orbicie zgodnie (tak jak na rysunku 32.12d) lub przeciwnie (jak na rysunku 32.12b) do ruchu wskazówek zegara. Aby wytłumaczyć brak właściwości magnetycznych, gdy nie ma zewnętrznego pola magnetycznego  $\vec{B}_{zewn}$ , zakładamy, że atom nie ma wypadkowego momentu magnetycznego. Oznacza to, że przed przyłożeniem  $\vec{B}_{zewn}$  tyle samo elektronów krążyło w jednym z kierunków co w kierunku przeciwnym, a więc całkowity moment magnetyczny atomu skierowany do góry był równy całkowitemu momentowi magnetycznemu skierowanemu w dół.

Przyłóżmy teraz niejednorodne pole  $\vec{B}_{zewn}$ , jak na rysunku 32.12a, na którym wektor  $\vec{B}_{zewn}$  jest skierowany do góry, a linie pola się rozbiegają.

Możemy to zrobić, zwiększając natężenie prądu w elektromagnesie lub przesuwając północny biegun magnesu od dołu w kierunku orbity elektronu. Gdy wartość  $\vec{B}_{zewn}$  rośnie od zera aż do końcowej, maksymalnej wartości w stanie ustalonym, zgodnie z prawem Faradaya i regułą Lenza wzdłuż każdej orbity elektronu indukuje się pole elektryczne skierowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Zobaczmy teraz na rysunkach 32.12b i d, jak to indukowane pole elektryczne wpływa na ruch elektronów po orbicie.

Na rysunku 32.12b elektron poruszający się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara jest przyspieszany przez pole elektryczne zgodne z ruchem wskazówek zegara. Tak więc, gdy indukcja magnetyczna  $\vec{B}_{zewn}$  osiąga wartość maksymalną, prędkość elektronu również osiąga maksimum. Oznacza to, że *rośnie* zarówno umowny prąd o natężeniu *I*, jak i skierowany w dół moment magnetyczny  $\vec{\mu}$ , związany z tym prądem.

Na rysunku 32.12d elektron poruszający się zgodnie z ruchem wskazówek zegara jest spowalniany przez pole elektryczne skierowane również zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Zatem w tym przypadku *maleje* zarówno prędkość elektronu, jak i prąd o natężeniu *I* oraz skierowany w górę moment magnetyczny  $\vec{\mu}$ , związany z tym prądem. Tak więc, włączając pole  $\vec{B}_{zewn}$ , wytworzyliśmy w atomie *wypadkowy* moment magnetyczny skierowany do dołu. Takie samo zjawisko zachodziłoby, gdyby zewnętrzne pole magnetyczne było jednorodne.

Sita. Niejednorodność pola  $\vec{B}_{zewn}$  oddziałuje również na atomy diamagnetyka. Natężenie prądu I na rysunku 32.12b rośnie, a więc siły magnetyczne d $\vec{F}$ , skierowane do góry na rysunku 32.12c, również rosną, podobnie jak skierowana do góry wypadkowa siła działająca na pętlę z prądem. Natężenie prądu I na rysunku 32.12d maleje, a więc siły magnetyczne d $\vec{F}$ , skierowane w dół na rysunku 32.12e również maleją, podobnie jak skierowana w dół wypadkowa siła działająca na pętlę z prądem. Tak więc, włączając *niejednorodne* pole  $\vec{B}_{zewn}$ , wytworzyliśmy wypadkową siłę działającą na atom. Ponadto siła ta jest skierowana *od* obszaru, w którym pole magnetyczne jest silniejsze.

Nasze rozumowanie dotyczyło fikcyjnych orbit elektronów (pętli z prądem), ale uzyskaliśmy w końcu dokładny opis tego, co dzieje się z diamagnetykiem. Jeżeli przyłożymy pole magnetyczne z rysunku 32.12, to w próbce materiału powstaje moment magnetyczny skierowany w dół, a siła działająca na próbkę jest skierowana do góry. Gdy usuniemy pole, znika zarówno moment magnetyczny, jak i siła. Wektor indukcji pola zewnętrznego nie musi być skierowany tak jak na rysunku 32.12; podobne rozumowanie można przeprowadzić dla innego ustawienia wektora  $\vec{B}_{zewn}$ . Mówiąc ogólnie:

W diamagnetyku umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$  powstaje moment magnetyczny skierowany przeciwnie do  $\vec{B}_{zewn}$ . Jeżeli pole jest niejednorodne, to diamagnetyk jest wypychany *z* obszaru silniejszego pola magnetycznego *do* obszaru słabszego pola.

Żaba pokazana na rysunku 32.13 ma właściwości diamagnetyczne (podobnie jak inne zwierzęta). Gdy żabę umieszczono w niejednorodnym



**Rys. 32.13.** Widok z góry na żabę lewitującą w polu magnetycznym wytwarzanym wskutek przepływu prądu w znajdującym się pod żabą solenoidzie (dzięki uprzejmości Radbourd University, Holandia) polu magnetycznym w pobliżu górnego końca pionowego solenoidu zasilanego prądem, każdy atom, z którego składa się ciało żaby, był odpychany do góry, coraz dalej od obszaru silniejszego pola magnetycznego. Żaba poruszała się więc ku górze, w stronę coraz słabszego pola magnetycznego aż do chwili, w której siła magnetyczna skierowana do góry zrównoważyła siłę ciężkości i wtedy żaba "zawisła" nieruchomo w powietrzu. Z żabą nie działo się wówczas nic złego, gdyż taka sama siła działała na *każdy* atom żaby, a zatem przyczynki do całkowitej siły rozłożone były równomiernie w całym ciele żaby. Sytuacja ta jest podobna do "nieważkości", jakiej doświadczamy w wodzie, a więc w środowisku, w którym żaby chętnie przebywają. Gdybyśmy zbudowali nakładem dużych sił i środków dostatecznie duży solenoid, moglibyśmy w podobny sposób umieścić nad nim człowieka, który unosiłby się w powietrzu dzięki swoim właściwościom diamagnetycznym.

### Sprawdzian 5

Na rysunku przedstawiono dwie diamagnetyczne kulki umieszczone w pobliżu południowego bieguna magnesu sztabkowego. Czy: a) siły magnetyczne działające na kulki, b) momenty magnetyczne kulek są skierowane *do*, czy *od* magnesu?

c) Czy siła magnetyczna działająca na kulkę 1 jest większa, mniejsza, czy taka sama jak działająca na kulkę 2? S N

# **32.7.** PARAMAGNETYZM

### Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 32.38 określić, jakie ustawienie względem zewnętrznego pola magnetycznego przyjmuje magnetyczny moment dipolowy wykonanej z paramagnetyka próbki umieszczonej w tym polu;
- 32.39 opisać siły działające na wykonaną z paramagnetyka próbkę w polu magnetycznym i wynikający stąd ruch próbki;
- **32.40** zastosować związek między namagnesowaniem *M* próbki, jej mierzonym momentem magnetycznym i jej objętością;
- 32.41 zastosować prawo Curie do wyrażenia namagnesowania

### Podstawowe fakty

- Paramagnetyki zbudowane są z atomów o trwałym magnetycznym momencie dipolowym; momenty te są ustawione losowo, chyba że substancja znajdzie się w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$  i dipole będą dążyć do ustawienia zgodnego z kierunkiem pola.
- Stopień uporządkowania dipoli w objętości *V* można opisać za pomocą wielkości nazywanej namagnesowaniem *M*, określonej wzorem

$$M = \frac{\text{zmierzony moment magnetyczny}}{V}.$$

M próbki za pomocą temperatury T, stałej Curie C i wartości indukcji magnetycznej B zewnętrznego pola;

- 32.42 wyznaczyć na podstawie krzywej namagnesowania stopień namagnesowania próbki w zależności od indukcji magnetycznej i temperatury;
- **32.43** porównać energię związaną z ustawieniem dipoli w polu magnetycznym z energią termiczną atomów w paramagnetycznej próbce umieszczonej w zadanym polu magnetycznym i w zadanej temperaturze.
- Całkowite uporządkowanie atomowych momentów magnetycznych (nasycenie) odpowiada maksymalnej wartości  $M_{\rm max} = N \mu / V.$
- Dla niezbyt dużych wartości wyrażenia B<sub>zewn</sub>/T zachodzi

$$M = C \frac{B_{\text{zewn}}}{T},$$

gdzie T jest temperaturą, a C stałą Curie danej substancji.

• Znajdujące się w niejednorodnym polu magnetycznym paramagnetyki są przyciągane do obszarów silniejszego pola.

### Paramagnetyzm

W paramagnetykach spinowe i orbitalne momenty magnetyczne elektronów w każdym atomie nie kompensują się, ale dodają się wektorowo, wytwarzając w atomie wypadkowy (i trwały) moment magnetyczny  $\vec{\mu}$ . Gdy nie ma zewnętrznego pola magnetycznego, te atomowe momenty magnetyczne są zorientowane przypadkowo, a całkowity moment magnetyczny materiału jest równy zeru. Gdy jednak umieścimy próbkę materiału w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$ , momenty magnetyczne ustawiają się wzdłuż kierunku wektora indukcji pola, w wyniku czego w próbce powstaje wypadkowy moment magnetyczny. To uporządkowanie w kierunku wektora indukcji pola zewnętrznego jest przeciwne do tego, które obserwowaliśmy w diamagnetykach.

W paramagnetyku umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$  powstaje moment magnetyczny skierowany zgodnie z  $\vec{B}_{zewn}$ . Jeżeli pole jest niejednorodne, to paramagnetyk jest przyciągany *do* obszaru silniejszego pola magnetycznego *z* obszaru słabszego pola.

Próbka paramagnetyczna składająca się z N atomów miałaby moment magnetyczny o wartości  $N\mu$ , gdyby uporządkowanie dipoli atomowych było całkowite. Jednak podczas przypadkowych zderzeń atomów, zachodzących na skutek ich ruchu termicznego, między atomami przekazywana jest energia, co niszczy ich uporządkowanie, a więc zmniejsza moment magnetyczny próbki.

**Zderzenia atomów.** Znaczenie zderzeń atomów może być ocenione przez porównanie dwóch energii. Jedna z nich, wynikająca z równania (19.24), jest średnią energią kinetyczną w ruchu postępowym  $E_k$  $(=\frac{3}{2}kT)$  dla atomu w temperaturze *T*, gdzie *k* jest stałą Boltzmanna (1,38 · 10<sup>-23</sup> J/K), a *T* jest wyrażone w kelwinach (a nie w stopniach Celsjusza). Druga energia wynikająca z równania (28.38) jest równa różnicy energii  $\Delta E_B$  (=  $2\mu B_{zewn}$ ) odpowiadających równoległemu i antyrównoległemu ustawieniu momentu magnetycznego atomu w polu zewnętrznym. (Dla stanu o mniejszej energii jest ona równa  $-\mu B_{zewn}$ , a dla stanu o większej energii  $+\mu B_{zewn}$ .) Jak wykażemy niżej, dla typowych wartości temperatury i indukcji magnetycznej  $E_k \gg \Delta E_B$ . Tak więc przekazywanie energii podczas zderzeń może znacznie zaburzyć uporządkowanie atomowych momentów magnetycznych, powodując, że moment magnetyczny próbki jest znacznie mniejszy od  $N\mu$ .

*Namagnesowanie.* Stopień namagnesowania próbki paramagnetycznej możemy wyrazić, obliczając stosunek momentu magnetycznego próbki do jej objętości. Tę wektorową wielkość, moment magnetyczny na jednostkę objętości, nazywamy **namagnesowaniem**  $\vec{M}$  próbki, a jej wartość wynosi

$$M = \frac{\text{zmierzony moment magnetyczny}}{V}.$$
 (32.38)

Jednostką  $\overline{M}$  jest amper razy metr kwadratowy na metr sześcienny, czyli amper na metr (A/m). Całkowite uporządkowanie atomowych momentów



Próbka ciekłego tlenu unosi się między dwoma nabiegunnikami magnesu, gdyż ciecz wykazuje właściwości paramagnetyczne i dlatego jest przyciągana przez magnes (fot. Richard Megna/Fundamental Photographs)

magnetycznych, zwane *nasyceniem* próbki, odpowiada maksymalnej wartości  $M_{\text{max}} = N\mu/V$ .

W roku 1895 Piotr Curie wykazał doświadczalnie, że namagnesowanie próbki paramagnetycznej jest wprost proporcjonalne do indukcji magnetycznej  $\vec{B}_{zewn}$  i odwrotnie proporcjonalne do temperatury *T*, mierzonej w kelwinach, czyli

$$M = C \frac{B_{\text{zewn}}}{T}.$$
 (32.39)

Równanie (32.39) znane jest jako *prawo Curie*, a *C* nazywamy *stałą Curie*. Prawo Curie można uzasadnić tym, że zwiększanie  $B_{zewn}$  powoduje wzrost uporządkowania atomowych momentów magnetycznych w próbce, a więc wzrost *M*, podczas gdy zwiększanie *T* powoduje zwiększanie liczby zderzeń, które zakłócają uporządkowanie i zmniejszają *M*. Jednak prawo Curie jest w rzeczywistości przybliżeniem, które jest słuszne tylko wtedy, gdy stosunek  $B_{zewn}/T$  jest niezbyt duży.



**Rys. 32.14.** *Krzywa magnesowania* dla siarczanu chromowo-potasowego (soli paramagnetycznej). Na wykresie przedstawiono stosunek namagnesowania *M* soli do maksymalnego możliwego do osiągnięcia namagnesowania  $M_{\text{max}}$  jako funkcję stosunku indukcji magnetycznej  $B_{\text{zewn}}$ przyłożonego pola do temperatury *T*. Dane po lewej stronie wykresu są zgodne z prawem Curie; wszystkie dane są zgodne z teorią kwantową. Wykorzystano pomiary W. E. Henry'ego

> Na rysunku 32.14 przedstawiono wykres stosunku  $M/M_{max}$  jako funkcji  $B_{zewn}/T$  dla próbki soli — siarczanu chromowo-potasowego — w której jony chromu są substancją paramagnetyczną. Wykres taki nazywamy *krzywą magnesowania*. Linia prosta przedstawiająca prawo Curie jest zgodna z danymi doświadczalnymi po lewej stronie wykresu dla  $B_{zewn}/T$ poniżej około 0,5 T/K. Krzywa zgodna ze wszystkimi punktami doświadczalnymi wynika z teorii kwantowej. Dane po prawej stronie wykresu, w pobliżu nasycenia, jest bardzo trudno otrzymać, gdyż wymagają bardzo silnych pól magnetycznych (około 100 000 razy większych od ziemskiego pola magnetycznego) nawet w bardzo niskich temperaturach.

# Sprawdzian 6

Na rysunku przedstawiono dwie paramagnetyczne kulki, umieszczone w pobliżu południowego bieguna magnesu sztabkowego. Czy: a) siły magnetyczne działające na kulki, b) momenty magnetyczne kulek są

skierowane *do*, czy *od* magnesu? c) Czy siła magnetyczna działająca na kulkę 1 jest większa, mniejsza, czy taka sama jak działająca na kulkę 2?



### Przykład 32.03. Energia atomów paramagnetycznego gazu w polu magnetycznym

Paramagnetyczny gaz znajdujący się w temperaturze pokojowej (T = 300 K) jest umieszczony w zewnętrznym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B =1,5 T; atomy gazu mają moment magnetyczny  $\mu = \mu_B$ . Oblicz średnią energię kinetyczną ruchu postępowego  $E_k$  dla atomu gazu oraz różnicę energii  $\Delta E_B$  równoległego i antyrównoległego ustawienia momentu magnetycznego atomu w polu zewnętrznym.

#### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Średnia energia kinetyczna ruchu postępowego  $E_k$ dla atomu gazu zależy od jego temperatury. 2) Energia  $E_p$  dipola magnetycznego  $\vec{\mu}$  w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  zależy od kąta  $\theta$  między kierunkami  $\vec{\mu}$  i  $\vec{B}$ .

Obliczenia: Z równania (19.24) otrzymujemy:

$$E_{k} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})$$
  
= 6,2 \cdot 10^{-21} J  
= 0,039 eV (odpowiedź).

Na podstawie równania (28.38)  $(E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B})$  możemy zapisać różnicę energii  $\Delta E_p$  ustawienia równoległego  $(\theta = 0^\circ)$  i antyrównoległego  $(\theta = 180^\circ)$  jako

$$\Delta E_{\rm p} = -\mu B \cos 180^{\circ} - (-\mu B \cos 0^{\circ})$$
  
=  $2\mu B = 2\mu_{\rm B} B$   
=  $2(9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T})(1,5 \text{ T})$   
=  $2,8 \cdot 10^{-23} \text{ J}$   
=  $0,00017 \text{ eV}$  (odpowiedź).

W tym przypadku  $E_k$  jest około 230 razy większa od  $\Delta E_p$ , tak więc wymiana energii między atomami podczas wzajemnych zderzeń może łatwo zmienić ustawienie momentu magnetycznego na inne niż zgodne z kierunkiem linii zewnętrznego pola magnetycznego. Oznacza to, że nawet jeśli magnetyczny moment dipolowy atomu ustawi się zgodnie z kierunkiem zewnętrznego pola i dzięki temu atom znajdzie się w stanie o małej energii, to jego zderzenie z sąsiednim atomem dostarczy naszemu atomowi na tyle dużej energii, że znajdzie się on w stanie o energii większej. Moment magnetyczny wykazywany przez gaz paramagnetyczny musi więc wynikać z krótkotrwałego częściowego uporządkowania atomowych momentów magnetycznych.

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

# **32.8.** FERROMAGNETYZM

### Czego się nauczysz? \_

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 32.44 stwierdzić, że przyczyną ferromagnetyzmu jest zjawisko kwantowe zwane oddziaływaniem wymiennym;
- 32.45 wyjaśnić, dlaczego właściwości ferromagnetyczne zanikają w temperaturach przekraczających temperaturę Curie;
- 32.46 zastosować związek między namagnesowaniem próbki ferromagnetyka a momentem magnetycznym jego atomów;
- 32.47 porównać energię związaną z orientacją dipoli i energię ruchu termicznego dla próbki ferromagnetyka umieszczonej w określonej temperaturze i w określonym polu magnetycznym;
- 32.48 opisać i naszkicować pierścień Rowlanda;
- 32.49 określić, czym są domeny magnetyczne;

- 32.50 określić orientację magnetycznego momentu dipolowego próbki ferromagnetyka umieszczonej w zewnętrznym polu magnetycznym względem kierunku tego pola;
- 32.51 opisać ruch próbki ferromagnetyka w niejednorodnym polu magnetycznym;
- 32.52 obliczyć moment siły i energię orientacji dla ferromagnetycznego ciała znajdującego się w jednorodnym polu magnetycznym;
- 32.53 opisać, na czym polega zjawisko histerezy i czym jest pętla histerezy;
- 32.54 wyjaśnić pochodzenie magnetytów.

#### Podstawowe fakty

 W ferromagnetyku magnetyczne momenty dipolowe mogą zostać uporządkowane wskutek przyłożenia zewnętrznego pola magnetycznego i pozostać częściowo uporządkowane również po wyłączeniu tego pola.

- Uporządkowanie to zanika w temperaturach przekraczających temperaturę Curie danej substancji.
- W niejednorodnym polu magnetycznym ferromagnetyk jest wciągany do obszarów silniejszego pola.

### Ferromagnetyzm

Kiedy w języku potocznym mówimy o magnetyzmie, niemal zawsze mamy na myśli magnes sztabkowy lub magnes w kształcie krążka, być może przyczepiony do drzwi lodówki. Innymi słowy, wyobrażamy sobie wówczas materiał ferromagnetyczny o silnych i trwałych właściwościach magnetycznych, a nie diamagnetyk lub paramagnetyk, którego właściwości magnetyczne są słabe i nietrwałe.

Żelazo, kobalt, nikiel, gadolin, dysproz i stopy zawierające te pierwiastki wykazują ferromagnetyzm; jego źródłem jest zjawisko kwantowe, zwane *oddziaływaniem wymiennym*, podczas którego spiny elektronów w jednym atomie oddziałują ze spinami elektronów w sąsiednich atomach. W wyniku tego pojawia się uporządkowanie momentów magnetycznych atomów, mimo iż zderzenia między atomami dążą do ich przypadkowego ustawienia. To trwałe uporządkowanie pociąga za sobą trwałe właściwości magnetyczne ferromagnetyków.

*Zderzenia atomów.* Jeżeli temperatura ferromagnetyka przekracza pewną krytyczną wartość, zwaną *temperaturą Curie*, to ferromagnetyzm substancji zanika. Większość takich materiałów staje się wtedy po prostu paramagnetykami — ich momenty magnetyczne usiłują nadal ustawiać się zgodnie z polem zewnętrznym, lecz jest to zjawisko znacznie słabsze, a zderzenia atomów mogą łatwiej zniszczyć uporządkowanie. Temperatura Curie dla żelaza jest równa 1043 K (= 770°C).

**Pomiary.** Namagnesowanie ferromagnetyka takiego jak żelazo możemy badać w układzie zwanym *pierścieniem Rowlanda* (rys. 32.15). Badany materiał ma kształt cienkiego toroidalnego rdzenia o przekroju kołowym. W cewce pierwotnej P, mającej n zwojów na jednostkę długości i nawiniętej na rdzeniu, płynie prąd o natężeniu  $I_P$ . (Cewka jest w istocie długim solenoidem, któremu nadano kształt pierścienia). Gdyby nie było rdzenia żelaznego, wartość indukcji magnetycznej wewnątrz cewki byłaby równa, zgodnie ze wzorem (29.23)

$$B_0 = \mu_0 I_{\rm P} n. \tag{32.40}$$

Jednakże w obecności rdzenia żelaznego indukcja magnetyczna  $\vec{B}$  wewnątrz cewki jest zazwyczaj znacznie większa niż  $\vec{B}_0$ . Jej wartość może być zapisana jako

$$B = B_0 + B_M, (32.41)$$

gdzie  $B_M$  jest wartością indukcji magnetycznej pola pochodzącego od rdzenia żelaznego. Ten przyczynek wynika z uporządkowania atomowych momentów magnetycznych w żelazie, zachodzącego pod wpływem oddziaływania wymiennego i przyłożonego pola magnetycznego  $B_0$ . Przyczynek  $B_M$  jest proporcjonalny do namagnesowania M żelaza, jest więc proporcjonalny do momentu magnetycznego żelaza na jednostkę objętości. Aby



**Rys. 32.15.** Pierścień Rowlanda. Rdzeń cewki pierwotnej P jest wykonany z badanego ferromagnetyka (w naszym przypadku jest to żelazo). Rdzeń ten zostaje namagnesowany w wyniku przepływu prądu o natężeniu  $I_P$  w cewce P. (Zwoje cewki przedstawione są w postaci czarnych kropek). Stopień namagnesowania rdzenia wyznacza całkowitą indukcję  $\vec{B}$  w cewce P. Indukcję pola  $\vec{B}$  można zmierzyć za pomocą cewki wtórnej S.

wyznaczyć  $B_M$ , mierzymy B za pomocą cewki wtórnej S, obliczamy  $B_0$  z równania (32.40) i odejmujemy te dwie wielkości zgodnie z równaniem (32.41).

Na rysunku 32.16 przedstawiono krzywą magnesowania dla ferromagnetyka umieszczonego w pierścieniu Rowlanda. Stosunek  $B_M/B_{M,max}$ , gdzie  $B_{M,max}$  jest maksymalną możliwą wartością  $B_M$  odpowiadającą nasyceniu, został wykreślony w funkcji  $B_0$ . Ten wykres przypomina rysunek 32.14, czyli krzywą magnesowania dla paramagnetyka. Obie krzywe pokazują, do jakiego stopnia przyłożone pole magnetyczne może uporządkować atomowe momenty magnetyczne w materiale.

W rdzeniu ferromagnetycznym, którego dotyczy rysunek 32.16, uporządkowanie momentów magnetycznych dla  $B_0 \approx 1 \cdot 10^{-3}$  T wynosi około 70% uporządkowania całkowitego. Gdyby zwiększyć  $B_0$  do 1 T, uporządkowanie byłoby niemal całkowite (niestety pole o indukcji  $B_0 = 1$  T odpowiadające niemal całkowitemu nasyceniu jest dość trudno osiągnąć).

### **Domeny magnetyczne**

Oddziaływanie wymienne wytwarza silne uporządkowanie sąsiednich dipoli atomowych w ferromagnetyku o temperaturze niższej od temperatury Curie. Dlaczego więc ten materiał nie jest w stanie nasycenia, nawet gdy nie ma przyłożonego pola magnetycznego  $B_0$ ? Dlaczego nie każdy kawałek żelaza jest naturalnym silnym magnesem?

Aby to zrozumieć, weźmy pod uwagę próbkę ferromagnetyka, np. żelaza, w postaci monokryształu. Oznacza to, że układ atomów, czyli sieć krystaliczna, rozciąga się z niezakłóconą regularnością w całej objętości próbki. Taki kryształ w normalnych warunkach składa się z wielu *domen magnetycznych*. Są to obszary kryształu, w których uporządkowanie dipoli atomowych jest w istocie całkowite. Jednak domeny nie są uporządkowane. W całym krysztale domeny są zorientowane w taki sposób, że ich wpływ na zjawiska magnetyczne na zewnątrz kryształu w dużym stopniu się znosi.

