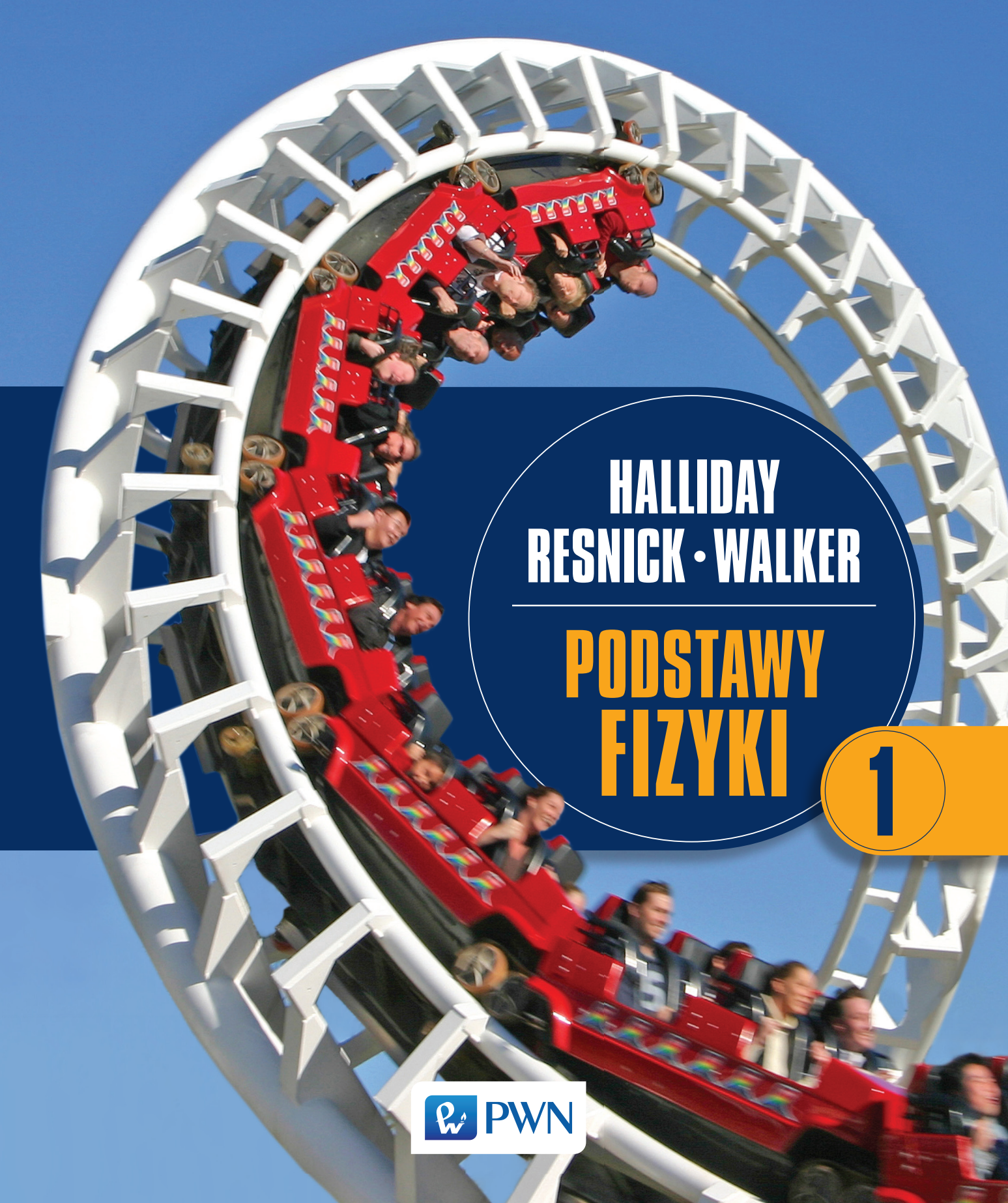


HALLIDAY
RESNICK • WALKER

PODSTAWY FIZYKI

1

PWN

WYBRANE WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNE (WARTOŚCI ZAOKRĄGLONE)

Powietrze (suche, w temp. 20°C i pod ciśn. 1 atm)

gęstość	1,21 kg/m^3
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	1010 J/(kg · K)
stosunek ciepeł właściwych c_p/c_v	1,40
prędkość dźwięku	343 m/s
natężenie pola elektrycznego przebicia	$3 \cdot 10^6$ V/m
efektywna masa molowa	0,0289 kg/mol

Woda

gęstość	1000 kg/m^3
prędkość dźwięku	1460 m/s
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	4190 J/(kg · K)
ciepło topnienia (w temp. 0°C)	333 kJ/kg
ciepło parowania (w temp. 100°C)	2260 kJ/kg
współczynnik załamania ($\lambda = 589$ nm)	1,33
masa molowa	0,0180 kg/mol

Ziemia

masa	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
średni promień	$6{,}37 \cdot 10^6$ m
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi	9,8 m/s^2
standardowe ciśnienie atmosferyczne	$1{,}01 \cdot 10^5$ Pa
okres ruchu satelity na orbicie odległej od Ziemi o 100 km	86,3 min
promień orbity geostacjonarnej	42 200 km
prędkość ucieczki	11,2 km/s
dipolowy moment magnetyczny	$8{,}0 \cdot 10^{22}$ A · m^2
średnie pole elektryczne na powierzchni Ziemi	150 V/m, skierowane w dół

Odległości od Ziemi

do Księżyca	$3{,}82 \cdot 10^8$ m
do Słońca	$1{,}50 \cdot 10^{11}$ m
do najbliższej gwiazdy	$4{,}04 \cdot 10^{16}$ m
do środka naszej Galaktyki	$2{,}2 \cdot 10^{20}$ m
do galaktyki Andromedy	$2{,}1 \cdot 10^{22}$ m
do granicy obserwowalnego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

WZORY MATEMATYCZNE — PATRZ DODATEK E

ALFABET GRECKI

alfa	A	α	iota	I	ι	ro	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	κ	sigma	Σ	σ
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	mi	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ϵ	ni	N	ν	fi	Φ	ϕ, φ
dzeta	Z	ζ	ksi	Ξ	ξ	chi	X	χ
eta	H	η	omikron	O	o	psi	Ψ	ψ
theta	Θ	θ	pi	Π	π	omega	Ω	ω

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 18246903A6232633

HALLIDAY
RESNICK • WALKER

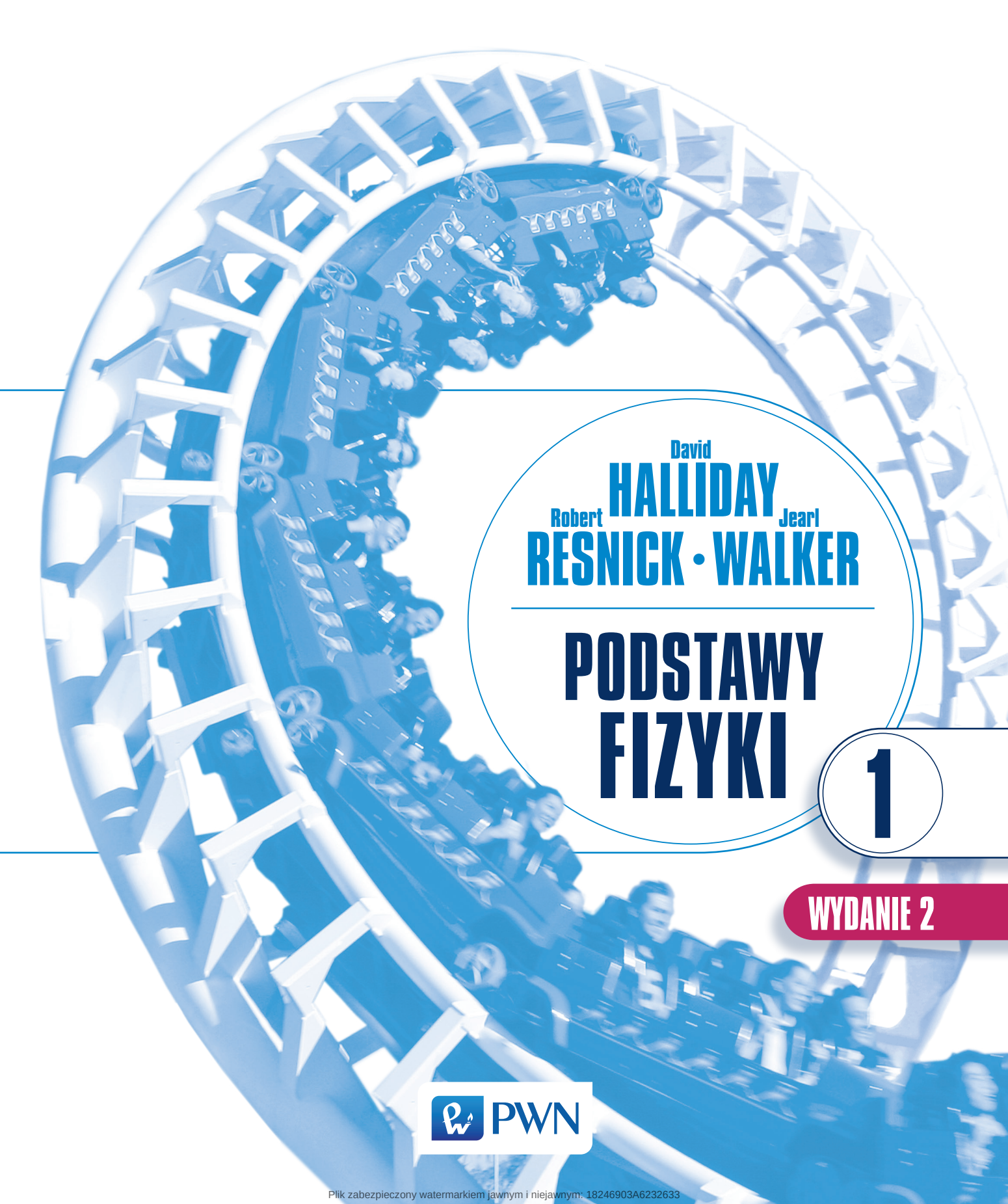
PODSTAWY FIZYKI

1

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 18246903A6232633

Przekład
z języka angielskiego
Mirosław ŁUKASZEWSKI (wydanie 1 i 2)

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 18246903A6232633



David
Robert HALLIDAY Jearl
RESNICK • WALKER

PODSTAWY FIZYKI

1

WYDANIE 2

PWN

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 18246903A6232633

Dane oryginału

Fundamentals of Physics Extended, 10th edition, by Jearl Walker, David Halliday, Robert Resnick

Copyright © 2014, 2011, 2008, 2005 John Wiley & Sons, Inc.

All rights reserved. This translation under licence with the original publisher John Wiley & Sons, Inc.

Projekt okładki i stron tytułowych **Przemysław Spiechowski**

Ilustracja na okładce **jabiru/Depositphotos**

Przekład z języka angielskiego (wydanie 1 i 2) **Mirosław Łukaszewski**

Wydawca **Izabela Ewa Mika**

Redaktor prowadzący **Irena Puchalska**

Redaktor merytoryczny **Anna Bogdanienko**

Produkcja **Mariola Grzywacka**

Łamanie **FixPoint**, **Warszawa**

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo.
Więcej na www.legalnakultura.pl
Polska Izba Książki

Copyright © for the Polish edition by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2003, 2015

ISBN 978-83-01-18114-7 tom 1
ISBN 978-83-01-18123-9 tomy 1–5

Wydanie drugie

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2
infolinia 801 33 33 88
tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288
e-mail: pwn@pwn.com.pl, www.pwn.pl

Druk i oprawa: Drukarnia Art-Druk, Kobyłka

S P I S T R E Ś C I

TOM 1

1. Pomiar
2. Ruch prostoliniowy
3. Wektory
4. Ruch w dwóch i trzech wymiarach
5. Siła i ruch I
6. Siła i ruch II
7. Energia kinetyczna i praca
8. Energia potencjalna i zachowanie energii
9. Środek masy i pęd
10. Obroty
11. Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

TOM 2

12. Równowaga i sprężystość
13. Grawitacja
14. Płyny
15. Drgania
16. Fale I
17. Fale II
18. Temperatura, ciepło i pierwsza zasada termodynamiki
19. Kinetyczna teoria gazów
20. Entropia i druga zasada termodynamiki

TOM 3

21. Prawo Coulomba
22. Pole elektryczne
23. Prawo Gaussa
24. Potencjał elektryczny
25. Pojemność elektryczna
26. Prąd elektryczny i opór elektryczny
27. Obwody elektryczne
28. Pole magnetyczne
29. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu
30. Zjawisko indukcji i indukcyjność
31. Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny
32. Równanie Maxwella: magnetyzm materii

TOM 4

33. Fale elektromagnetyczne
34. Obrazy
35. Interferencja
36. Dyfrakcja
37. Teoria względności

TOM 5

38. Fotony i fale materii
39. Jeszcze o falach materii
40. Wszystko o atomach
41. Przewodnictwo elektryczne ciał stałych
42. Fizyka jądrowa
43. Energia jądrowa
44. Kwarki, leptony i Wielki Wybuch

Dodatki

S P I S T R E Ś C I

Od Wydawcy do drugiego wydania polskiego XI

Przedmowa XIII

Podziękowania XXI

1. Pomiar 1

1.1. Jak się mierzy różne rzeczy, na przykład długość? 1
O fizyce 1
Jak się mierzy różne rzeczy? 2
Międzynarodowy Układ Jednostek 2
Zamiana jednostek 3
Długość 4
Cyfry znaczące i cyfry po przecinku 5

1.2. Czas 6
Czas 6

1.3. Masa 7
Masa 8
Podsumowanie 9 Zadania 10

2. Ruch prostoliniowy 16

2.1. Położenie, przemieszczenie i prędkość średnia 16
O fizyce 16
Ruch 17
Położenie i przemieszczenie 17
Prędkość średnia 19

2.2. Prędkość chwilowa 22
Prędkość chwilowa 22

2.3. Przyspieszenie 25
Przyspieszenie 25

2.4. Ruch ze stałym przyspieszeniem 28
Ważny przypadek szczególny: ruch ze stałym przyspieszeniem 29
Stałe przyspieszenie w innym świetle 33

2.5. Spadek swobodny 34
Spadek swobodny 34

2.6. Całkowanie graficzne przy badaniu ruchu 36
Całkowanie graficzne przy badaniu ruchu 36
Podsumowanie 38 Pytania 39 Zadania 41

3. Wektory 52

3.1. Wektory i ich składowe 52
O fizyce 52
Wektory i skalary 53
Geometryczne dodawanie wektorów 53
Składowe wektorów 55

3.2. Wektory jednostkowe, dodawanie wektorów na składowych 59
Wektory jednostkowe 59
Dodawanie wektorów na składowych 60
Wektory a prawa fizyki 61

3.3. Mnożenie wektorów 64
Mnożenie wektorów 65
Podsumowanie 70 Pytania 71 Zadania 72

4. Ruch w dwóch i trzech wymiarach 79

4.1. Położenie i przemieszczenie 79
O fizyce 79
Położenie i przemieszczenie 80

4.2. Prędkość średnia i prędkość chwilowa 82
Prędkość średnia i prędkość chwilowa 82

4.3. Przyspieszenie średnie i przyspieszenie chwilowe 85
Przyspieszenie średnie i przyspieszenie chwilowe 85

4.4. Rzut ukośny 87
Rzut ukośny 88
4.5. Ruch jednostajny po okręgu 95
Ruch jednostajny po okręgu 95
4.6. Ruch względny w jednym wymiarze 98
Ruch względny w jednym wymiarze 98
4.7. Ruch względny w dwóch wymiarach 100
Ruch względny w dwóch wymiarach 100
Podsumowanie 102 Pytania 103 Zadania 105

5. Siła i ruch I 119
5.1. Pierwsza i druga zasada dynamiki Newtona 119
O fizyce 120
Mechanika klasyczna 120
Pierwsza zasada dynamiki Newtona 121
Siła 121
Masa 124
Druga zasada dynamiki Newtona 124
5.2. Kilka ważnych sił 129
Kilka ważnych sił 129
5.3. Jak stosować zasady dynamiki Newtona? 134
Trzecia zasada dynamiki Newtona 134
Jak stosować zasady dynamiki Newtona? 135
Podsumowanie 143 Pytania 143 Zadania 146

6. Siła i ruch II 156
6.1. Tarcie 156
O fizyce 156
Tarcie 157
Właściwości tarcia 160
6.2. Siła oporu i prędkość graniczna 164
Siła oporu i prędkość graniczna 164
6.3. Ruch jednostajny po okręgu 167
Ruch jednostajny po okręgu 167
Podsumowanie 173 Pytania 174 Zadania 175

7. Energia kinetyczna i praca 187
7.1. Energia kinetyczna 187
O fizyce 187
Co to jest energia? 187
Energia kinetyczna 188
7.2. Praca i energia kinetyczna 189
Praca 190
Praca i energia kinetyczna 190
7.3. Praca wykonana przez siłę ciężkości 195
Praca wykonana przez siłę ciężkości 196
7.4. Praca wykonana przez siłę sprężystości 200
Praca wykonana przez siłę sprężystości 200
7.5. Praca wykonana przez dowolną siłę zmienną 204
Praca wykonana przez dowolną siłę zmienną 205
7.6. Moc 209
Moc 210
Podsumowanie 212 Pytania 213 Zadania 215

8. Energia potencjalna i zachowanie energii 224
8.1. Energia potencjalna 224
O fizyce 224
Praca i energia potencjalna 225
Siły zachowawcze: niezależność pracy od drogi 226
Wyznaczanie energii potencjalnej 229
8.2. Zachowanie energii mechanicznej 232
Zachowanie energii mechanicznej 232
8.3. Zastosowanie krzywych energii potencjalnej 236
Zastosowanie krzywych energii potencjalnej 237
8.4. Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną 241
Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną 242
8.5. Zasada zachowania energii 246
Zasada zachowania energii 246
Podsumowanie 251 Pytania 252 Zadania 254

9. Środek masy i pęd 271
9.1. Środek masy 271
O fizyce 271
Środek masy 272
9.2. Druga zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek 278
Druga zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek 278
9.3. Pęd 283
Pęd 283
Pęd układu cząstek 284

9.4. Zderzenie i popęd siły 285
Zderzenie i popęd siły 285
9.5. Zachowanie pędu 290
Zachowanie pędu 290
9.6. Pęd i energia kinetyczna w zderzeniach 294
Pęd i energia kinetyczna w zderzeniach 294
Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze 295
9.7. Zderzenia sprężyste w jednym wymiarze 298
Zderzenia sprężyste w jednym wymiarze 299
9.8. Zderzenia w dwóch wymiarach 303
Zderzenia w dwóch wymiarach 303
9.9. Układ o zmiennej masie: rakieta 304
Układ o zmiennej masie: rakieta 304
Podsumowanie 307 Pytania 308 Zadania 310

10. Obroty 325
10.1. Zmienne obrotowe 325
O fizyce 326
Zmienne obrotowe 327
Czy wielkości kątowe są wektorami? 334
10.2. Obrót ze stałym przyspieszeniem kątowym 335
Obrót ze stałym przyspieszeniem kątowym 336
10.3. Związek zmiennych liniowych z kątowymi 338
Związek zmiennych liniowych z kątowymi 339
10.4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym 343
Energia kinetyczna w ruchu obrotowym 343
10.5. Jak obliczyć moment bezwładności? 345
Jak obliczyć moment bezwładności? 345
10.6. Moment siły 350
Moment siły 350
10.7. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego 352
Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego 352
10.8. Praca i energia kinetyczna ruchu obrotowego 356
Praca i energia kinetyczna ruchu obrotowego 357
Podsumowanie 360 Pytania 362 Zadania 363

11. Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu 375
11.1. Toczenie jako złożenie ruchu obrotowego i postępowego 375
O fizyce 375
Toczenie jako złożenie ruchu obrotowego i postępowego 376
11.2. Siły i energia kinetyczna w ruchu tocznym 378
Energia kinetyczna ruchu tocznego 378
Siły działające przy toczeniu 379
11.3. Jo-jo 383
Jo-jo 383
11.4. Moment siły raz jeszcze 384
Moment siły raz jeszcze 384
11.5. Moment pędu 387
Moment pędu 388
11.6. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego 390
Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego 390
11.7. Moment pędu ciała sztywnego 393
Moment pędu układu cząstek 394
Moment pędu ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi 395
11.8. Zachowanie momentu pędu 397
Zachowanie momentu pędu 397
11.9. Precesja żyroskopu 403
Precesja żyroskopu 403
Podsumowanie 405 Pytania 406 Zadania 407

Dodatki 418
A. Międzynarodowy Układ Jednostek (SI) 418
B. Niektóre podstawowe stałe fizyczne 420
C. Niektóre dane astronomiczne 422
D. Współczynniki zamiany jednostek 424
E. Wzory matematyczne 428
F. Właściwości pierwiastków 431
G. Układ okresowy pierwiastków 434

Autorzy zdjęć 435

Odpowiedzi 436

Skorowidz 441

OD WYDAWCY DO DRUGIEGO WYDANIA POLSKIEGO

Od czasu gdy do rąk polskich Czytelników trafiło I wydanie *Podstaw fizyki*, będące tłumaczeniem VI wydania oryginalnego, na rynku amerykańskim ukazały się trzy kolejne wydania tego znakomitego podręcznika. Obecne, II wydanie polskie jest tłumaczeniem **X wydania oryginalnego**.

W książce poczyniono pewne zmiany. Podzielono na nowo rozdziały, tak by podrozdziały dotyczyły jednego podstawowego pojęcia. Na początku każdego z nich dodano listę celów nauczania, a po nich informację o podstawowych faktach, które należy przyswoić. Dodatkowo znacznie zmodyfikowano rozdziały o prawie Gaussa i potencjale elektrycznym, które sprawiały studentom najwięcej trudności. W rozdziałach dotyczących fizyki kwantowej rozszerzono natomiast omówienie równania Schrödingera. Oddzielono również opis modelu atomu Bohra od rozwiązania równania Schrödingera dla atomu wodoru. Dodano także podrozdział o promieniowaniu ciała doskonale czarnego i prawie Plancka.

Cenne uzupełnienie stanowi 16 nowych przykładów napisanych z myślą o dokładniejszym wyjaśnieniu fragmentów wykładu oraz 250 nowych zadań domowych i 50 pytań.

Dodatkowo wydawca oryginału na swojej platformie WileyPLUS udostępnia czytelnikom dynamiczne centrum kształcenia (strony https://www.wileyplus.com/WileyCDA/ oraz http://www.webassign.net/index.html). Opis jego zawartości znajduje się w Przedmowie. Studenci uczelni w USA otrzymują dostęp do materiałów po wykonaniu trzech kroków: zalogowaniu się, podaniu kodu (który otrzymali wraz zakupionym podręcznikiem lub który zakupili osobno) i podaniu URL, który uzyskali od wykładowcy.

Polscy czytelnicy mogą uzyskać dostęp do części tych udogodnień ze strony*:

http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-1118230728.html

Natomiast strona

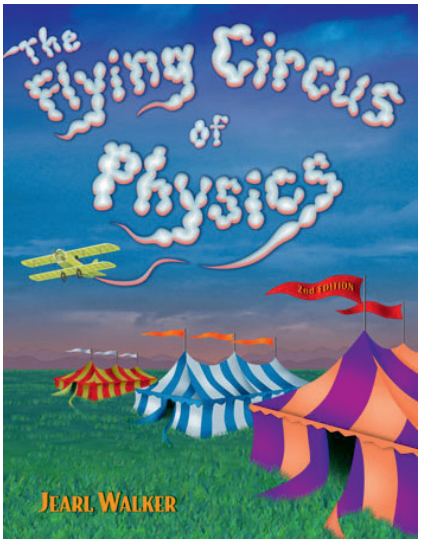
http://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=index&bcsId=1074&itemId=0471320005

zawiera podobne zasoby dla szóstego wydania amerykańskiego.

*Stan na 27 lutego 2015 r. Po kliknęciu *Visit Companion Site* (w polu *Students Resources*) otwiera się strona *Students Companion Site*. Po wybraniu *Browse by Resource* jest wyświetlana lista obejmująca: symulacje (*Concept Simulations*), eseje Jearla Walkera (*Jearl Walker Essays*), instrukcje użycia kalkulatorów (*Programmable Calculator Instructions*) oraz interaktywne rozwiązania zadań (*Interactive Learning Ware*).

P R Z E D M O W A

DLACZEGO NAPISAŁEM TĘ KSIĄŻKĘ



Fizyka to wielkie wyzwanie, ale również świetna zabawa. Uprzytomniłem to sobie w pełni w dniu, gdy Sharon, jedna w moich studentek, zapytała mnie nagle: „A czy cokolwiek z tego wszystkiego ma jakiś związek z moim codziennym życiem?”. Oczywiście natychmiast odpowiedziałem: „Sharon, to wszystko ma związek z twoim codziennym życiem — taka już jest fizyka".

Poprosiła, bym wyjaśnił jej to na jakimś przykładzie. Myślałem i myślałem, i żaden dobry przykład nie przychodził mi do głowy. Wieczorem tego dnia zacząłem pisać książkę *The Flying Circus of Physics* (*Latający cyrk fizyki*, John Wiley & Sons Inc., 1975), głównie dla Sharon, ale i dla siebie, gdyż zdałem sobie sprawę, że czuję to samo, co ona. Przez sześć lat szukałem najbardziej mi odpowiadającego podręcznika fizyki. Testowałem ich dziesiątki, były dobrze napisane i oparte na najlepszych koncepcjach dydaktycznych, lecz czegoś mi w nich brakowało. Fizyka to najciekawszy na świecie przedmiot, gdyż mówi o tym, jak świat naprawdę działa. Tymczasem większość podręczników fizyki jest niemal całkiem pozbawiona informacji o związkach fizyki z otaczającym nas światem. Cała przyjemność studiowania fizyki gdzieś więc umyka.

W *Podstawach fizyki* zawarłem wiele fizyki związanej ze światem wokół nas, a także powiązałem ten podręcznik z nowym wydaniem *Latającego cyrku fizyki*. Materiał czerpałem w większości z treści moich zajęć z podstaw fizyki, podczas których mogę najlepiej poznać po wyrazie twarzy i szczerych uwagach studentów, które tematy i sposoby ich przedstawienia trafiają do słuchaczy, a które nie. Zapisywałem przypadki, w których odniosłem sukcesy, i te, w których poniosłem porażki, co mi potem pomogło zdecydować, co umieścić w tej książce. Od dość już odległego czasu, gdy spotkałem Sharon, mówię wszystkim studentom wciąż to samo: „Tak, wychodząc od podstawowych pojęć fizyki, możesz naprawdę dojść na drodze rozumowania aż do wniosków dotyczących świata, z którym stykasz się na co dzień, a dopiero zrozumienie, jak działa świat wokół nas, to prawdziwa przyjemność, jakiej dostarcza nam fizyka”.

Pisząc tę książkę, miałem wiele celów, a najważniejszym z nich było danie wykładowcom narzędzi do nauczenia studentów, jak skutecznie czytać tekst podręcznika, identyfikować podstawowe pojęcia, rozumować, zadając istotne pytania, i wreszcie rozwiązywać zagadnienia ilościowe. To nie jest proces łatwy ani dla studentów, ani dla wykładowców. Zajęcia, których podstawą będzie ta książka, mogą się okazać najtrudniejsze z odbywanych przez studenta. Mogą być też jednak najbardziej pożyteczne, gdyż dotyczą podstawowych metod poznania, jak działa świat, z których korzystają wszystkie inne nauki przyrodnicze i dziedziny techniki.

Wielu użytkowników wydania dziewiątego (zarówno wykładowców, jak i studentów) przysłało mi uwagi dotyczące podręcznika i sugestie jego ulepszenia. Te uwagi i sugestie zostały uwzględnione w tekście i zadaniach obecnego wydania. Wydawca — John Wiley & Sons — i ja traktujemy tę książkę jako projekt otwarty i zachęcamy wszystkich jej użytkowników do pisania do nas. Sugestie, poprawki oraz uwagi, pozytywne i negatywne, prosimy przysyłać na adres wydawnictwa John Wiley & Sons lub mój, Jearla Walkera: Physics Department, Cleveland State University, Cleveland, OH 44115, USA (można również skorzystać z bloga na stronie www.flyingcircusofphysics.com). Możemy nie dać rady odpowiedzieć na wszystkie listy, lecz zapoznamy się z każdym z nich.

CO JEST W KSIĄŻCE NOWEGO

Nowe podrozdziały i cele nauczania „Czego powinienem się nauczyć z tego podrozdziału?", pytali mnie zawsze studenci — nie tylko najsłabsi, najlepsi także. Rzecz w tym, że nawet dobry, myślący student może nie być pewien, czy w trakcie lektury fragmentu książki wychwycił najważniejsze zawarte tam fakty i stwierdzenia. I ja tak się czułem dawno temu, gdy na pierwszym roku studiów, ucząc się fizyki, korzystałem z pierwszego wydania podręcznika Hallidaya i Resnicka.

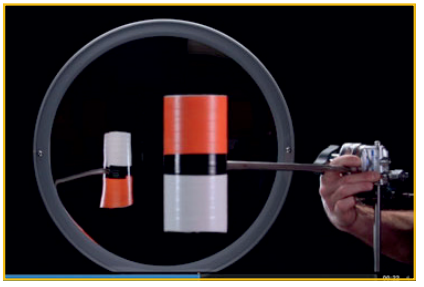
Aby pomóc w tym względzie studentom, podzieliłem na nowo rozdziały, tak by podrozdziały dotyczyły jednego podstawowego pojęcia, a na początku każdego podrozdziału dodałem listę celów nauczania. Taka lista to spis podstawowych treści nauczania i umiejętności, jakie student powinien opanować podczas lektury danego podrozdziału. Po spisie celów nauczania jest krótka informacja o podstawowych faktach, które trzeba sobie przyswoić — na przykład pierwszy podrozdział rozdziału 16, w którym student musi poznać wyjątkowo wiele nowych pojęć i terminów. Nie będzie jednak musiał sam dokonywać identyfikacji podstawowych faktów, ponieważ dostaje od autora książki spis, w istocie rzeczy podobny do listy czynności, jakie musi wykonać pilot samolotu przed skierowaniem pojazdu na pas startowy i samym startem.

Powiązanie zadań domowych z celami nauczania Pytania i zadania zamieszczone na końcu każdego rozdziału są przypisane — na platformie *WileyPLUS* — do jednego z celów nauczania, tak by od razu odpowiedzieć na pytanie (zwykle niewypowiedziane): „W jakim celu rozwiązuję to zadanie? Czego ma mnie ono nauczyć?". Jestem przekonany, że znając cel zadania, student lepiej się nauczy wykorzystywać ten cel nauczania w zadaniach o innej treści, lecz dotyczących tych samych podstawowych faktów. Powinno się w ten sposób pokonać problem wielu studentów, którzy po rozwiązaniu konkretnego zadania nie potrafią skorzystać z tych samych podstawowych faktów w zadaniach dotyczących nieco odmiennych sytuacji.

Rozdziały napisane na nowo Rok po roku moi studenci oceniali pewne ważne rozdziały oraz niektóre fragmenty innych jako szczególnie trudne. Postanowiłem więc w obecnym wydaniu dokonać w tych miejscach wielu zmian. Na przykład, znacznie zmodyfikowałem rozdziały o prawie Gaussa i potencjale elektrycznym, które sprawiały moim studentom wiele trudności. Tok wykładu jest tam teraz bardziej płynny i skupiony na podstawo-

wych faktach. W rozdziałach dotyczących fizyki kwantowej rozszerzyłem omówienie równania Schrödingera, dodając zagadnienie odbicia fal materii od stopnia potencjału. Na prośbę wielu wykładowców oddzieliłem opis modelu atomu Bohra od rozwiązania równania Schrödingera dla atomu wodoru, tak by fragment o pracach Bohra, mających już dziś tylko historyczne znaczenie, można było opuścić. Dodałem również podrozdział o promieniowaniu ciała doskonale czarnego i prawie Plancka.

Nowe przykłady oraz pytania i zadania domowe Podręcznik zawiera teraz szesnaście nowych przykładów napisanych z myślą o dodatkowym wyjaśnieniu fragmentów wykładu, które moi studenci uważali za szczególnie trudne. Do zebranych w końcowych częściach rozdziałów pytań i zadań domowych dodano łącznie 250 zadań i 50 pytań. Niektóre z nich przywrócono z poprzednich wydań książki, o co prosiło wielu wykładowców.

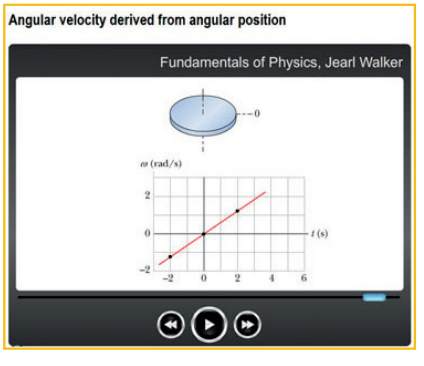


Ilustracje wideo W wersji elektronicznej podręcznika, dostępnej na platformie *WileyPLUS*, można znaleźć około 30 rysunków i fotografii z książki, przygotowanych w wersji wideo przez Davida Maiullo z Rutgers University. Fizyka dotyczy bardzo często ruchu różnych obiektów — film pokazuje w takich przypadkach znacznie więcej niż statyczny rysunek lub fotografia.

Pomoc online Platforma *WileyPLUS* zawiera nie tylko program do oceniania studentów online. Jest to dynamiczne centrum kształcenia, gdzie można znaleźć między innymi szczegółowe omówienie rozwiązań wielu zadań, quizy sprawdzające zrozumienie studiowanego materiału, animacje, setki przykładów, wiele symulacji i pokazów oraz ponad 1500 filmów, których tematy obejmują przegląd niezbędnych zagadnień matematycznych po miniwykłady dotyczące przykładów z podręcznika. Wiele nowych elementów tej pomocy online pojawia się na platformie *WileyPLUS* co semestr. W ramach przygotowania niniejszego 10. wydania podręcznika wiele fotografii dotyczących ruchu ciał zastąpiono filmami, dzięki czemu ruch można spowolnić, by analizować go szczegółowo.