Rysunek 32.17 jest powiększonym zdjęciem takiego układu domen w próbce blachy elektrotechnicznej (stal żelazo-krzemowa o zawartości 3% wagowych krzemu) o grubości 0,5 mm, która jest używana jako materiał rdzenia w silnikach elektrycznych i prądnicach. Arkusz składa się w rzeczywistości z wielu malutkich, losowo rozmieszczonych kryształów, tzw. krystalitów. Każdy z krystalitów ma inny układ domen magnetycznych, których postać zależy od orientacji krystalograficznej jego powierzchni. Fotografia przedstawia domeny na powierzchni arkusza blachy otrzymane w wyniku magneto-optycznej mikroskopii Kerra (techniki obrazowania magnetycznego, która jest oparta na magneto-optycznym efekcie Kerra). Chociaż atomowe momenty magnetyczne w każdej domenie magnetycznej są całkowicie zgodne, ciało *polikrystaliczne* (złożone z wielu krystalitów) jako całość może mieć tylko niewielki wynikowy moment magnetyczny, ponieważ poszczególne domeny są namagnesowane w różnych kierunkach, tak że suma wektorowa wszystkich domen staje się równa zeru. Na fotografii to "znoszenie się" momentów magnetycznych można zobaczyć na przykładzie dwóch kryształów o "dobrze" zorientowanej powierzchni, dla których wektory namagnesowania domen są wskazane przez strzałki. Jeżeli będziemy magnesować taką próbkę, umieszczając ją w zewnętrznym



**Rys. 32.16.** Krzywa magnesowania dla rdzenia z ferromagnetyka umieszczonego w pierścieniu Rowlanda (rys. 32.15). Liczba 1 na osi pionowej odpowiada całkowitemu uporządkowaniu dipoli atomowych (nasyceniu) wewnątrz materiału



**Rys. 32.17.** Zdjęcie układu domen magnetycznych na powierzchni próbki niezorientowanej elektrotechnicznej stali żelazokrzemowej, uzyskane za pomocą magneto-optycznej mikroskopii Kerra. Domeny są widoczne jako obszary o różnym kontraście (dzięki uprzejmości Rudolfa Schäfera, IFW Dresden)

polu magnetycznym o stopniowo rosnącej wartości indukcji, to wywołamy dwa zjawiska, które łącznie doprowadzą do powstania krzywej magnesowania o kształcie pokazanym na rysunku 32.16. Jednym ze zjawisk jest wzrost rozmiarów domen zorientowanych wzdłuż pola zewnetrznego kosztem domen zorientowanych w innych kierunkach. Drugie zjawisko polega na zmianie ustawienia dipoli wewnatrz domeny jako całości, tak aby to ustawienie było zbliżone do kierunku wektora indukcji pola.

Oddziaływania wymienne i zmiany orientacji domen dają następujący wynik:

W ferromagnetyku umieszczonym w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$  powstaje silny moment magnetyczny skierowany zgodnie z  $\vec{B}_{zewn}$ . Jeżeli pole jest niejednorodne, to ferromagnetyk jest przyciągany do obszaru silniejszego pola magnetycznego z obszaru słabszego pola.

### Histereza

Krzywe magnesowania dla ferromagnetyków nie wracają do punktu początkowego, gdy zwiększamy, a następnie zmniejszamy indukcję zewnętrznego pola magnetycznego  $B_0$ . Na rysunku 32.18 przedstawiono wykres  $B_M$  jako funkcji  $B_0$ , otrzymany podczas następujących pomiarów wykonanych w pierścieniu Rowlanda: 1) Zaczynając od nienamagnesowanego żelaza (punkt *a*), zwiększamy natężenie prądu w toroidzie, aż  $B_0 (= \mu_0 In)$ osiągnie wartość odpowiadającą punktowi b; 2) zmniejszamy natężenie prądu w uzwojeniu toroidu (a więc  $B_0$ ) z powrotem do zera (punkt c); 3) zmieniamy kierunek prądu w toroidzie na przeciwny i zwiększamy natężenie prądu aż  $B_0$  osiągnie wartość odpowiadającą punktowi d; 4) ponownie zmniejszamy natężenie prądu do zera (punkt e); 5) jeszcze raz odwracamy kierunek prądu aż do osiągnięcia ponownie punktu b.

Brak powtarzalności pokazany na rysunku 32.18 nazywamy histerezą, a krzywą bcdeb nazywamy pętlą histerezy. Zauważ, że w punktach c i e rdzeń żelazny jest namagnesowany, chociaż prąd nie płynie w uzwojeniu toroidu. Jest to znane zjawisko trwałego namagnesowania.

Histerezę można zrozumieć, biorąc pod uwagę pojęcie domen magnetycznych. Okazuje się, że ruchy granic domen i zmiany ich ustawienia nie są całkowicie odwracalne. Gdy indukcja  $B_0$  przyłożonego pola rośnie, a następnie maleje do wartości początkowej, domeny nie wracają całkowicie do początkowego ułożenia, ale zachowują pewną "pamięć" uporządkowania po początkowym wzroście pola. Ta pamięć materiałów magnetycznych jest podstawową właściwościa wykorzystywaną do magnetycznego gromadzenia informacji.

Pamięć uporządkowania domen może także wystąpić w naturze. Gdy uderzenie pioruna wywołuje prądy płynące w ziemi licznymi krętymi drogami, silne pola magnetyczne, które wtedy powstają, mogą namagnesować ferromagnetyki znajdujące się w pobliskich skałach. Z powodu histerezy taki materiał skalny zachowuje częściowo swoje namagnesowanie po uderzeniu pioruna (i po ustaniu przepływu prądów). Odłamki skały - wystawione później na działanie wietrzenia, pokruszone i rozdrobnione - to kawałki magnetytu.



Rys. 32.18. Krzywa magnesowania (ab) dla próbki ferromagnetyka i związana z nią petla histerezy (bcdeb)

### Przykład 32.04. Magnetyczny moment dipolowy igły kompasu

Igła kompasu wykonana z czystego żelaza (o gęstości 7900 kg/m<sup>3</sup>) ma długość *L* równą 3 cm, szerokość 1 mm i grubość 0,5 mm. Wartość dipolowego momentu magnetycznego atomu żelaza wynosi  $\mu_{\rm Fe} = 2, 1 \cdot 10^{-23}$  J/T. Jeżeli namagnesowanie igły jest równoważne uporząd-kowaniu 10% atomów w igle, to jaka jest wartość dipolowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$  igły?

### **PODSTAWOWE FAKTY**

1) Uporządkowanie wszystkich N atomów igły dałoby wartość magnetycznego momentu dipolowego  $\vec{\mu}$  igły równą  $N\mu_{\rm Fe}$ . Jednakże tylko 10% atomów igły jest uporządkowanych, a przypadkowe ustawienie pozostałych atomów nie daje przyczynka do  $\vec{\mu}$ . Zatem

$$\mu = 0,1N\mu_{\rm Fe}.$$
 (32.42)

2) Możemy obliczyć liczbę atomów *N* w igle na podstawie jej masy:

$$N = \frac{\text{masa igly}}{\text{masa atomowa żelaza}}.$$
 (32.43)

*Wyznaczenie* N: W dodatku F nie jest wymieniona masa atomowa żelaza, ale jest tam masa molowa M. Zatem

masa atomowa żelaza = 
$$\frac{\text{masa molowa zelaza } M}{\text{liczba Avogadra } N_{\text{A}}}$$
.  
(32.44)

PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

### **Podsumowanie**

Prawo Gaussa dla pól magnetycznych Najprostszymi układami magnetycznymi są dipole magnetyczne. Monopole magnetyczne nie istnieją. Prawo Gaussa dla pól magnetycznych:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \tag{32.1}$$

orzeka, że wypadkowy strumień magnetyczny przenikający przez dowolną (zamkniętą) powierzchnię Gaussa jest równy zeru. Możemy wyciągnąć stąd wniosek, że monopole magnetyczne nie istnieją.

**Uogólnione prawo Ampère'a** Zmienny strumień elektryczny indukuje pole magnetyczne  $\vec{B}$ . To prawo:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$
(32.3)

Zapisujemy następnie równanie (32.43) za pomocą masy igły m, masy molowej M i liczby Avogadra  $N_A$ 

$$N = \frac{mN_{\rm A}}{M}.$$
 (32.45)

Masa igły *m* jest iloczynem jej gęstości i objętości. Obliczenie objętości daje wynik  $1.5 \cdot 10^{-8}$  m<sup>3</sup>, możemy więc napisać

masa igły 
$$m = (gęstość igły)(objętość igły)$$
  
= (7900 kg/m<sup>3</sup>)(1,5 · 10<sup>-8</sup> m<sup>3</sup>)  
= 1,185 · 10<sup>-4</sup> kg.

Podstawiając do równania (32.45) wartość *m* oraz M = 55,847 g/mol (= 0,055 847 kg/mol) oraz  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  mol<sup>-1</sup>, otrzymujemy:

$$N = \frac{(1,185 \cdot 10^{-4} \text{ kg})(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{0,055847 \text{ kg/mol}}$$
$$= 1,2774 \cdot 10^{21}.$$

*Wyznaczenie*  $\mu$ : Podstawienie tej wartości i wartości i  $\mu_{\text{Fe}}$  do równania (32.42) daje:

$$\mu = (0,1)(1,2774 \cdot 10^{21})(2,1 \cdot 10^{-23} \text{ J/T})$$
  
= 2,682 \cdot 10^{-3} \text{ J/T}  
\approx 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ J/T} (odpowiedź).

wiąże pole magnetyczne indukowane wzdłuż zamkniętego konturu ze zmiennym strumieniem elektrycznym  $\Phi_E$ , przenikającym przez ten kontur. Prawo Ampère'a  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_p$  (równanie (32.4)) określa pole magnetyczne wytworzone przez prąd o natężeniu  $I_p$  objęty zamkniętym konturem. Równanie (32.3) i prawo Ampère'a mogą być zapisane w postaci jednego równania:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I_p \qquad (\text{uogólnione prawo Ampère'a}).$$
(32.5)

**Prąd przesunięcia** Definiujemy natężenie fikcyjnego *prądu przesunięcia* wywołanego zmiennym polem elektrycznym jako

$$I_{\rm prz} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}.$$
 (32.10)

Równanie (32.5) przybiera wtedy postać

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{prz},p} + \mu_0 I_p \qquad (\text{uogólnione prawo Ampère'a}),$$
(32.11)

gdzie  $I_{\text{prz,p}}$  jest natężeniem prądu przesunięcia objętego konturem całkowania. Idea prądu przesunięcia pozwala zachować pojęcie ciągłości prądu płynącego przez kondensator. Jednakże prąd przesunięcia *nie* oznacza przemieszczenia ładunku.

**Równania Maxwella** Zestawione w tabeli 32.1 równania Maxwella opisują zjawiska elektromagnetyczne i stanowią podstawę elektromagnetyzmu, włączając w to optykę.

**Ziemskie pole magnetyczne** Ziemskie pole magnetyczne może być traktowane w przybliżeniu jako pole dipola magnetycznego, którego moment magnetyczny tworzy kąt 11,5° z osią obrotu Ziemi, przy czym południowy biegun tego dipola znajduje się na półkuli północnej. Kierunek lokalnego pola magnetycznego w dowolnym punkcie na powierzchni Ziemi jest określony *deklinacją magnetyczną* (czyli kątem mierzonym w lewo lub w prawo od kierunku północy geograficznej) oraz *inklinacją magnetyczną* (czyli kątem mierzonym w górę lub w dół od płaszczyzny poziomej).

**Spinowy moment magnetyczny** Elektron ma swój własny moment pędu zwany *spinowym momentem pędu (spinem)*  $\vec{S}$ , z którym związany jest własny *spinowy moment magnetyczny* 

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m}\vec{S}.$$
 (32.22)

Jeśli mierzyć składową z spinu, oznaczoną prze<br/>z $S_z,$ może ona przyjmować tylko wartości dane wzorem

$$S_z = m_s \frac{h}{2\pi}$$
 dla  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , (32.23)

gdzie  $h (= 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})$  jest stałą Plancka. Podobnie

$$\mu_{s,z} = \mp \frac{eh}{4\pi m} = \mp \mu_{\rm B}, \qquad (32.24, 32.26)$$

gdzie  $\mu_{\rm B}$  oznacza magneton Bohra

$$\mu_{\rm B} = \frac{eh}{4\pi m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \,\,{\rm J/T}. \tag{32.25}$$

Energia  $E_p$  związana z ustawieniem spinowego momentu magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$  skierowanym wzdłuż osi z jest równa

$$E_{\rm p} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{\rm zewn} = -\mu_{s,z} B_{\rm zewn}. \tag{32.27}$$

**Orbitalny moment magnetyczny** Elektron w atomie ma także moment pędu zwany *orbitalnym momentem pędu*  $\vec{L}_{orb}$ , z którym związany jest *orbitalny moment magnetyczny* 

$$\vec{\mu}_{\rm orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{\rm orb}.$$
 (32.28)

Składowa z orbitalnego momentu pędu jest skwantowana i może przyjmować tylko wartości:

$$L_{\text{orb},z} = m_l \frac{h}{2\pi}$$

dla  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm$ (wartość maksymalna). (32.29) Wartość składowej orbitalnego momentu magnetycznego jest równa

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \frac{eh}{4\pi m} = -m_l \mu_{\text{B}}.$$
 (32.30, 32.31)

Energia  $E_p$  związana z ustawieniem orbitalnego momentu magnetycznego w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$  skierowanym wzdłuż osi z jest równa

$$E_{\rm p} = -\vec{\mu}_{\rm orb} \cdot \vec{B}_{\rm zewn} = -\mu_{\rm orb,z} B_{\rm zewn}. \tag{32.32}$$

**Diamagnetyzm** *Diamagnetyki* wykazują właściwości magnetyczne dopiero po umieszczeniu w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$ : stają się wówczas dipolami magnetycznymi ustawionymi przeciwnie do pola zewnętrznego. Jeżeli pole jest niejednorodne, diamagnetyk jest wypychany z obszaru silniejszego pola magnetycznego.

**Paramagnetyzm** *Paramagnetyki* składają się z atomów mających trwały dipolowy moment magnetyczny  $\vec{\mu}$ , ale momenty magnetyczne są zorientowane przypadkowo i materiał, jako całość, nie wytwarza pola magnetycznego, chyba że zostanie umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym, w którym momenty magnetyczne dążą do ustawienia się zgodnie z kierunkiem pola. Stopień uporządkowania w objętości V jest określony przez wektor *namagnesowania*  $\vec{M}$ , którego wartość jest równa

$$M = \frac{\text{zmierzony moment magnetyczny}}{V}.$$
 (32.38)

Całkowite uporządkowanie wszystkich N atomowych dipoli magnetycznych w próbce (*nasycenie*) odpowiada maksymalnej wartości namagnesowania  $M_{\text{max}} = N\mu/V$ . Dla małych wartości  $B_{\text{zewn}}/T$  mamy zależność przybliżoną

$$M = C \frac{B_{\text{zewn}}}{T} \qquad (\text{prawo Curie}), \qquad (32.39)$$

gdzie T jest temperaturą, a C jest nazywane stałą Curie.

Jeżeli  $\vec{B}_{zewn}$  jest niejednorodne, to paramagnetyk jest wciągany do obszaru silniejszego pola magnetycznego.

**Ferromagnetyzm** W *ferromagnetyku* zewnętrzne pole magnetyczne może uporządkować dipolowe momenty magnetyczne; uporządkowanie to może się częściowo utrzymywać w pewnych obszarach (*domenach*) po wyłączeniu pola. Ferromagnetyzm substancji znika, gdy temperatura przekracza *temperaturę Curie*. Jeżeli pole zewnętrzne jest niejednorodne, to ferromagnetyk jest wciągany do obszaru silniejszego pola magnetycznego.

### Pytania

1 Na rysunku 32.19a przedstawiono kondensator o kołowych okładkach, który jest ładowany. Punkt *a* (w pobliżu jednego z przewodów doprowadzających) i punkt *b* (wewnątrz szczeliny kondensatora) znajdują się w tej samej odległości od osi, podobnie jak punkt *c* (nieco dalej od przewodu) i punkt *d* (między okładkami, ale na zewnątrz szczeliny). Jeden z wykresów na rysunku 32.19b ilustruje zależność wartości indukcji magnetycznej od odległości *r*, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz przewodu. Drugi z wykresów ilustruje zależność wartości indukcji magnetycznej od odległości *r* wewnątrz i na zewnątrz szczeliny kondensatora. Obydwa wykresy częściowo się pokrywają. Przyporządkuj każdy z punktów na rysunku 32.19a jednemu z trzech punktów na wykresie.



**2** Na rysunku 32.20 przedstawiono kondensator płaski oraz prąd płynący w doprowadzeniach, rozładowujący kondensator. Czy: a) wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , b) prąd

przesunięcia o natężeniu *I*<sub>prz</sub> są skierowane w lewo, czy w prawo między okładkami kondensatora? c) Czy pole magnetyczne w punkcie *P* jest skierowane za, czy przed płaszczyznę rysunku?



**3** Na rysunku 32.21 przedstawiono w dwóch przypadkach wektor natężenia pola elektrycznego i linię indukowanego pola magnetycznego. Czy w poszczególnych przypadkach wartość  $\vec{E}$  rośnie, czy maleje?





**4** Na rysunku 32.22a przedstawiono dwa przeciwnie skierowane ustawienia spinu dla elektronu w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}_{zewn}$ . Na rysunku 32.22b przedstawiono trzy wykresy energii związanej z tymi ustawieniami jako funkcji wartości indukcji pola  $\vec{B}_{zewn}$ . Wykresy b i c składają się z przecinających się linii, a wykres a - z równoległych linii. Który wykres jest poprawny?



**5** Elektron w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}_{zewn}$  ma spinowy moment pędu  $S_z$ , skierowany antyrównolegle do wektora  $\vec{B}_{zewn}$ . Jeżeli w elektronie następuje *odwrócenie spinu*, tak że  $S_z$  jest równoległe do  $\vec{B}_{zewn}$ , to czy wtedy elektron zyskuje, czy traci energię?

**6** Czy wartość wypadkowej siły działającej na pętlę na rysunku 32.12a i b wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie taka sama, jeżeli zwiększymy: a) wartość  $\vec{B}_{zewn}$ , b) stopień niejednorodności  $\vec{B}_{zewn}$ ?

7 Na rysunku 32.23 przedstawiono widok z boku kondensatora o równoległych okładkach w kształcie kwadratów oraz cztery kontury leżące między okładkami. Kondensator ten jest rozładowywany. a) Zaniedbując efekty brzegowe dla pola magnetycznego, uszereguj przedstawione kontury pod względem wartości całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ , zaczynając od wartości najwięk-

szej. b) Czy dla któregoś konturu kąt między wektorami  $\vec{B}$  i d $\vec{s}$  jest stały (tak że łatwo jest obliczyć iloczyn skalarny pod całką)? c) Czy dla któregoś konturu wartość indukcji magnetycznej *B* jest stała (tak że można ją wyciągnąć przed znak całki)?



**Ky5: 52:25:** 1 ytalle 7

8 Na rysunku 32.24 przedstawiono elektron krążący po orbicie w polu magnetycznym w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Pole jest niejednorodne w przypadku 1 i 2, natomiast jednorodne w przypadku 3. Czy następujące wielkości: a) dipolowy moment magnetyczny pętli, b) siła magnetyczna działająca na pętlę są dla danego przypadku skierowane do góry, w dół, czy są równe zeru?



**9** W pytaniu 8 i na rysunku 32.24 zastąp pętle z prądem kulkami diamagnetycznymi. Czy następujące wielkości: a) dipolowy moment magnetyczny kulki, b) siła magnetyczna działająca na kulkę będą dla danego przypadku skierowane do góry, w dół, czy będą równe zeru?

**10** W pytaniu 8 i na rysunku 32.24 zastąp pętle z prądem kulkami paramagnetycznymi. Czy następujące wielkości: a) dipolowy moment magnetyczny kulki, b) siła magnetyczna działająca na kulkę będą dla danego przypadku skierowane do góry, w dół, czy będą równe zeru?

**11** Na rysunku 32.25 przedstawiono trzy prostokątne próbki ferromagnetyka, w których przyłożenie bardzo silnego pola magnetycznego o indukcji  $B_0$  spowodowało skierowanie się momentów magnetycznych domen przed płaszczyznę rysunku (kółko z kropką). Jednak w każdej próbce pozostały małe domeny, których pole magnetyczne jest skierowane za płaszczyznę rysunku (kółko z krzyżykiem). Próbka 1 stanowi pojedynczy kryształ, a pozostałe próbki zawierają zanieczyszczenia ułożone wzdłuż zaznaczonych linii; na ogół domeny magnetyczne nie mogą tych linii przekraczać.

Kierunek przyłożonego pola magnetycznego został następnie odwrócony, przy czym wartość indukcji magnetycznej odwróconego pola nie była już tak duża. Zmiana ta spowodowała wzrost początkowo małych domen. a) Uszereguj te trzy próbki pod względem możliwości wzrostu tych domen, zaczynając od wzrostu największego. Ferromagnetyki, w których łatwo jest zmienić ustawienie dipoli magnetycznych, nazywamy *magnetycznie miękkimi*; jeśli taka zmiana jest trudna, mówimy, że są *magnetycznie twarde*. b) Która z próbek cechuje się największą twardością magnetyczną?



**12** Na rysunku 32.26 przedstawiono cztery sztabki stalowe, z których trzy są magnesami trwałymi. Zaznaczono jeden z biegunów. Na podstawie doświadczeń stwierdzono, że końce a i d przyciągają się, końce c i f odpychają się, końce e i h przyciągają się oraz końce a i h przyciągają się. a) Które końce są północymi biegunami magnetycznymi? b) Która sztabka nie jest namagnesowana?



### Zadania

60	Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach <i>WileyPLUS</i> (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
•_••	Liczba kropek określa stopień trudności zadania
ssm	Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w Student Solutions Manual
www	Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
ilw	Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
TITLE TITLE	Więcej informacji znajdziesz w książce The Flying Circus of Physics i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

### Podrozdział 32.1 Prawo Gaussa dla pól magnetycznych

•1 Strumień magnetyczny przenikający przez jedną z pięciu ścianek kostki do gry jest dany wzorem  $\Phi_B = \pm N$  Wb, gdzie N (= 1 do 5) oznacza liczbę oczek na ściance. Strumień jest dodatni (skierowany na zewnątrz) dla N parzystych i ujemny (skierowany do wnętrza) dla N nieparzystych. Wyznacz strumień przechodzący przez szóstą ściankę kostki.

•2 Na rysunku 32.27 przedstawiono powierzchnię zamkniętą. Górny fragment tej powierzchni jest kołem o promieniu 2 cm; przez obszar ten przechodzi prostopadle pole magnetyczne o indukcji 0,3 T skierowane na zewnątrz. Przez dolny płaski fragment tej powierzchni przechodzi strumień magnetyczny 0,7 Wb skierowany na zewnątrz. Jakie są a) wartość oraz b) kierunek (na zewnątrz czy do wewnątrz) strumienia magnetycznego przechodzącego przez boczną, zakrzywioną część tej powierzchni?



Rys. 32.27. Zadanie 2

••3 ssm ilw Powierzchnia Gaussa składająca się z powierzchni walca o przekroju kołowym oraz dwóch denek ma promień 12 cm i długość 80 cm. Przez jedno z denek przenika skierowany do wnętrza strumień magnetyczny o wartości 25  $\mu$ Wb. Przy drugim denku istnieje jednorodne pole magnetyczne o indukcji 1,6 mT prostopadłej do powierzchni i skierowanej na zewnątrz. Jakie są a) wartość oraz b) kierunek (na zewnątrz czy do wewnątrz) wypadkowego strumienia magnetycznego przechodzącego przez powierzchnię boczną walca?

•••4 • Na rysunku 32.28 przedstawiono dwa przewody równoległe do osi z i oddalone o 4r, przez które płyną przeciwnie skierowane prądy o natężeniach I. Pomiędzy przewodami, w równej odległości od każdego z nich, umieszczono walec o promieniu r i osi pokrywającej się z osią z. Wykorzystując prawo Gaussa dla pola magnetycznego, wyprowadź wzór na wypadkowy strumień magnetyczny przechodzący przez połowę powierzchni walca leżącą nad osią x. (Wskazówka: Oblicz strumień przez część płaszczyzny xz leżącą wewnątrz walca).



Rys. 32.28. Zadanie 4

### Podrozdział 32.2 Indukowane pole magnetyczne

•5 ssm Indukcja magnetyczna pola indukowanego między okładkami kołowego kondensatora płaskiego w odległości 6 mm od jego osi wynosi  $2 \cdot 10^{-7}$  T. Promień okładek jest równy 3 mm. Jaka jest szybkość zmian d $\vec{E}$ /dt pola elektrycznego między okładkami?

•6 Kondensator o okładkach w kształcie kwadratu o boku *L* jest rozładowywany prądem o natężeniu 0,75 A. Na rysunku 32.29 przedstawiono jedną z okładek widzianą z boku, od we-

wnątrz kondensatora. Zaznaczono także kreskowaną linią kontur w kształcie prostokąta. Przyjmując L = 12 cm, W =4 cm i H = 2 cm, oblicz wartość całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  wzdłuż tego konturu.