Tysiące takich elementów pomocy online jest dostępnych w trybie 24/7, a korzystać z nich można powielokroć — tyle razy, ile tylko potrzeba. Jeśli więc na przykład student popadnie w kłopoty przy rozwiązaniu zadania domowego o godzinie 2 w nocy (co jest chyba typową godziną odrabiania przez studentów pracy domowej), to za pomocą jednego kliknięcia myszą będzie mógł skorzystać z przyjaznej pomocy online.

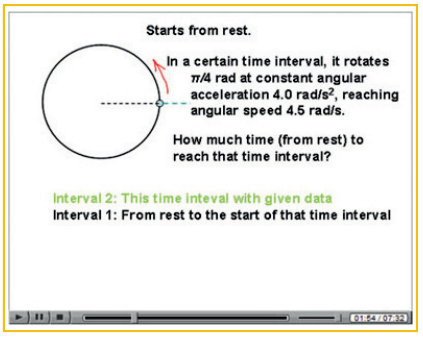
NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE



Gdy sam studiowałem fizykę, korzystając z pierwszego wydania podręcznika Hallidaya i Resnicka, musiałem ten sam rozdział czytać wiele razy, by go dobrze zrozumieć. Dziś lepiej zdajemy sobie sprawę z tego, że różni studenci uczą się wydajnie w bardzo różny sposób. Przygotowałem więc dla nich różnego rodzaju narzędzia dydaktyczne zawarte teraz w nowym wydaniu podręcznika oraz na platformie *WileyPLUS*. Są to:

Animacje kluczowych ilustracji z każdego rozdziału. W tekście książki są one oznaczone ikonką wiru. W wersji elektronicznej rozdziału, na platformie *WileyPLUS*, kliknięcie myszką uruchamia animację. Wybrałem ilustracje, które zawierają wiele informacji, tak by student zyskiwał możliwie

dużo, obserwując przez minutę lub dwie fizykę w działaniu, a nie tylko rysunek w podręczniku. Student poznaje w ten sposób dynamikę zjawisk fizycznych, przy czym oczywiście animację może sobie powtarzać, ile razy chce.



Filmy Nagrałem już ponad 1500 krótkich filmów (a co semestr powstają nowe). Odtwarzając taki film, student widzi, co rysuję lub piszę, słysząc jednocześnie, jak omawiam jakieś zagadnienie, tak jakby siedział przy mnie w gabinecie, a ja — mówiąc do niego — pisałbym lub rysował coś na kartce papieru. Oczywiście bezpośredni kontakt z wykładowcą (na wykładzie, ćwiczeniach czy konsultacjach) pozostanie zawsze najlepszą z metod dydaktycznych, ale moje filmy wideo też mają swoje zalety — są dostępne 24 godziny na dobę przez 7 dni w tygodniu i można je oglądać dowolnie wiele razy. Oto różne rodzaje tych filmów:

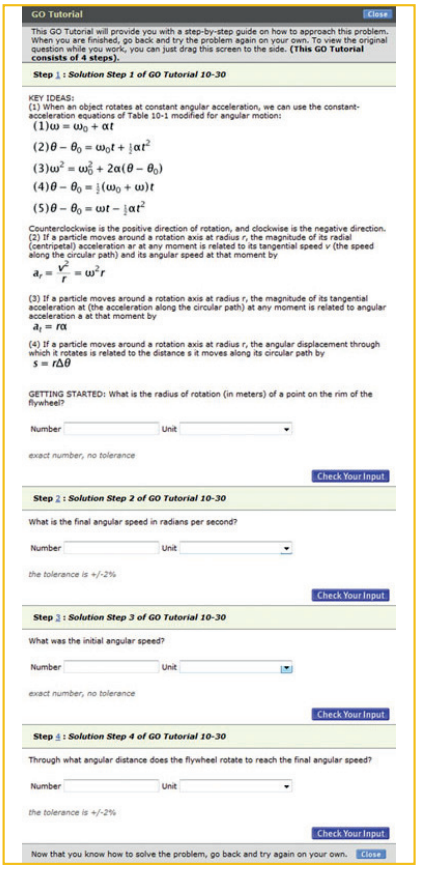
- **Ponowne omówienie treści niektórych rozdziałów** (jak na konsultacjach). Skupiłem się na tematach, które sprawiają studentom najwięcej trudności, czyli na tych, przy których moi studenci najczęściej drapali się w głowę.
- **Przypomnienie matematyki ze szkoły średniej**, między innymi podstawowe operacje algebraiczne, funkcje trygonometryczne oraz układy równań.
- **Nowe zagadnienia matematyczne**, na przykład mnożenie wektorów.
- **Omówienie każdego przykładu z podręcznika**. Podobnie jak w tekście książki, nie rozglądam się po prostu za wzorem, z którego dałoby się skorzystać, lecz badam fizyczną treść zagadnienia, wychodząc od podstawowych faktów dotyczących zadania. Staram się też pokazać, jak wykorzystać przykłady z książki do poznania typowych metod rozwiązywania zadań, które będzie można później zastosować w innych — być może całkiem odmiennych — zadaniach.
- **Rozwiązania 20% zadań domowych zamieszczonych na końcu rozdziałów**. Dostępność tych rozwiązań zależy od decyzji wykładowcy. Może on na przykład postanowić, by były one widoczne dla studentów dopiero po oddaniu pracy domowej lub rozwiązaniu quizu. Rozwiązania nie mają postaci prostych, rutynowych recept. Jak przy przykładach, wychodzimy od podstawowych faktów i na drodze logicznego rozumowania docieramy do końcowej odpowiedzi. Student poznaje nie tylko rozwiązanie konkretnego zadania, lecz także metody radzenia sobie z dowolnymi zadaniami, nawet całkiem niestandardowymi.
- **Przykłady, jak mądrze korzystać z wykresów** (a nie tylko odczytywać z nich liczby bez zrozumienia fizyki zagadnienia).

Pomoc do zadań Na platformie *WileyPLUS* można znaleźć wiele narzędzi, które opracowałem w celu ułatwienia studentom nabycia umiejętności rozwiązywania zadań. Oto one:

- **Każdy przykład z podręcznika** jest dostępny online zarówno w formacie tekstu z książki, jak i w formacie wideo.
- **Setki dodatkowych przykładów**. Są one dostępne jako osobne pozycje, lecz wykładowcy mają możliwość umieszczenia linków do nich przy zadaniach domowych. Jeśli na przykład zadanie domowe dotyczy klocka na

równi pochyłej, to link kieruje studenta do przykładu związanego z tym zagadnieniem. Przykład nie jest jednak po prostu kopią zadania, a zatem jego rozwiązanie nie nadaje się do wykorzystania bez zrozumienia (czyli nie można go skopiować i przedstawić jako rozwiązanie zadania domowego).

- **Tutoriale GO** do 15% zadań zamieszczonych na końcu rozdziałów podręcznika. Są to interaktywne rozwiązania zadań, w których pomagam studentowi przebyć w kilku krokach drogę od podstawowych faktów do końcowej odpowiedzi. W każdym kroku student odpowiada na pytanie. Jeśli odpowiedź jest prawidłowa, przechodzi do następnego kroku, a jeśli nie, dostaje dodatkową wskazówkę. Dopiero w ostatnim kroku (prowadzącym do końcowej odpowiedzi) student nie dostaje żadnej podpowiedzi. Zrobiłem to celowo, by na końcu zadania student ponosił całkowitą odpowiedzialność za swoje decyzje. Czasami zadania interaktywne wyprowadzają rozwiązującego w pole, gdy udziela niepoprawnych odpowiedzi, co bywa źródłem frustracji studenta. Moje tutoriale GO to nie pułapki, gdyż w każdej chwili student może wrócić do początku zadania.
- **Wskazówki do wszystkich zadań domowych** są dostępne, lecz ich ujawnienie studentom zależy od decyzji wykładowcy. Są to prawdziwe wskazówki, które dotyczą podstawowych faktów i ogólnej metody rozwiązania, a nie przepisy, jak udzielić prawidłowej odpowiedzi bez zrozumienia, dlaczego jest właśnie taka.



WILEY PLUS

Ocena postępów studenta

- **Pytania dotyczące zawartości rozdziału**. Gdy student otwiera rozdział wersji elektronicznej, na końcu tego rozdziału pojawia się pytanie dotyczące jego zawartości, wybrane losowo z zestawu przygotowanych uprzednio pytań. Sformułowałem je tak, by do podania odpowiedzi nie była potrzebna żadna analiza ani nawet głębsze zrozumienie treści — chodzi tylko o to, by sprawdzić, czy student istotnie przeczytał dany rozdział. Wykładowcy pozostawiono decyzję o tym, czy odpowiedź studenta będzie elementem jego oceny, czy tylko informacją dla czytającego.
- **Większość rozdziałów zawiera sprawdziany**. Są one tak pomyślane, by wymagały pewnej analizy i decyzji studenta co do treści fizycznej rozdziału. *Na końcu książki można znaleźć odpowiedzi do wszystkich sprawdzianów*.

Sprawdzian 1

- **Na platformie *WileyPLUS* są wszystkie zadania domowe** z podręcznika (a nawet wiele więcej). Wykładowca może wybrać dla studentów zadania domowe, polecić, by zostały przesłane przez sieć, i oceniać je w *WileyPLUS*. Może na przykład ustalić termin złożenia rozwiązań i pozwolić składać je ograniczoną liczbę razy. Wykładowca może też zdecydować, jakie narzędzia dydaktyczne związane z danym zadaniem domowym zostaną ujawnione studentom — wskazówki, przykłady, omówienie treści rozdziału, rozwiązania interaktywne, powtórzenia podstaw matematycznych, a nawet rozwiązania w postaci wideo. Te ostatnie może udostępnić studentom na przykład po terminie oddania pracy domowej.

- **Rozwiązania symboliczne**. Każdy rozdział zawiera też zadania, w których odpowiedź nie jest liczbowa, lecz ma postać wyrażenia algebraicznego.
- **Na platformie *WileyPLUS* są również dostępne wszystkie pytania** z końcowych części rozdziałów. Mają one postać pytań wielokrotnego wyboru i służą do oceny zrozumienia przez studenta pojęciowej zawartości rozdziału.

Ikony pomocy dodatkowej Do niektórych zadań o numerach nieparzystych są dostępne szczegółowe rozwiązania w postaci drukowanej lub elektronicznej. Przy numerze takiego zadania jest umieszczona ikonka (SSM lub WWW) informująca o tym studenta i wykładowcę. Inne ikonki informują o istnieniu dla danego zadania tutoriala GO, rozwiązania interaktywnego w programie Interactive LearningWare oraz powiązania z książką *Latający cyrk fizyki*. Na początku listy zadań w każdym rozdziale jest umieszczona legenda wyjaśniająca znaczenie wszystkich ikonek przy numerach zadań.

GO	Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)
●–●●●	Liczba kropek określa stopień trudności zadania
ssm	Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*
www	Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
ilw	Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday
	Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

WERSJE PODRĘCZNIKA*

W celu zaspokojenia indywidualnych potrzeb wykładowców i studentów, dziesiąte wydane *Podstaw fizyki* jest dostępne w kilku wersjach.

Wydanie podstawowe zawiera rozdziały 1–37 (ISBN 9781118230718).

Wydanie rozszerzone zawiera ponadto siedem dodatkowych rozdziałów o fizyce kwantowej i kosmologii, czyli łącznie rozdziały 1–44 (ISBN 9781118230725).

Wydanie dwutomowe: tom 1 — rozdziały 1–20 (mechanika i termodynamika), oprawa twarda, ISBN 9781118233764; tom 2 — rozdziały 21–44 (elektryczność i magnetyzm, optyka oraz fizyka kwantowa), oprawa twarda, ISBN 9781118230732.

MATERIAŁY DODATKOWE DLA WYKŁADOWCÓW

Instructor's Solutions Manual (Zbiór rozwiązań dla wykładowcy), autor: Sen-Ben Liao, Lawrence Livermore National Laboratory. W zbiorze tym podano szczegółowe rozwiązania wszystkich zadań zebranych na końcu poszczególnych rozdziałów. Są one dostępne w formacie MSWord i PDF.

Strona wykładowcy http://www.wiley.com/college/halliday

*Polskie wydanie jest tłumaczeniem wydania rozszerzonego (przyp. red.).

- **Instructor's Manual** (Poradnik wykładowcy). Zawiera wyjaśnienia najważniejszych zagadnień z każdego rozdziału, pokazy doświadczeń, projekty doświadczalne i komputerowe, opis filmów i narzędzi, odpowiedzi do wszystkich pytań, zadań i sprawdzianów, przewodnik do zadań z poprzednich wydań podręcznika oraz spis wszystkich zadań, których rozwiązania są dostępne dla studentów (SSM, WWW i ILW).
- **Prezentacje w formacie PowerPoint**. Użyteczna pomoc dla nowych wykładowców — zawiera spis głównych pojęć oraz rysunki i wzory z każdego rozdziału.
- **System badania reakcji sali („clicker")**, autor pytań: David Marx, Illinois State University. Zawiera on: quiz z prostymi pytaniami do sprawdzenia, czy studenci przeczytali wyznaczony fragment podręcznika, oraz zbiór pytań przeznaczonych na zajęcia prowadzone w trybie wykładu interaktywnego.
- **Wiley Physics Simulations**, autorzy: Andrew Duffy, Boston University, oraz John Gastineau, Vernier Software. Jest to zbiór 50 symulacji interaktywnych (appletów Javy) do wykorzystania w ramach pokazów wykładowych.
- **Wiley Physics Demonstrations**, autor: David Maiullo, Rutgers University. Zbiór cyfrowych filmów, na których przedstawiono 80 standardowych pokazów fizycznych. Można je pokazać na wykładzie, są też udostępnione na platformie *WileyPLUS*. Towarzyszy mu instrukcja dla wykładowcy, zawierająca też pytania typu „clicker".
- **Test Bank** (bank testów) do 10. wydania książki, gruntownie przebudowany przez Suzanne Willis, Northern Illinois University. Zawiera ponad 2200 pytań testowych wielokrotnego wyboru. Są one także dostępne w komputerowym banku testów, umożliwiającym wykładowcy tworzenie własnych zestawów pytań testowych (w wersjach dla komputerów IBM oraz Macintosh).
- **Wszystkie ilustracje z podręcznika** przygotowane do wyświetlenia na wykładzie oraz wydrukowania.

Ocena online prac domowych i quizów Dziesiąte wydanie *Podstaw fizyki* może być używane nie tylko przy wykorzystaniu platformy *WileyPLUS*, lecz również platform WebAssignPLUS oraz LON-CAPA, które także umożliwiają wykładowcy zadawanie i ocenianie online prac domowych i quizów. Na platformie WebAssignPLUS studenci mają także dostęp do elektronicznej wersji podręcznika.

MATERIAŁY DODATKOWE DLA STUDENTÓW

Strona studenta, http://www.wiley.com/college/halliday, została opracowana specjalnie dla użytkowników 10. wydania *Podstaw fizyki*, aby zapewnić studentom dodatkową pomoc w studiowaniu fizyki. Zawiera rozwiązania wybranych zadań z końcowych części rozdziałów (oznaczonych ikonką WWW), ćwiczenia symulacyjne, porady dla użytkowników kalkulatorów programowalnych, a także rozwiązania interaktywne z wykorzystaniem programu Interactive LearningWare (patrz niżej).

Student Study Guide (*Poradnik studenta*), autor: Thomas Barrett, Ohio State University, ISBN 9781118230787. Zawiera przegląd najważniejszych pojęć z poszczególnych rozdziałów, opis metod rozwiązywania zadań oraz szczegółowe przykłady.

Student Solutions Manual (*Zbiór rozwiązań dla studenta*), autor: Sen-Ben Liao, Lawrence Livermore National Laboratory, ISBN 9781118230664. Zawiera szczegółowe rozwiązania 15% zadań zebranych w końcowych częściach rozdziałów podręcznika. Został on napisany dla 10. wydania HRW z wykorzystaniem nowatorskiej metody TEAL (Think, Express, Analyze, and Learn — Myśl, Wyrażaj, Analizuj, Poznawaj). Powstała ona i została rozwinięta na uczelni Massachusetts Institute of Technology, gdzie sprawdziła się jako wydajna metoda kształcenia studentów. Zadania rozwiązane z wykorzystaniem tej metody są oznaczone w podręczniku ikonką SSM.

Interactive Learning Ware to oprogramowanie umożliwiające studentowi rozwiązanie 200 zadań z podręcznika. Odbywa się to interaktywnie, tzn. w kolejnych krokach student udziela odpowiedzi, a w przypadku odpowiedzi niepoprawnych uzyskuje pomoc w postaci informacji o typowych błędach. Zadania, które można rozwiązać w ten sposób, są oznaczone ikonką ILW.