••7 • Jednorodne pole elektryczne. Na rysunku 32.30 przedstawiono koło o promieniu R = 3 cm znajdujące się w obszarze jednorodnego pola elektrycznego skierowanego przed płaszczyznę rysunku. Całowity strumień elektryczny przez to koło jest dany wzorem  $\Phi_E =$ 3 mV · m/s)t, gdzie t jest cza-



Rys. 32.29. Zadanie 6



**Rys. 32.30.** Zadania 7–10 i 19–22

sem wyrażonym w sekundach. Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego indukowanego w odległościach a) 2 cm oraz b) 5 cm od środka koła?

••8 ••Niejednorodne pole elektryczne. Na rysunku 32.30 przedstawiono koło o promieniu R = 3 cm znajdujące się w obszarze pola elektrycznego skierowanego przed płaszczyznę rysunku. Całowity strumień elektryczny przechodzący przez koło o promieniu  $r \leq R$  jest dany wzorem  $\Phi_E = (0,6 \text{ mV} \cdot \text{m/s})(r/R)t$ , gdzie t jest czasem wyrażonym w sekundach. Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego indukowanego w odległościach a) 2 cm oraz b) 5 cm od środka koła?

••9 • Jednorodne pole elektryczne. Na rysunku 32.30 przedstawiono przekrój poprzeczny przez obszar w kształcie walca o promieniu R = 3 cm, wewnątrz którego znajduje się jednorodne pole elektryczne skierowane przed płaszczyznę rysunku. Natężenie pola elektrycznego dane jest wzorem  $E = (4,5 \cdot 10^{-3} \text{ V/m} \cdot \text{s})t$ , gdzie t jest czasem wyrażonym w sekundach. Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego indukowanego w odległościach a) 2 cm oraz b) 5 cm od osi walca?

••10 ••10 Niejednorodne pole elektryczne. Na rysunku 32.30 przedstawiono przekrój poprzeczny przez obszar w kształcie walca o promieniu R = 3 cm, wewnątrz którego znajduje się pole elektryczne skierowane przed płaszczyznę rysunku. Natężenie pola elektrycznego dane jest wzorem  $E = (0,5 \text{ V/m} \cdot \text{s})(1-r/R)t$ , gdzie t jest czasem wyrażonym w sekundach, a r jest odległością od osi walca ( $r \leq R$ ). Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego indukowanego w odległościach a) 2 cm oraz b) 5 cm od osi walca?

••11 Przypuśćmy, że kondensator płaski ma okładki w kształcie koła o promieniu R = 30 mm, a odległość między nimi wynosi 5 mm. Przypuśćmy także, że do okładek kondensatora przyłożono napięcie o maksymalnej wartości 325 V i częstotliwości 50 Hz, tzn.

$$U = (325 \text{ V}) \sin[2\pi(50 \text{ Hz})t].$$

a) Oblicz  $B_{\max}(R)$ , czyli maksymalną wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola, która występuje dla r = R. b) Narysuj wykres  $B_{\max}(r)$  dla 0 < r < 10 cm.

••12 The Kondensator płaski, którego kołowe okładki mają promienie 40 mm, jest rozładowywany prądem o natężeniu 6 A. W jakiej odległości od osi kondensatora znajduje się punkt, w którym indukowane pole magnetyczne ma indukcję równą 75% wartości maksymalnej, jeśli punkt ten znajduje się: a) wewnątrz kondensatora, b) na zewnątrz kondensatora? c) Ile wynosi ta maksymalna indukcją?

### Podrozdział 32.3 Prąd przesunięcia

 •13 Z jaką szybkością musi się zmieniać różnica potencjałów między okładkami kondensatora płaskiego o pojemności 2 μF, aby wytworzyć prąd przesunięcia o natężeniu 1,5 A? •14 Kondensator płaski, którego okładki mają kształt koła o promieniu *R*, jest ładowany. Wykaż, że wartość gęstości prądu przesunięcia wewnątrz kondensatora jest dana wzorem  $J_{\text{prz}} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$  dla  $r \leq R$ .

•15 ssm Wykaż, że natężenie prądu przesunięcia w kondensatorze płaskim o pojemności *C* może być zapisane w postaci  $I_{\text{prz}} = C(dU/dt)$ , gdzie *U* jest różnicą potencjałów między okładkami.

•16 Kondensator płaski, mający kołowe okładki o promieniu 0,1 m, jest rozładowywany. Pętla w kształcie okręgu o promieniu 0,2 m jest ułożona równolegle do okładek w taki sposób, że jej środek leży na prostej łączącej środki okładek kondensatora i znajduje się w połowie odległości między okładkami. Natężenie prądu przesunięcia, przechodzącego przez pętlę wynosi 2 A. Z jaką szybkością zmienia się natężenie pola elektrycznego między okładkami?

••17 Wykonany ze srebra przewód ma opór elektryczny właściwy  $\rho = 1,62 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ , a pole jego przekroju jest równe 5 mm<sup>2</sup>. Przez przewód płynie jednorodny prąd; w pewnej chwili natężenie tego prądu jest równe 100 A i zmienia się z szybkością 2000 A/s. a) Jaka jest wartość natężenia (jednorodnego) pola elektrycznego w tej chwili? b) Jakie jest natężenie prądu przesunięcia w tej chwili? c) Wyznacz stosunek wartości indukcji pola magnetycznego pochodzącego od prądu przepływu prądu w przewodzie.

••18 • Przedstawiony na rysunku 32.31 obwód składa się z klucza S, idealnego źródła o SEM 12 V, opornika 50 M $\Omega$  i kondensatora powietrznego. Równoległe okładki kondensatora mają kształt kół o promieniach 5 cm i są odległe o 3 mm. W chwili t = 0 klucz S zostaje zamknięty i rozpoczyna się

ładowanie kondensatora. Pole elektryczne w obszarze między okładkami jest jednorodne. Wyznacz indukcję pola magnetycznego indukowanego w chwili  $t = 250 \,\mu$ s w odległości 3 cm od osi kondensatora.



Rys. 32.31. Zadanie 18

••19 Jednorodna gęstość prądu przesunięcia. Na rysunku 32.30 przedstawiono przekrój poprzeczny przez obszar w kształcie walca o promieniu R = 3 cm, wewnątrz którego płynie prąd przesunięcia skierowany przed płaszczyznę rysunku. Gęstość prądu przesunięcia ma wartość  $J_{prz} = 6$  A/m<sup>2</sup>. Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego wytwarzanego przez prąd przesunięcia w odległościach a) 2 cm oraz b) 5 cm od osi walca?

••20 Jednorodna gęstość prądu przesunięcia. Na rysunku 32.30 przedstawiono przekrój poprzeczny przez obszar w kształcie walca o promieniu R = 3 cm, wewnątrz którego płynie równomiernie rozłożony prąd przesunięcia o natężeniu  $I_{prz} = 0,5$  A, skierowany przed płaszczyznę rysunku. Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego wytwarzanego przez prąd przesunięcia w odległościach a) 2 cm oraz b) 5 cm od osi walca?

••21 Single Niejednorodna gęstość prądu przesunięcia. Na rysunku 32.30 przedstawiono przekrój poprzeczny przez obszar w kształcie walca o promieniu R = 3 cm, wewnątrz którego płynie prąd przesunięcia skierowany przed płaszczyznę rysunku. Gęstość prądu przesunięcia ma wartość daną wzorem  $J_{\text{prz}} = 4 \text{ A/m}^2(1-r/R)$ , gdzie r jest odległością od osi walca. Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego wytwarzanego przez prąd przesunięcia w odległościach a) 2 cm oraz b) 5 cm od osi walca?

••22 • Niejednorodna gęstość prądu przesunięcia. Na rysunku 32.30 przedstawiono przekrój poprzeczny przez obszar w kształcie walca o promieniu R = 3 cm, wewnątrz którego płynie równomiernie rozłożony prąd przesunięcia skierowany przed płaszczyznę rysunku. Natężenie prądu przesunięcia przepływającego prostopadle przez koło o promieniu  $r \leq R$ i środku na osi walca jest dane wzorem  $I_{prz} = 3 \text{ A} (r/R)$ . Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego wytwarzanego przez prąd przesunięcia w odległościach a) 2 cm oraz b) 5 cm od osi walca?

••23 ssm ilw Na rysunku 32.32 przedstawiono kondensator płaski, który ma kwadratowe okładki o boku L = 1 m. Prad o nateżeniu 2 A ładuje kondensator, wytwarzając między okładkami jednorodne pole elektryczne  $\vec{E}$ , skierowane prostopadle do nich. a) Jakie jest natężenie prądu przesunięcia Iprz w obszarze między okładkami? b) Jaka jest wartość dE/dt w tym obszarze? c) Jakie jest natężenie pradu przesunięcia płynącego przez zaznaczony linią przerywaną kwadrat o boku  $d = 0.5 \,\mathrm{m}$ ? d) Jaka jest wartość całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ wzdłuż tego konturu?

••24 Wartość natężenia pola elektrycznego między dwiema równoległymi kołowymi płytami wynosi  $E = 4 \cdot 10^5 - 6 \cdot 10^4 t$ , gdzie *E* jest wyrażone w woltach na metr, a *t* w sekundach. W chwili t = 0 pole  $\vec{E}$  jest

skierowane do góry, jak pokazano na rysunku 32.33. Pole powierzchni każdej płyty jest równe  $4 \cdot 10^{-2}$  m<sup>2</sup>. Dla  $t \ge 0$  oblicz, jaka jest a) wartość natężenia prądu przesunięcia między płytami oraz b) jego kierunek (do góry, czy do dołu). c) Czy kierunek wektora indukcji magnetycznej pola indukowanego wokół płyt jest zgodny, czy przeciwny do ruchu wskazówek zegara?





widok z boku Rys. 32.32. Zadanie 23





••25 ilw Gdy kondensator płaski, którego okładki są kołami o średnicy 20 cm, jest ładowany, gęstość prądu przesunięcia w obszarze między okładkami jest jednorodna i ma wartość  $J_{\text{prz}} = 20 \text{ A/m}^2$ . a) Oblicz wartość indukcji *B* pola magnetycznego w odległości r = 50 mm od osi symetrii tego obszaru. b) Oblicz  $\frac{dE}{dt}$  w tym obszarze.

••26 Kondensator płaski, którego okładki są kołami o średnicy 20 cm, jest rozładowywany prądem o natężeniu 12 A. Rozważ kontur w kształcie równoległego do okładek okręgu o promieniu *R*/3, którego środek leży na osi kondensatora. a) Jakie jest natężenie prądu przesunięcia przepływającego przez obszar ograniczony tym okręgiem? a) Maksymalna wartość indukcji pola magnetyczego indukowanego między okładkami jest równa 12 mT. Jaka jest odległość od osi kondensatora punktów, w których wartość indukcji pola magnetyczego jest równa 3 mT przy założeniu, że punkty te znajdują się a) wewnątrz oraz b) na zewnątrz kondensatora?

••27 ilw Natężenie jednorodnego pola elektrycznego maleje do zera w sposób pokazany na rysunku 32.34. Skala osi poziomej jest wyznaczona przez  $t_s = 12 \,\mu s$ , a skala osi pionowej przez  $E_s = 6 \cdot 10^5$  N/C. Oblicz natężenie prądu przesunięcia przepływającego przez powierzchnię 1,6 m<sup>2</sup> prostopadłą do kierunku pola elektrycz-

nego podczas każdego z przedziałów czasu a, b i c, pokazanych na wykresie. (Pomiń efekty na granicach przedziałów).

••28 . 😳 Na rysunku 32.35a przedstawiono długi przewód o oporze elektrycznym właściwym 1,62 ·  $10^{-8} \Omega$  · m, oraz punkt P znajdujący się w odległości 9 mm od przewodu. Zależność nateżenia pradu I płynacego w przewodzie od czasu jest przedstawiona na rysunku 32.35b, przy czym skala osi poziomej jest wyznaczona przez  $t_s = 50 \text{ ms}$ , a skala osi pionowej przez  $I_s = 10$  A. Wyznacz wartość indukcji B<sub>I</sub> pola magnetycznego wytwarzanego w punkcie P wskutek przepływu prądu przez przewód w chwilach: a) t =20 ms, b) t = 40 ms oraz



**Rys. 32.34.** Zadanie 27



c) t = 60 ms. Załóż następnie, że pole elektryczne powodujące przepływ prądu nie występuje poza przewodem, i wyznacz wartość  $B_{I,p}$  indukcji pola magnetycznego w punkcie Ppochodzącego od prądu przesunięcia płynącego w przewodzie w chwilach: d) t = 20 ms, e) t = 40 ms oraz f) t = 60 ms. Dla t = 20 ms wyznacz kierunek (przed czy za płaszczyznę rysunku) pola g)  $\vec{B}_I$  oraz h)  $\vec{B}_{I,p}$ .

•••29 Na rysunku 32.36 przedstawiono kondensator płaski, którego okładki są kołami o promieniu R = 18 cm, podłączony do źródła prądu wytwarzającego SEM  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t$ , gdzie  $\mathcal{E}_{max} = 220$  V i  $\omega = 130$  rad/s. Maksymalna wartość natężenia prądu przesunięcia wynosi  $I_{p,max} = 7,6 \mu$ A. Zaniedbując efekty brzegowe w kondensatorze wyznacz a) maksymalną wartość natężenia prądu  $I_{max}$  płynącego w obwodzie, b) maksymalną wartość wyrażenia  $\frac{d\Phi_E}{dt}$ , gdzie  $\Phi_E$  jest strumie-

niem elektrycznym przez powierzchnię rozdzielającą okładki kondensatora oraz c) odstęp *d* między okładkami kondensatora. d) Wyznacz maksymalną wartość indukcji magnetycznej w obszarze między okładkami, w punkcie odległym o r =11 cm od osi kondensatora.



Rys. 32.36. Zadanie 29

#### Podrozdział 32.4 Magnesy

•30 Przyjmij, że średnia wartość pionowej składowej ziemskiego pola magnetycznego wynosi 43  $\mu$ T (w dół) dla całego stanu Arizona, który ma powierzchnię 2,95  $\cdot$  10<sup>5</sup> km<sup>2</sup>. Oblicz a) wartość oraz b) kierunek (do wnętrza czy na zewnątrz Ziemi) całkowitego strumienia magnetyczny przez pozostałą część powierzchni Ziemi (tzn. przez całą powierzchnię z wyjątkiem stanu Arizona).

•31 W stanie New Hampshire średnia wartość poziomej składowej ziemskiego pola magnetycznego była równa 16  $\mu$ T w 1912 roku, a średnia inklinacja wynosiła 73°. Jaka była wtedy wartość indukcji magnetycznej całkowitego ziemskiego pola?

#### Podrozdział 32.5 Magnetyzm i elektrony

•32 Na rysunku 32.37a przedstawiono schemat dozwolonych wartości energii (poziomów energetycznych) pewnego atomu. Po umieszczeniu tego atomu w polu magnetycznym o indukcji 0,5 T, schemat ten przybiera wskutek występowania dodatkowych wkładów do energii  $\vec{\mu}_{orb} \cdot \vec{B}$  (zaniedbujemy tu  $\vec{\mu}_s$ )



postać przedstawioną na rysunku 32.37b. Poziom o początkowej wartości energii  $E_1$  pozostaje niezmieniony, poziom o początkowej wartości energii  $E_2$  rozszczepia się nieco na tryplet poziomów energetycznych. Jakie są dozwolone wartości liczby kwantowej  $m_{\ell}$  dla poziomów a)  $E_1$ , b)  $E_2$ ? c) Ile wynosi wyrażona w dżulach różnica energii miedzy kolejnymi stanami trypletu?

•33 ssm www Jake są wartości składowych: a)  $L_{\text{orb},z}$ , b)  $\mu_{\text{orb}, 7}$ , jeżeli elektron w atomie ma orbitalny moment pędu różny od zera, a  $m_{\ell} = 0$ ? Jeżeli ten atom znajduje się w zewnętrznym polu magnetycznym  $\vec{B}$  o indukcji 35 mT, skierowanym wzdłuż osi z, to c) jaka energia  $E_{orb}$  związana jest z orientacją  $\vec{\mu}_{orb}$  oraz d) jaka energia  $E_{spin}$  związana jest z orientacją  $\vec{\mu}_s$ ? Jeżeli natomiast elektron miałby  $m_{\ell} = -3$ , ile wynosiłyby następujące wielkości: e)  $L_{\text{orb},z}$ , f)  $\mu_{\text{orb},z}$ , g)  $E_{orb}$  oraz h)  $E_{spin}$ ?

•34 Ile wynosi różnica energii ustawienia równoległego i antyrównoległego składowej z spinowego momentu magnetycznego elektronu w zewnetrznym polu magnetycznym o indukcji 0,25 T, skierowanym równolegle do osi z?

•35 Jaka jest zmierzona wartość składowej z orbitalnego momentu magnetycznego elektronu dla: a)  $m_l = 1$ , b)  $m_l = -2?$ 

•36 Elektron został umieszczony w polu magnetycznym o indukcji B skierowanej wzdłuż osi z. Różnica energii ustawienia równoległego i antyrównoległego składowej z spinowego momentu magnetycznego elektronu jest równa  $6 \cdot 10^{-25}$  J. Jaka jest wartość indukcji magnetycznej B?

#### Podrozdział 32.6 Diamagnetyzm

•37 Na rysunku 32.38 przedstawiono pętlę z prądem L, która jest modelem materiału diamagnetycznego. a) Naszkicuj linie pola magnetycznego przechodzące przez materiał i wokół niego, pochodzące od magnesu sztabkowego. Wyznacz

kierunki: b) dipolowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$  petli, c) umownego pradu o nateżeniu I, płynacego w petli oraz d) siły magnetycznej działającej na pętlę.



•••38 Przypuśćmy, że elektron o masie m i wartości bezwzględnej ładunku e porusza się po kołowej orbicie wokół jądra. Prostopadle do płaszczyzny orbity zostaje przyłożone jednorodne pole magnetyczne o indukcji B. Zakładając dodatkowo, że promień orbity się nie zmienia, a zmiana prędkości elektronu spowodowana polem  $\vec{B}$  jest mała, wyprowadź wzór określający zmianę orbitalnego momentu magnetycznego elektronu wywołana przyłożonym polem.

#### Podrozdział 32.7 Paramagnetyzm

•39 Przygotowano doświadczenie, którego celem jest zbadanie, czy próbka soli paramagnetycznej o krzywej magnesowania przedstawionej na rysunku 32.14 spełnia prawo Curie. Próbke umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 0,5 T, która pozostawała niezmieniona przez cały czas trwania doświadczenia, i mierzono namagnesowanie M

w przedziale temperatur od 10 do 300 K. Czy wyniki doświaczenia przeprowadzonego w takich warunkach były zgodne z prawem Curie?

•40 Próbka soli paramagnetycznej, której krzywa magnesowania jest przedstawiona na rysunku 32.14, jest utrzymywana w temperaturze pokojowej (300 K). Dla jakiej wartości indukcji magnetycznej przyłożonego pola stopień nasycenia magnetycznego próbki będzie wynosił: a) 50%, b) 90%? Czy takie pola są osiągalne w warunkach laboratoryjnych?

•41 ssm ilw Magnes w kształcie walcowego pręta ma długość 5 cm i średnice 1 cm. Jego namagnesowanie jest jednorodne i wynosi  $5.3 \cdot 10^3$  A/m. Ile wynosi dipolowy moment magnetyczny pręta?

•42 Pole magnetyczne o indukcji 0,5 T działa na gaz paramagnetyczny, którego atomy mają własny dipolowy moment magnetyczny równy  $1 \cdot 10^{-23}$  J/T. W jakiej temperaturze średnia energia kinetyczna ruchu postępowego atomów gazu będzie równa energii potrzebnej do odwrócenia dipola o 180° w tym polu magnetycznym?

••43 Elektron o energii kinetycznej  $E_{k,e}$  porusza się po kołowym torze, którego płaszczyzna jest prostopadła do kierunku jednorodnego pola magnetycznego skierowanego wzdłuż osi z. Ruch elektronu podlega tylko działaniu siły wywołanej polem. a) Wykaż, że dipolowy moment magnetyczny elektronu wynikający z jego ruchu po orbicie ma wartość  $\mu = E_{k,e}/B$  i jest skierowany przeciwnie do B. Jakie są: b) wartość oraz c) kierunek dipolowego momentu magnetycznego jonu dodatniego o energii  $E_{k,i}$  w tych samych warunkach? d) Zjonizowany gaz składa się z  $5.3 \cdot 10^{21}$  elektronów na m<sup>3</sup> i takiej samej liczby jonów na m<sup>3</sup>. Przyjmij, że średnia energia kinetyczna elektronu wynosi  $6.2 \cdot 10^{-20}$  J, a średnia energia kinetyczna jonu 7,6 $\cdot$ 10<sup>-21</sup> J. Oblicz namagnesowanie gazu, gdy znajduje się on w polu magnetycznym o indukcji 1,2 T.

••44 Na rysunku 32.39 przedstawiono krzywa magnesowania pewnego paramagnetyka. Skala osi poziomej jest wyznaczona przez b = 0.2 T/K, a skala osi pionowej przez a = 0,15. Oznaczmy przez  $\mu_{pr}$  wypadkowy moment ma-

gnetyczny próbki, a przez  $\mu_{\rm max}$  maksymalny wypadkowy moment magnetyczny tej próbki. Wyznacz wynikający z prawa Curie stosunek  $\mu_{\rm pr}/\mu_{\rm max}$  dla próbki umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym o wartości indukcji 0,8 T w temperaturze 2 K.



Rys. 32.39. Zadanie 44

•••45 ssm Rozważmy ciało stałe składające się z N atomów na jednostkę objętości, przy czym każdy atom ma magnetyczny moment dipolowy  $\vec{\mu}$ . Przypuśćmy, że  $\vec{\mu}$  może być

skierowane jedynie równolegle lub antyrównolegle do przyłożonego zewnętrznego pola magnetycznego o indukcji  $\vec{B}$ . Zgodnie z mechaniką statystyczną, prawdopodobieństwo, że atom znajduje się w stanie o energii E jest proporcjonalne do  $e^{-E/(k_BT)}$ , gdzie T jest temperaturą, a  $k_B$  stałą Boltzmanna. Skoro zaś  $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ , to liczba atomów o momencie dipolowym równoległym do  $\vec{B}$  jest proporcjonalna do  $e^{\mu B/(k_BT)}$ , a liczba atomów o momencie dipolowym antyrównoległym do  $\vec{B}$  jest proporcjonalna do  $e^{-\mu B/(k_BT)}$ . a) Wykaż, że wartość namagnesowania tego ciała wynosi  $M = N\mu \operatorname{tgh} \frac{\mu B}{k_BT}$ , gdzie tangens hiperboliczny tgh  $x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$ . b) Wykaż, że powyższy wynik upraszcza się do  $M = \frac{N\mu^2 B}{k_BT}$ dla  $\mu B \ll k_BT$ . c) Wykaż, że wynik z punktu (a) upraszcza się do  $M = N_{\mu}$  dla  $\mu B \gg k_BT$ . d) Wykaż, że wyniki uzyskane w punktach (b) i (c) są jakościowo zgodne z wykresem na rysunku 32.14.

#### Podrozdział 32.8 Ferromagnetyzm

••46 <sup>CO</sup> Jeśli umieścisz kompas na poziomej powierzchni i pozwolisz, by igła kompasu osiągnęła położenie równowagi, po czym delikatnie szturchniesz kompas tak, by igła zaczęła wykonywać drgania wokół położenia równowagi, to częstotliwość tych drgań będzie równa 0,312 Hz. Wiedząc, że pozioma składowa indukcji ziemskiego pola magnetycznego w miejscu wykonywania doświadczenia jest równa 18 μT, a moment magnetyczny igły kompasu jest równy 0,68 mJ/T, wyznacz moment bezwładności igły względem jej (pionowej) osi obrotu.

••47 ssm ilw www Wartość dipolowego momentu magnetycznego Ziemi wynosi  $8 \cdot 10^{22}$  J/T. a) Gdyby źródłem magnetyzmu ziemskiego była namagnesowana kula z żelaza, to jaki byłby jej promień? b) Jaką część objętości Ziemi zajmowałaby taka kula? Przyjmij, że dipole są całkowicie uporządkowane. Gęstość wewnętrznego jądra Ziemi wynosi 14 g/cm<sup>3</sup>. Dipolowy moment magnetyczny atomu żelaza jest równy 2,1 ·  $10^{-23}$  J/T. (*Uwaga*: Uważa się, że istotnie wewnętrzne jądro Ziemi znajduje się zarówno w stanie ciekłym, jak i stałym, i składa się częściowo z żelaza. Jednak różne argumenty wykluczają istnienie magnesu trwałego jako źródła magnetyzmu ziemskiego. Przede wszystkim temperatura we wnętrzu Ziemi jest z pewnością wyższa od temperatury Curie).

••48 Wartość momentu magnetycznego związanego z atomem żelaza w żelaznej sztabce jest równa  $2,1 \cdot 10^{-23}$  J/T. Przypuśćmy, że wszystkie atomy w sztabce, która ma długość 5 cm i pole przekroju 1 cm<sup>2</sup>, mają momenty magnetyczne ustawione równolegle. a) Ile wynosi moment magnetyczny sztabki? b) Jaki moment siły należy przyłożyć, aby utrzymać ten magnes prostopadle do zewnętrznego pola o indukcji 1,5 T? (Gęstość żelaza wynosi 7,9 g/cm<sup>3</sup>).

••49 ssm Oddziaływanie wymienne, wspomniane w podrozdziale 32.8 jako przyczyna ferromagnetyzmu, *nie* jest wzajemnym oddziaływaniem magnetycznym między dwoma elementarnymi dipolami magnetycznymi. Aby to wykazać, oblicz: a) wartość indukcji magnetycznej pola w odległości 10 nm (mierzonej wzdłuż osi dipola) od atomu o dipolowym momencie magnetycznym równym  $1.5 \cdot 10^{-23}$  J/T (kobalt), b) minimalną wartość energii potrzebnej do odwrócenia o 180° drugiego takiego dipola w tym polu magnetycznym. c) Jaki wniosek możesz wyciągnąć, porównując ten wynik ze średnią energią kinetyczną ruchu postępowego atomu równą 0,04 eV?

••50 Pręt o długości 6 cm, promieniu 3 mm i (jednorodnym) namagnesowaniu  $2,7 \cdot 10^3$  A/m może obracać się, podobnie jak igła kompasu, względem osi przechodzącej przez jego środek. Pręt ten umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji 35 mT tak, że kierunek momentu dipolowego pręta tworzy kąt 68° z kierunkiem wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ . a) Jaka jest wówczas wartość działającego na pręt momentu siły pochodzącej od pola magnetycznego? b) O ile zmieni się energia orientacji pręta, jeśli kąt zmniejszy się do 34°?

••51 Namagnesowanie nasycenia  $M_{\text{max}}$  ferromagnetycznego metalu (niklu) jest równe 4,7 · 10<sup>5</sup> A/m. Oblicz moment magnetyczny pojedynczego atomu niklu. (Gęstość niklu wynosi 8,9 g/cm<sup>3</sup>, a jego masa molowa 58,71 g/mol).

••52 Pomiary w kopalniach i otworach wiertniczych wykazują, że temperatura wnętrza Ziemi rośnie wraz z głębokością średnio o 30°C/km. Przyjmując temperaturę na powierzchni równą 10°C, oblicz głębokość, dla której żelazo przestaje być ferromagnetykiem. (Temperatura Curie żelaza zmienia się bardzo nieznacznie wraz z ciśnieniem).

••53 Wykonany z ferromagnetyka pierścień Rowlanda ma promień wewnętrzny równy 5 cm i promień zewnętrzny 6 cm. Na pierścień ten nawinięto 400 zwojów przewodu. a) Jakie natężenie prądu powinno płynąć w tym uzwojeniu, by wytworzyć toroidalne pole magnetyczne o wartości indukcji  $B_0 = 0.2 \text{ mT}$ ? b) Nawinięte na rozważany pierścień uzwojenie wtórne ma 50 zwojów i opór 8  $\Omega$ . Jeśli dla podanej wartości  $B_0$  wartość indukcji magnetycznej  $B_M$  związanej z namagnesowaniem ferromagnetyka jest równa 800 $B_0$ , jaki ładunek przepłynie w uzwojeniu wtórnym po włączeniu prądu w uzwojeniu pierwotnym?

#### Zadania dodatkowe

**54** Korzystając z przybliżeń podanych w zadaniu 61, wyznacz: a) wysokość nad powierzchnią Ziemi, gdzie wartość indukcji ziemskiego pola magnetycznego stanowi 50% wartości na powierzchni, na tej samej szerokości magnetycznej, b) maksymalną wartość indukcji magnetycznej pola na granicy między jądrem a płaszczem Ziemi, 2900 km pod powierzchnią Ziemi, c) wartość indukcji magnetycznej i d) inklinację pola ziemskiego na geograficznym biegunie północnym. e) Wyjaśnij, dlaczego wartości obliczone w punktach (c) i (d) różnią się od wartości zmierzonych.

**55** Wartość dipolowego momentu magnetycznego Ziemi wynosi  $8 \cdot 10^{22}$  J/T. a) Jakie musiałoby być natężenie prądu płynącego przez pojedynczy zwój przewodu ułożonego na ziemskim równiku geomagnetycznym, aby wytworzyć taki moment magnetyczny? Czy można by użyć takiego przewodu do skompensowania ziemskiego pola magnetycznego b) w przestrzeni kosmicznej daleko od powierzchni Ziemi lub c) na powierzchni Ziemi?

**56** Wzdłuż pierścienia o promieniu *r* rozłożono jednorodnie ładunek *q*. Pierścień ten obraca się z prędkością kątową  $\omega$  wokół osi przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do płaszczyzny pierścienia. a) Wykaż, że moment magnetyczny związany z obrotem takiego ładunku ma wartość  $\mu = \frac{1}{2}q\omega r^2$ . b) Jaki jest kierunek momentu magnetycznego, jeśli ładunek jest dodatni?

**57** Kompas, którego igła ma masę 0,05 kg i długość 4 cm, i była początkowo ustawiona wzdłuż poziomej składowej ziemskiego pola magnetycznego  $B_{\rm h} = 16 \,\mu$ T, został szturchnięty, w wyniku czego igła zaczęła wykonywać drgania o częstości kołowej 45 rad/s. Zakładając, że igła jest cienkim prętem podpartym w swym środku, wyznacz dipolowy moment magnetyczny igły.

58 Przedstawiony na rysunku 32.7 kondensator jest ładowany pradem o nateżeniu 2,5 A. Promień przewodu jest równy 1,5 mm, a promień okładki 2 cm. Załóż, że zarówno prąd w przewodzie, jak i prad przesuniecia w obszarze miedzy okładkami kondensatora są rozłożone równomiernie. Wyznacz wartości indukcji magnetycznej związanej z przepływem pradu w przewodzie dla punktów odległych od osi przewodu o: a) 1 mm (wewnątrz przewodu), b) 3 mm (na zewnątrz przewodu) oraz c) 2,2 cm (na zewnątrz przewodu). Wyznacz wartości indukcji magnetycznej związanej z prądem przesuniecia dla punktów leżacych w następujących odległościach od osi obszaru między okładkami kondensatora: d) 1 mm (wewnatrz tego obszaru), e) 3 mm (wewnatrz tego obszaru) oraz f) 2,2 cm (na zewnątrz tego obszaru). g) Wyjaśnij, dlaczego wyniki uzyskane dla dwóch mniejszych odległości różnią się w zależności od tego, czy rozważamy przewód, czy kondensator, a dla największej odległości są takie same.

**59** Kondensator zbudowany jest z równoległych kołowych płytek o promieniu R = 16 mm, odległych o d = 5 mm, przy czym pole elektryczne wewnątrz kondensatora jest jednorodne. Poczynając od chwili t = 0, różnicę potencjałów na kondensatorze można wyrazić wzorem  $U = (100 \text{ V}) \text{ e}^{-t/\tau}$ , gdzie stała czasowa jest równa  $\tau = 12$  ms. Wyznacz wartość indukcji magnetycznej w odległości r = 0.8R od osi kondensatora a) jako funkcję czasu dla  $t \ge 0$  oraz b) dla  $t = 3\tau$ .

**60** Przedstawiona na rysunku 32.40 powierzchnia zamknięta ma dwa płaskie denka i zakrzywioną powierzchnę boczną.

Strumień magnetyczny przez dolne denko ma wartość 7 mWb i jest skierowany na zewnątrz. Pole magnetyczne na górnym

denku ma indukcję o wartości 0,4 T, a wektor indukcji jest prostopadły do tego denka. Wyznacz a) wartość oraz b) kierunek (na zewnątrz czy do wewnątrz) strumienia magnetycznego przez zakrzywioną powierzchnie boczna.



Rys. 32.40. Zadanie 60

**61** ssm Ziemskie pole magnetyczne może być w przybliżeniu traktowane jako pole magnetyczne dipola. Pozioma i pionowa składowa tego pola w punkcie położonym w odległości *r* od środka Ziemi są dane wzorami, odpowiednio:

$$B_{\rm h} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \cos \lambda_{\rm m}, \qquad B_{\rm v} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r^3} \sin \lambda_{\rm m},$$

gdzie  $\lambda_{\rm m}$  jest *szerokością magnetyczną* (mierzoną od równika geomagnetycznego w kierunku północnego lub południowego bieguna geomagnetycznego). Przyjmij, że dipolowy moment magnetyczny Ziemi jest równy  $\mu = 8 \cdot 10^{22} \, {\rm A} \cdot {\rm m}^2$ . a) Wykaż, że wartość indukcji magnetycznej ziemskiego pola na szerokości  $\lambda_{\rm m}$  jest dana wyrażeniem

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\sin^2 \lambda_{\rm m}}.$$

b) Wykaż, że inklinacja  $\phi_i$  pola magnetycznego jest związana z szerokością magnetyczną równaniem

$$\operatorname{tg}\phi_{\mathrm{i}}=2\operatorname{tg}\lambda_{\mathrm{m}}.$$

**62** Skorzystaj z wyników przedstawionych w zadaniu 61 do oszacowania a) wartości indukcji ziemskiego pola magnetycznego oraz b) jego inklinacji na równiku geomagnetycznym, c) wartości indukcji ziemskiego pola magnetycznego oraz d) jego inklinacji w punkcie o szerokości magnetycznej 60°, a także e) wartości indukcji ziemskiego pola magnetycznego oraz f) jego inklinacji na północnym biegunie geomagnetycznym.

**63** Kondensator płaski, mający kołowe okładki o promieniu 55 mm, jest ładowany. Dla jakich odległości r od osi kondensatora, wartość indukcji magnetycznej indukowanego pola stanowi 50% jej wartości maksymalnej, jeśli odległość ta ma być a) mniejsza lub b) większa od promienia okładek?

**64** Próbka soli paramagnetycznej, której krzywa magnesowania jest przedstawiona na rysunku 32.14, jest utrzymywana w polu magnetycznym o wartości indukcji 2 T. Dla jakiej temperatury wartości stopnia nasycenia magnetycznego próbki będą równe: a) 50%, b) 90%?

**65** Kondensator płaski, mający kołowe okładki o promieniu R, jest rozładowywany. Prąd przesunięcia przepływający przez równoległe do okładek koło o promieniu R/2 i środku na osi kondensatora jest równy 2 A. Wyznacz natężenie prądu rozładowującego kondensator. **66** Na rysunku 32.41 pokazano zależność czasową wartości natężenia pola elektrycznego, którego wektor jest prostopadły do pewnego koła o polu 2 m<sup>2</sup>. Jaka jest największa wartość

natężenia prądu przesunięcia przepływającego przez to koło w przedstawionym na rysunku przedziale czasu?

67 Na rysunku 32.42 przedstawiono kondensator płaski rozładowywany prądem o natężeniu 5 A. Okładki kondensatora mają kształt kwadratów o boku L = 8 mm. a) Z jaką szybkością zmienia się natężenie pola elektrycznego w obszarze między okładkami? b) Ile wynosi wartość całki  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$  wzdłuż zaznaczonego linią przerywaną konturu, jeśli H = 2 mm i W = 3 mm?



Rys. 32.42. Zadanie 67

**68** Wyznacz składową z orbitalnego magnetycznego momentu dipolowego elektronu dla a)  $m_{\ell} = 3$  oraz b)  $m_{\ell} = -4$ .

**69** Na rysunku 32.43 przedstawiono magnes sztabkowy leżący w pobliżu zwiniętej w rurkę kartki papieru. a) Naszkicuj linie pola magnetycznego, które przecinają cylindryczną powierzchnię kartki. b) Co możesz powiedzieć o znaku wyrażenia  $\vec{B} \cdot d\vec{S}$  dla każdego elementu d $\vec{S}$  na powierzchni? c) Zastanów się, czy jest to sprzeczne z prawem Gaussa dla pól magnetycznych.



Rys. 32.43. Zadanie 69

**70** W atomie wodoru, w stanie o najniższej energii średnia odległość elektronu od protonu (jądra) wynosi  $5,2 \cdot 10^{-11}$  m. a) Dla tej odległości wyznacz wartość natężenia pola elektrycznego protonu. Składowa *z* spinowego momentu magnetycznego protonu  $\mu_{s,z}$  jest równa  $1,4 \cdot 10^{-26}$  J/T. b) Wyznacz indukcję magnetyczną pola wytwarzanego przez proton na osi *z* w odległości  $5,2 \cdot 10^{-11}$  m od protonu. (*Wskazówka*:

Skorzystaj ze wzoru (29.27).) c) Jaki jest stosunek spinowych momentów magnetycznych elektronu i protonu?

**71** Na rysunku 32.38 przedstawiono model pętli z prądem dla paramagnetyka. a) Naszkicuj linie pola magnetycznego wytwarzanego przez magnes wewnątrz i w pobliżu paramagnetyka. Jakie są kierunki b) wypadkowego momentu magnetycznego  $\vec{\mu}$  pętli, c) umownego prądu płynącego w pętli (zgodny czy przeciwny do ruchu wskazówek zegara) oraz d) siły magnetycznej działającej na pętlę?

**72** Dwie kołowe płytki, takie jak przedstawione na rysunku 32.7, są rozładowywane prądem o stałym natężeniu. Promień każdej z płytek jest równy 4 cm. Podczas rozładowywania wartość indukcji magnetycznej w punktach odległych o 2 cm od osi układu wynosi 12,5 nT. a) Wyznacz wartość indukcji magnetycznej w punktach odległych o 6 cm od osi układu. b) Jakie jest natężenie prądu płynącego w dołączonych do płytek przewodach?

**73** ssm Jeżeli skrajne wartości liczby kwantowej orbitalnego momentu pędu elektronu w atomie są równe  $\pm 3$ , to ile różnych wartości mogą przyjmować a)  $L_{\text{orb},z}$  oraz b)  $\mu_{\text{orb},z}$ ? Wyraź za pomocą *h*, *m* oraz *e* maksymalną dozwoloną wartość c)  $L_{\text{orb},z}$  oraz d)  $\mu_{\text{orb},z}$ . e) Jaka jest maksymalna dozwolona wartość składowej *z całkowitego* (tj. orbitalnego i spinowego) momentu pędu elektronu. f) Ile różnych wartości (z uwzględnieniem znaków) może przyjmować składowa *z* całkowitego momentu pędu?

**74** Kondensator płaski o kołowych okładkach jest ładowany. Rozważmy kołową pętlę równoległą do okładek kondensatora, której środek leży na osi kondensatora. Jeżeli promień pętli, równy 3 cm, jest większy od promienia okładek, a indukcja magnetyczna w punktach pętli ma wartość 2 μT, to jakie jest natężenie prądu przesunięcia płynącego między okładkami kondensatora?

**75** Niech skrajne wartości liczby kwantowej  $m_{\ell}$  elektronu w atomie będą równe ±4. a) Ile różnych wartości może przyjmować wielkość  $\mu_{\text{orb},z}$ ? b) Jaka jest największa z tych wartości? Jeżeli atom zostanie umieszczony w polu magnetycznym o indukcji 0,25 T skierowanym wzdłuż osi *z*, to jaka jest c) największa oraz d) najmniejsza energia związana z tymi wartościami  $\mu_{\text{orb},z}$ ?

# Międzynarodowy Układ Jednostek (SI)\*

Κ

Α

E

# Jednostki podstawowe SI

0

D

Α

Т

D

Wielkość	Nazwa	Symbol	Definicja
długość	metr	m	"długość drogi przebytej przez światło w próżni w cza- sie 1/299 792 458 sekundy" (1983)
masa	kilogram	kg	"ten prototyp [pewien walec z platyny i irydu] będzie odtąd uważany za jednostkę masy" (1889)
czas	sekunda	S	"czas trwania 9 192 631 770 okresów fali promieniowa- nia odpowiadającego przejściu między dwoma pozio- mami nadsubtelnymi stanu podstawowego atomu cezu- 133" (1967)
natężenie prądu elektrycznego	amper	А	"natężenie stałego prądu elektrycznego, który — płynąc w dwóch równoległych, nieskończenie długich, prostoli- niowych przewodach o znikomo małym, kołowym prze- kroju, umieszczonych w próżni w odległości 1 metra od siebie — wywołuje między tymi przewodami siłę równą $2 \cdot 10^{-7}$ niutona na każdy metr długości prze- wodu" (1946)
temperatura termodynamiczna	kelwin	К	"1/273,16 część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody" (1967)
ilość substancji	mol	mol	"ilość substancji układu zawierającego liczbę cząstek równą liczbie atomów zawartych w 0,012 kilograma węgla-12" (1971)
światłość	kandela	cd	"światłość, jaką ma w danym kierunku źródło emitujące promieniowanie elektromagnetyczne o częstości 540 $\cdot$ $10^{12}$ herców i którego natężenie promieniowania w tym kierunku jest równe 1/683 wata na steradian" (1979)

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup>Na podstawie pracy "The International System of Units (SI)", National Bureau of Standards Special Publication 330, 1972 edition. Przytoczone definicje zostały przyjęte przez Konferencję Ogólną ds. Miar i Wag (ciało międzynarodowe) w podanych w tabeli latach. Kandela nie jest używana w niniejszej książce.

# Niektóre jednostki pochodne SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol		
pole powierzchni	metr kwadratowy	m <sup>2</sup>		
objętość	metr sześcienny	m <sup>3</sup>		
częstość	herc	Hz	$s^{-1}$	
gęstość	kilogram na metr sześcienny	kg/m <sup>3</sup>		
prędkość	metr na sekundę	m/s		
prędkość kątowa	radian na sekundę	rad/s		
przyspieszenie	metr na sekunde kwadrat	m/s <sup>2</sup>		
przyspieszenie kątowe	radian na sekundę kwadrat	rad/s <sup>2</sup>		
siła	niuton	Ν	kg $\cdot$ m/s <sup>2</sup>	
ciśnienie	paskal	Pa	N/m <sup>2</sup>	
praca, energia, ciepło	dżul	J	$N \cdot m$	
moc	wat	W	J/s	
ładunek elektryczny	kulomb	С	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}$	
napięcie elektryczne, różnica potencjałów,				
siła elektromotoryczna	wolt	V	W/A	
natężenie pola elektrycznego	wolt na metr (lub niuton na kulomb)	V/m	N/C	
opór elektryczny	om	Ω	V/A	
pojemność elektryczna	farad	F	$A \cdot s/V$	
strumień magnetyczny	weber	Wb	$\mathbf{V}\cdot\mathbf{s}$	
indukcyjność	henr	Н	$V \cdot s/A$	
indukcja magnetyczna	tesla	Т	Wb/m <sup>2</sup>	
natężenie pola magnetycznego	amper na metr	A/m		
entropia	dżul na kelwin	J/K		
ciepło właściwe	dżul na kilogram i kelwin	$J/(kg \cdot K)$		
przewodność cieplna	wat na metr i kelwin	$W/(m \cdot K)$		
natężenie promieniowania	wat na steradian	W/sr		

# Jednostki uzupełniające SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
kąt płaski	radian	rad
kąt bryłowy	steradian	sr

# Nazwy przedrostków jednostek SI

Czynnik	Przedrostek	Symbol	Czynnik	Przedrostek	Symbol
10 <sup>24</sup>	jotta	Y	$10^{-1}$	decy	d
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-2}$	centy	с
$10^{18}$	eksa	Е	$10^{-3}$	mili	m
$10^{15}$	peta	Р	$10^{-6}$	mikro	μ
$10^{12}$	tera	Т	$10^{-9}$	nano	n
$10^{9}$	giga	G	$10^{-12}$	piko	р
$10^{6}$	mega	М	$10^{-15}$	femto	f
$10^{3}$	kilo	k	$10^{-18}$	atto	а
$10^{2}$	hekto	h	$10^{-21}$	zepto	Z
10 <sup>1</sup>	deka	da	$10^{-24}$	jokto	У

# D O D A T E K B

# Niektóre podstawowe stałe fizyczne\*

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna <sup>a</sup> (1998)	Niepewność względna <sup>b</sup>
prędkość światła w próżni	С	$3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	2,997 924 58	(dokładnie)
ładunek elementarny	е	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	1,602 176 462	0,039
stała grawitacyjna	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \cdot \text{kg})$	6,673	1500
uniwersalna stała gazowa	R	8,31 J/(mol · K)	8,314 472	1,7
stała Avogadra	$N_{\mathrm{A}}$	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	6,022 141 99	0,079
stała Boltzmanna	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$	1,380 650 3	1,7
stała Stefana–Boltzmanna	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$	5,670 400	7,0
objętość molowa gazu doskonałego <sup>c</sup>	$V_{ m m}$	$2,27 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{mol}$	2,271 098 1	1,7
stała elektryczna	$\varepsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m	8,854 187 817 62	(dokładnie)
stała magnetyczna	$\mu_0$	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061 43	(dokładnie)
stała Plancka	h	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	6,626 068 76	0,078
masa elektronu <sup>d</sup>	me	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	9,109 381 88	0,079
		$5,49 \cdot 10^{-4}$ u	5,485 799 110	0,0021
masa protonu <sup>d</sup>	$m_{ m p}$	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	1,672 621 58	0,079
		1,0073 u	1,007 276 466 88	$1,3 \cdot 10^{-4}$
stosunek masy protonu do masy elektronu	$m_{\rm p}/m_{\rm e}$	1840	1836,152 667 5	0,0021
stosunek ładunku elektronu do masy elektronu	$e/m_{\rm e}$	1,76 · 10 <sup>11</sup> C/kg	1,758 820 174	0,040
masa neutronu <sup>d</sup>	$m_{\rm n}$	$1,68 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	1,674 927 16	0,079
		1,0087 u	1,008 664 915 78	$5,4 \cdot 10^{-4}$
masa atomu wodoru <sup>d</sup>	$m_{^{1}\mathrm{H}}$	1,0078 u	1,007 825 031 6	0,0005
masa atomu deuteru <sup>d</sup>	$m_{2H}$	2,0141 u	2,014 101 777 9	0,0005
masa atomu helu-4 <sup>d</sup>	$m_{4}_{\text{He}}$	4,0026 u	4,002 603 2	0,067

<sup>\*</sup>Wartości zebrane w tej tabeli wybrano z wartości zalecanych przez CODATA w 1998 r. (patrz: www.physics.nist.gov).

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna <sup>a</sup> (1998)	Niepewność względna <sup>b</sup>
masa mionu	$m_{\mu}$	$1,88 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$	1,883 531 09	0,084
moment magnetyczny elektronu	$\mu_{e}$	$9,28 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$	9,284 763 62	0,040
moment magnetyczny protonu	$\mu_{p}$	$1,41 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$	1,410 606 663	0,041
magneton Bohra	$\mu_{\rm B}$	$9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$	9,274 008 99	0,040
magneton jądrowy	$\mu_{ m N}$	$5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J/T}$	5,05078317	0,040
promień Bohra	$a_{\rm B}$	$5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$	5,291 772 083	0,0037
stała Rydberga	R	$1,10 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$	1,097 373 156 854 8	$7,6 \cdot 10^{-6}$
comptonowska długość fali elektronu	$\lambda_{\mathrm{C}}$	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$	2,426 310 215	0,0073

<sup>a</sup> Wartości w tej kolumnie należy pomnożyć przez tę samą potęgę liczby 10 i jednostkę, co odpowiednie wartości zaokrąglone.
<sup>b</sup> W jednostkach 10<sup>-6</sup> (milionowych częściach całości).
<sup>c</sup> W warunkach normalnych temperatury (0°C) i ciśnienia (1,0 atm, czyli 0,1 MPa).
<sup>d</sup> Atomowa jednostka masy 1 u = 1,660 538 73 · 10<sup>-27</sup> kg.

# D O D A T E K C

# Niektóre dane astronomiczne

# Wybrane odległości od Ziemi

do Księżyca <sup>a</sup>	$3,82 \cdot 10^8 \text{ m}$	do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20} \text{ m}$
do Słońca <sup>a</sup>	$1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$	do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22} \text{ m}$
do najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri)	$4,04 \cdot 10^{16} \text{ m}$	do granicy obserwowalnego Wszechświata	$\sim 10^{26}~{\rm m}$

### Słońce, Ziemia i Księżyc

Właściwość	Jednostka	Słońce	Ziemia	Księżyc
masa	kg	$1,99 \cdot 10^{30}$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$7,36 \cdot 10^{22}$
średni promień	m	$6,96 \cdot 10^8$	$6,37 \cdot 10^{6}$	$1,74 \cdot 10^{6}$
średnia gęstość	kg/m <sup>3</sup>	1410	5520	3340
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni	m/s <sup>2</sup>	274	9,81	1,67
prędkość ucieczki	km/s	618	11,2	2,38
okres obrotu <sup>a</sup>		37 d na biegunach <sup>b</sup> , 26 d na równiku <sup>b</sup>	23 h 56 min	27,3 d
całkowita moc promieniowania <sup>c</sup>	W	$3,90 \cdot 10^{26}$		

<sup>a</sup> Mierzony względem odległych gwiazd.

<sup>b</sup> Słońce — będące kulą gazu — nie obraca się jak ciało sztywne.

<sup>c</sup> Tuż nad atmosferą Ziemi energia słoneczna dociera do powierzchni prostopadłej do kierunku padania z szybkością 1340 W/m<sup>2</sup>.