Introductory Physics with Calculus as a Second Language *Mastering Problem Solving* (*Wstęp do fizyki dla studentów poznających również rachunek różniczkowy i całkowy: Mistrzowskie rozwiązywanie zadań*), autor: Thomas Barrett, Ohio State University, ISBN 9780471739104. Celem tej małej książeczki jest nauczenie studentów, jak wydajnie i skutecznie rozwiązywać zadania. Student nauczy się z niej rozpoznawania typowej struktury zadań z fizyki, dzielenia ich na dające się opanować etapy i stosowania odpowiednich metod. Książka zawiera również wiele zadań rozwiązanych krok po kroku.

P O D Z I Ę K O W A N I A

Na końcowy kształt podręcznika miało wpływ bardzo wiele osób. Sen-Ben Liao z Lawrence Livermore National Laboratory, James Whitenton z Southern Polytechnic State University i Jerry Shi z Pasadena City College podjęli i wykonali herkulesowe zadanie przygotowania rozwiązań wszystkich zadań z podręcznika. W wydawnictwie John Wiley głównymi redaktorami podręcznika byli Stuart Johnson, Geraldine Osnato i Aly Rentrop, którzy nadzorowali cały projekt od początku do końca. Dziękujemy Elizabeth Swain, redaktorowi do spraw produkcji, za koordynację różnych elementów złożonego procesu produkcji książki. Dziękujemy Maddy Lesure za projekt graficzny książki i okładki, Lee Goldstein za projekt układu strony, Helen Walden za redakcję tekstu, a Lilian Brady za korektę składu. Jennifer Atkins z zapałem wyszukiwała ciekawe i niezwykłe zdjęcia. Wydawnictwo John Wiley & Sons, Inc. oraz Jearl Walker są wdzięczni wielu osobom za uwagi i propozycje dotyczące poprzednich wydań podręcznika. Oto te osoby:

Jonathan Abramson, *Portland State University*; Omar Adawi, *Parkland College*; Edward Adelson, *The Ohio State University*; Steven R. Baker, *Naval Postgraduate School*; George Caplan, *Wellesley College*; Richard Kass, *The Ohio State University*; M.R. Khoshbin-e-Khoshnazar, *Research Institution for Curriculum Development & Educational Innovations* (*Tehran*); Craig Kletzing, *University of Iowa*; Stuart Loucks, *American River College*; Laurence Lurio, *Northern Illinois University*; Ponn Maheswaranathan, *Winthrop University*; Joe McCullough, *Cabrillo College*; Carl E. Mungan, *U.S. Naval Academy*; Don N. Page, *University of Alberta*; Elie Riachi, *Fort Scott Community College*; Andrew G. Rinzler, *University of Florida*; Dubravka Rupnik, *Louisiana State University*; Robert Schabinger, *Rutgers University*; Ruth Schwartz, *Milwaukee School of Engineering*; Carol Strong, *University of Alabama at Huntsville*; Nora Thornber, *Raritan Valley Community College*; Frank Wang, *LaGuardia Community College*; Graham W. Wilson, *University of Kansas*; Roland Winkler, *Northern Illinois University*; William Zacharias, *Cleveland State University*; Ulrich Zurcher, *Cleveland State University*.

Na zakończenie chcemy podkreślić, że dysponowaliśmy znakomitym zespołem opiniodawców, i pragniemy wyrazić wdzięczność i podziękowanie każdemu z nich. Oto oni:

Maris A. Abolins, *Michigan State University*
Edward Adelson, *Ohio State University*
Nural Akchurin, *Texas Tech*
Yildirim Aktas, *University of North Carolina–Charlotte*
Barbara Andereck, *Ohio Wesleyan University*
Tetyana Antimirova, *Ryerson University*
Mark Arnett, *Kirkwood Community College*
Arun Bansil, *Northeastern University*
Richard Barber, *Santa Clara University*
Neil Basecu, *Westchester Community College*
Anand Batra, *Howard University*
Kenneth Bolland, *The Ohio State University*
Richard Bone, *Florida International University*
Michael E. Browne, *University of Idaho*
Timothy J. Burns, *Leeward Community College*
Joseph Buschi, *Manhattan College*
Philip A. Casabella, *Rensselaer Polytechnic Institute*
Randall Caton, *Christopher Newport College*
Roger Clapp, *University of South Florida*
W. R. Conkie, *Queen's University*
Renate Crawford, *University of Massachusetts–Dartmouth*
Mike Crivello, *San Diego State University*
Robert N. Davie, Jr., *St. Petersburg Junior College*
Cheryl K. Dellai, *Glendale Community College*
Eric R. Dietz, *California State University at Chico*
N. John DiNardo, *Drexel University*
Eugene Dunnam, *University of Florida*
Robert Endorf, *University of Cincinnati*
F. Paul Esposito, *University of Cincinnati*
Jerry Finkelstein, *San Jose State University*
Robert H. Good, *California State University–Hayward*
Michael Gorman, *University of Houston*
Benjamin Grinstein, *University of California, San Diego*
John B. Gruber, *San Jose State University*
Ann Hanks, *American River College*
Randy Harris, *University of California–Davis*

Samuel Harris, *Purdue University*
Harold B. Hart, *Western Illinois University*
Rebecca Hartzler, *Seattle Central Community College*
John Hubisz, *North Carolina State University*
Joey Huston, *Michigan State University*
David Ingram, *Ohio University*
Shawn Jackson, *University of Tulsa*
Hector Jimenez, *University of Puerto Rico*
Sudhakar B. Joshi, *York University*
Leonard M. Kahn, *University of Rhode Island*
Sudipa Kirtley, *Rose–Hulman Institute*
Leonard Kleinman, *University of Texas at Austin*
Craig Kletzing, *University of Iowa*
Peter F. Koehler, *University of Pittsburgh*
Arthur Z. Kovacs, *Rochester Institute of Technology*
Kenneth Krane, *Oregon State University*
Hadley Lawler, *Vanderbilt University*
Priscilla Laws, *Dickinson College*
Edbertho Leal, *Polytechnic University of Puerto Rico*
Vern Lindberg, *Rochester Institute of Technology*
Peter Loly, *University of Manitoba*
James MacLaren, *Tulane University*
Andreas Mandelis, *University of Toronto*
Robert R. Marchini, *Memphis State University*
Andrea Markelz, *University at Buffalo, SUNY*
Paul Marquard, *Caspar College*
David Marx, *Illinois State University*
Dan Mazilu, *Washington and Lee University*
James H. McGuire, *Tulane University*
David M. McKinstry, *Eastern Washington University*
Jordon Morelli, *Queen's University*
Eugene Mosca, *United States Naval Academy*
Eric R. Murray, *Georgia Institute of Technology, School of Physics*
James Napolitano, *Rensselaer Polytechnic Institute*
Blaine Norum, *University of Virginia*
Michael O'Shea, *Kansas State University*
Patrick Papin, *San Diego State University*
Kiumars Parvin, *San Jose State University*
Robert Pelcovits, *Brown University*
Oren P. Quist, *South Dakota State University*
Joe Redish, *University of Maryland*
Timothy M. Ritter, *University of North Carolina at Pembroke*
Dan Styer, *Oberlin College*
Frank Wang, *LaGuardia Community College*
Robert Webb, *Texas A&M University*
Suzanne Willis, *Northern Illinois University*
Shannon Willoughby, *Montana State University*

ROZDZIAŁ 1

Pomiar

1.1. JAK SIĘ MIERZY RÓŻNE RZECZY, NA PRZYKŁAD DŁUGOŚĆ?

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

1.01 podać wielkości podstawowe układu SI;

1.02 nazwać najczęściej stosowane przedrostki jednostek układu SI;

1.03 zamieniać jednostki (na początek: długości, pola powierzchni i objętości), stosując współczynniki przeliczeniowe;

1.04 wyjaśnić, że metr jest zdefiniowany na podstawie wartości prędkości światła w próżni.

Podstawowe fakty

- Fizyka opiera się na pomiarach wielkości fizycznych. Niektóre z tych wielkości obrano za wielkości podstawowe (między innymi długość, czas i masę). Definiujemy je, wykorzystując ich wzorce, i ustalamy ich jednostki (na przykład metr, sekundę i kilogram). Inne wielkości fizyczne definiujemy za pomocą wielkości podstawowych oraz ich wzorców i jednostek.

- W tej książce najczęściej będziemy stosować Międzynarodowy Układ Jednostek (układ SI). Trzy wielkości fizyczne, które będą nam najbardziej przydatne w pierwszych rozdziałach podręcznika, zebrano w tabeli 1.1. Wzorce tych wielkości podstawowych, które muszą być łatwo dostępne i niezmienne, wybrano w drodze uzgodnień międzynarodowych. Wzorce te wykorzystuje się we wszystkich pomiarach fizycznych, dotyczących zarówno wielkości podstawowych, jak i wielkości przez nie wyrażonych. Zapis wyników pomiarów upraszczamy, stosując potęgi liczby 10 i przedrostki z tabeli 1.2.

- Zamiany jednostek dokonujemy za pomocą współczynników przeliczeniowych, mnożąc je kolejno przez siebie — każdy z tych współczynników jest równy jedności, a stosujemy ich tak wiele, jak wiele potrzeba do otrzymania pożądanej jednostki.

- Metr jest zdefiniowany jako droga przebyta przez światło w dokładnie określonym przedziale czasu.

O fizyce

Nauka i technika opiera się na pomiarach i porównaniu ich wyników. Musimy więc ustalić zasady, zgodnie z którymi wykonujemy te pomiary i porównania, oraz wyznaczyć jednostki, które są przy tym niezbędne. Jednym z celów fizyki (i techniki) jest projektowanie i wykonywanie doświadczeń porównawczych.

Fizycy starają się na przykład zbudować zegary o najwyższej dokładności, tak by każdy pomiar czasu lub przedziału czasu można było wykonać możliwie precyzyjnie i porównać z wynikami innych pomiarów. Może się zastanawiasz, czy trud uzyskania tak dużej dokładności pomiaru czasu jest istotnie potrzebny. Otóż jest, a jedną z tego przyczyn jest fakt, że bez skrajnie dokładnych zegarów nie dało by się z powodzeniem używać systemu nawigacji satelitarnej GPS, tak szeroko dziś stosowanego na całym świecie.

Jak się mierzy różne rzeczy?

Poznajemy fizykę, ucząc się mierzyć różne wielkości fizyczne. Są to między innymi: długość, czas, masa, temperatura, ciśnienie i natężenie prądu elektrycznego.

Każdą wielkość fizyczną mierzymy w jej jednostkach, porównując mierzoną wielkość ze **wzorcem**. **Jednostka** to nazwa miary danej wielkości — na przykład jednostką długości jest metr (oznaczenie: m). Wzorzec zawiera dokładnie jedną (1,0) jednostkę wielkości. Jak dowiesz się niebawem, wzorzec metra, którego długość wynosi dokładnie 1,0 m, to droga przebyta przez światło w próżni w pewnym określonym ułamku sekundy. Jednostkę i jej wzorzec możemy wybrać, jak nam się tylko podoba. Dobrze jednak zrobić to tak, aby wszyscy naukowcy zgadzali się, że jest to wybór rozsądny i użyteczny.

Gdy już wybierzemy wzorzec, powiedzmy długości, musimy uzgodnić metody porównywania z nim wszelkich możliwych długości — promienia atomu wodoru, rozstawu osi deskorolki czy odległości gwiazdy od Ziemi. Jedną z takich metod może być użycie linijki, stanowiącej w przybliżeniu wzorzec długości. Jednak często musimy korzystać z metod pośrednich. Za pomocą linijki nie da się zmierzyć na przykład promienia atomu czy odległości do gwiazdy.

Jednostki podstawowe. Wielkości fizycznych jest tak wiele, że musimy je jakoś uporządkować. Na szczęście, nie wszystkie są niezależne od siebie — na przykład prędkość to stosunek długości do czasu. Można więc wybrać — na mocy umowy międzynarodowej — niezbyt dużą liczbę wielkości fizycznych, między innymi długość i czas, i tylko dla nich ustalić wzorce, a wszystkie inne wielkości fizyczne wyrażać przez te *wielkości podstawowe* i ich wzorce (*wzorce wielkości podstawowych*). Na przykład prędkość wyrażamy przez długość i czas, stosując przy tym wzorce wielkości podstawowych.

Wzorce wielkości podstawowych powinny być łatwo dostępne i niezmienne. Jeśli za wzorzec długości przyjmiemy odległość nosa od palca wskazującego wyciągniętej ręki, to będzie to z pewnością wzorzec łatwo dostępny dla każdego, ale oczywiście jego wartość będzie inna dla różnych osób. Pomiary w nauce i technice wymagają coraz większej dokładności, dlatego też bardzo istotna jest niezmienność wzorca. Wiele wysiłku wkłada się w to, aby kopie wzorców podstawowych były dostępne dla każdego, kto ich potrzebuje.

Międzynarodowy Układ Jednostek

W roku 1971, na XIV Konferencji Ogólnej ds. Miar i Wag dokonano wyboru siedmiu podstawowych wielkości fizycznych, tworząc w ten sposób Międzynarodowy Układ Jednostek, nazywany *układem SI*, od skrótu jego nazwy w języku francuskim. W tabeli 1.1 podano nazwy jednostek długości, masy i czasu — trzech wielkości podstawowych, którymi będziemy się zajmować w początkowych rozdziałach podręcznika. Jednostki te zdefiniowano tak, aby ich wartości były bliskie pojęcia większości ludzi.

Tabela 1.1. Niektóre jednostki podstawowe SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol jednostki
długość	metr	m
czas	sekunda	s
masa	kilogram	kg

Za pomocą tych jednostek podstawowych definiujemy wiele *jednostek pochodnych* układu SI. Na przykład jednostkę mocy w układzie SI, czyli

wat (symbol W), wyrażamy przez jednostki podstawowe masy, długości i czasu. Jak przekonasz się w rozdziale 7

$$1 \text{ wat} = 1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3. \tag{1.1}$$

Kombinację jednostek po prawej stronie tej równości odczytujemy jako kilogram razy metr kwadrat na sekundę do sześcianu.

Do zapisu wielkości bardzo dużych i bardzo małych, z którymi w fizyce mamy często do czynienia, stosujemy zapis w postaci iloczynu liczby z przedziału między 0 a 10 i odpowiedniej potęgi 10. W tym zapisie

$$3\,560\,000\,000 \text{ m} = 3{,}56 \cdot 10^9 \text{ m}, \tag{1.2}$$

a

$$0{,}000\,000\,492 \text{ s} = 4{,}92 \cdot 10^{-7} \text{ s}. \tag{1.3}$$

Na komputerze nieraz zapisywane jest to w skrócie, jako 3,56 E9 oraz 4,92 E−7, gdzie E oznacza „wykładnik potęgi o podstawie 10”. Na kalkulatorach spotykamy postać jeszcze bardziej skróconą, w której E zastąpione jest spacją.

Innym wygodnym sposobem zapisu wielkości bardzo dużych i bardzo małych jest zastosowanie przedrostków podanych w tabeli 1.2. Jak widać, dodanie do jednostki określonego przedrostka daje jednostkę różniącą się od jednostki głównej o czynnik będący pewną potęgą liczby 10. Na przykład pewną wartość mocy możemy wyrazić jako

$$1{,}27 \cdot 10^9 \text{ wata} = 1{,}27 \text{ gigawata} = 1{,}27 \text{ GW}, \tag{1.4}$$

a pewien odstęp czasu jako

$$2{,}35 \cdot 10^{-9} \text{ sekundy} = 2{,}35 \text{ nanosekundy} = 2{,}35 \text{ ns}. \tag{1.5}$$

Niektóre z tych jednostek, na przykład mililitr, centymetr, kilogram czy megabajt są już wam zapewne dobrze znane.

Tabela 1.2. Nazwy przedrostków jednostek SI

Czynnik	Przedrostek[1]	Symbol
10^{24}	jotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	eksa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	**giga**	**G**
10^{6}	**mega**	**M**
10^{3}	**kilo**	**k**
10^{2}	hekto	h
10^{1}	deka	da
10^{-1}	decy	d
10^{-2}	**centy**	**c**
10^{-3}	**mili**	**m**
10^{-6}	**mikro**	**μ**
10^{-9}	**nano**	**n**
10^{-12}	**piko**	**p**
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	jokto	y

[1] Przedrostki najczęściej używane oznaczono tłustym drukiem.

Zamiana jednostek

Często musimy dokonać zamiany jednostek, w których wyrażona jest jakaś wielkość fizyczna. W tym celu mnożymy wynik pomiaru przez **współczynnik przeliczeniowy**, czyli równy jedności stosunek wielkości wyrażonej w różnych jednostkach. Na przykład 1 minuta i 60 sekund to takie same odstępy czasu, a więc otrzymujemy:

$$\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1 \qquad \text{i} \qquad \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 1.$$

Stosunki (1 min)/(60 s) i (60 s)/(1 min) mogą służyć więc za współczynniki przeliczeniowe. *Nie wolno* oczywiście napisać: $1/60 = 1$, ani $60 = 1$ — *liczba jednostek* musi zawsze występować łącznie z *jednostką*.

Mnożenie dowolnej wielkości przez jedność nie zmienia tej wielkości, dlatego współczynniki przeliczeniowe możemy wstawiać w dowolne miejsca. Przy zamianie jednostek korzystamy z nich w celu wyeliminowania pewnych jednostek. Na przykład, aby zamienić 2 minuty na sekundy postępujemy w następujący sposób:

$$2 \text{ min} = (2 \text{ min})(1) = (2 \cancel{\text{min}}) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}} \right) = 120 \text{ s}. \tag{1.6}$$

Jeśli po wprowadzeniu współczynnika przeliczeniowego *nie uzyskujesz* skrócenia jednostek, które chciałeś wyeliminować, to spróbuj użyć jego odwrotności. Przy zamianie jednostek ich symbole podlegają takim samym prawom algebry, jak zmienne i liczby.

Współczynniki przeliczeniowe między jednostkami SI i jednostkami innych układów podane są w dodatku D i na wewnętrznej stronie tylnej okładki. Jednak podano je tam nie w wyżej omówionej postaci stosunków, lecz równości, np. 1 min = 60 s. W konkretnym przypadku musisz więc sam zdecydować, co wolisz mieć w liczniku, a co w mianowniku.

Długość

W roku 1792 w nowo powstałej Republice Francuskiej ustanowiono nowy układ miar i wag — *układ metryczny*. Jego kamieniem węgielnym był metr, zdefiniowany jako jedna dziesięciomilionowa część odległości od bieguna północnego do równika. Później, ze względów praktycznych, wzorzec ten związany z wymiarami Ziemi zarzucono, a metr określono jako odległość między dwiema rysami wygrawerowanymi blisko końców pręta z platyny i irydu — **wzorca metra**, przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag pod Paryżem. Dokładne kopie tego wzorca rozesłano do biur wzorców na całym świecie. Na podstawie **wzorców wtórnych** sporządzano wzorce jeszcze bardziej powszechne, tak że w rezultacie każdy układ pomiarowy powiązany był ze wzorcem pierwotnym za pośrednictwem złożonej procedury porównawczej.

Wraz z upływem czasu rozwój nauki i techniki doprowadził do sytuacji, w której niezbędne stało się ustalenie wzorca dokładniejszego od odstępu dwóch rys na metalowym pręcie. W roku 1960 przyjęto nowy wzorzec metra, związany z długością fali światła. Dokładnie rzecz biorąc, wzorzec metra zdefiniowano jako 1 650 763,73 długości fali wybranej pomarańczowoczerwonej linii wysyłanej przez atomy kryptonu-86 (tzn. określonego izotopu tego pierwiastka) podczas wyładowania w gazie. Tak dziwna liczba długości fali została przyjęta po to, aby nowy wzorzec był bliski starego wzorca z metalu.

Jednakże, w roku 1983 stwierdzono, że nawet wzorzec kryptonowy nie może już sprostać wzrastającym wymaganiom dotyczącym dokładności pomiarów i zdecydowano się na krok radykalny. Metr został zdefiniowany jako droga, którą przebywa światło w ustalonym czasie. Podczas XVII Konferencji Ogólnej ds. Miar i Wag przyjęto, że:



Metr jest długością drogi, którą przebywa światło w próżni w czasie 1/299 792 458 sekundy.

Ten przedział czasu został tak ustalony, aby prędkość światła c była równa dokładnie

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

Pomiary prędkości światła stały się już wówczas tak bardzo dokładne, że można było przyjąć wartość prędkości światła jako stałą definicyjną i użyć jej do określenia wzorca metra.

W tabeli 1.3 podano różne typowe wartości długości — od charakteryzujących Wszechświat, aż do rozmiarów obiektów bardzo małych.

Tabela 1.3. Wybrane długości (w przybliżeniu)

Wielkość	Długość w metrach
odległość Ziemi od najstarszych galaktyk	$2 \cdot 10^{26}$
odległość Ziemi od galaktyki Andromedy	$2 \cdot 10^{22}$
odległość Ziemi od najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri)	$4 \cdot 10^{16}$
odległość Ziemi od Plutona	$6 \cdot 10^{12}$
promień Ziemi	$6 \cdot 10^{6}$
wysokość Mt. Everestu	$9 \cdot 10^{3}$
grubość tej kartki	$1 \cdot 10^{-4}$
rozmiar wirusa	$1 \cdot 10^{-8}$
promień atomu wodoru	$5 \cdot 10^{-11}$
promień protonu	$1 \cdot 10^{-15}$

Cyfry znaczące i cyfry po przecinku

Wyobraź sobie, że rozwiązujesz zadanie, w którym wszystkie wielkości są liczbami dwucyfrowymi. Te dwie cyfry nazywamy **cyframi znaczącymi**. Ich liczba wyznacza liczbę cyfr, które powinno zawierać podane przez ciebie rozwiązanie zadania. Jeśli dane mają dwie liczby znaczące, to i rozwiązanie musi mieć tylko dwie liczby znaczące. Wyświetlacz używanego przez ciebie kalkulatora może jednak pokazywać znacznie więcej cyfr — te dalsze są całkiem bezużyteczne.

W tym podręczniku będziemy zwykle podawać wynik zaokrąglony do takiej liczby cyfr znaczących, która odpowiada danej znanej najmniej dokładnie (tylko czasem podaje się jeszcze jedną cyfrę znaczącą). Gdy pierwsza z cyfr, które opuszczamy, wynosi 5 lub więcej, ostatnią pozostawianą cyfrę zwiększamy o jeden; w przeciwnym razie nie zmieniamy jej. Na przykład, zaokrąglając liczbę 11,3516 do trzech cyfr znaczących podajemy 11,4, a zaokrąglając do trzech cyfr znaczących liczbę 11,3279 podajemy 11,3 (przy podaniu odpowiedzi stosujemy zwykle znak równości (=), a nie znak równości przybliżonej (≈), nawet wtedy, gdy dokonujemy zaokrąglenia liczby).

Jeśli dana jest liczba postaci 3,15 lub $3{,}15 \cdot 10^3$, to liczba jej cyfr znaczących jest oczywista, lecz jak potraktować liczbę 3000? Czy zawiera jedną cyfrę znaczącą, tzn. że można zapisać ją jako $3 \cdot 10^3$? Czy może wszystkie cztery jej cyfry są znaczące, tzn. że należy zapisać ją jako $3{,}000 \cdot 10^3$? W tym podręczniku, podając liczbę w postaci 3000, będziemy zawsze mieć na myśli, że wszystkie cztery jej cyfry są znaczące, lecz czytając inne książki, możesz spotkać się z inną umową.

Nie należy mylić *cyfr znaczących* z *cyframi po przecinku*. Rozważmy odcinki o długościach: 35,6 mm, 3,56 m i 0,00356 m. Każda z nich ma trzy cyfry znaczące, choć odpowiednio jedną, dwie i pięć cyfr po przecinku.

Przykład 1.01. Oszacowanie rzędu wielkości, kłębek sznurka

Największy na świecie kłębek sznurka ma promień około 2 m. Ile wynosi — co do najbliższego rzędu wielkości — całkowita długość L sznura w tym kłębku?

PODSTAWOWE FAKTY

Moglibyśmy, oczywiście, rozwinąć kłębek i zmierzyć całkowitą długość L sznura, ale wymagałoby to wiele trudu, a do tego sprawiłoby wielką przykrość budowniczemu kłębka. Skoro jednak interesuje nas tylko wynik podany z dokładnością do najbliższego rzędu wielkości, to możemy wziąć pod uwagę jedynie oszacowania wszystkich potrzebnych nam wielkości.

Obliczenia: Załóżmy więc, że kłębek jest kulą o promieniu $R = 2$ m. Sznurek nie wypełnia całkowicie objętości tej kuli — między sąsiednimi zwojami sznurka jest wiele obszarów pustych. Aby uwzględnić istnienie tych luk, oszacujemy pole przekroju poprzecznego sznurka z nadmiarem, zakładając, że jest on kwadratem o boku $d = 4$ mm. Sznurek o długości L i polu przekroju poprzecznego d^2 zajmuje objętość

$$V = (\text{pole przekroju poprzecznego})(\text{długość}) = d^2 L.$$

Objętość ta jest w przybliżeniu równa objętości kłębka, czyli $\frac{4}{3}\pi R^3$, co wynosi około $4R^3$, bo π jest równe około 3. Otrzymujemy więc

$$d^2L = 4R^3,$$

a stąd

$$L = \frac{4R^3}{d^2} = \frac{4(2\text{ m})^3}{(4 \cdot 10^{-3}\text{ m})^2}$$
$$= 2 \cdot 10^6\text{ m} \approx 10^6\text{ m} = 10^3\text{ km} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

(Zauważ, że do tak prostych obliczeń wcale nie potrzebujesz kalkulatora). Tak więc z dokładnością do najbliższego rzędu wielkości kłębek zawiera około 1000 km sznurka!

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

1.2. CZAS

Czego się nauczysz?

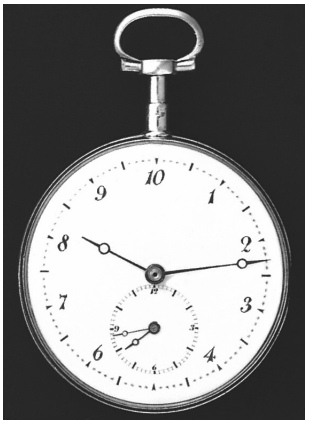
Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

1.05 zamieniać jednostki czasu, stosując współczynniki przeliczeniowe;

1.06 wykorzystywać — na przykład przy opisie ruchu — wyniki różnych pomiarów czasu, w tym otrzymane za pomocą różnych zegarów.

Podstawowe fakty

• Sekunda jest zdefiniowana za pomocą częstotliwości promieniowania wysyłanego przez atom cezu-133. Dokładne sygnały czasu z zegarów atomowych są wysyłane przez radio ze znajdujących się w wielu miejscach na świecie laboratoriów wzorców czasu.



Rys. 1.1. Gdy w roku 1792 wprowadzano układ metryczny, zmieniono również definicję godziny, tak aby dzień miał 10 godzin. Pomysł ten się nie przyjął. Producent tego 10-godzinnego zegara był jednak tak mądry, że zaopatrzył go także w małą tarczę z tradycyjnym 12-godzinnym podziałem dnia. Czy wskazówki tych dwóch tarcz pokazują ten sam czas? (fot. Steven Pitkin)

Czas

Słowo czas ma dwa znaczenia. W życiu codziennym, a nieraz i w nauce musimy znać aktualny czas (wskazanie zegara), aby móc ustalić kolejność zdarzeń. W nauce musimy ponadto bardzo często wiedzieć, jak długo trwa jakieś zjawisko. Tak więc wzorzec czasu musi dać odpowiedź na dwa pytania: „*Kiedy* to się zdarzyło?" i „*Jak długo* to trwało?" W tabeli 1.4 podano kilka przedziałów czasu.

Wzorcem czasu może być dowolne zjawisko powtarzalne. Przez wiele stuleci do tego celu był używany wyznaczający długość dnia okres obrotu Ziemi — na rysunku 1.1 przedstawiono względnie nowy przykład zegara, opartego na obrocie Ziemi. Zegar kwarcowy, w którym stosuje się ciągłe drgania pierścienia z kwarcu, można wykalibrować względem okresu obrotu Ziemi na podstawie obserwacji astronomicznych i używać go do pomiaru przedziałów czasu w laboratorium. Okazuje się jednak, że takiej kalibracji nie można dokonać z dokładnością wymaganą przez nowoczesną naukę i technikę.

Aby otrzymać lepsze wzorce czasu, zbudowano tzw. zegary atomowe. W Stanach Zjednoczonych wzorcem czasu jest zegar atomowy, znajdujący się w Państwowym Instytucie Wzorców i Techniki (NIST) w Boulder, w stanie Kolorado. Pochodzące z niego sygnały czasu są wysyłane przez radio na falach krótkich i przez telefon, a także dostępne są na stronie internetowej Obserwatorium Marynarki Stanów Zjednoczo-

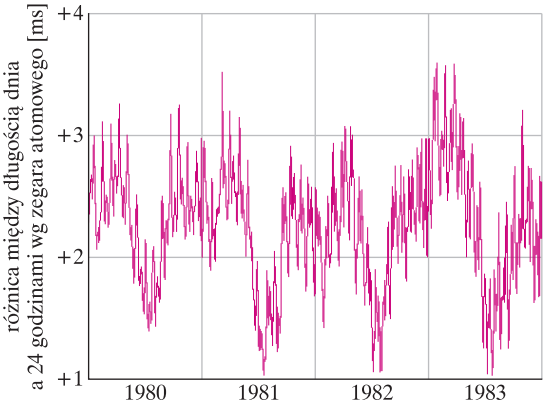
Tabela 1.4. Wybrane przedziały czasu (w przybliżeniu)

Wielkość	Czas [s]	Wielkość	Czas [s]
czas życia protonu (przewidywany)	$1 \cdot 10^{40}$	czas między kolejnymi uderzeniami ludzkiego serca	$8 \cdot 10^{-1}$
wiek Wszechświata	$5 \cdot 10^{17}$	czas życia mionu	$2 \cdot 10^{-6}$
wiek piramidy Cheopsa	$1 \cdot 10^{11}$	najkrótszy impuls światła w laboratorium	$6 \cdot 10^{-16}$
średni czas życia ludzkiego	$2 \cdot 10^{9}$	czas życia najbardziej nietrwałej cząstki	$1 \cdot 10^{-23}$
doba	$9 \cdot 10^{4}$	czas Plancka[1]	$1 \cdot 10^{-43}$

[1] Jest to najkrótszy czas od Wielkiego Wybuchu, po jakim zaczęły już obowiązywać znane nam dziś prawa fizyki.

nych: http://tycho.usno.navy.mil/time.html. Podobne systemy działają w innych krajach. Aby dokładnie ustalić czas w określonym miejscu na świecie, należy uwzględnić czas potrzebny na dotarcie do tego miejsca sygnału z odpowiedniego obserwatorium.

Na rysunku 1.2 przedstawiono zmiany długości jednego dnia na Ziemi w okresie 4 lat, otrzymane przez porównanie jej ze wskazaniami cezowego zegara atomowego. Zmiany te są powtarzalne i skorelowane z porami roku, dlatego też za rozbieżności między wskazaniami zegara ziemskiego i atomowego skłonni jesteśmy winić Ziemię. Są one prawdopodobnie związane z przypływami powodowanymi przez Księżyc i z wpływem silnych wiatrów.



Rys. 1.2. Zmiany długości dnia zarejestrowane w czasie 4 lat. Zauważ, że cała skala na osi pionowej odpowiada zaledwie 3 ms (3 milisekundy = 0,003 s)

Podczas XIII Konferencji Ogólnej ds. Miar i Wag przyjęto w roku 1967 następujący wzorzec sekundy, oparty na zegarze cezowym:

Sekunda jest to czas 9 192 631 770 drgań promieniowania (o ustalonej długości fali) wysyłanego przez atom cezu-133.

Zegary atomowe są ze sobą tak zgodne, że wskazania dwóch takich zegarów różniłyby się od siebie o 1 s dopiero po 6000 lat. Lecz nawet ta dokładność blednie w porównaniu z dokładnością zegarów, które są dziś w budowie — mają one mieć dokładność $1 \cdot 10^{18}$, tzn. 1 s na $1 \cdot 10^{18}$ s (czyli około $3 \cdot 10^{10}$ lat).

1.3. MASA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

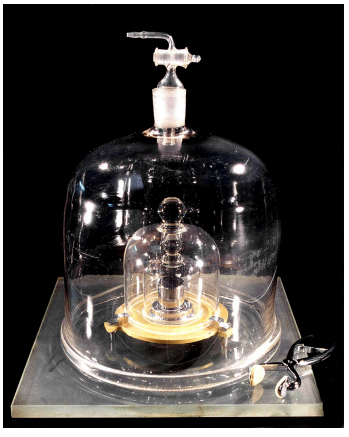
1.07 zamieniać jednostki czasu, stosując współczynniki przeliczeniowe;

1.08 podać związek gęstości z masą i objętością w przypadku, gdy rozkład masy jest równomierny.

Podstawowe fakty

- Kilogram jest zdefiniowany za pomocą wzorca wykonanego z platyny i irydu przechowywanego w pobliżu Paryża. Do pomiarów mas atomów stosuje się zwykle atomową jednostkę masy określoną za pomocą masy atomu węgla-12.
- Gęstość substancji ρ jest to masa jednostkowej objętości tej substancji:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$



Rys. 1.3. Międzynarodowy wzorzec masy 1 kg w postaci wykonanego z platyny i irydu walca o wysokości i średnicy podstawy równej 3,9 cm (dzięki uprzejmości Bureau International des Poids et Mesures, przedruk za zgodą BIPM)

Tabela 1.5. Wybrane masy (w przybliżeniu)

Obiekt	Masa [kg]
znany Wszechświat	$1 \cdot 10^{53}$
nasza Galaktyka	$2 \cdot 10^{41}$
Słońce	$2 \cdot 10^{30}$
Księżyc	$7 \cdot 10^{22}$
planetoida Eros	$5 \cdot 10^{15}$
niewielka góra	$1 \cdot 10^{12}$
transatlantyk	$7 \cdot 10^{7}$
słoń	$5 \cdot 10^{3}$
winogrono	$3 \cdot 10^{-3}$
ziarnko kurzu	$7 \cdot 10^{-10}$
cząsteczka penicyliny	$5 \cdot 10^{-17}$
atom uranu	$4 \cdot 10^{-25}$
proton	$2 \cdot 10^{-27}$
elektron	$9 \cdot 10^{-31}$

Masa

Wzorzec kilograma

Wzorcem masy w układzie SI jest przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag pod Paryżem walec z platyny i irydu (rys. 1.3), któremu, na mocy umowy międzynarodowej, przypisuje się masę jednego kilograma. Dokładne jego kopie znajdują się w laboratoriach wzorców w innych krajach, dzięki czemu masy dowolnych ciał można porównać z kopią wzorca za pomocą wagi. W tabeli 1.5 podano różne przykłady masy wyrażonej w kilogramach, różniące się od siebie w skrajnym przypadku o ponad 83 rzędy wielkości.