# Wybrane właściwości planet

	Merkury	Wenus	Ziemia	Mars	Jowisz	Saturn	Uran	Neptun	Pluton
średnia odległość od Słońca, 10 <sup>6</sup> km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
okres obiegu, lata	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
okres obrotu <sup>a</sup> , d	58,7	-243 <sup>b</sup>	0,997	1,03	0,409	0,426	-0,451 <sup>b</sup>	0,658	6,39
prędkość na orbicie, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
nachylenie osi względem płaszczyzny orbity	< 28°	$\approx 3^{\circ}$	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
nachylenie orbity względem orbity Ziemi	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
mimośród orbity	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
średnica równika, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
masa (masa Ziemi = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
gęstość (gęstość wody = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni <sup>c</sup> , m/s <sup>2</sup>	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
prędkość ucieczki <sup>c</sup> , km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
liczba znanych satelitów	0	0	1	2	16 <sup>d</sup>	18 <sup>e</sup>	17 <sup>e</sup>	8 <sup>e</sup>	1

<sup>a</sup> Mierzony względem odległych gwiazd.
 <sup>b</sup> Wenus i Uran obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu po orbicie.
 <sup>c</sup> Przyspieszenie grawitacyjne jest mierzone na równiku planety.
 <sup>d</sup> + pierścień.
 <sup>e</sup> + pierścienie.

# D O D A T E K D

# Współczynniki zamiany jednostek

Współczynniki przeliczeniowe można bezpośrednio odczytać z tabel. Na przykład 1 stopień =  $2,778 \cdot 10^{-3}$  obrotów, a zatem  $16,7^{\circ} = 16,7 \cdot 2,778 \cdot 10^{-3}$  obrotów. Jednostki SI zapisano czcionką półgrubą. Tabele zostały przygotowane częściowo na podstawie pracy: G. Shortley, D. Wiliams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

### Kąt płaski

stopień (°)	minuta (')	sekunda (")	rad	obr
1 stopień = 1	60	3600	$1,745 \cdot 10^{-2}$	$2,778 \cdot 10^{-3}$
$1 \text{ minuta} = 1,667 \cdot 10^{-2}$	1	60	$2,909 \cdot 10^{-4}$	$4,630 \cdot 10^{-5}$
1 sekunda = $2,778 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	$4,848 \cdot 10^{-6}$	$7,716 \cdot 10^{-7}$
1 radian = 57,30	3438	$2,063 \cdot 10^5$	1	0,1592
1 obrót = 360	$2,16 \cdot 10^4$	$1,296 \cdot 10^{6}$	6,283	1

### Kąt bryłowy

1 pełny kąt bryłowy =  $4\pi$  steradianów = 12,57 steradianów

### Długość

cm	m	km	cal (in)	stopa (ft)	mila
1  centymetr = 1	10 <sup>-2</sup>	$10^{-5}$	0.3937	$3.281 \cdot 10^{-2}$	$6.214 \cdot 10^{-6}$
1 metr = 100	1	10 <sup>-3</sup>	39,37	3,281	$6,214 \cdot 10^{-4}$
1 kilometr = $10^5$	1000	1	$3.937 \cdot 10^{4}$	3281	0,6214
1  cal (in) = 2,540	2,540 · 10 <sup>-</sup>	$-2$ 2.540 $\cdot$ 10 <sup>-5</sup>	1	$8,333 \cdot 10^{-2}$	$1,578 \cdot 10^{-5}$
1  stopa (ft) = 30,48	0,3048	$3,048 \cdot 10^{-4}$	12	1	$1,894 \cdot 10^{-4}$
1 mila (lądowa) = $1,609 \cdot 10^5$	1609	1,609	$6,336 \cdot 10^{4}$	5280	1
1 angstrem = $10^{-10}$ m	1 ro	k świetlny = 9,460 · $10^{12}$ km	1 promień Bohra	$a = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$	1 rod = 16,5 stopy
1 mila morska = $1852 \text{ m} = 1,151 \text{ mil} = 6$	5076 stóp 1 pa	$arsek = 3,084 \cdot 10^{13} \text{ km}$	1  jard = 3  stopy		$1 \text{ mila} = 10^{-3} \text{ cali}$
$1 \text{ fermi} = 10^{-15} \text{ m}$	1 są	$\dot{z}en$ = 6 stóp	$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$		$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$

# Pole powierzchni

m <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	ft <sup>2</sup>	in <sup>2</sup>
1 metr kwadratowy = 1	<b>10<sup>4</sup></b>	10,76	1550
1 centymetr kwadratowy = $10^{-4}$	1	$1,076 \cdot 10^{-3}$	0,1550
1 stopa kwadratowa = $9,290 \cdot 10^{-2}$	929,0	1	144
1 cal kwadratowy = $6,452 \cdot 10^{-4}$	6,452	$6,944 \cdot 10^{-3}$	1

1 mila kwadratowa = 2,788  $\cdot$  10<sup>7</sup> ft<sup>2</sup> = 640 akrów 1 akr = 43 560 ft<sup>2</sup> 1 barn = 10<sup>-28</sup> m<sup>2</sup> 1 hektar = 10<sup>4</sup> m<sup>2</sup> = 2,471 akrów

# **Objętość**

m <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	l (litrów)	ft <sup>3</sup>	in <sup>3</sup>
1 metr sześcienny = 1	10 <sup>6</sup>	1000	35,31	$6,102 \cdot 10^{4}$
1 centymetr sześcienny = $10^{-6}$	1	$1,000 \cdot 10^{-3}$	$3,531 \cdot 10^{-5}$	$6,102 \cdot 10^{-2}$
1 litr = $1,000 \cdot 10^{-3}$	1000	1	$3,531 \cdot 10^{-2}$	61,02
1 stopa sześcienna = $2,832 \cdot 10^{-2}$	$2,832 \cdot 10^4$	28,32	1	1728
1 cal sześcienny =1,639 $\cdot$ 10 <sup>-5</sup>	16,39	$1,639 \cdot 10^{-2}$	$5,787 \cdot 10^{-4}$	1

1 galon amerykański = 4 kwarty = 231 in<sup>3</sup> 1 galon angielski = 277,4 in<sup>3</sup> = 1,201 galonów amerykańskich

### Masa

g	kg	u	OZ	lb
1 g = 1 1 kg = 1000 1 u (jednostka masy atomowej) = 1,661 $\cdot$ 10 <sup>-24</sup> 1 uncja handlowa = 28,35 1 funt handlowy = 453,6	$0,001$ 1 1,661 · $10^{-27}$ 2,835 · $10^{-2}$ 0,4536	$6,022 \cdot 10^{23}$ $6,022 \cdot 10^{26}$ $1$ $1,718 \cdot 10^{25}$ $2,732 \cdot 10^{26}$	3,527 · 10 <sup>-2</sup> 35,27 5,857 · 10 <sup>-26</sup> 1 16	$2,205 \cdot 10^{-3}$ $2,205$ $3,662 \cdot 10^{-27}$ $6,250 \cdot 10^{-2}$ $1$

## Gęstość

kg/m <sup>3</sup>	g/cm <sup>3</sup>	lb/ft <sup>3</sup>	lb/in <sup>3</sup>
1 kilogram/metr sześcienny = 1	0,001	$6,243 \cdot 10^{-2}$	$3,613 \cdot 10^{-5}$
1 gram/centymetr sześcienny = 1000	1	62,43	$3,613 \cdot 10^{-2}$
1 funt handlowy/stopę sześcienną = 16,02	$1,602 \cdot 10^{-2}$	1	$5,787 \cdot 10^{-4}$
1 funt handlowy/cal sześcienny = $2,768 \cdot 10^4$	27,68	17,28	1

Czas				
а	d	h	min	S
1 rok = 1	365,25	$8,766 \cdot 10^3$	$5,259 \cdot 10^{5}$	3,156 · 10 <sup>7</sup>
$1 \text{ doba} = 2,738 \cdot 10^{-3}$	1	24	1440	$8,640 \cdot 10^4$
$1 \text{ godzina} = 1,141 \cdot 10^{-4}$	$4,167 \cdot 10^{-2}$	1	60	3600
$1 \text{ minuta} = 1,901 \cdot 10^{-6}$	$6,944 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	60
1 sekunda = $3,169 \cdot 10^{-8}$	$1,157 \cdot 10^{-5}$	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1

# Prędkość

km/h	m/s	cm/s	mil/h	ft/s
1 kilometr/godzinę = 1	0,2778	27,78	0,6214	0,9113
1 metr/sekunde = 3.6	1	<b>100</b>	<b>2,237</b>	<b>3,281</b>
1 centymetr/sekund $\varphi$ = 3,6 · 10 <sup>-2</sup>	0,01	1	$2,237 \cdot 10^{-2}$	$3,281 \cdot 10^{-2}$
1 mila/godzin $\varphi$ = 1,609	0,4470	44,70	1	1,467
1 stopa/sekund $\varphi$ = 1,097	0,3048	30,48	0,6818	1

1 węzeł = 1 mila morska/h = 1,688 ft/s

### Siła

dyna	Ν	lb	G	kG	
1 dyna = 1 <b>1 niuton = <math>10^5</math></b> 1 funt = 4,448 · $10^5$ 1 gram-siła = 980,7 1 kilogram-siła = 9,807 · $10^5$	$10^{-5} \\ 1 \\ 4,448 \\ 9,807 \cdot 10^{-3} \\ 9,807$	$2,248 \cdot 10^{-6}$ 0,2248 1 2,205 \cdot 10^{-3} 2,205	$1,020 \cdot 10^{-3}$ <b>102,0</b> 453,6 1 1000	1,020 · 10 <sup>-6</sup> <b>0,1020</b> 0,4536 0,001 1	

1 t = 2000 lb [2pt]Jednostki: gram-siła (G), kilogram-siła (kG) i funt (jednostka siły) są obecnie rzadko stosowane. Są one zdefiniowane następująco: 1 gram-siła jest to siła ciężkości działająca na ciało o masie 1 g w standardowych warunkach ciążenia (tzn. gdy  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ); analogicznie dla kilograma-siły i funta.

## Ciśnienie

atm	dyn/cm <sup>2</sup>	cal wody	cm Hg	Pa	funt/in <sup>2</sup>	funt/ft <sup>2</sup>
1 atmosfera = 1	$1,013 \cdot 10^{6}$	406,8	76	1,013 · 10 <sup>5</sup>	14,70	2116
1 dyna/centymetr kwadratowy = $9,869 \cdot 10^{-7}$	1	$4{,}015\cdot10^{-4}$	$7,501 \cdot 10^{-5}$	0,1	$1,405 \cdot 10^{-5}$	$2,089 \cdot 10^{-3}$
1 cal wody <sup>a</sup> w temp. $4^{\circ}C = 2,458 \cdot 10^{-3}$	2491	1	0,1868	249,1	$3{,}613\cdot10^{-2}$	5,202
1 centymetr rtęci <sup>a</sup> w temp. $0^{\circ}$ C = 1,316 · $10^{-2}$	$1,333\cdot 10^4$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 paskal = $9,869 \cdot 10^{-6}$	10	$4,015 \cdot 10^{-3}$	$7,501 \cdot 10^{-4}$	1	$1,450 \cdot 10^{-4}$	$2,089 \cdot 10^{-2}$
1 funt/cal kwadratowy = $6,805 \cdot 10^{-2}$	$6{,}895\cdot10^4$	27,68	5,171	$6,895 \cdot 10^{3}$	1	144
1 funt/stopę kwadratową = $4,725 \cdot 10^{-4}$	478,8	0,1922	$3,591 \cdot 10^{-2}$	47,88	$6{,}944\cdot10^{-3}$	1

<sup>a</sup> W standardowych warunkach ciążenia (tzn. gdy  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ). 1 bar = 10<sup>6</sup> dyn/cm<sup>2</sup> = 0,1 MPa 1 milibar = 10<sup>3</sup> dyn/cm<sup>2</sup> = 10<sup>2</sup> Pa

1 tor = 1 mm Hg

### Energia, praca, ciepło

Dwie ostatnie jednostki nie są — ściśle rzecz biorąc — jednostkami energii, lecz zostały włączone do tabeli dla wygody. Odpowiadające im wartości współczynników przeliczeniowych wynikają z relatywistycznej równoważności masy i energii,  $E = mc^2$ , i wyrażają energię wyzwalaną przy całkowitej zamianie na energię atomowej jednostki masy u oraz masę, która po całkowitej zamianie na energię daje odpowiednią energię jednostkową (wiersz i kolumna na żółtym tle).

Btu	erg	$ft \cdot lb$	$kM\cdot h$	J	cal	kWh	eV	u
1 Btu = 1	$1,055\cdot 10^{10}$	777,9	$3,929 \cdot 10^{-4}$	1055	252,0	$2,930 \cdot 10^{-4}$	$6,585 \cdot 10^{21}$	$7,070\cdot 10^{12}$
$1 \text{ erg} = 9,481 \cdot 10^{-11}$		$7,376\cdot 10^{-8}$	$3,725\cdot 10^{-14}$	10 <sup>-7</sup>	$2,389\cdot 10^{-8}$	$2,778\cdot 10^{-14}$	$6,242\cdot 10^{11}$	670,2
$1 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 1,285 \text{ `10}^{-3}$	$1,356\cdot 10^7$	1	$5,051 \cdot 10^{-7}$	1,356	0,3238	$3,766 \cdot 10^{-7}$	$8,464\cdot 10^{18}$	$9,037\cdot 10^9$
$1 \text{ kM} \cdot \text{h} = 2545$	$2,685\cdot 10^{13}$	$1,980\cdot 10^6$	1	$2,685\cdot 10^6$	$6,413\cdot 10^5$	0,7457	$1,676\cdot 10^{25}$	$1,799\cdot 10^{16}$
$1 \text{ J} = 9,481 \cdot 10^{-4}$	10 <sup>7</sup>	0,7376	$3,725 \cdot 10^{-7}$	1	0,2389	$2,778 \cdot 10^{-7}$	$6,242 \cdot 10^{18}$	6,702·10 <sup>9</sup>
$1 \text{ cal} = 3,968 \cdot 10^{-3}$	$4,1868\cdot 10^7$	3,088	$1,560\cdot 10^{-6}$	4,1868	1	$1,163\cdot 10^{-6}$	$2{,}613\cdot10^{19}$	$2,806\cdot 10^{10}$
1 kWh = 3413	$3{,}600\cdot10^{13}$	$2,655\cdot 10^6$	1,341	$3,600 \cdot 10^6$	$8,600 \cdot 10^5$	1	$2,247\cdot 10^{25}$	$2,\!413\cdot10^{16}$
$1 \text{ eV} = 1,519 \cdot 10^{-22}$	$1,602 \cdot 10^{-12}$	$1,182\cdot10^{-19}$	$5,967\cdot 10^{-26}$	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$3,827\cdot 10^{-20}$	$4,450\cdot 10^{-26}$	1	$1,074 \cdot 10^{-9}$
$1 \text{ u} = 1,415 \cdot 10^{-13}$	$1,492 \cdot 10^{-3}$	$5,559 \cdot 10^{-10}$	$1,492 \cdot 10^{-17}$	$3,564 \cdot 10^{-11}$	$3,564 \cdot 10^{-11}$	$4,146 \cdot 10^{-17}$	$9,320 \cdot 10^8$	1

### Moc

KM	cal/s	kW	W	
1 koń mechaniczny = 1	178,1	0,7457	745,7	
1 kaloria na sekundę = $5,615 \cdot 10^{-3}$	1	$4,186 \cdot 10^{-3}$	4,186	
1 kilowat = 1,341	238,9	1	1000	
$1 \text{ wat} = 1,341 \cdot 10^{-3}$	0,2389	0,001	1	

### Indukcja magnetyczna

Gs	Т	mGs
1 gaus (Gs) = 1	10 <sup>-4</sup>	1000
<b>1 tesla</b> ( <b>T</b> ) = <b>10</b> <sup>4</sup>	1	<b>10<sup>7</sup></b>
1 miligaus (mGs) = 0,001	10 <sup>-7</sup>	1

 $1 \text{ tesla} = 1 \text{ weber/m}^2$ 

### Strumień magnetyczny

Mx	Wb
1 makswel = 1	10 <sup>-8</sup>
1 weber = 10 <sup>8</sup>	1

# D O D A T E K E

# Wzory matematyczne

### Geometria

Koło o promieniu *r*: obwód =  $2\pi r$ ; pole powierzchni =  $\pi r^2$ . Kula o promieniu *r*: pole powierzchni =  $4\pi r^2$ ; objętość =  $\frac{4}{2}\pi r^3$ .

Walec obrotowy o promieniu podstawy r i wysokości h: pole powierzchni =  $2\pi r^2 + 2\pi rh$ ; objętość =  $\pi r^2 h$ .

Trójkąt o podstawie *a* i wysokości *h*: pole powierzchni =  $\frac{1}{2}ah$ .

### Równanie kwadratowe i jego rozwiązanie

Jeśli 
$$ax^2 + bx + c = 0$$
, to  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

### Funkcje trygonometryczne kąta $\theta$



### **Twierdzenie Pitagorasa**

W trójkącie prostokątnym (oznaczenia jak na rysunku)  $a^2 + b^2 = c^2$ .



# Trójkąty

Kąty: A, B, C. Boki im przeciwległe: a, b, c.  $A + B + C = 180^{\circ}$ .



### Symbole matematyczne

- = równa się
- $\approx$  równa się w przybliżeniu
- $\sim$ jest tego samego rzędu wielkości
- $\neq$  nie jest równe
- ≡ jest równe tożsamościowo, jest zdefiniowane jako
- > jest większe niż (» jest dużo większe niż)
- < jest mniejsze niż (« jest dużo mniejsze niż)
- ≥ jest większe lub równe (czyli nie mniejsze niż)
- $\leq$  jest mniejsze lub równe (czyli nie większe niż)
- $\pm$  plus albo minus
- $\propto$  jest proporcjonalne do
- $\sum$  suma
- $x_{
  m \acute{sr}}$  wartość średnia x

### Tożsamości trygonometryczne

 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$  $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$  $\sin \theta / \cos \theta = \operatorname{tg} \theta$  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  $\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1$ 

$$\csc^{2} \theta - \operatorname{ctg}^{2} \theta = 1$$
  

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$
  

$$\cos 2\theta = \cos^{2} \theta - \sin^{2} \theta = 2 \cos^{2} \theta - 1 = 1 - 2 \sin^{2} \theta$$
  

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$
  

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$
  

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$
  

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha \mp \beta)$$
  

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$
  

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

## Rozwinięcia funkcji w szeregi potęgowe

 $(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$  (x<sup>2</sup> < 1) (wzór dwumianowy)

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \dots$$
  
$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^{2} + \frac{1}{3}x^{3} - \dots \qquad (|x| < 1)$$

- $\sin \theta = \theta \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots \qquad (\theta \text{ w radianach})$  $\cos \theta = 1 \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots \qquad (\theta \text{ w radianach})$
- $\operatorname{tg} \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots$  ( $\theta$  w radianach)

# **Wzory Cramera**

Układ równań z dwiema niewiadomymixiy

$$a_1x + b_1y = c_1$$
 oraz  $a_2x + b_2y = c_2$ 

ma rozwiązanie

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

lloczyny wektorów

à

Niech î, ĵ i k̂ będą wektorami jednostkowymi kierunków x, y i z. Zachodzą związki:

$$\begin{split} \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{1}, \qquad \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{k}}, \qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \qquad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}. \end{split}$$

Dowolny wektor  $\vec{a}$  o składowych wzdłuż osi x, y i z równych  $a_x$ ,  $a_y$  i  $a_z$  można przedstawić w postaci

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}.$$

Niech  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  będą dowolnymi wektorami o długościach (modułach) a, b i c. Zachodzą związki:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}),$$
  
$$(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \qquad (s - \text{skalar}).$$

Niech  $\theta$  będzie mniejszym z kątów między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . Zachodzą związki:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta,$$

$$\times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k},$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta,$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.$$

oraz

## Pochodne i całki

W poniższych wzorach u i v są dowolnymi funkcjami zmiennej x, a a i m są stałymi. Do każdej z całek nieoznaczonych należy dodać dowolną stałą całkowania. Obszerniejsze tablice zawiera *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.).

1. 
$$\frac{dx}{dx} = 1$$
  
2. 
$$\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$$
  
3. 
$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$
  
4. 
$$\frac{d}{dx}x^{m} = mx^{m-1}$$
  
5. 
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$
  
6. 
$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
  
7. 
$$\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}$$
  
8. 
$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$
  
9. 
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$
  
10. 
$$\frac{d}{dx}tgx = \sec^{2} x$$
  
11. 
$$\frac{d}{dx}ctgx = -\csc^{2} x$$
  
12. 
$$\frac{d}{dx}\sec x = tgx\sec x$$
  
13. 
$$\frac{d}{dx}\csc x = -\operatorname{ctg} x\operatorname{cosec} x$$
  
14. 
$$\frac{d}{dx}e^{u} = e^{u}\frac{du}{dx}$$
  
15. 
$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$$
  
16. 
$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$$

1. 
$$\int dx = x$$
  
2. 
$$\int audx = a \int udx$$
  
3. 
$$\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx$$
  
4. 
$$\int x^{m}dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$$
  
5. 
$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$
  
6. 
$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$
  
7. 
$$\int e^{x}dx = e^{x}$$
  
8. 
$$\int \sin x dx = -\cos x$$
  
9. 
$$\int \cos x dx = \sin x$$
  
10. 
$$\int tg x dx = \ln |\sec x|$$
  
11. 
$$\int \sin^{2} x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$
  
12. 
$$\int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$
  
13. 
$$\int xe^{-ax} dx = -\frac{1}{a^{2}}(ax+1)e^{-ax}$$
  
14. 
$$\int x^{2}e^{-ax} dx = -\frac{1}{a^{3}}(a^{2}x^{2}+2ax+2)e^{-ax}$$
  
15. 
$$\int_{0}^{\infty} x^{n}e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$
  
16. 
$$\int_{0}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^{2}} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}a^{n}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
  
17. 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}} = \ln(x + \sqrt{x^{2}+a^{2}})$$
  
18. 
$$\int \frac{x dx}{(x^{2}+a^{2})^{3/2}} = -\frac{1}{(x^{2}+a^{2})^{1/2}}$$
  
19. 
$$\int \frac{dx}{(x^{2}+a^{2})^{3/2}} = \frac{x}{a^{2}(x^{2}+a^{2})^{1/2}}$$
  
20. 
$$\int_{0}^{\infty} x^{2n+1}e^{-ax^{2}} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a > 0)$$
  
21. 
$$\int \frac{x dx}{x+d} = x - d\ln(x+d)$$

# Właściwości pierwiastków

O ile nie podano inaczej, wszystkie dane odnoszą się do ciśnienia 1 atm

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
aktyn	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
ameryk	Am	95	(243)	13,67	1541		
antymon	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
argon	Ar	18	39,948	$1,6626 \cdot 10^{-3}$	-189,4	-185,8	0,523
arsen	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
astat	At	85	(210)	_	(302)	_	_
azot	Ν	7	14,0067	$1,1649 \cdot 10^{-3}$	-210	-195,8	1,03
bar	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
berkel	Bk	97	(247)	14,79			
beryl	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
bizmut	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
bohr	Bh	107	262,12	_	_		_
bor	В	5	10,811	2,34	2030	_	1,11
brom	Br	35	79,909	3,12 (ciecz)	-7,2	58	0,293
cer	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
cez	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
chlor	Cl	17	35,453	$3,214 \cdot 10^{-3}$ (0	°C) −101	-34,7	0,486
chrom	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
cyna	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
cynk	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
cyrkon	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276
darmsztad	Ds	110	(271)				
dubn	Db	105	262,114				
dysproz	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
einstein	Es	99	(254)	_	_	_	_
erb	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
europ	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
ferm	Fm	100	(237)	_	_	_	_
flerow*	Fl	114	(289)	_			
fluor	F	9	18,9984	$1,696 \cdot 10^{-3}$ (0	°C) -219,6	-188,2	0,753
fosfor	Р	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
frans	Fr	87	(223)		(27)		
gadolin	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234
gal	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
german	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
glin	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900

cd.