W Stanach Zjednoczonych kopia wzorca kilograma przechowywana jest w podziemiach Instytutu NIST. Wyjmuje się ją stamtąd — nie częściej niż raz na rok — aby sprawdzić masy jej kopii wtórnych, używanych w innych laboratoriach amerykańskich. Od roku 1889 dwa razy przewożono ją do Francji, w celu porównania ze wzorcem pierwotnym.

Inny wzorzec masy

Masy atomów mogą być porównywane ze sobą znacznie dokładniej niż ze wzorcem kilograma. Z tego względu mamy też inny wzorzec masy. Jest nim atom węgla-12, któremu na mocy umowy międzynarodowej przypisano masę 12 **atomowych jednostek masy** (symbol: u). Dwie jednostki masy związane są ze sobą w następujący sposób:

$$1\ \text{u} = 1{,}6605402 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}, \tag{1.7}$$

przy czym dokładność czynnika liczbowego wynosi ± 10 na dwóch ostatnich miejscach dziesiętnych. Naukowcy są dziś w stanie wyznaczać doświadczalnie masy różnych atomów w stosunku do masy atomu węgla-12 z bardzo dobrą dokładnością, jednak nie udało się dotychczas porównać ich równie dokładnie z masą jednostki bliższej codziennych pomiarów, tzn. kilograma.

Gęstość

Gęstość ρ (mała litera grecka ro) jest równa masie jednostkowej objętości substancji:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{1.8}$$

Gęstość wyraża się zwykle w kilogramach na metr sześcienny lub gramach na centymetr sześcienny. Gęstość wody (1 gram na centymetr sześcienny) służy często jako gęstość porównawcza. Gęstość świeżego śniegu wynosi około 10% gęstości wody, a platyna ma gęstość około 21 razy większą niż woda.

Przykład 1.02. Gęstość i upłynnienie gruntu

Ciężki przedmiot może zapaść się w podłoże podczas trzęsienia ziemi, jeśli pod wpływem wstrząsów grunt dozna *upłynnienia*, przy którym ziarna podłoża przesuwają się po sobie niemal bez tarcia. Taki grunt nosi nazwę kurzawki. Prawdopodobieństwo upłynnienia piaszczystego gruntu zależy od *wskaźnika porowatości* gruntu e:

$$e = \frac{V_{\text{porów}}}{V_{\text{ziaren}}}, \tag{1.9}$$

gdzie V_{ziaren} to całkowita objętość ziaren piasku, a $V_{\text{porów}}$ — całkowita objętość obszaru między ziarnami („porów") w próbce gruntu. Upłynnienie gruntu może zajść podczas trzęsienia ziemi, jeśli wskaźnik e przekroczy wartość krytyczną 0,80. Jaka jest wówczas gęstość piasku ρ_{piasku}? Stały ditlenek krzemu (który jest głównym składnikiem piasku) ma gęstość $\rho_{SiO_2} = 2{,}6 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$.



PODSTAWOWE FAKTY

Gęstość piasku ρ_{piasku} jest masą jednostkowej objętości próbki piasku, tzn. ilorazem całkowitej masy ziaren piasku w próbce m_{ziaren} i całkowitej objętości próbki $V_{\text{próbki}}$:

$$\rho_{\text{piasku}} = \frac{m_{\text{ziaren}}}{V_{\text{próbki}}}. \tag{1.10}$$

Obliczenia: Całkowita objętość próbki $V_{\text{próbki}}$ jest równa

$$V_{\text{próbki}} = V_{\text{ziaren}} + V_{\text{porów}}.$$

Podstawiając do tego wzoru $V_{\text{porów}}$ z równania (1.9) i wyznaczając z niego V_{ziaren}, otrzymujemy

$$V_{\text{ziaren}} = \frac{V_{\text{próbki}}}{1+e}. \tag{1.11}$$

Zgodnie z równaniem (1.8) całkowita masa ziaren piasku w próbce jest równa iloczynowi gęstości ditlenku krzemu i całkowitej objętości ziaren:

$$m_{\text{piasku}} = \rho_{SiO_2} V_{\text{ziaren}}. \tag{1.12}$$

Podstawiając do równania (1.10) powyższe wyrażenie oraz V_{ziaren} z równania (1.11), dostajemy

$$\rho_{\text{piasku}} = \frac{\rho_{SiO_2}}{V_{\text{próbki}}} \frac{V_{\text{próbki}}}{1+e} = \frac{\rho_{SiO_2}}{1+e}. \tag{1.13}$$

Podstawiając do tego wzoru dane liczbowe: $\rho_{SiO_2} = 2{,}6 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$ oraz wartość krytyczną $e = 0{,}80$, wyznaczamy wartość (krytyczną) gęstości piasku

$$\rho_{\text{piasku}} = \frac{2{,}6 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3}{1{,}80} = 1{,}4 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$$

(odpowiedź).

Upłynnienie gruntu zachodzi dla gęstości piasku mniejszych od tej wartości krytycznej. Budynek może się przy tym zapaść w ziemię na głębokość nawet kilku metrów!

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Podsumowanie

Pomiary w fizyce Fizyka opiera się na pomiarach wielkości fizycznych. Niektóre z tych wielkości (m.in. długość, czas i masę) wybrano jako **wielkości podstawowe**. Dla każdej z nich ustalono **jednostkę** (np. metr, sekundę i kilogram) oraz jej **wzorzec**. Inne wielkości fizyczne definiuje się za pomocą wielkości podstawowych oraz ich jednostek i wzorców.

Jednostki SI W niniejszej książce korzystamy przede wszystkim z Międzynarodowego Układu Jednostek SI. W kilku pierwszych rozdziałach będziemy posługiwać się trzema wielkościami fizycznymi, podanymi w tabeli 1.1. Wzorce ich jednostek, które muszą być niezmienne i dostępne, zostały ustalone na mocy umów międzynarodowych. Ze wzorców tych korzystamy podczas wszelkich pomiarów fizycznych wielkości podstawowych oraz wielkości wyznaczonych na ich podstawie. Do uproszczenia zapisu wyników pomiarów stosujemy zapis potęgowy oraz przedrostki podane w tabeli 1.2.

Zamiana jednostek Do zamiany jednych jednostek na inne (np. mil na godzinę na kilometry na sekundę) stosujemy metodę mnożenia danych przez współczynniki przeliczeniowe równe jedności, w której jednostki skracamy jak wyrażenia algebraiczne, aż do uzyskania jednostek pożądanych.

Długość Jednostka długości — metr — jest zdefiniowana jako droga, którą przebywa światło w dokładnie określonym czasie.

Czas Jednostkę czasu — sekundę — wiązano dawniej z okresem ruchu obrotowego Ziemi. Dziś definiujemy ją za pomocą drgań promieniowania wysyłanego przez atomy cezu-133. Dokładne sygnały czasu pochodzące z zegarów atomowych w laboratoriach wzorców są dostępne na całym świecie drogą radiową.

Masa Jednostka masy — kilogram — jest zdefiniowana za pomocą wzorca z platyny i irydu przechowywanego we Francji, pod Paryżem. Do pomiarów mas atomów stosuje się zwykle inną jednostkę masy określoną względem masy atomu węgla-12.

Gęstość Gęstość substancji ρ jest to masa jednostkowej objętości tej substancji:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{1.8}$$

Zadania

GO Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

•–••• Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

Podrozdział 1.1. Jak się mierzy różne rzeczy, na przykład długość

•1 ssm Ziemia jest w przybliżeniu kulą o promieniu $6{,}37 \cdot 10^6$ m. Ile wynosi: a) obwód Ziemi w kilometrach, b) pole powierzchni Ziemi w kilometrach kwadratowych, c) objętość Ziemi wyrażona w kilometrach sześciennych?

•2 *Gry* to staroangielska miara długości zdefiniowana jako 1/10 linii, a *linia* to inna staroangielska miara długości zdefiniowana jako 1/12 cala. Miarą długości powszechnie używaną przez drukarzy i wydawców jest *punkt* zdefiniowany jako 1/72 cala. Wyraź pole powierzchni 0,5 gry^2 w punktach kwadratowych (punkt^2).

•3 a) Z ilu mikrometrów składa się 1 kilometr? b) Jaką częścią centymetra jest 1 μm? c) Ile mikrometrów zawiera 1 jard?

•4 Drukarze, do pomiaru wielkości czcionek, odstępu wierszy itd., stosują tradycyjne jednostki typograficzne. W Europie są to głównie punkty typograficzne i cycera, przy czym 12 punktów = 1 cycero, a 6 cycer = 1 cal. Przy korekcie stwierdzono, że pewien rysunek został wydrukowany o 0,8 cm za wysoko. Ile wynosi przesunięcie rysunku w: a) punktach, b) cycerach?

•5 ssm www Na pewnym torze trawiastym w Anglii konie ścigają się na dystansie 4 furlongów. Ile wynosi długość tego biegu w: a) żerdziach, b) łańcuchach? 1 furlong = 201,168 m, 1 żerdź = 5,0292 m, 1 łańcuch = 20,117 m.

••6 Zamianę podstawowych miar i jednostek można dziś łatwo wykonać komputerowo, lecz wciąż powinieneś potrafić skorzystać z tabel przeliczeniowych zawartych w dodatku D. Tabela 1.6 stanowi taką tabelę dla układu miar objętości stosowanych swego czasu w Hiszpanii. Jedna fanega odpowiada 55,501 dm^3 (decymetrów sześciennych). Uzupełnij tabelę, wstawiając odpowiednie współczynniki w kolumny: a) cahiz, b) fanega, c) cuartilla i d) almude. Wyraź objętość równą 7 almude w: e) mediach, f) cahizach i g) centymetrach sześciennych (cm^3).

Tabela 1.6. Zadanie 6

	cahiz	fanega	cuartilla	almude	medio
1 cahiz =	1	12	48	144	288
1 fanega =		1	4	12	24
1 cuartilla =			1	3	6
1 almude =				1	2
1 medio =					1

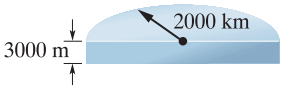
••7 ilw Hydraulicy w Stanach Zjednoczonych jako jednostki objętości używają często tzw. akrostopy zdefiniowanej jako objętość wody, która pokrywa powierzchnię 1 akra warstwą o grubości 1 stopy. W wyniku potężnej burzy miasto o powierzchni 26 km^2 zostało pokryte w ciągu 30 minut warstwą wody deszczowej o grubości 2 cali. Ile wynosi w akrostopach objętość wody, jaka spadła na to miasto?

••8 GO Most Harvarda, łączący kampus MIT z siedzibami korporacji studenckich na drugim brzegu rzeki Charles River, ma długość 364,4 smootów plus jedno ucho. Jednostka smoot jest równa wzrostowi niejakiego Olivera Reeda Smoota, studenta z rocznika 1962, który został przeniesiony przez swych kolegów (miejscami przeciągnięty) przez most, tak aby studenci wstępujący do korporacji Lambda Chi Alpha mogli stawiać znaczki (farbą) co 1 smoot przez całą długość mostu. Znaki te są co dwa lata odmalowywane przez nowych członków korporacji, zwykle w czasie korków drogowych na moście, co utrudnia interwencję policji (panuje przekonanie, że policja była początkowo przeciwna tej akcji ze względu na to, że smoot nie jest jednostką podstawową w układzie SI, lecz dziś pogodziła się już z jej istnieniem). Na rysunku 1.4 przedstawiono trzy równoległe linie, do których wyznaczenia posłużyli studenci Smoot (S), Willie (W) i Zelda (Z). Wyraź 50 smootów w willich i zeldach.



Rys. 1.4. Zadanie 8

••9 Antarktyda ma kształt zbliżony do półkola o promieniu 2000 km (rys. 1.5). Średnia grubość jej pokrywy lodowej wynosi 3000 m. Ile centymetrów sześciennych lodu zawiera Antarktyda (pomiń krzywiznę Ziemi)?



Rys. 1.5. Zadanie 9

Podrozdział 1.2. Czas

•10 Przed rokiem 1883 każde miasto w Stanach Zjednoczonych miało własny czas lokalny. Dziś osoby podróżujące po tym kraju muszą zmieniać czas lokalny jedynie skokami, o 1 godzinę. O ile średnio musisz zmienić swoje położenie w stopniach długości geograficznej, abyś mógł przesunąć zegarek o 1 godzinę? (*Wskazówka*: Ziemia obraca się o 360° w czasie około 24 godzin).

•11 Przez mniej więcej 10 lat po rewolucji francuskiej rząd Francji starał się wprowadzić podstawowe jednostki czasu oparte na systemie dziesiętnym: tydzień miał zawierać 10 dni, doba — 10 godzin, godzina — 100 minut, a jedna minuta — 100 sekund. Ile wynosi stosunek długości: a) francuskiego tygodnia dziesiętnego do normalnego tygodnia, b) francuskiej sekundy dziesiętnej do normalnej sekundy?

•12 Najszybciej rosnącą znaną rośliną jest *Hesperoyucca whipplei*, przyrastająca o 3,7 m w ciągu 14 dni. Wyraź tę szybkość w mikrometrach na sekundę.

•13 GO Trzy zegary cyfrowe chodzą z różną szybkością i nie wskazują zgodnie zera. Na rysunku 1.6 przedstawiono wyniki równoczesnych odczytów par tych zegarów — na przykład w pewnej chwili odczytano 25,5 s na zegarze B i 92 s na zegarze C. Jeśli odstęp czasu dwóch zdarzeń wynosi 600 s według zegara A, to ile wynosi on według: a) zegara B, b) zegara C? c) Jakie jest wskazanie zegara B, gdy zegar A wskazuje 400 s? d) Jakie jest wskazanie zegara B, gdy zegar C wskazuje 15 s? Wskazania poprzedzające chwilę zerową przyjmij za ujemne.



Rys. 1.6. Zadanie 13

•14 Czas standardowego wykładu (45 min) to mniej więcej jedno mikrostulecie. a) Ile minut ma mikrostulecie? b) Wyznacz błąd procentowy przyjętego przybliżenia. Skorzystaj z faktu, że błąd procentowy to

$$\left(\frac{\text{wartość dokładna} - \text{wartość przybliżona}}{\text{wartość dokładna}}\right) 100\%.$$

•15 *Fortnight* to urocza angielska jednostka czasu równa dwu tygodniom (jej nazwa jest skrótem od ang. *fourteen nights*, czyli czternaście nocy). Z pewnością przyjemnie spędzić taki czas w miłym towarzystwie, lecz gdy towarzystwo jest niemiłe, może się okazać boleśnie długą sekwencją mikrosekund. Ile mikrosekund zawiera fortnight?

•16 Wzorcami czasu są dziś zegary atomowe. Rozważa się również zastosowanie do tego celu *pulsarów*, czyli obracających się gwiazd neutronowych (gwiazd o bardzo dużej gęstości, składających się z samych neutronów). Szybkość obrotu niektórych z nich jest bardzo stabilna. Wysyłają one sygnały radiowe w kierunku Ziemi raz na okres obrotu, podobnie jak latarnie morskie wysyłają impulsy światła. Na przykład okres obrotu pulsara PSR 1937+21 wynosi 1,557 806 448 872 75±3 ms, gdzie zapis ±3 oznacza niepewność ostatniej cyfry dziesiętnej (a *nie* ±3 ms). a) Ile obrotów wykonuje pulsar PSR 1937+21 w czasie 7 dni? b) W ciągu jakiego czasu pulsar ten wykonuje 10^6 obrotów? c) Z jaką dokładnością możemy określić ten czas?

•17 ssm Pięć zegarów poddano sprawdzeniu w laboratorium. Przez kolejne dni tygodnia, dokładnie w południe — według radiowego sygnału czasu — odczytywano ich wskazania. Wyniki podano w tabelce niżej. Uszereguj te zegary od najlepszego do najgorszego miernika czasu. Uzasadnij odpowiedź.

Zegar	Niedziela	Poniedz.	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek	Sobota
A	12:36:40	12:36:57	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

••18 Ponieważ Ziemia obraca się coraz wolniej, długość dnia rośnie — na końcu I stulecia doba była o 1 ms dłuższa niż na początku tego stulecia. O ile wzrosła długość doby w ciągu 20 stuleci?