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]	
hafn	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144	
has	Hs	108	(265)	_	_	_	_	
hel	He	2	4,0026	$0,1664 \cdot 10^{-3}$	-269,7	-268,9	5,23	
holm	Но	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165	
ind	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233	
iryd	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130	
iterb	Yb	70	173,04	6,965	824	1530	0,155	
itr	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297	
jod	Ι	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218	
kadm	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226	
kaliforn	Cf	98	(251)	_	_			
kiur	Cm	96	(247)	13,3	_			
kobalt	Со	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423	
kopernik	Cn	112	(285)	_	_			
krypton	Kr	36	83.80	$3.488 \cdot 10^{-3}$	-157.37	-152	0.247	
krzem	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712	
ksenon	Xe	54	131.30	$5.495 \cdot 10^{-3}$	-111.79	-108	0.159	
lantan	La	57	138.91	6 189	920	3470	0 195	
lit	Li	3	6 9 3 9	0 534	180 55	1300	3 58	
liwermor*	Lv	116	(293)					
lorens	Lr	103	(257)		_			
lutet	Lu	71	174.97	9.849	1663	1930	0.155	
magnez	Mg	12	24.312	1.738	650	1107	1.03	
mangan	Mn	25	54,9380	7.44	1244	2150	0.481	
meitner	Mt	109	(266)		_			
mendelew	Md	101	(256)	_	_		_	
miedź	Cu	29	63.54	8,96	1083.40	2595	0.385	
molibden	Мо	42	95.94	10.22	2617	5560	0.251	
neodym	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188	
neon	Ne	10	20,183	$0.8387 \cdot 10^{-3}$	-248.597	-246.0	1.03	
neptun	Nn	93	(237)	20.25	637		1,26	
nikiel	Ni	28	58.71	8.902	1453	2730	0.444	
niob	Nb	41	92,906	8.57	2468	4927	0.264	
nobel	No	102	(255)					
ołów	Pb	82	207.19	11.35	327.45	1725	0.129	
osm	Os	76	190.2	22,59	3027	5500	0.130	
pallad	Pd	46	106.4	12.02	1552	3980	0.243	
platvna	Pt	78	195.09	21.45	1769	4530	0.134	
pluton	Pu	94	(244)	19.8	640	3235	0.130	
polon	Ро	84	(210)	9.32	254			
potas	K	19	39,102	0,862	63.20	760	0,758	
prazeodvm	Pr	59	140.907	6,773	931	3020	0,197	
promet	Pm	61	(145)	7,22	(1027)			
protaktyn	Ра	91	(231)	15,37 (oszacowa	nie) (1230)		_	
Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]	
-------------	--------	---------------------	------------------------	--	-------------------------------	-----------------------------	---------------------------------	--
rad	Ra	88	(226)	5,0 700				
radon	Rn	86	(222)	9,96 · 10 <sup>-3</sup> (0°	C) (-71)	-61,8	0,092	
ren	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134	
roentgen	Rg	111	(280)					
rod	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243	
rtęć	Hg	80	200,59	13,55	-38,87	357	0,138	
rubid	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364	
ruten	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239	
rutherford	Rf	104	261,11	_			_	
samar	Sm	62	150,35	7,52 1072		1630	0,197	
seaborg	Sg	106	263,118	—	—		—	
selen	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318	
siarka	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707	
skand	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569	
sód	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23	
srebro	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234	
stront	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737	
tal	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130	
tantal	Та	73	180,948	16,6	3014	5425	0,138	
technet	Tc	43	(99)	11,46	2200	_	0,209	
tellur	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201	
terb	Tb	65	158,924	8,229	1357	2530	0,180	
tlen	0	8	15,9994	$1,3318 \cdot 10^{-3}$	-218,80	-183,0	0,913	
tor	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117	
tul	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159	
tytan	Ti	22	47,9	4,54	1670	3260	0,523	
uran	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117	
wanad	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490	
wapń	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624	
węgiel	С	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691	
wodór	Н	1	1,00797	$0,08375 \cdot 10^{-3}$	-259,19	-252,7	14,4	
wolfram	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134	
złoto	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131	
żelazo	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447	
nienazwany	Unt	113		—				
nienazwany	Unp	115		—				
nienazwany	Uus	117		—	—			
nienazwany	Uuo	118	(294)	_	—	—	—	

Dla pierwiastków promieniotwórczych w rubryce "masa molowa" w nawiasach podano wartości liczby masowej izotopu o najdłuższym czasie życia. Podane w nawiasach wartości temperatury topnienia i wrzenia są niepewne.

Dane dla gazów odnoszą się do ich normalnej postaci cząsteczkowej, jak H<sub>2</sub>, He, O<sub>2</sub>, Ne itd. Wartości ciepła właściwego gazów odpowiadają przemianie pod stałym ciśnieniem. Źródło: J. Emsley, *The Elements*, wyd. III, Clarendon Press, Oxford 1998. Istnieje tłum. polskie: *Chemia. Przewodnik po pierwiastkach*, Wydawnictwo

Źródło: J. Emsley, *The Elements*, wyd. III, Clarendon Press, Oxford 1998. Istnieje tłum. polskie: *Chemia. Przewodnik po pierwiastkach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997. Informacje o najnowszych danych i nowoodkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: www.webelements.com. \*Nazwy i symbole pierwiastków 114 (flerow, Fl) i 116 (liwermor, Lv) nie są jeszcze oficjalnie zatwierdzone.

# Układ okresowy pierwiastków



	~														
lantanowce *	La	Ce	<sup>59</sup> Pr	<sup>60</sup> Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	<sup>69</sup> Tm	Yb	<sup>71</sup> Lu
aktynowce †	Ac	90 Th	<sup>91</sup> Pa	$\overset{_{92}}{\mathbf{U}}$	<sup>93</sup> Np	94 Pu	<sup>95</sup> Am	° <sup>96</sup> Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	Fm	<sup>101</sup> Md	<sup>102</sup> No	Lr

Pierwiastki o liczbie atomowej od 113 do 118 zostały już odkryte. Informacje o najnowszych danych i nowo odkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie www.webelements.com. Pierwiastkom o liczbie atomowej 114 i 116 nadano już nazwy i symbole, lecz nie zostały one jeszcze oficjalnie potwierdzone.

## Autorzy zdjęć

Rys. 21.10. Dzięki uprzejmości Lawrence Berkeley Laboratory

**Rys. 22.10a.** Dzięki uprzejmości NASA **Rys. 22.18.** Adam Hart-Davis/Photo Researchers, Inc.

Rys. 23.15. Dzięki uprzejmości NOAA

Rys. 24.22. Fox Photos/Getty Images

Rys. 25.1. yurazaga/Shutterstock Rys. 25.12. Dzięki uprzejmości The Royal Institute, England/Bridgeman Art Library/NY

Rys. 26.7. Deserg/Shutterstock
s. 200 kts design/Shutterstock
s. 212 Matties/Science Foto Library/Indigo

Rys. 28.1. Digital Vision/Getty Images Inc.
Rys. 28.3. Lawrence Berkeley Laboratory/Photo Researchers Inc.
Rys. 28.4. Dzięki uprzejmości dr. Richarda Cannona, Southeast Missouri State University, Cape Girardeau
Rys. 28.10. Dzięki uprzejmości Jearla Walkera

Rys. 29.3. Dzięki uprzejmości Education Development Center s. 349 Dzięki uprzejmości The Royal Institution/Bridgeman Art Library/NY

Rys. 31.3. Dzięki uprzejmości Agilent Technologies

Rys. 32.1. Sergei Alesin/Shutterstock
Rys. 32.2. Awe Inspiring Images/Shutterstock
Rys. 32.13. Dzięki uprzejmości Radbourd University, Holandia
s. 449 Richard Megna/Fundamental Photographs
Rys. 32.17. Dzięki uprzejmości Rudolfa Schäfera, IFW Dresden

## O D P O W I E D Z I

## Odpowiedzi do wszystkich sprawdzianów oraz do pytań i zadań o numerach nieparzystych

#### Rozdział 21

**Sprawdziany: 1.** *C* i *D* przyciągają się, *B* i *D* przyciągają się. **2.** a) w lewo, b) w lewo, c) w lewo. **3.** a) *a*, *c*, *b*; b) mniejszy. **4.** -15e (wypadkowy ładunek -30e rozłoży się równo na obu kulach).

**Pytania: 1.** 3, 1, 2, 4 (zero). **3.** *a* i *b*. **5.**  $2kq^2/r^2$ , w górę strony. **7.** *b* i *c* jednakowo, następnie *a* (zero). **9.** a) jednakowe, b) mniejsza, c) równoważą się, d) dodają się, e) dodawaniu, f) dodatni kierunek *y*, g) ujemny kierunek *y*, h) dodatni kierunek *x*, i) ujemny kierunek *x*. **11.** a) +4*e*, b) -2*e* w górę, c) -3*e* w górę, d) -12*e* w górę.

Zadania: 1. 0,5. 3. 1,39 m. 5. 2,81 N. 7. -4. 9. a) -1 μC, b) 3  $\mu$ C. 11. a) 0,17 N, b) -0,046 N. 13. a) -14 cm, b) 0. **15.** a) 35 N, b)  $-10^{\circ}$ , c) -8.4 cm, d) +2.7 cm. **17.** a) 1.6 N, b) 2.77 N. **19.** a) 3 cm, b) 0, c) -0.444. **21.**  $3.8 \cdot 10^{-8}$  C. **23.** a) 0, b) 12 cm, c) 0, d)  $4.9 \cdot 10^{-26}$  N. **25.**  $6.3 \cdot 10^{11}$ . **27.** a)  $3,2\cdot10^{-19}$ C, b) 2. **29.** a) -6,05 cm, b) 6,05 cm. **31.** 122 mA. **33.** 1,3·10<sup>7</sup> C. **35.** a) 0, b) 1,9·10<sup>-9</sup> N. **37.** a) <sup>9</sup>B, b)  ${}^{13}$ N, c)  ${}^{12}$ C. **39.** 1,31 $\cdot$ 10<sup>-22</sup> N. **41.** a) 5,7 $\cdot$ 10<sup>13</sup> C, b) odległość skraca się, c) 6.10<sup>5</sup> kg. 43. b) 3,1 cm. 45. 0,19 MC. **47.**  $-45 \ \mu\text{C}$ . **49.** 3,8 N. **51.** a)  $2 \cdot 10^{10}$  elektronów, b)  $1,33 \cdot 10^{10}$ elektronów. 53. a) 8,99·10<sup>9</sup> N, b) 8,99 kN. 55. a) 0,5, b) 0,15, c) 0,85. 57. 1,7.10<sup>8</sup> N. 59.  $-1,32 \cdot 10^{13}$  C. 61. a) (0,829 N) $\hat{i}$ , b)  $-(0,621 \text{ N})\hat{i}$ . 63. 2,2.10<sup>-6</sup> kg. 65. 4,68.10<sup>-19</sup> N. 67. a) 2,72L, b) 0. **69.** a)  $5,1\cdot10^2$ N, b)  $7,7\cdot10^{28}$  m/s<sup>2</sup>. **71.** a) 0, b)  $3,43\cdot10^9$  m/s<sup>2</sup>. **73.** a)  $2,19\cdot10^6$  m/s, b)  $1,09\cdot10^6$  m/s, c) zmniejsza sie. **75.** 4.16.10<sup>42</sup>

#### Rozdział 22

**Sprawdziany: 1.** a) w prawo, b) w lewo, c) w lewo, d) w prawo (wartość ładunku p i e jest taka sama, a p jest dalej). **2.** a) w kierunku dodatnich x, c) w kierunku ujemnych y. **3.** a) w lewo, b) w lewo, c) zmaleje. **4.** a) wszystkie jednakowe, b) 1 i 3 jednakowe, następnie 2 i 4 jednakowe.

**Pytania:** 1. *a*, *b*, *c*. 3. a) tak, b) do ładunku, c) nie (wektory natężenia pola nie są skierowne wzdłuż tej samej prostej), d) równoważą się, e) dodają, f) składowych, które się dodają, g) w stronę ujemnych *y*. 5. a) na lewo od ładunków, b) nie. 7. a) 4, 3, 1, 2, b) 3, następnie 1 i 4 jednakowo, następnie 2. 9. *a*, *b*, *c*. 11. *e*, *b*, następnie *a* i *c* jednakowo, następnie *d* (zero). 13. *a*, *b*, *c*.

**Zadania: 3.** a)  $3,07 \cdot 10^{21}$  N/C, b) na zewnątrz. **5.** 56 pC. **7.**  $(1,02 \cdot 10^5$ N/C)ĵ. **9.** a)  $1,38 \cdot 10^{-10}$  N/C, b)  $180^{\circ}$ . **11.** -30 cm. **13.** a)  $3,6 \cdot 10^{-6}$  N/C, b)  $2,55 \cdot 10^{-6}$ N/C, c)  $3,6 \cdot 10^{-4}$  N/C, d)  $7.09 \cdot 10^{-7}$  N/C, e) Gdv proton zbliża sie do tarczy. siły, które na niego działają ze strony elektronów es prawie się równoważą. 15. a) 160 N/C, b) 45°. 17. a) -90°, b) +2  $\mu$ C, c) -1.6  $\mu$ C. 19. a)  $qd/4\pi\varepsilon_0 r^3$ , b) -90°. **23.** 0,506. **25.** a)  $1.62 \cdot 10^6$  N/C, b)  $-45^\circ$ . **27.** a) 23.8 N/C, b)  $-90^{\circ}$ . **29.** 1,57. **31.** a)  $-5,19 \cdot 10^{-14}$  C/m, b)  $1,57 \cdot 10^{-3}$  N/C, c)  $-180^{\circ}$ , d)  $1.52 \cdot 10^{-8}$  N/C, e)  $1.52 \cdot 10^{-8}$  N/C. **35.** 0.346 m. **37.** 28%. **39.** -5e. **41.** a)  $1,5\cdot10^3$  N/C, b)  $2,4\cdot10^{-16}$  N, c) w góre, d)  $1.6 \cdot 10^{-26}$  N, e)  $1.5 \cdot 10^{-10}$ . **43.**  $3.51 \cdot 10^{15}$  m/s<sup>2</sup>. **45.**  $6.6 \cdot 10^{-15}$  N. **47.** a)  $1.92 \cdot 10^{12}$  m/s<sup>2</sup>, b)  $1.96 \cdot 10^5$  m/s. **49.** a) 0,245 N, b)  $-11,3^{\circ}$ , c) 108 m, d) -21,6 m. **51.** a)  $2.6 \cdot 10^{-10}$  N, b)  $3.1 \cdot 10^{-8}$  N, c) przeniesie się na znamie. **53.** 27  $\mu$ m. **55.** a) 2,7.10<sup>6</sup> m/s, b) 1 kN/C. **57.** a) 9,3.10<sup>-15</sup> C·m, b)  $2,05 \cdot 10^{-11}$  J. **59.**  $1,22 \cdot 10^{-23}$  J. **61.**  $(1/2\pi)(pE/I)^{0.5}$ . **63.** a) 8.87 · 10<sup>-15</sup> N, b) 120, **65.** 217°, **67.** 61 N/C, **69.** a) 47 N/C. b) 27 N/C. 71. 38 N/C. 73. a) -1 cm. b) 0. c) 10 pC. **75.** +1 μC. **77.** a) 6 mm, b) 180°. **79.** 9:30. **81.** a) -0,029 C, b) siły odpychające rozsadziłyby kulke. 83. a)  $-1.49 \cdot 10^{26}$  J, b)  $(-1.98 \cdot 10^{-26} \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$ , c) 3,47 $\cdot 10^{-26}$ J. **85.** a) górny wiersz: 4, 8, 12, środkowy wiersz: 5, 10, 14, dolny wiersz: 7, 11, 16, b)  $1,63\cdot10^{-19}$  C. 87. a)  $(-1,8 \text{ N/C})\hat{i}$ , b)  $(43,2 \text{ N/C})\hat{i}$ , c)  $(-6,29 \text{ N/C})\hat{i}$ .

#### **Rozdział 23**

**Sprawdziany: 1.** a) +ES, b) -ES, c) 0, d) 0. **2.** a) 2, b) 3, c) 1. **3.** a) równy, b) równy, c) równy. **4.** 3 i 4 jednakowe, następnie 2, 1. **Pytania: 1.** a)  $8 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ , b) 0. **3.** wszystkie jednakowe. **5.** wszystkie jednakowe. **7.** *a*, *c*, następnie *b* i *d* jednakowe (zero). **9.** a) 2, 1, 3, b) wszystkie jednakowe (+4q). **11.** a) niemożliwe, b)  $-3q_0$ , c) niemożliwe.

**Zadania: 1.**  $-0,015 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ . **3.** a) (b)  $-3,92 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ , c) (0, d) (0. **5.** 3,01 nN·m<sup>2</sup>/C. **7.** 2·10<sup>5</sup> N · m<sup>2</sup>/C. **9.** a) 8,23 N·m<sup>2</sup>/C, b) 72.9 pC, c) 8,23 N · m<sup>2</sup>/C, d) 72.9 pC. **11.** -1,70 nC. **13.** 3,54  $\mu$ C. **15.** a) (0, b) 0,0417. **17.** a) 37  $\mu$ C,(b) 4,1·10<sup>6</sup>N·m<sup>2</sup>/C. **19.** a) 4,5·10<sup>-7</sup> C/m<sup>2</sup>, b) 5,1·10<sup>4</sup>N/C. **21.** a)  $-3 \cdot 10^{-6}$  C, b) +1,3 · 10<sup>-5</sup> C. **23.** a) 0,32  $\mu$ C, b) 0,14  $\mu$ C. **25.** 5  $\mu$ C/m. **27.** 3,8·10<sup>-8</sup> C/m<sup>2</sup>. **29.** a) 0,214 N/C, b) do osi, c) 0,855 N/C, d) na zewnqtrz, e)  $-3,4 \cdot 10^{-12}$  C, f)  $-3,4 \cdot 10^{-12}$  C. **31.** a) 2,3·10<sup>6</sup> N/C, b) na zewnqtrz, c) 4,5·10<sup>5</sup> N/C, d) do osi. **33.** a) (0, b) (0, c) (-7,91 · 10<sup>-11</sup> N/C)î. **35.** -1,5. **37.** a) 5,3·10<sup>7</sup> N/C, b) 60 N/C. **39.** 5,0 nC/m<sup>2</sup>. **41.** 0,44 mm. **43.** a) (0, b) 1,31  $\mu$ N/C, c) 3,08  $\mu$ N/C, d) 3,08  $\mu$ N/C. **45.** a) 2,5·10<sup>4</sup>N/C, b) 1,35·10<sup>4</sup> N/C. **47.** -7,5 nC. **49.** a) 0,

b) 56,2 mN/C, c) 112 mN/C, d) 49,9 mN/C, e) 0, f) 0, g) -5 fC, h) 0. **51.**  $1,79\cdot10^{-11}$  C/m<sup>2</sup>. **53.** a) 7,78 fC, b) 0, c) 5,58 mN/C, d) 22,3 mN/C. **55.**  $6E_k\varepsilon_0r^3$ . **57.** a) 0, b) 2,88\cdot10^4 N/C, c) 200 N/C. **59.** a) 5,4 N/C, b) 6,8 N/C. **61.** a) 0, b)  $q_a/4\pi\varepsilon_0r^2$ , c)  $(q_a + q_b)/4\pi\varepsilon_0r^2$ . **63.** -1,04 nC. **65.** a) 0,125, b) 0,500. **67.** a) +2,0 nC, b) -1,2 nC, c) +1,2 nC, d) +0,8 nC. **69.** (5,65\cdot10^4 N/C)ĵ. **71.** a) -2, 53 \cdot 10^{-2}N \cdot m^2/C, b) +2,53\cdot10^{-2}N \cdot m^2/C. **75.** 3,6 nC. **77.** a) +4  $\mu$ C, b) -4  $\mu$ C. **79.** a) 693 kg/s, b) 693 kg/s, c) 347 kg/s, d) 347 kg/s, e) 575 kg/s. **81.** a) 0,25*R*, b) 2*R*.

#### **Rozdział 24**

**Sprawdziany: 1.** a) ujemna, b) dodatnia, c) wzrasta, d) wyższej. **2.** a) w prawo, b) 1, 2, 3, 5: dodatnia, 4, ujemna, c) 3, następnie 1, 2 i 5 jednakowe, następnie 4. **3.** wszystkie jednakowe. **4.** *a*, *c* (zero), *b*. **5.** a) 2, następnie 1 i 3 jednakowe, b) 3, c) przyspieszy w lewo.

**Pytania: 1.**  $-4q/4\pi\varepsilon_0 d$ . **3.** a) 1 i 2, b) żadne, c) nie, d) 1 i 2, tak, 3 i 4, nie. **5.** a) większego, b) dodatnia, c) ujemna, d) wszystkie jednakowe. **7.** a) 0, b) 0, c) 0, d) wszystkie trzy wielkości w dalszym ciągu wynoszą 0. **9.** a) 3 i 4 jednakowe, następnie 1 i 2 jednakowe, b) 1 i 2, wzrośnie, 3 i 4, zmaleje. **11.** *a*, *b*, *c*.

Zadania: 1. a) 3.10<sup>5</sup> C, b) 3,6.10<sup>6</sup> J. 3. 2,8.10<sup>5</sup>. 5. 8,8 mm. **7.** -32 V. **9.** a)  $1,87 \cdot 10^{-21}$  J, b) -11,7 mV. **11.** a) -0,268 mV, b) -0,681 mV. **13.** a) 3,3 nC, b) 12 nC/m<sup>2</sup>. **15.** a) 0,54 mm, b) 790 V. 17. 0,562 mV. 19. a) 6,0 cm, b) -12 cm. 21. 16,3 μV. **23.** a) 24,3 mV, b) 0. **25.** a) -2,3 V, b) -1,78 V. **27.** 13 kV. **29.** 32,4 mV. **31.** 47,1  $\mu$ V. **33.** 18,6 mV. **35.** (- 12 V/m) $\hat{i}$  +  $(12 \text{ V/m})\hat{\mathbf{j}}$ . **37.** 150 N/C. **39.**  $(-4 \cdot 10^{-16} \text{ N})\hat{\mathbf{i}} + (1, 6 \cdot 10^{-16} \text{ N})\hat{\mathbf{j}}$ . 41. a) 0,90 J, b) 4,5 J. 43. -0,192 pJ. 45. 2,5 km/s. 47. 22 km/s. **49.** 0,32 km/s. **51.** a)  $+6 \cdot 10^4 \text{V}$ , b)  $-7, 8 \cdot 10^5 \text{ V}$ , c) 2,5 J, d) zwieksza, e) taka sama, f) taka sama. 53. a) 0,225 J, b) A 45 m/s<sup>2</sup>, B 22,5 m/s<sup>2</sup>, c) A 7,75 m/s, B 3,87 m/s. **55.**  $1,6\cdot10^{-9}$  m. **57.** a) 3 J, b) -8,5 m. **59.** a) proton, b) 65,3 km/s. **61.** a) 12, b) 2. **63.** a)  $-1.8 \cdot 10^2$ V, b) 2.9 kV, c) -8.9 kV. **65.** 2,  $5 \cdot 10^{-8}$  C. 67. a) 12 kN/C, b) 1,8 kV, c) 5,8 cm. 69. a) 64 N/C, b) 2,9 V, c) 0. **71.**  $p/2\pi\varepsilon_0 r^3$ . **73.** a) 3,6  $\cdot 10^5$  V, b) nie. **75.** 6,4  $\cdot 10^8$  V. **77.** 2,90 kV. **79.**  $7 \cdot 10^5$  m/s. **81.** a) 1,8 cm, b) 8,4 \cdot 10^5 m/s, c) 2,1 \cdot 10^{-17} N, d) dodatni, e)  $1,6 \cdot 10^{-17}$  N, f) ujemny. **83.** a) +7, 19  $\cdot 10^{-10}$  V, b)  $+2.3 \cdot 10^{-28}$  J, c)  $+2.43 \cdot 10^{-29}$  J. 85.  $2.3 \cdot 10^{-28}$  J. 87. 2.1 dni. 89.  $2.3 \cdot 10^{-22}$  J. 91.  $1.48 \cdot 10^7$  m/s. 93. -1.92 MV. 95. a)  $Q/4\pi\varepsilon_0 r$ , b)  $(\rho/3\varepsilon_0)(1.5r_2^2 - 0.5r^2 - r_1^3r^{-1})$ ,  $\rho =$  $Q/[(4\pi/3)(r_2^3 - r_1^3)], c) (\rho/2\varepsilon_0)(r_2^2 - r_1^2), gdzie \rho \text{ jak w (b)},$ d) tak. **97.** a) 38 s, b)  $2,7 \cdot 10^2$  dni. **101.** a) 0,484 MeV. b) 0. **103.** -1,7.

#### Rozdział 25

**Sprawdziany: 1.** a) takie same, b) takie same. **2.** a) maleje, b) wzrasta, c) maleje. **3.** a) U, q/2, b) U/2, q.

**Pytania: 1.** *a*, 2, *b*, 1, *c*, 3. **3.** a) nie, b) tak, c) wszystkie jednakowe. **5.** a) będzie taka sama, b) będzie taka sama, c) większy, d) większa. **7.** *a*, szeregowo, *b*, równolegle, *c*, równolegle. **9.** a) wzrośnie, b) będzie taka sama, c) wzrośnie, d) wzrośnie, e) wzrośnie, f) wzrośnie. **11.** równolegle, wyłącznie  $C_1$ , wyłącznie  $C_2$ , szeregowo. Zadania: 1. a) 3,5 pF, b) 3,5 pF, c) 57 V. 3. a) 144 pF, b) 17,3 nC. **5.** 0.280 pF. **7.** 6.79·10<sup>-4</sup> F/m<sup>2</sup>. **9.** 315 mC. **11.** 3.16 µF. **13.** 43 pF. **15.** a) 3  $\mu$ F, b) 60  $\mu$ C, c) 10 V, d) 30  $\mu$ C, e) 10 V, f) 20  $\mu$ C, g) 5 V, h) 20 μC. 17. a) 789 μC, b) 78,9 V. 19. a) 4 μF, b) 2  $\mu$ F. **21.** a) 50 V, b) 5.10<sup>-5</sup>C, c) 1,5.10<sup>-4</sup>C. **23.** a) 4,5.10<sup>14</sup>, b)  $1.5 \cdot 10^{14}$ , c)  $3 \cdot 10^{14}$ , d)  $4.5 \cdot 10^{14}$ , e) w góre, f) w góre. **25.** 3.6 pC. **27.** a) 9  $\mu$ C, b) 16  $\mu$ C, c) 9  $\mu$ C, d) 16  $\mu$ C, e) 8,4  $\mu$ C, f) 16,8  $\mu$ C, g) 10,8 μC, h) 14,4 μC. 29. 72 F. 31. 0,27 J. 33. 0,11 J/m<sup>3</sup>. **35.** a)  $9,16\cdot10^{-18}$  J/m<sup>3</sup>, b)  $9,16\cdot10^{-6}$  J/m<sup>3</sup>, c)  $9,16\cdot10^{6}$  J/m<sup>3</sup>, d)  $9,16 \cdot 10^{18}$  J/m<sup>3</sup>, e)  $\infty$ . **37.** a) 16 V, b) 45,1 pJ, c) 120 pJ, d) 75,2 pJ. 39. a) 190 V, b) 95 mJ. 41. 81 pF/m. 43. Pyrex. **45.** 66 μJ. **47.** 0,63 m<sup>2</sup>. **49.** 17,3 pF. **51.** a) 10 kV/m, b) 5 nC, c) 4,1 nC. 53. a) 89 pF, b) 0,12 nF, c) 11 nC, d) 11 nC, e) 10 kV/m, f) 2,1 kV/m, g) 88 V, h) -0,17 µJ. 55. a) 0,107 nF, b) 7,79 nC, c) 7,45 nC. 57. 45 μC. 59. 16 μC. 61. a) 7,2 μC, b) 18 μC, c) Bateria dostarcza ładunek tylko do okładek, do których jest podłączona, ładunki na innych okładkach pojawiają się w wyniku przepływu elektronów pomiędzy okładkami, w zgodzie z nowym rozkładem napięć na kondensatorach. Tak więc bateria nie dostarcza ładunku bezpośrednio do kondensatora 4. 63. a) 10 µC, b) 20 µC. 65. 1,06 nC. 67. a) 2,4 µF, b) 0,480 mC, c) 80 V, d) 0,480 mC, e) 120 V. 69. 4.9%. 71. a) 0,708 pF, b) 0,6, c) 1,02.10<sup>-9</sup> J, d) wciagnieta. 73. 5,3 V. 75. 40 µF. 77. a) 200 kV/m, b) 200 kV/m, c) 1,77  $\mu$ C/m<sup>2</sup>, d) 4,6  $\mu$ C/m<sup>2</sup>, e) -2,83  $\mu$ C/m<sup>2</sup>. **79.** a)  $q^2/2\varepsilon_0 S$ .

#### **Rozdział 26**

**Sprawdziany: 1.** 8 A, w prawo. **2.** (a)–(c) w prawo. **3.** a i c jednakowe, następnie b. **4.** element 2. **5.** a) i b) jednakowe, następnie (d) i (c).

**Pytania:** 1. jednakowo A, B i C, następnie jednakowo A + B i B + C, następnie A + B + C. **3.** a) górna i dolna, przednia i tylna, lewa i prawa, b) górna i dolna, przednia i tylna, lewa i prawa, c) górna i dolna, przednia i tylna, lewa i prawa, d) górna i dolna, przednia i tylna, lewa i prawa, **5.** a, b, i c wszystkie jednakowe, następnie d. **7.** a) B, A, C, b A, C. **9.** a) C, B, A, b wszystkie jednakowe, c) A, B, C, d wszystkie jednakowe. **11.** a) a i c jednakowe, następnie b (zero), b) a, b, c, c) a i b jednakowe, następnie c.

**Zadania: 1.** a) 1,2 kC, b) 7,5 $\cdot$ 10<sup>21</sup>. **3.** 6,7  $\mu$ C/m<sup>2</sup>. **5.** a) 6,4 A/m<sup>2</sup>, b) na północ, c) pole powierzchni przekroju. 7. 0,38 mm. 9. 18,1 µA. 11. a) 1,33 A, b) 0,666 A, c) J<sub>a</sub>. 13. 13 min. **15.** 2,4  $\Omega$ . **17.** 2.10<sup>6</sup>  $(\Omega \cdot m)^{-1}$ . **19.** 2.10<sup>-8</sup>  $\Omega \cdot m$ . **21.**  $(1,8 \cdot 10^3)^{\circ}$ C. **23.**  $8,2 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ . **25.** 54  $\Omega$ . **27.** 3. **29.**  $3,35 \cdot 10^{-7}$  C. **31.** a) 6 mA, b)  $1,59 \cdot 10^{-8}$  V, c) 21,2 n $\Omega$ . **33.** a) 38,3 mA, b) 109 A/m<sup>2</sup>, c) 1,28 cm/s, d) 227 V/m. 35. 981 kΩ. 39. 150 s. 41. a) 1 kW, b) 1,54 zł. 43. 0,135 W. 45. a) 10,9 A, b) 10,6 Ω, c) 4,50 MJ. **47.** a) 5,85 m, b) 10,4 m. **49.** a) 22,32 zł, b) 144  $\Omega$ , c) 0,833 A. **51.** a) 5,1 V, b) 10 V, c) 10 W, d) 20 W. **53.** a) 28,8 Ω, b)  $2,6\cdot10^{19}$  s<sup>-1</sup>. **55.** 660 W. **57.** 28,8 kC. **59.** a) srebro, b) 51,6 n\Omega. **61.** a) 2,3·10<sup>12</sup>, b) 5·10<sup>3</sup>, c) 10 MV. **63.** 2,4 kW. **65.** a) 1,37, b) 0,73. 67. a) -8,6%, b) mniejsze. 69. 146 kJ. 71. a) 250°C, b) tak. **73.** 3·10<sup>6</sup> J/kg. **75.** 560 W. **77.** 0,27 m/s. **79.** a) 10 A/cm<sup>2</sup>, b) na wschód. **81.** a)  $9,4\cdot10^{13}$  s<sup>-1</sup>, b)  $2,4\cdot10^2$  W. **83.** 113 min. **85.** a) 225 μC, b) 60 μA, c) 0,45 mW.

#### Rozdział 27

**Sprawdziany: 1.** a) w prawo, b) wszystkie jednakowe, c) *b*, następnie *a* i *c* jednakowe, d) *b*, następnie *a* i *c* jednakowe. **2.** a) wszystkie jednakowe, b)  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . **3.** a) mniejsza, b) większa, c) jednakowa. **4.** a) U/2, *I*, b) *U*, *I*/2. **5.** a) 1, 2, 4, 3, b) 4, jednakowo 1 i 2, następnie 3.

**Pytania:** 1. a) równa, b) większa. 3. równolegle,  $R_2$ ,  $R_1$ , szeregowo. 5. a) szeregowo, b) równolegle, c) równolegle. 7. a) mniejszy, b) mniejszy, c) większy. 9. a) równolegle, b) szeregowo. 11. a) jednakowe, b) jednakowe, c) mniejsze, d) większe. 13. a) wszystkie jednakowe, b) 1, 3, 2.

Zadania: 1. a) 0,5 A, b) 1 W, c) 2 W, d) 6 W, e) 3 W, f) dostarczana, g) absorbowana. **3.** a) 14 V, b)  $1.10^2$ W, c)  $6.10^2$  W, d) 10 V, e)  $1.10^2$ W. **5.** 11 kJ. **7.** a) 80 J, b) 67 J, c) 13 J. **9.** a) 12 eV, b) 6,53 W. 11. a) 50 V, b) 48 V, c) ujemny. 13. a) 6,9 km, b) 20 Ω. 15. 8 Ω. 17. a) 0,004 Ω, b) 1. 19. a) 4Ω, b) równolegle. 21. 5,56 A. 23. a) 50 mA, b) 60 mA, c) 9 V. 25. 3d. **27.**  $3.6 \cdot 10^3$  A. **29.** a) 0.333 A, b) w prawo, c) 720 J. **31.** a) -11 V, b) -9 V. 33. 48,3 V. 35. a) 5,25 V, b) 1,50 V, c) 5,25 V, d) 6,75 V. **37.** 1,43 Ω. **39.** a) 0,15 Ω, b) 240 W. **41.** a) 0,709 W, b) 0,050 W, c) 0,346 W, d) 1,26 W, e) -0,158 W. 43. 9. 45. a) 0,67 A, b) w dół, c) 0,33 A, d) w góre, e) 0,33 A, f) w góre, g) 3,3 V. **47.** a) 1,11 A, b) 0,893 A, c) 126 m. **49.** a) 0,45 A. **51.** a) 55,2 mA, b) 4,86 V, c) 88 Ω, d) zmniejsza. 53. -3%. 57. 0,208 ms. 59. 4,61. 61. a) 2,41 µs, b) 161 pF. 63. a) 1,1 mA, b) 0,55 mA, c) 0,55 mA, d) 0,82 mA, e) 0,82 mA, f) 0, g)  $4 \cdot 10^2$  V, h)  $6 \cdot 10^2$  V. 65. 411  $\mu$ A. 67. 0.72 MΩ. 69. a) 0.955 μC/s, b) 1.08 μW, c) 2.74 μW, d) 3,82  $\mu$ W. **71.** a) 3 A, b) 3,75 A, c) 3,94 A. **73.** a) 1,32  $\cdot 10^{7}$  A/m<sup>2</sup>, b) 8,90 V, c) miedź, d)  $1,32 \cdot 10^7$  A/m<sup>2</sup>, e) 51,1 V, f) żelazo. **75.** a) 3 kV, b) 10 s, c) 11 GΩ. **77.** a) 85 Ω, b) 915 Ω. **81.** 4 V. **83.** a) 24,8 Ω, b) 14,9 kΩ. **85.** przewód. **87.** –13 μC. **89.** 20 Ω. 91. a) 3 A, b) w dół, c) 1,60 A, d) w dół, e) dostarcza, f) 55,2 W, g) dostarcza, h) 6,4 W. 93. a) 1 V, b) 50 m Ω. 95. 3. 99. a) 1,5 mA, b) 0, c) 1 mA. 101. 7,5 V. 103. a) 60 mA, b) w dół, c) 180 mA, d) w lewo, e) 240 mA, f) w górę. 105. a) 4 A, b) w górę, c) 0,5 A, d) w dół, e) 64 W, f) 16 W, g) dostarczana, h) pochłaniana.

#### Rozdział 28

**Sprawdziany:** 1. a) zgodny z kierunkiem osi z, b) przeciwny do kierunku osi x, c)  $\vec{F}_B = 0.2.$  a) 2, potem razem 1 i 3 (zerowa siła), b) 4. 3. a) elektron, b) zgodnie. 4. przeciwny do kierunku osi y. 5. a) wszystkie wartości równe, b) najpierw razem 1 i 4, następnie razem 2 i 3.

**Pytania:** 1. a) nie, gdyż  $\vec{v}$  i  $\vec{F}_B$  muszą być prostopadłe, b) tak, c) nie, gdyż  $\vec{v}$  i  $\vec{F}_B$  muszą być prostopadłe. 3. a) najpierw oba wektory równoległe do osi *z*, następnie oba wektory równoległe do osi *y*, na koniec oba wektory równoległe do osi *x* (zerowe napięcie), b) zgodny z kierunkiem osi *y*. 5. a)  $\vec{F}_E$ , b)  $\vec{F}_B$ . 7. a)  $\vec{B}_1$ , b)  $\vec{B}_1$  za płaszczyznę rysunku,  $\vec{B}_2$  przed płaszczyznę rysunku, c) mniejszy. 9. a) dodatnia, b) najpierw razem od ustawienia 2 do ustawienia 1 oraz od ustawienia 2 do ustawienia 4, następnie od ustawienia 3 do ustawienia 3 (równa zeru). 11. a) ujemny, b) równa, c) równy, d) półokręgiem.

**Zadania: 1.** a) 400 km/s, b) 835 eV. **3.** a)  $(6.2 \cdot 10^{-14} \text{ N}) \hat{k}$ ,

b)  $(-6.2 \cdot 10^{-14} \text{ N}) \hat{\text{k}}$ . 5. 5 T. 7.  $(-11.4 \text{ V/m}) \hat{\text{i}} - (6 \text{ V/m}) \hat{\text{j}} +$  $(4.8 \text{ V/m})\hat{k}$ . 9.  $(-0.267 \text{ mT})\hat{k}$ . 11. 0.68 MV/m. 13. 7.4  $\mu$ V. **15.** a)  $(-600 \text{ mV/m})\hat{k}$ , b) 1,2 V. **17.** a) 2,6  $\cdot$  10<sup>6</sup> m/s, b) 0,109  $\mu$ s, c) 0,14 MeV, d) 70 kV. **19.** 1,2  $\cdot$  10 - 9 kg/C. **21.** a)  $2,05 \cdot 10^7$  m/s, b) 467  $\mu$ T, c) 13,1 MHz, d) 76,3 ns. 23. 21,1 µT. 25. a) 0,978 MHz, b) 96,4 cm. 27. a) 495 mT, b) 22,7 mA, c) 8,17 MJ. 29. 65,3 km/s. 31. 5,07 ns. 33. a) 0.358 ns. b) 0.166 mm. c) 1.51 mm. 35. a) 200 eV. b) 20 keV. c) 0,499%. **37.**  $2,4 \cdot 10^2$  m. **39.** a) 28,2 N, b) skierowana poziomo na zachód. 41. a) 467 mA, b) w prawo. 43. a) 0, b) 0,138 N, c) 0,138 N, d) 0. **45.**  $(-2,5 \text{ mN})\hat{i} + (0,75 \text{ mN})\hat{k}$ . **47.** a) 0,1 T, b) 31°. **49.**  $(-4, 3 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m})$  j. **51.** 2,45 A. **55.** a) 2,86 A \cdot m<sup>2</sup>, b)  $1,1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . **57.** a) 12,7 A, b) 0,0805 \text{ N} \cdot \text{m}. **59.** a)  $0,3 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , b) 0,024 N · m. **61.** a)  $-72 \mu J$ , b)  $(96\hat{i} + 48\hat{k}) \mu N \cdot m$ . **63.** a)  $(-9, 7 \cdot 10^{-4} \text{N} \cdot \text{m}) \hat{i} - (7, 2 \cdot 10^{-4} \text{N} \cdot \text{m}) \hat{j} + (8 \cdot 10^{-4} \text{N} \cdot \text{m}) \hat{k}$ , b)  $-6 \cdot 10^{-4}$  J. **65.** a) 90°, b) 1, c) 1,28 \cdot 10^{-7} N · m. **67.** a) 20 minut, b)  $5,9 \cdot 10^{-2}$  N · m. **69.** 8,2 mm. **71.** 127 u. **73.** a)  $6,3 \cdot 10^{14}$  m/s<sup>2</sup>, b) 3 mm. **75.** a) 1,4, b) 1. **77.** (-500 V/m) ĵ. **79.** a) 0,5, b) 0,5, c) 14 cm, d) 14 cm. **81.**  $(0,8\hat{j} - 1,1\hat{k})$  mN. **83.** -40 mC. **85.** a)  $(12,8\hat{i} + 6,41\hat{j}) \cdot 10^{-22}$  N, b) 90°, c) 173°. **87.** a) w górę, b) na brzegu, c) 47,1 V, d) 47,1 V, e) 2,36 kW. 89.  $\sqrt{\frac{mu}{2ed}}$ .

**91.**  $n = \frac{JB}{eE}$ .

#### Rozdział 29

**Sprawdziany:** 1. *b*, *c*, *a*. 2. *d*, następnie razem *a* i *c*, potem *b*. 3. *d*, *a*, następnie razem *b* i *c* (zero).

**Pytania: 1.** *c*, *a*, *b*. **3.** *c*, *d*, następnie razem *a* i *b* (zero). **5.** *a*, *c*, *b*. **7.** najpierw razem *c* i *d*, następnie *b*, na koniec *a*. **9.** *b*, *a*, *d*, *c* (zero). **11.** a) 1, 3, 2, b) mniejszy.

Zadania: 1. a) 3,3 µT, b) tak. 3. a) 16 A, b) na wschód. **5.** a) 1 mT, b) przed, c) 0,8 mT, d) przed. **7.** a) 0,102 µT, b) przed. 9. a) w przeciwnych, b) 30 A. 11. a) 4,3 A, b) przed płaszczyznę rysunku. 13. 50,3 nT. 15. a) 1,7 µT, b) za płaszczyznę rysunku, c)  $6,7 \mu$ T, d) za płaszczyznę rysunku. **17.** 132 nT. **19.**  $5 \mu T$ . **21.** 256 nT. **23.**  $(-7,75 \cdot 10^{-23} \text{ N})$  i. **25.** 2 rad. **27.** 61,3 mA. **29.**  $(80 \,\mu\text{T})\hat{j}$ . **31.** a) 20  $\mu\text{T}$ , b) za płaszczyzne rysunku. **33.** (22,3 pT) j. **35.** 88,4 pN/m. **37.**  $(-125 \mu \text{N/m})$  i +  $(41,7 \,\mu N/m)$  j. **39.** 800 nN/m. **41.**  $(3,2 \,m N)$  j. **43.** a) 0, b) 0,85 mT, c) 1,7 mT, d) 0,85 mT. **45.** a)  $-2.5 \,\mu$ T · m, b) 0. **47.** a) 0, b) 0,1 µT, c) 0,4 µT. 49. a) 533 µT, b) 400 µT. 51. 0,3 mT. **53.** 0,272 A. **55.** a) 4,77 cm, b) 35,5  $\mu$ T. **57.** a) 2,4 A  $\cdot$  m<sup>2</sup>, b) 46 cm. **59.**  $0,47 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . **61.** a) 79  $\mu$ T, b)  $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$ . **63.** a)  $(0,06 \,\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2)\hat{j}$ , b)  $(96 \,\mathrm{pT}\,\hat{j})$ . **65.** 1,28 mm. **69.** a) 15 A, b) przeciwny do kierunku osi z. 71. 7,7 mT. 73. a)  $15,3 \,\mu$ T. **75.** a)  $(0,24\hat{i})$  nT, b) 0, c)  $(-43\hat{k})$  pT, d)  $(0,14\hat{k})$  nT. **79.** a) 4,8 mT, b) 0.93 mT, c) 0. **83.**  $(-0, 2 \text{ mT}) \hat{\mathbf{k}}$ . **87.** a)  $\frac{\mu_0 Ir}{2\pi c^2}$ , b)  $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , c)  $\frac{\mu_0 I(a^2 - r^2)}{2\pi (a^2 - b^2)r}$ , d) 0.

#### Rozdział 30

**Sprawdziany:** 1. *b*, następnie razem *d* i *e*, potem razem *a* i *c* (zero). 2. razem *a* i *b*, następnie *c* (zero). 3. razem *c* i *d*, następnie razem *a* i *b*. 4. *b* i *c* przed płaszczyznę rysunku, *d* i *e* za płaszczyznę rysunku. 5. d oraz e. 6. a) 2, 3, 1 (zero), b) 2, 3, 1. 7. razem *a* i *b*, następnie *c*.

**Pytania:** 1. przed. 3. a) zerowe natężenie we wszystkich, b) 2, następnie razem 1 i 3 (zero). 5. najpierw razem c i d, następnie b, potem a. 7. a) większe, b) takie samo, c) takie samo, d) takie samo i równe zeru. 9. a) zerowe natężenie we wszystkich, b) razem 1 i 2, następnie 3, c) wszystkie równe zeru. 11. b.

Zadania: 1. 0. 3. 30 mA. 5. 0. 7. a) 31 mV, b) w lewo. 9. 0, 198 mV. 11. b) 0,796 m<sup>2</sup>. 13. 29,5 mC. 15. a) 21,7 V, b) przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara. 17. a)  $1,26 \cdot 10^{-4}$  T, b) 0, c)  $1,26 \cdot 10^{-4}$  T, d) tak, e)  $5,04 \cdot 10^{-8}$  V. **19.** 5,5 kV. **21.** a) 40 Hz, b) 3,2 mV. **23.** a)  $\frac{\mu_0 I R^2 \pi r^2}{2x^3}$ , b)  $\frac{3\mu_0 I R^2 r^2 v}{2x^4}$ , c) przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara. **25.** a) 13  $\mu$ Wb/m, b) 17%, c) 0. 27. a) 80  $\mu$ V, b) zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. 29. a) 48,1 mV, b) 2,67 mA, c) 0,129 mW. 31. 3,68 µW. **33.** a) 240  $\mu$ V, b) 0,6 mA, c) 0,144  $\mu$ W, d) 2,87  $\cdot$  10<sup>-8</sup> N, e) 0,144 µW. 35. a) 0,6 V, b) w góre, c) 1,5 A, d) zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, e) 0,9 W, f) 0,18 N, g) 0,9 W. 37. a) 71,5 µV/m, b) 143 µV/m. 39. 0,15 V/m. 41. a) 2,45 mWb, b) 0,645 mH. 43. 1,81 µH/m. 45. a) maleje, b) 0,68 mH. **47.** b)  $L_{\rm rw} = \sum_{i=1}^{N} L_i$ . **49.** 59,3 mH. **51.** 46  $\Omega$ . **53.** a) 8,45 ns, b) 7,37 mA. **55.** 6,91. **57.** a) 1,5 s. **59.** a)  $I(1 - e^{-Rt/L})$ , b)  $(L/R) \ln 2$ . **61.** a) 97,9 H, b) 0,196 mJ. **63.** 25,6 ms. **65.** a) 18,7 J, b) 5,1 J, c) 13,6 J. **67.** a) 34,2 J/m<sup>3</sup>, b) 49,4 mJ. **69.**  $1,5 \cdot 10^8$  V/m. **71.** a)  $1 \text{ J/m}^3$ , b)  $4,8 \cdot 10^{-15} \text{ J/m}^3$ . 73. a) 1,67 mH, b) 6 mWb. 75. 13 µH. 77. b) należy zmienić kierunek nawiniecia jednej z cewek. 79. a) 2 A, b) 0, c) 2 A, d) 0, e) 10 V, f) 2 A/s, g) 2 A, h) 1 A, i) 3 A, j) 10 V, k) 0, l) 0. **81.** a) 10  $\mu$ T, b) przed płaszczyzne rysunku, c) 3,3  $\mu$ T, d) przed płaszczyznę rysunku. 83. 0,52 ms. 85. a)  $(4,4 \cdot 10^7 \text{ m/s}^2)\hat{i}$ , b) 0, c)  $(-4, 4 \cdot 10^7 \text{ m/s}^2)$  i. 87. a) 0,4 V, b) 20 A. 89. a) 10 A, b) 100 J. 91. a) 0, b) 800 A/s, c) 1,8 mA, d) 440 A/s, e) 4 mA, f) 0. **93.** 1,15 W. **95.** a) 20 A/s, b) 0,75 A. **97.** 12 A/s. **99.**  $3 \cdot 10^{36}$  J. 101. a) 13,9 H, b) 120 mA.

#### **Rozdział 31**

**Sprawdziany: 1.** a) T/2, b) T, c) T/2, d) T/4. **2.** a) 5 V, b) 150  $\mu$ J. **3.** a) pozostanie taka sama, b) pozostanie taka sama. **4.** a) C, B, A, b)  $A \rightarrow 1$ ,  $B \rightarrow 2$ ,  $C \rightarrow 4$ ,  $S \rightarrow 3$ , c) A. **5.** a) pozostanie taka sama, b) zwiększy się, c) pozostanie taka sama, b) zmniejszy się. **6.** a) 1: spóźnia się, 2: wyprzedza, 3: jednakowa faza, b) 3 ( $\omega_W = \omega$  dla  $X_L = X_C$ ). **7.** a) zwiększyć (obwód ma charakter pojemnościowy, zwiększenie C powoduje zmniejszenie  $X_C$ , a więc przybliżenie do rezonansu, a wtedy  $P_{\text{sr}}$  jest największa), b) w kierunku częstości kołowej SEM. **8.** a) większy, b) podwyższający.

**Pytania:** 1. *b*, *a*, *c*. 3. a) T/4, b) T/4, c) T/2, d) T/2. 5. *c*, *b*, *a*. 7. *a*: cewka, *b*: opornik, *c*: kondensator. 9. a) dodatnia, b) zmniejszyć (zmniejszenie  $X_L$  przybliża do rezonansu), c) zmniejszyć (zmniejszenie  $X_C$  przybliża do rezonansu), 11. a) w prawo, wzrośnie (zwiększenie  $X_L$  przybliża do rezonansu), b) w prawo, wzrośnie (zmniejszenie  $X_C$  przybliża do rezonansu), c) w prawo, wzrośnie (zwiększenie  $\omega_w/\omega$  przybliża do rezonansu). 13. a) cewki, b) zmnniejszy się.