•••19 Wyobraź sobie, że leżąc na plaży w pobliżu równika obserwujesz Słońce zachodzące nad spokojnym morzem. W chwili gdy Słońce znika ci z oczu, włączasz stoper. Następnie wstajesz, wznosząc oczy na wysokość $H = 1{,}7$ m, i zatrzymujesz stoper, gdy po raz drugi przestajesz widzieć Słońce. Stoper wskazał czas $t = 11{,}1$ s. Ile wynosi promień Ziemi r?

Podrozdział 1.3. Masa

•20 W roku 1992 grupa szklarzy z Millville w stanie New Jersey wydmuchała rekordowo wielką butlę szklaną. Miała ona objętość 193 galonów amerykańskich. a) Ile brakowało jej do objętości 1 miliona centymetrów sześciennych? b) Wyobraź sobie, że butlę tę napełniamy wodą z niewielką szybkością, równą 1,8 g/min. Ile czasu zajmie napełnienie butli do pełna? Gęstość wody wynosi 1000 kg/m^3.

•21 Masa Ziemi wynosi $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. Średnia masa atomów, z których składa się Ziemia, jest równa 40 u. Z ilu atomów składa się Ziemia?

•22 Złoto, którego gęstość wynosi 19,32 g/cm^3 jest najbardziej kowalnym i ciągliwym metalem — można z niego wykuwać bardzo cienkie folie i wyciągać bardzo długie druty. a) Ile wynosi pole powierzchni folii o grubości 1 μm, wykutej z kawałka złota o masie 27,63 g? b) Ile wynosi długość drutu, którego przekrojem jest koło o promieniu 2,5 μm, wyciągniętego z takiej samej ilości złota?

•23 ssm a) Zakładając, że gęstość wody wynosi dokładnie 1 g/cm^3, podaj masę jednego metra sześciennego wody w kilogramach. b) Zbiornik z wodą o pojemności 5700 m^3 został opróżniony w ciągu 10 godzin. Ile wynosiła szybkość wypływu masy z tego zbiornika w kilogramach na sekundę?

••24 Ziarnka drobnego piasku z kalifornijskiej plaży są w przybliżeniu kulkami z ditlenku krzemu, a ich średni promień wynosi 50 μm. Gęstość stałego ditlenku krzemu wynosi 2600 kg/m^3. Ile wynosi masa piasku, którego ziarnka mają łączne pole powierzchni (tzn. pole powierzchni wszystkich kulek składowych) równe polu powierzchni sześcianu o boku 1 m?

••25 W wyniku ulewy zbocze górskie — o długości 2,5 km, wysokości w pionie 2 m i wysokości wzdłuż zbocza 0,8 km — ześlizguje się w dolinę w postaci błota. Przyjmij, że to błoto pokrywa równomiernie całą dolinę o wymiarach 0,4 × 0,4 km, a gęstość błota wynosi 1900 kg/m^3. Oblicz masę błota pokrywającego fragment doliny o polu powierzchni 4 m^2.

••26 Jeden centymetr sześcienny typowej chmury kłębiastej (cumulusa) zawiera od 50 do 500 kropel wody o promieniu mniej więcej 10 μm. Oblicz: a) ile metrów sześciennych wody zawiera chmura kłębiasta w kształcie walca o wysokości 3 km i promieniu 1 km, b) ile litrowych butelek można by napełnić tą wodą, c) jaką masę ma woda zawarta w tej chmurze (gęstość wody wynosi 1000 kg/m^3). Wyznacz wartości skrajne odpowiadające podanym liczbom kropel (najmniejszej i największej) w centymetrze sześciennym chmury.

••27 Gęstość żelaza wynosi 7,87 g/cm^3, a masa atomu żelaza jest równa $9{,}27 \cdot 10^{-26}$ kg. Oblicz: a) objętość atomu żelaza i b) odległość środków sąsiednich atomów, zakładając, że atomy są kuliste i stykają się ze swoimi sąsiadami.

••28 Jeden mol to $6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomów. Wyznacz rząd wielkości liczby moli atomów, z których składa się duży kot domowy. Masy atomów wodoru, tlenu i węgla wynoszą odpowiednio 1 u, 16 u i 12 u.

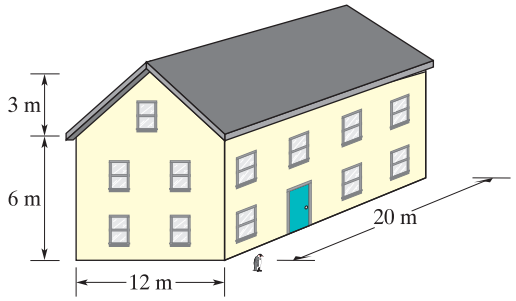
••29 W szale zakupów kupiłeś w Malezji wołu o wadze 28,9 piculi, przy czym miejscowe jednostki wagi są następujące: 1 picul = 100 ginów, 1 gin = 16 tahili, 1 tahil = 10 chee, a 1 chee = 10 hoonów. Przedmiot o wadze 1 hoona ma masę 0,3779 g. Chcesz przewieźć tego wołu statkiem, aby zadziwić swą fantazją całą rodzinę. Jaką masę — w kilogramach — musisz wpisać do deklaracji przewozowej? *Wskazówka*: wykorzystaj współczynniki przeliczeniowe jednostek.

••30 Napełniamy wodą pojemnik, który jest trochę nieszczelny. Masa wody w pojemniku m zmienia się z upływem czasu t ($t \geqslant 0$) zgodnie z zależnością $m = 5t^{0,8} - 3t + 20$, gdzie masa jest wyrażona w gramach, a czas w sekundach. a) Kiedy (dla jakiego t) masa wody w pojemniku jest największa i b) ile wynosi ta największa masa? Wyznacz szybkość zmiany masy wody w pojemniku dla c) $t = 2$ s i d) $t = 5$ s, wyrażając tę szybkość w kilogramach na minutę.

•••31 Mamy pionowy pojemnik, którego podstawą jest prostokąt o bokach 14 i 17 cm. Wrzucamy do niego cukiereczki, każdy o objętości 50 mm^3 i masie 0,02 g. Załóż, że cukiereczki wypełniają ściśle miejsce w pojemniku. Z jaką szybkością (w kilogramach na minutę) zwiększa się masa cukiereczków w pojemniku, gdy wysokość części pojemnika wypełnionej cukiereczkami wzrasta z szybkością 0,25 cm/s?

Zadania dodatkowe

32 W Stanach Zjednoczonych domek dla lalek jest normalnym domem w skali 1:12, tzn. każdy wymiar domku dla lalek jest równy $\frac{1}{12}$ odpowiedniego wymiaru normalnego domu, a domek miniaturowy, tzn. domek dla lalek do domku dla lalek, jest normalnym domem w skali 1:144. Załóżmy, że normalny dom ma długość 20 m, szerokość 12 m i wysokość 6 m, a standardowy dach jest w przekroju trójkątem równoramiennym o wysokości 3 m (rys. 1.7). Ile wynosi objętość odpowiadającego mu: a) domku dla lalek, b) domku miniaturowego? Podaj odpowiedź w metrach sześciennych.



Rys. 1.7. Zadanie 32

33 ssm W transporcie morskim objętość wyraża się często w tonach, co jednak wymaga ostrożności, gdyż w użytku są przynajmniej trzy rodzaje ton: *tona wyporn ościowa* równa 7 baryłkom, *tona frachtowa* równa 8 baryłkom i *tona rejestrowa* równa 20 baryłkom. Baryłka to jeszcze inna jednostka objętości: 1 baryłka = 0,1415 m^3. Wyobraź sobie, że dostałeś zlecenie spedycyjne dotyczące wysyłki „73 ton" cukierków M&M's i oczywiście jesteś pewien, że klient użył słowa „tona" w odniesieniu do objętości (a nie masy czy ciężaru — patrz rozdział 5). Jeśli klient miał na myśli tony wyporn ościowe, to o ile za dużo cukierków wysłałbyś do klienta, gdybyś błędnie założył, że chodziło mu o: a) 73 tony frachtowe, b) 73 tony rejestrowe? Wyraź odpowiedź w buszlach amerykańskich (1 m^3 = 28,378 buszli amerykańskich).

34 W latach dwudziestych XX wieku w Stanach Zjednoczonych były używane dwie jednostki objętości o nazwie beczułka. Beczułka do jabłek miała objętość ustaloną prawnie jako 7056 cali sześciennych, a beczułka do żurawin — jako 5826 cali sześciennych. Jeśli handlarz sprzedaje towar w ilości 20 beczułek do żurawin klientowi, który myśli, że są to beczułki do jabłek, to o ile litrów towaru różnią się ich obliczenia objętości dostawy?

35 W starym wierszyku angielskim mała Miss Muffet siedziała na kamieniu i zajadała zsiadłe mleko, gdy zjawił się pająk i siadł obok niej. Pająk przysiadł się do niej nie ze względu na zsiadłe mleko, lecz dlatego, że panna Muffet miała zapas 11 kamieni suszonych much. Kamień to miara objętości równa 2 garncom lub 0,5 buszla, przy czym buszel angielski wynosi 36,3687 litrów (l). Ile wynosił zapas suszonych much panny Muffet w: a) garncach, b) buszlach, c) litrach?

36 W tabeli 1.7 podano pewne starodawne jednostki objętości płynów. Uzupełnij tabelę, wstawiając odpowiednie współczynniki przeliczeniowe w kolumny: a) wey, b) chaldron, c) bag, d) pottle i e) gill. Objętość 1 bag jest równa 0,1091 m^3. f) Pewna dawna opowieść mówi o wiedźmie warzącej jakiś trujący napój w kotle o pojemności 1,5 chaldronów. Wyraź tę objętość w metrach sześciennych.

Tabela 1.7. Zadanie 36

	wey	chaldron	bag	pottle	gill
1 wey =	1	10/9	40/3	640	120 240
1 chaldron =					
1 bag =					
1 pottle =					
1 gill =					

37 Załóż, że kostka cukru jest sześcianem o krawędzi 1 cm. Jaka byłaby krawędź sześcianu zawierającego 1 mol takich kostek cukru (1 mol = $6{,}02 \cdot 10^{23}$)?

38 Jak wynika z dawnego manuskryptu, właściciel ziemski w czasach króla Artura miał 3 akry ziemi uprawnej oraz pastwisko o rozmiarach 25 prętów na 4 pręty. Ile wynosi całkowita powierzchnia jego gruntów: a) w ówczesnych jednostkach zwanych krzyżami, b) w metrach kwadratowych? 1 akr to powierzchnia pola o wymiarach 40 prętów na 4 pręty, 1 krzyż to 40 prętów na 1 pręt, a 1 pręt to 16,5 stopy.

39 ssm Pewna turystka kupiła samochód w Anglii i wysłała go do Stanów Zjednoczonych, gdzie mieszka. Producent samochodu informuje, że zużycie paliwa w trasie wynosi 1 galon na 40 mil. Nowa właścicielka nie zdaje sobie jednak sprawy z tego, że galon angielski różni się od amerykańskiego:

galon angielski = 4,546 090 0 litrów,
galon amerykański = 3,785 411 8 litrów.

Turystka ma teraz zamiar odbyć podróż po Stanach Zjednoczonych, przejeżdżając 750 mil. Ile galonów paliwa potrzeba na odbycie tej podróży według: a) błędnych obliczeń właścicielki, b) prawdziwych wymagań pojazdu?

40 Korzystając z danych i współczynników przeliczeniowych zawartych w tym rozdziale, wyznacz liczbę atomów wodoru, których łączna masa wynosi 1 kilogram. Masa atomu wodoru jest równa 1 u.

41 ssm *Sąg* pociętego drewna to stos o długości 8 stóp, szerokości 4 stóp i wysokości 4 stóp. Ile sągów zawiera stos drewna o objętości 1 m^3?

42 Jedna cząsteczka wody (H_2O) składa się z dwóch atomów wodoru i jednego atomu tlenu. Masa atomu wodoru wynosi w przybliżeniu 1 u, a atomu tlenu — 16 u. a) Wyraź masę cząsteczki wody w kilogramach. b) Ile cząsteczek wody zawierają wszystkie oceany na Ziemi, których całkowita masa wynosi około $1{,}4 \cdot 10^{21}$ kg?

43 Osoba na diecie traci w ciągu tygodnia 2,3 kg. Wyraź szybkość spadku masy tej osoby w miligramach na sekundę (choć oczywiście osoba ta nie odczuwa co sekundę, że znów trochę schudła).

44 Wyznacz masę wody, jaka spadła na miasto z zadania 7. Gęstość masy wynosi $1 \cdot 10^3$ kg/m^3.

45 a) W fizyce zjawisk mikroskopowych stosuje się czasem jednostkę czasu, zwaną *shake* (co można od biedy przełożyć jako „drgnięcie"). 1 *shake* jest równy 10^{-8} s. Czy sekunda ma więcej tych jednostek niż rok sekund? b) Ludzkość istnieje na Ziemi od około 10^6 lat, a wiek Wszechświata wynosi około 10^{10} lat. Jeśli przyjąć obecny wiek Wszechświata za „dzień Wszechświata", to od ilu „sekund Wszechświata" istnieje ludzkość?

46 *Hektar*, zdefiniowany jako 10^4 m^2, jest jednostką pola powierzchni stosowaną często do pomiaru powierzchni gruntów. W kopalni odkrywkowej węgla brunatnego, zajmującej obszar o powierzchni 75 hektarów, wydobywa się rocznie warstwę gruntu o grubości 26 m. Oblicz objętość usuwanej w tym czasie ziemi, wyrażając ją w kilometrach sześciennych.

47 ssm *Jednostka astronomiczna* (AU, j.a.) jest to średnia odległość Ziemi od Słońca, równa w przybliżeniu $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Prędkość światła wynosi około $3 \cdot 10^8$ m/s. Wyraź prędkość światła w jednostkach astronomicznych na minutę.

48 Średniej wielkości kret ma masę 75 g, co odpowiada około 7,5 molom atomów (jeden mol to $6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomów). Ile wynosi średnia masa atomów, z których składa się ten kret? Podaj odpowiedź w atomowych jednostkach masy (u).

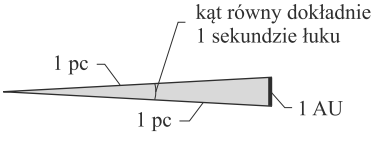
49 Tradycyjną jednostką długości w Japonii jest 1 ken (1 ken = 1,97 m). Oblicz stosunek: a) kena kwadratowego do metra kwadratowego, b) kena sześciennego do metra sześciennego. Ile wynosi objętość walcowego zbiornika na wodę o wysokości 5,5 kena i promieniu równym 3 keny, wyrażona: c) w kenach sześciennych, d) w metrach sześciennych?

50 Dowodzisz statkiem ratowniczym i otrzymujesz polecenie popłynięcia 24,5 mili na wschód, by znaleźć się wprost nad statkiem zatopionym przez piratów. Po dopłynięciu tam polecasz ekipie nurków zbadanie dna morza, lecz nie znajdują oni tam statku. Donosisz przez radio o rozwoju misji i dowiadujesz się, że odległość od zatopionego statku powinna wynosić 24,5 *mili morskiej*, a nie lądowej, jak ci początkowo podano. Korzystając z danych z dodatku D, wyznacz swą obecną odległość od zatopionego statku. Podaj odpowiedź w kilometrach.

51 Łokieć to dawna miara długości określona jako odległość łokcia od końca środkowego palca osoby wykonującej pomiar, zwykle od 43 do 53 cm. Stara rycina wskazuje, że walcowy filar pewnego grobowca miał mieć wysokość 9 łokci i średnicę 2 łokci. Podaj wysokość tego filaru: a) w metrach, b) w milimetrach. c) Oblicz objętość tego filaru w metrach sześciennych. Wyznacz wartości skrajne odpowiadające pomiarom wykonanym przez osoby wykonujące pomiar, dla których „łokieć" jest najkrótszy (43 cm) i najdłuższy (53 cm).

52 Aby porównać miary staroświeckie z nowoczesnymi i jednostki duże z małymi, rozważmy następujący przykład. W dawnej, rolniczej Anglii uważano, że jedna rodzina może się wyżywić (przy jednym plonie rocznie) z uprawy ziemi o powierzchni 100–120 akrów (1 akr to 4047 m^2). Powierzchnia ziemi potrzebnej 100 rodzinom nosiła nazwę *wapentake*. W fizyce kwantowej tzw. przekrój czynny jądra (zdefiniowany za pomocą prawdopodobieństwa, że jądro pochłonie padającą na nie cząstkę) mierzy się w barnach: 1 barn = $1 \cdot 10^{-28}$ m^2 (w żargonie fizyki jądrowej jądro jest „duże", jeśli trafienie w nie cząstką jest równie łatwe, jak trafienie ze strzelby we wrota stodoły; stąd nazwa „barn" — po angielsku „stodoła"). Ile wynosi stosunek 25 *wapentaków* do 11 barnów?