**Zadania:** 1. a)  $1,17 \,\mu$ J, b) 5,58 mA. 3. a) 6  $\mu$ s, b) 167 kHz, c) 3  $\mu$ s. 5. 45,2 mA. 7. a) 1,25 kg, b) 372 N/m, c)  $1,75 \cdot 10^{-4}$  m. 9.  $7 \cdot 10^{-4}$  s. 11. a) 6, b) 36 pF, c) 0,22 mH. 13. a) 0,18 mC,

b) 70,7 µs, c) 66,7 W. 15. a) 3 nC, b) 1,7 mA, c) 4,5 nJ. 17. a) 275 Hz, b) 365 mA. 21. a) 356 µs, b) 2.5 mH, c) 3.2 mJ. **23.** a) 1,98  $\mu$ J, b) 5,56  $\mu$ C, c) 12,6 mA, d) -46,9°, e) +46,9°. 25. 8,66 mΩ. 29. a) 95,5 mA, b) 11,9 mA. 31. a) 0,65 kHz, b) 24 Ω. **33.** a) 6,73 ms, b) 11,2 ms, c) cewka, d) 138 mH. **35.** 89 Ω. **37.** 7,61 A. **39.** a) 267  $\Omega$ , b) -41,5°, c) 135 mA. **41.** a) 206  $\Omega$ , b) 13,7°, c) 175 mA. **43.** a) 218 Ω, b) 23,4°, c) 165 mA. **45.** a) tak, b) 1 kV. 47. a) 224 rad/s, b) 6 A, c) 219 rad/s, d) 228 rad/s, e) 0,04. 49. a) 796 Hz, b) nie zmieni sie, c) zmaleje, d) wzrośnie. **53.** a) 12,1 Ω, b) 1,19 kW. **55.** 1,84 A. **57.** a) 117 μF, b) 0, c) 90 W, d) 0°, e) 1, f) 0, g) -90°, h) 0. **59.** a) 2,59 A, b) 38,8 V, c) 159 V, d) 224 V, e) 62, 4 V, f) 75 V, g) 100 W, h) 0, i) 0. 61. a) 0,743, b) wyprzedza, c) pojemnościowy, d) nie, e) tak, f) nie, g) tak, h) 33.4 W. **63.** a) 2,4 V, b) 3,2 mA, c) 0,16 A. **65.** a) 1,9 V, b) 5,9 W, c) 19 V, d) 590 W, e) 0,19 kV, f) 59 kW. 67. a) 6,73 ms, b) 2,24 ms, c) kondensator, d) 59 µF. 69. a) -0,405 rad, b) 2,76 A, c) pojemnościowy. **71.** a) 64  $\Omega$ , b) 50,9  $\Omega$ , c) pojemnościowy. **73.** a) 2,41  $\mu$ H, b) 21,4 pJ, c) 82,2 nC. **75.** a) 39,1 Ω, b) 21,7 Ω, c) pojemnościowy. **79.** a) 0,577 *Q*, b) 0,152. **81.** a) 45°, b) 70,7 Ω. **83.** 1,84 kHz. **85.** a) 0,689  $\mu$ H, b) 17,9 pJ, c) 0,11  $\mu$ C. **87.** a) 165  $\Omega$ , b) 313 mH, c) 14,9 µF. 93. a) 36 V, b) 29,9 V, c) 11,9 V, d) -5,85 V.

#### Rozdział 32

**Sprawdziany: 1.** *d*, *b*, *c*, *a* (zero). **2.** *a*, *c*, *b*, *d* (zero). **3.** razem *b* i *c*, następnie *d*, potem *a*. **4.** a) 2, b) 1. **5.** a) od, b) od, c) mniejsza. **6.** a) do, b) do, c) mniejsza.

**Pytania:** 1.  $1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow c$  i *d*. 3. a) maleje, b) maleje. 5. traci. 7. a) razem *a* i *b*, następnie *c*, potem *d*, b) nie (okładka nie ma symetrii obrotowej, więc  $\vec{B}$  nie jest styczne do żadnej kołowej pętli), c) nie. 9. a) 1 do góry, 2 do góry, 3 w dół, b) 1 w dół, 2 do góry, 3 zero. 11. a) 1, 3, 2, b) 2.

Zadania: 1. +3 Wb. 3. a) 47,4  $\mu$ Wb, b) do wewnątrz. **5.**  $2,4 \cdot 10^{13}$  V/(m · s). **7.** a)  $1,18 \cdot 10^{-19}$  T, b)  $1,06 \cdot 10^{-19}$  T. **9.** a)  $5.01 \cdot 10^{-22}$  T, b)  $4.51 \cdot 10^{-22}$  T. **11.** 1.9 pT. **13.**  $7.5 \cdot 10^5$  V/s. **17.** a) 0,324 V/m, b)  $2,87 \cdot 10^{-16} \text{ A}$ , c)  $2,87 \cdot 10^{-18}$ . **19.** a) 75,4 nT, b) 67,9 nT. 21. a) 27,9 nT, b) 15,1 nT. 23. a) 2 A, b)  $2,3 \cdot 10^{11}$  V/(m · s), c) 0,5 A, d) 0,63  $\mu$ T · m. **25.** a) 0,63  $\mu$ T, b)  $2,3 \cdot 10^{12}$  V/(m · s). **27.** a) 0,71 A, b) 0, c) 2,8 A. **29.** a) 7,6  $\mu$ A, b) 859 kV · m/s, c) 3,39 mm, d) 5,16 pT. **31.** 55 µT. **33.** a) 0, b) 0, c) 0, d)  $\pm 3,2 \cdot 10^{-25}$  J, e)  $-3,2 \cdot 10^{-34}$  J · s, f) 2,8  $\cdot 10^{-23}$  J/T, g)  $-9,7 \cdot 10^{-25}$  J, h)  $\pm 3,2 \cdot 10^{-25}$  J. **35.** a)  $-9,3 \cdot 10^{-24}$  J/T, b)  $1.9 \cdot 10^{-23}$  J/T. **37.** b) zgodny z kierunkiem osi x, c) zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, d) zgodny z kierunkiem osi x. 39. tak. 41. 20,8 mJ/T. 43. b)  $E_{k,i}/B$ , c) przeciwny do kierunku osi z, d) 0,31 kA/m. 47. a) 180 km, b)  $2, 3 \cdot 10^{-5}$ . **49.** a)  $3 \mu T$ , b)  $5, 6 \cdot 10^{-10}$  eV. **51.**  $5, 15 \cdot 10^{-24}$  A  $\cdot$  m<sup>2</sup>. **53.** a) 0,14 A, b) 79  $\mu$ C. **55.** a) 6,3  $\cdot$  10<sup>8</sup> A, b) tak, c) nie. **57.** 0,84 kJ/T. **59.** a) (1,2  $\cdot$  10<sup>-13</sup> T)e<sup>-t/0,012 s</sup>, b) 5,9  $\cdot$  10<sup>-15</sup> T. **63.** a) 27,5 mm, b) 110 mm. **65.** 8 A. **67.** a)  $-8.8 \cdot 10^{15}$  V/(m · s). b)  $5.9 \cdot 10^{-7}$  T · m. 69. b) jest ujemny, c) nie, gdyż jest on kompensowany dodatnim strumieniem pola przez otwarte denko rurki w pobliżu bieguna magnesu. **71.** b) przeciwny do kierunku osi x, c) przeciwny, d) przeciwny do kierunku osi x. 73. a) 7, b) 7, c)  $\frac{3h}{2\pi}$ , d)  $\frac{3eh}{4\pi m}$ , e)  $\frac{3.5h}{2\pi}$ , f) 8. **75.** a) 9, b) 3,71 · 10<sup>-23</sup> J/T, c) +9,27 · 10<sup>-24</sup> J, d) -9,27 · 10<sup>-24</sup> J.

## S K O R O W I D Z

#### A

akumulator 213 amper, jednostka 180 Ampere A.M. 304 amperomierz 231 analiza obwodów 237 – potencjałów 215

#### B

biegun 145 – południowy 256 – północny 256 bursztyn 2

#### С

całka krzywoliniowa 111 cewka 277, 278, 348, 353, 364 – indukcviność 349 -, jako dipol magnetyczny 313 -, pole magnetyczne 313 -, -- w dużej odległości 313 -, wyindukowany SEM 333 - z pradem, moment siły 281 ciało elektrycznie obojętne 3 ciepło Joule'a 197 cukierek wintergrinowy 6 cyklotron 270 cząstka naładowana --, cyklotron 271 cząstka, ruch po okręgu w polu magnetycznym 265 czestość kołowa 384-385

#### D

dc 390 diamagnetyzm 435, 446, 447-448 dielektryk niepolarny 164 -, obraz mikroskopowy 163-164 - polarny 164 -, prawo Gaussa 165-166, 169 dipol elektryczny 36, 52 --, energia potencjalna 53 --, moment siły 52 --, potencjał pola 117, 130 --, środek masy 52 - magnetyczny 256, 281, 316, 427 --, energia 279, 281 --, praca 279 – w polu elektrycznym 55 dipolowy moment magnetyczny 278, 281 domena magnetyczne 452 domieszkowanie 198

doświadczenia Faradaya 330-331 drgania swobodne, częstość kołowa 391 – tłumione 385, 416 – wymuszone 390, 391-392 droga swobodna, średnia 195 drugie prawo Kirchhoffa 215, 237 drukarka atramentowa 49 duant 270 duszki atmosferyczne 38 dwie cząstki, siła wypadkowa 10 działko elektronowe 265 działo szynowe 302

#### Е

elektromagnes 252 elektromagnetyzm 294 elektron 5 - drgający 390 - przewodnictwa 5, 179 - swobodny 193 elektronowolt 107 elektryczna energia potencjalna 130 element powierzchni 69 - pradu 294 energia elektryczna, zachowanie energii 106 --. zmiana 385 - magnetyczna 358, 365 - mechaniczna 130 - potencjalna, elektryczna 103-104 --, elektryczna jednostka 105 --, kondensator 158, 169 --, układ czastek 124 - zmagazynowana, pole elektryczne 158

#### F

farad, jednostka 145 Faraday M. 2, 161, 330 ferromagnetyk 446 ferromagnetyzm 446, 452 Franklin B. 3, 15, 17

### G

Gauss C.F. 68 geomagnetyczny biegun południowy 257 gęstość energii 159, 169 – – pola magnetycznego 360 – ładunku nośników 184 – –, liniowa 40, 41 – –, powierzchniowa 81 – powierzchniowa 46 – prądu elektrycznego 182–183, 200

#### Н

Hall E.H. 261 henr, jednostka 349 Henry J. 349

#### I

iloczvn skalarny 70 impedancia, dopasowanie 414 indukcja 330, 339 - magnetyczna 253, 281 – , jednostka 255 – wzajemna 361, 365 --, dwie cewki 363 indukcyjna stała czasowa 354, 365 indukcyjność 349, 364 indukowane pole elektryczne 343, 364 -- magnetyczne 429, 435-436 - prad 340 indukowany SEM 340 iskrzenie 50 izolator 5, 18 izolowana kula 149-150, 169

## J

jądro 5 – macierzyste 17 –, odpychanie 16 – pochodne 17 jednorodne pole elektryczne 52 jon dodatni 5

#### K

Kirchhoff G.R. 215 klucz 145 kondensator 143, 168 -, energia potencialna 169 - kulisty 149, 169 - płaski 144, 147–148, 168 -, pojemność 144, 168 -, połączenie równoległe 152, 169 -, połaczenie szeregowe 152-153, 169 -, rozładowanie 234 równoważny 151 - walcowy 148-149, 168 z dielektrykiem 161, 169 -, ładowanie 145, 232, 429 -, ładunek 144 kontur, zamkniety 304 krzem 198 kuchenka mikrofalowa 54 kula, izolowana 149-150 kulomb, jednostka 8

kwant 15, 19 kwant  $\gamma$  18 L liczba atomowa 17 masowa 17 linia pradu 183 linie pola elektryczne 31, 55 – magnetycznego 256 ładowanie 4 ładunek dodatni 3 - elektryczny 1, 3, 18, 252 --, zachowanie 19 - elementarny 15, 19 --, pomiar 49 - indukowany 5-6 - kondensatora 144 - nadmiarowy 2 - niezrównoważony 3 - o rozkładzie ciągłym 55 - próbny 30 - punktowy 33 --, nateżenie pola elektrycznego 33-34 --, pole elektryczne 48 --. siła 55 - swobodny 167 - ujemny 3 - ujemny, odpływ 6 - zrównażony 3 -, rozkład ciagły 119, 131 -, zachowanie 17 łuk okręgu, naładowany 43

#### M

magnes 437 - podkowiasty 256 - sztabkowy 256 - trwały 252 - w kształcie litery C 256 magnesowanie 437 magnetyt 437 magnetyzm ziemski 437-438 materiał przewodzący, prawo Ohma 193 Maxwell J.C. 2, 304 metoda energetyczna 214 Millikan R. A. 49 moc 237 moc elektryczna 201 -, jednostka 197 -, obwód pradu zmiennego 407-408 moment dipolowy, elektryczny 36, 37, 55 --, indukowany 118 - magnetyczny 278 --, dipolowy 278 monopol magnetyczny 252, 427

#### N

nadprzewodnictwo 200 nadprzewodnik 5, 200, 201

naładowana czastka, potencjał pola 114, 130 --. ruch 253 --, - w polu elektrycznym 50 --, -- magnetycznym 281 --. układ 115 naładowana linia 120 - tarcza 121 --, pole elektryczne 46 naładowany przewodnik, potencjał 128 namagnesowanie 449 napiecie przebicia 161 natężenie pola 110, 122 -- elektrycznego 29, 30, 55 ---, jednostka 31 ---, ładunek punktowy 33-34 ---, naładowana tarcza 47 ---, nieskończona płaszczyzna 47 ---, prawo Gaussa 77 - pradu 2, 179-180, 200 -- elektrycznego 8, 18 ---, amplituda 401 ---, jednostka 180 neutron 5

#### 0

obciążenie indukcyjne 397 - oporowe 392 - pojemnościowe 394-395 obwód elektryczny 145 --, fizyka 211 --, moc 196-197 -, jeden element 416 -, jedno oczko 214, 237 - LC, drgania 379, 383, 383-384 --, energia 416 --. fizvka 379 --, ładunek 416 --, natężenie prądu 416 - otwarty 145 - prądu zmiennego, moc 407 - RC 232, 237 - RL 352-353 --, szeregowy 365 - RLC, drgania tłumione 385 --, energia 388 --, ładunek 388 - szeregowy RC 232 -- RLC 400 -- RLC, faza początkowa 403 -, wiele oczek 223 - zamkniety 145 oddziaływanie wymienne 452 Oersted H. C. 2 ogniwo elektryczne 212 - paliwowe 212 - słoneczne 212

om, jednostka 188 Onnes H. K. 200 opornik 188, 353 - połączony równolegle 224, 237 -- szeregowo 217, 237 -, rozproszenie energii 201 opór elektryczny 188, 200 - właściwy 188 -, jednostka 188 -, zależność temperaturowa 190 - wewnetrzny 216 - właściwy 199, 201 --. metal 291 --, zależność temperaturowa 201 orbitalny moment magnetyczni 446 oś dipola 36 - symetrii 32

#### Р

paramagnetyzm 435, 446, 449 petla histerezy 454 z pradem 443, 444 pierścień, naładowany 42 pierwsze prawo Kirchhoffa 223, 237 płyta, nieprzewodząca 32 pojemność elektryczna 144 -, fizyka 143 -, obliczenia 146-147 - kondensatora 168 - równoważna 154-155 pola skrzyżowane 258 pole elektryczne 29, 30, 55, 251 --. czastkowe 41 --, dipol elektryczny 55 --, indukowane 343 --, jednorodne 32, 111 --, linie 29, 31, 55 --, ładunek punktowy 55 --, ładunek rozkład ciągły 55 --, naładowana linia 40-41 --, naładowana tarcza 55 --, nateżenie 29, 30, 55, 147 --, niejednorodne 32 --, potencjał dipola 117-118 --, ruch 105 --, strumień 69 --. zmiana 105 - jednorodne, płaska powierzchnia 69, 70 - magnetyczne, energia zmagazynowana 357-358 --, fizyka 251 --, linie 256 --, wartość 294 --, wytwarzanie 252 - wektorowe 30 polikryształ 453 połączenie równoległe 152, 169 - szeregowe 152-153, 169

#### 490 SKOROWIDZ

potencjał elektryczny 103, 104, 122, 130, 345 --. fizyka 103 --, obliczenia 110 powierzchnia ekwipotencialna 109, 130 - Gaussa 68, 76, 80, 91, 165 półprzewodnik 5, 198, 201 praca wykonana przez pole 106 prawo Ampere'a 303, 304, 316 --, uogólnione 430, 433, 445 - Biota-Savarta 294, 295, 315 - Coulomba 2, 4, 7, 18, 33 prawo Faradaya 332, 344-345 - Gaussa 68, 74, 91, 427 --, dielektryk 165-166, 169 --, dwie przewodzące płyty 87 --, naładowana linia prosta 84 --, płyta nieprzewodząca 86 --, pola magnetyczne 427, 455 --, powłoka sferyczna 89-90 –, sferyczna metalowa powłoka 82 --, symetria płaszczyznowa 86 --, - sferyczna 89 --, - walcowa 83 --, zastosowanie 91 - indukcji Faradaya 330, 331, 343, 364, 429 ---, opis ilościowy 332 - Newtona 8 - Ohma 192, 201 --, obraz mikroskopowy 193 prad elektryczny 179 --, fizyka 178 --. kierunek 180-181 --, natężenie 200 - przesunięcia 433, 445 - wirowy 341-342 - zmienny 390, 390-391 prądnica elektryczny 212 predkość dryfu 183 - unoszenia 183, 200, 262 proces anihilacji 18 - kreacji 18 proton 5, 270 przebicie elektryczne 50 -, wytrzymałość 161-162 przekazywanie energii 339 przenikalność elektryczna próżni 8, 18 – –, wzgledna 161, 169 przewodnik 1, 4, 18 -, długi prostoliniowy, pole magnetyczne 305-307 - kulisty 9-10 -, metaliczny 179 -, naładowany 131 --, izolowany 79 -, ruch 262 - z pradem, siła 273, 281 ---, zakrzywiony 274

z wnęką, izolowany 80
, zewnętrzne pole elektryczne 129–130 przewodność elektryczna właściwa 189
właściwa 201 przewód o kształcie łuku okręgu, pole magnetyczne 297
prostoliniowy 295
–, pole magnetyczne 315
w kształcie łuku okręgu 315
pył, eksplozja 158

#### R

ramka z prądem, moment siły 275 ---, wypadkowy moment siły 276 reaktancja indukcyjna 397, 416 - pojemnościowa 395, 416 reguła Lenza 334, 364 - oporu 216 prawej dłoni 254, 296 - SEM 216 rezonans 392, 404-405, 416 rezystancja 188 rezystywność 188 rozkład ciągły ładunku 119 rozładowanie 4, 5 rozpad promieniotwórczy 17 równania Maxwella 436, 445 – –, fizyka 426 równoległe przewody, siła 301 różnica potencjałów 147

#### S

samoindukcja 350, 364 samoindukcyjny SEM 350 sfera Gaussa 68 siła elektromotoryczna 211 --, indukowana 330 – . źródło 211 - elektrostatyczna 7 – –, wektor 2 - elektryczna 251 - grawitacji 7-8 -, pole magnetyczne 253, 254 siły, znoszenie się 259 solenoid, idealny 311 -, indukcyjność 349 -, pole magnetyczny 309 spinowy moment magnetyczne 440, 446 – – pedu 440 stała Coulomba 7.8 - czasowa 233 --, pojemnościowa 237 - elektrostatyczna 7 strumień 91 - elektryczny 69 - magnetyczny 329, 364 - wypadkowy 70-71 -, walec w jednorodnym polu 71 synchrotron 271

protonowy 271
 ścieżka przewodzenia 5
 średni czas swobodny 195

#### Т

termoogniwo 212 tesla, jednostka 255 Thomson J.J. 258 tor śrubowy 267 toroid, pole magnetyczne 311–312 transformacja napięcia 413 – prądów 414 transformator 411, 416–417 – idealny 412 transmisja energii, warunki 411 twierdzenie o powłoce 1 2, 9, 18 – o powłoce 2 2, 9, 18

#### U

układ cząstek, naładowanych 131 – drgający, elektryczny 382 – –, mechaniczny 382 – dwóch cząstek, energia potencjalna 125 – klocek-sprężyna 383 – RLC, moc 416 – –, – średnia 416 – trzech cząstek, energia potencjalna 126–127 uziemienie 5 – obwodu 219

#### W

warunek rezonansu 270 weber, jednostka 332 wielkość skwantowana 15 woda, cząsteczka 52 wolt 105 woltomierz 231 współczynnik mocy 409 wyładowanie atmosferyczne 38, 84 – iskrowe 129 wzór Newtona 7-8

#### Z

zasada superpozycji 8-9 zderzenia atomów 449 zewnętrzne pole elektryczne 129-130 ziemski dipol magnetyczny 438 ziemskie pole magnetyczne 446 zjawiska elektromagnetyczne 2 zjawisko brzegowe 88 - Halla 261, 272, 281 – indukcji elektromagnetycznej 330 - krawędziowe 88 źródło prądu 145 - SEM 211, 213, 237 –, doskonałe 213, 237 --, moc 220 –, rzeczywiste 213, 237 - siły elektromotorycznej 211

## WYBRANE STAŁE FIZYCZNE\*

prędkość światła stała grawitacyjna stała Avogadra uniwersalna stała gazowa energetyczny równoważnik masy	$c \\ G \\ N_A \\ R \\ c^2$	$\begin{array}{l} 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \cdot \text{kg}) \\ 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K}) \\ 8,99 \cdot 10^{16} \text{ J/kg} \end{array}$
stała elektryczna	$\varepsilon_0$	931,5 MeV/u $8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m
stała magnetyczna stała Plancka	$\mu_0$ h	$1,26 \cdot 10^{-6}$ H/m 6.63 $\cdot 10^{-34}$ L $\cdot$ s
stała Boltzmanna	k	$\begin{array}{c} 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \\ 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\ \end{array}$
ładunek elementarny	е	$8,62 \cdot 10^{-3} \text{ eV/K}$ $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
masa elektronu	m <sub>e</sub>	9,11 $\cdot$ 10 <sup>-31</sup> kg
masa protonu	m <sub>p</sub>	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
masa deuteronu	$m_{\rm n}$	$1,08 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
promień Bohra	r <sub>D</sub>	$5,34 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
magneton Bohra	$\mu_{\rm B}$	$9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$
C	12	$5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$
stała Rydberga	R	$0,01097 \text{ nm}^{-1}$

\* Obszerniejszy spis stałych fizycznych, zawierający także wartości najbardziej dokładne oraz ich niepewności, przedstawiony jest w dodatku B.

## WYBRANE WSPÓŁCZYNNIKI ZAMIANY JEDNOSTEK\*

#### Masa i gęstość

 $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 6.02 \cdot 10^{26} \text{ u}$   $1 \text{ u} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  $1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ 

#### Długość i objętość

1 m = 100 cm = 39,4 in = 3,28 ft 1 mila = 1,61 km = 5280 ft 1 in = 2,54 cm 1 nm =  $10^{-9}$  m = 10 Å 1 pm =  $10^{-12}$  m = 1000 fm 1 rok świetlny (y) = 9,46 · 10<sup>15</sup> m 1 m<sup>3</sup> = 1000 l = 35,3 ft<sup>3</sup> = 264 galony amerykańskie

#### Czas

1 d = 86 400 s 1 a =  $365\frac{1}{4}$  d =  $3,16 \cdot 10^7$  s

#### Miara łukowa kąta

1 rad = 57,3° = 0,159 obrotu  $\pi$  rad = 180° =  $\frac{1}{2}$  obrotu

#### Prędkość

1 m/s = 3,28 ft/s = 2,24 mili/h 1 km/h = 0,621 mili/h = 0,278 m/s

#### Siła i ciśnienie

1 N =  $10^5$  dyn = 0,225 funta 1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup> = 10 dyn/cm<sup>2</sup> 1 atm =  $1,01 \cdot 10^5$  Pa = 76 cm Hg

#### Energia i moc

1 J =  $10^7 \operatorname{ergów} = 0,239 \operatorname{cal}$ 1 kWh =  $3,6 \cdot 10^6 \operatorname{J}$ 1 cal =  $4,19 \operatorname{J}$ 1 eV =  $1,60 \cdot 10^{-19} \operatorname{J}$ 1 KM = 746 W

### Magnetyzm

 $1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 10^4 \text{ Gs}$ 

\* Obszerniejszy spis przedstawiony jest w dodatku D.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 20449803A3134636

Nowoczesny, przejrzyście napisany, kompletny podręcznik podstaw fizyki, który powstał na podstawie legendarnej już książki Resnicka i Hallidaya. Przedstawia aktualny stan wiedzy, zarówno w rozdziałach związanych z fizyką współczesną, jak i w tych dotyczących fizyki klasycznej. Prezentowany materiał jest bogato ilustrowany i poparty wieloma przykładami, a aparat matematyczny ograniczony do niezbędnego minimum.

Uzupełnieniem książki są wykazy niektórych danych astronomicznych, współczynników zamiany jednostek, wzorów matematycznych, właściwości pierwiastków, wybranych stałych i właściwości fizycznych, a także układ okresowy pierwiastków oraz skorowidz pojęć.

## Kultowy podręcznik – nowe wydanie!

Drugie wydanie polskie opiera się na najnowszym, już dziesiątym, wydaniu amerykańskim.

W książce poczyniono pewne zmiany:

- podzielono na nowo treść książki, niektóre rozdziały napisano na nowo
- dodano listę celów nauczania oraz informację o podstawowych faktach, które należy przyswoić
- dodano 16 nowych przykładów oraz 250 nowych zadań i 50 pytań

• w internecie na stronie książki zamieszczono pomoce dydaktyczne (np. animacje, wskazówki do zadań)

Podstawowy podręcznik dla studentów i uczniów Nieoceniona pomoc dla wykładowców i nauczycieli

**TOM 3** obejmuje zagadnienia z elektryczności i magnetyzmu.

HALLIDAY

**RESNICK · WALKER** 

PODSTAW



Wydawnictwo Naukowe PWN SA infolinia: 801 33 33 88 www.pwn.pl tom 3