53 ssm *Jednostka astronomiczna* (AU, j.a.) jest równa średniej odległości Ziemi od Słońca, czyli około $92{,}9 \cdot 10^6$ mili. *Parsek* (pc) to odległość, z jakiej odcinek o długości 1 AU widać pod kątem równym dokładnie 1 sekundzie łuku (rys. 1.8). *Rok świetlny* jest odległością, jaką przebywa w ciągu 1 roku światło rozchodzące się w próżni z prędkością 186 000 mil na sekundę. Wyraź odległość Ziemi od Słońca: a) w parsekach, b) w latach świetlnych.



Rys. 1.8. Zadanie 53

54 Pewien producent farby emulsyjnej twierdzi, że jej wydajność wynosi 460 stóp kwadratowych na galon. a) Wyraź tę wielkość w metrach kwadratowych na litr. b) Wyraź tę wielkość w jednostkach podstawowych układu SI (patrz dodatki A i D). c) Ile wynosi odwrotność podanej wydajności i d) jakie jest znaczenie fizyczne tej wielkości?

55 Na pewnym wielkim przyjęciu weselnym wino ma być podane w — dość dziwacznych — naczyniach ze szkła kryształowego, których wymiary wewnętrzne wynoszą 40 × 40 × 30 cm (30 cm to wysokość naczynia). Naczynia muszą być początkowo napełnione winem po brzegi. Wino jest dostępne w następujących butelkach:

butelka standardowa,
magnum = 2 butelki standardowe,
jeroboam = 4 butelki standardowe,
rehoboam = 6 butelek standardowych,
methuselah = 8 butelek standardowych,
salmanazar = 12 butelek standardowych,
balthazar = 16 butelek standardowych,
nebuchadnezzar = 20 butelek standardowych.

Kupując większą butlę zamiast kilku mniejszych, zmniejszasz całkowity koszt wina. a) Jakie butelki i ile każdego rodzaju powinieneś zamówić, aby koszt zakupu wina do zapełnienia jednego naczynia był jak najmniejszy? Ile wina jeszcze zostanie po napełnieniu tego naczynia: b) w jednostkach butelek standardowych, c) w litrach? Standardowa butelka do wina ma oczywiście pojemność 0,75 litra.

56 Termin *corn-hog ratio* stosowany przez hodowców trzody chlewnej jest związany z kosztem wykarmienia tucznika do wielkości nadającej się do jego sprzedaży. Definiuje się go jako stosunek ceny rynkowej tucznika o masie 45,346 kg do ceny rynkowej buszla ziarna (buszel amerykański to 35,238 litra). Ile wynosi stosunek ceny rynkowej jednego kilograma tucznika do ceny rynkowej jednego litra ziarna, jeśli podana na giełdzie hodowlanej wartość wskaźnika *corn-hog ratio* wynosi 5,7?

57 Masz przygotować obiad dla 400 osób na kongresie miłośników kuchni meksykańskiej. Danie, które chcesz podać, wymaga użycia 2 papryczek jalapeño na każdy talerz (ma być jeden talerz na osobę). Nie masz jednak pod ręką papryczek jalapeño, ale masz papryczki habanero. Ostrość potraw, co dotyczy głównie różnych rodzajów papryki, podaje się w skali Scoville'a (oznaczanej skrótem SHU, od Scoville Hotness Unit —- ang. jednostka ostrości Scoville'a). Średnia papryczka jalapeño ma w tej skali ostrość 4000 SHU, a jedna papryczka habanero — 300 000 SHU. Ilu papryczek habanero potrzebujesz, aby przygotować dla 400 osób danie tak samo pikantne, jak przy użyciu zgodnej z przepisem ilości papryczek jalapeño?

58 Standardowe schody wewnętrzne mają stopnie o wysokości 19 cm i szerokości (głębokości w poziomie) 23 cm. Badania wykazują, że bardziej bezpieczne przy schodzeniu byłyby schody o szerokości stopni 28 cm. Jak dużo dalej musiałyby się kończyć na dole schody o wysokości 4,57 m, gdyby dokonać takiej zmiany szerokości stopnia?

59 Sporządzając zamówienie żywności na pewną manifestację polityczną, pomyliłeś się i zamiast zamówić średniej wielkości ostrygi atlantyckie (których wchodzi 26 do 38 na półkwartę amerykańską), zamówiłeś średnie ostrygi z Pacyfiku (których na półkwartę wchodzi od 8 do 12). Półkwarta amerykańska (zwana też pintą, ang. U.S. pint) to 0,4732 litra. Ostrygi dostarczono ci w naczyniu o wymiarach wewnętrznych 1 m × 12 cm × 20 cm. Ilu ostryg ci brakuje w stosunku do planowanej ich liczby?

60 Stara angielska książka kucharska zawiera następujący przepis na zupę pokrzywową: „Sporządź wywar, biorąc 1 filiżankę śniadaniową i 1 filiżankę do herbaty oraz 6 łyżek stołowych i 1 łyżkę deserową wody. Zrywaj — w rękawiczkach — czubki pokrzyw, aż będziesz ich miał 0,5 kwarty. Wrzuć te czubki do wrzącej wody i dodaj 1 łyżkę stołową ugotowanego ryżu oraz 1 łyżkę do soli soli. Gotuj na wolnym ogniu przez 15 minut". W tabeli podano niektóre przeliczniki między starymi jednostkami angielskimi i wciąż jeszcze używanymi jednostkami amerykańskimi (które aż się proszą, by je zastąpić jednostkami metrycznymi). Dla substancji płynnych 1 angielska łyżka do herbaty jest równa 1 amerykańskiej łyżce do herbaty. Dla substancji sypkich 1 angielska łyżka do herbaty jest równa 2 amerykańskim łyżkom do herbaty, a 1 kwarta angielska jest równa jednej kwarcie amerykańskiej. Wyraź w jednostkach amerykańskich ilości składników w podanym przepisie: a) wody, b) czubków pokrzyw, c) ryżu i d) soli.

stare jednostki angielskie
1 łyżka do herbaty = 2 łyżki do soli
1 łyżka deserowa = 2 łyżki do herbaty
1 łyżka stołowa = 2 łyżki deserowe
1 filiżanka do herbaty = 8 łyżek stołowych
1 filiżanka śniadaniowa = 2 filiżanki do herbaty

jednostki amerykańskie
1 łyżka stołowa = 3 łyżki do herbaty
1 półfiliżanka = 8 łyżek stołowych
1 filiżanka = 2 półfiliżanki

ROZDZIAŁ 2

Ruch prostoliniowy

2.1. POŁOŻENIE, PRZEMIESZCZENIE I PRĘDKOŚĆ ŚREDNIA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

2.01 stwierdzić, że jeśli wszystkie części ciała poruszają się w tym samym kierunku i z tą samą prędkością, to ciało można traktować jak cząstkę (punktową — w niniejszym rozdziale zajmujemy się ruchem takich ciał);

2.02 określać położenie ciała za pomocą jego współrzędnej względem wyskalowanej osi, na przykład osi x;

2.03 stosować związek przemieszczenia ciała z jego położeniem początkowym i końcowym;

2.04 stosować związek średniej prędkości ciała z jego przemieszczeniem oraz czasem, w jakim to przemieszczenie zaszło;

2.05 stosować związek średniej prędkości podróżnej ciała z przebytą przez nie drogą oraz czasem, w jakim ciało przebyło tę drogę;

2.06 wyznaczyć średnią prędkość ciała w pewnym przedziale czasu na podstawie wykresu zależności położenia ciała od czasu.

Podstawowe fakty

- Położenie x cząstki (ciała) na osi x to współrzędna punktu, w jakim się ona znajduje, wyznaczone względem początku (czyli punktu zerowego) osi.
- Położenie może być dodatnie lub ujemne — zależnie od tego, z której strony początku osi znajduje się cząstka — a także równe zeru, gdy cząstka znajduje się w początku osi. Kierunek dodatni osi to kierunek, w którym współrzędne punktów rosną, a kierunek przeciwny to kierunek ujemny osi.
- Przemieszczenie Δx cząstki to zmiana jej położenia:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

- Przemieszczenie jest wielkością wektorową. Jest dodatnie, gdy cząstka porusza się w kierunku dodatnim osi x, a ujemne — gdy cząstka porusza się w kierunku ujemnym osi.
- Gdy cząstka zmienia położenie z x_1 w x_2 w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$, wtedy jej prędkość średnia w tym przedziale czasu wynosi

$$v_{śr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

- Znak wielkości $v_{śr}$ jest związany z kierunkiem ruchu ($v_{śr}$ jest wielkością wektorową). Definicja prędkości średniej nie zawiera drogi przebytej przez cząstkę (która jest zawsze dodatnia), lecz jej położenie początkowe i końcowe.
- Na wykresie x jako funkcji t prędkość średnia cząstki w przedziale czasu Δt jest nachyleniem (współczynnikiem kierunkowym) prostej łączącej punkty na krzywej odpowiadające chwili początkowej i końcowej.
- Średnia prędkość podróżna (średnia wartość bezwzględna prędkości) w przedziale czasu Δt jest określona przez całkowitą drogę przebytą przez cząstkę w tym przedziale czasu:

$$s_{śr} = \frac{\text{całkowita droga}}{\Delta t}.$$

O fizyce

Jednym z celów fizyki jest badanie ruchów ciał — jak szybko się one poruszają, gdzie się znajdą po ustalonym czasie itd. Inżynierowie z NASCAR (działającego w Stanach Zjednoczonych stowarzyszenia wyścigów samo-

chodów seryjnych) z pasją wykorzystują ten dział fizyki, gdy analizują działanie samochodów podczas wyścigu. Geologowie stosują prawa fizyki do pomiarów przemieszczeń płyt tektonicznych w celu prognozowania trzęsień ziemi. Kardiologom fizyka jest potrzebna do wyznaczania przepływów krwi w krwiobiegu pacjenta, gdy podejrzewają częściową blokadę tętnicy, a kierowcom do ustalania, czy zdążą dostatecznie zwolnić, gdy słyszą sygnał ostrzegawczy antyradaru. Można by podać jeszcze wiele podobnych przykładów. W tym rozdziale będziemy badać podstawowe prawa ruchu ciał (samochodów wyścigowych, płyt tektonicznych, krwinek itp.) poruszających się wzdłuż jednej prostej. Taki ruch nazywamy *ruchem prostoliniowym* (inaczej: jednowymiarowym).

Ruch

Cały świat i wszystkie jego składniki są w ciągłym ruchu. Nawet pozornie tak nieruchome rzeczy, jak np. szosa, też biorą udział w ruchu obrotowym Ziemi; Ziemia krąży wokół Słońca, Słońce wokół środka Drogi Mlecznej, czyli naszej Galaktyki, a Galaktyka przemieszcza się względem innych galaktyk. Klasyfikacja i porównanie różnych ruchów (co nazywamy **kinematyką**) wcale nie są łatwe. Co właściwie należy mierzyć i jak porównywać różne ruchy?

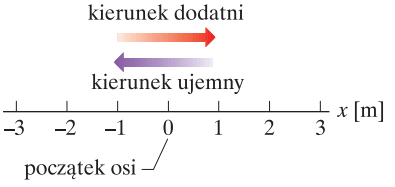
Zanim spróbujemy odpowiedzieć na to pytanie, zbadamy pewne ogólne cechy ruchów spełniających dane niżej warunki.

1. Ruch może zachodzić tylko wzdłuż linii prostej. Może być ona pionowa (jak przy spadku kamienia), pozioma (jak przy ruchu samochodu na płaskim odcinku autostrady), a także ukośna, lecz musi być prosta.
2. Ruch może odbywać się pod wpływem sił, ale tymczasem (aż do rozdziału 5) nie będziemy się nimi zajmować. W tym rozdziale będziemy badać sam ruch i jego zmiany. Na przykład zastanowimy się, czy poruszające się ciało przyspiesza, zwalnia, zatrzymuje się, czy zaczyna poruszać się w przeciwnym kierunku. A jeśli ruch ulega zmianom, to jak zależą one od czasu?
3. Poruszające się ciało jest albo **cząstką** (tzn. obiektem punktowym, jak elektron), albo porusza się jak cząstka (tzn. każda jego część porusza się w takim samym kierunku i z taką samą prędkością). Sztywne prosię, które ześlizguje się po zjeżdżalni na placu zabaw, porusza się jak cząstka, a toczący się kłębek nie porusza się jak cząstka, bo każdy jego punkt przemieszcza się w innym kierunku.

Położenie i przemieszczenie

Położenie ciała, czyli współrzędną punktu, w jakim się ono znajduje, wyznaczamy względem pewnego punktu odniesienia, najczęściej **początku** (czyli punktu zerowego) osi, np. osi x na rysunku 2.1. **Kierunkiem dodatnim** osi jest kierunek, w którym współrzędne punktów rosną — na rysunku 2.1 jest to kierunek na prawo. Kierunek przeciwny nazywamy **kierunkiem ujemnym**.

Na przykład cząstka może znajdować się w punkcie $x = 5$ m, co oznacza, że jest ona odległa o 5 m od początku osi w kierunku dodatnim. Jeśli znajduje się ona w punkcie $x = -5$ m, to jest w takiej samej odległości od



Rys. 2.1. Położenie wyznaczamy na osi rozciągającej się nieograniczenie w obydwu kierunkach, na której zaznaczono jednostki długości (tutaj metry). Symbol osi, tutaj x, zapisujemy zawsze po stronie współrzędnych dodatnich

początku osi jak poprzednio, ale w kierunku ujemnym. Punkt o współrzędnej -5 m leży na osi, na lewo od punktu o współrzędnej -1 m, a obydwa leżą na lewo od punktu o współrzędnej $+5$ m. Znak plus przy współrzędnej można opuścić, lecz znak minus musi być zawsze podany.

Zmianę położenia od punktu x_1 do innego punktu x_2 nazywamy **przemieszczeniem** Δx, przy czym

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad (2.1)$$

(symbol Δ, czyli wielka litera grecka delta, oznacza zwykle zmianę jakiejś wielkości i jest różnicą wartości końcowej i początkowej tej wielkości). Po podstawieniu do tego wzoru konkretnych wartości x_1 i x_2 otrzymujemy wartość dodatnią dla przemieszczeń w kierunku dodatnim (czyli na prawo na rysunku 2.1), a wartość ujemną dla przemieszczeń w kierunku przeciwnym. Na przykład, jeśli cząstka przemieściła się z punktu $x_1 = 5$ m do punktu $x_2 = 12$ m, to $\Delta x = (12\text{ m}) - (5\text{ m}) = +7$ m. Wynik dodatni oznacza, że ruch zachodził w kierunku dodatnim. Jeśli natomiast cząstka przemieściła się z punktu $x_1 = 5$ m do punktu $x_2 = 1$ m, to $\Delta x = (1\text{ m}) - (5\text{ m}) = -4$ m. Wynik ujemny oznacza, że ruch zachodził w kierunku ujemnym.

Całkowita droga przebyta w trakcie ruchu nie ma znaczenia dla wartości przemieszczenia — liczy się tylko położenie początkowe i końcowe. Jeśli na przykład cząstka przemieści się z punktu $x = 5$ m do punktu $x = 200$ m, a następnie z powrotem do punktu $x = 5$ m, to jej całkowite przemieszczenie wyniesie $\Delta x = (5\text{ m}) - (5\text{ m}) = 0$.

Znak przemieszczenia. Znak plus przy przemieszczeniu można opuścić, natomiast znak minus należy zawsze podawać. Gdy zapomnimy o znaku (a więc i kierunku) przemieszczenia, będziemy znać tylko jego **wartość bezwzględną** (moduł). Na przykład wartość bezwzględna przemieszczenia $\Delta x = -4$ m jest równa 4 m.

Przemieszczenie jest przykładem **wielkości wektorowej**, tzn. takiej, która ma wartość bezwzględną i kierunek. Wektory omówimy obszernie w rozdziale 3; teraz zapamiętaj jedynie, że przemieszczenie ma dwie cechy: 1) jego *wartość bezwzględna* to odległość (np. w metrach) między położeniem pierwotnym i końcowym; 2) jego *kierunek*, od punktu początkowego do końcowego, jest w przypadku ruchu po linii prostej dany przez znak plus lub minus.

Niżej znajdziesz pierwszy sprawdzian, jakich wiele w tej książce. Każdy z nich pozwoli ci sprawdzić zrozumienie omówionego materiału, co będzie od ciebie wymagać wykonania prostego rozumowania. Prawidłowe odpowiedzi podane są na końcu książki.

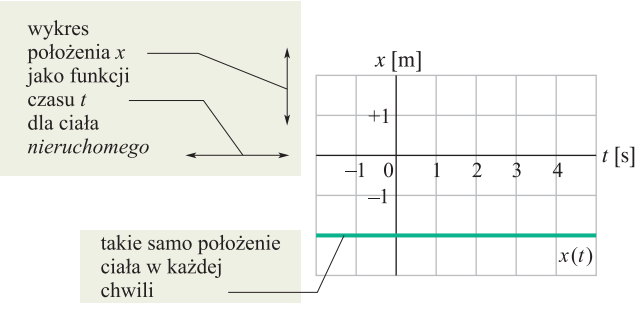


Sprawdzian 1

Niżej podano trzy pary położeń początkowych i końcowych na osi x. Które z nich dają ujemne przemieszczenie: a) -3 m, $+5$ m; b) -3 m, -7 m; c) 7 m, -3 m?

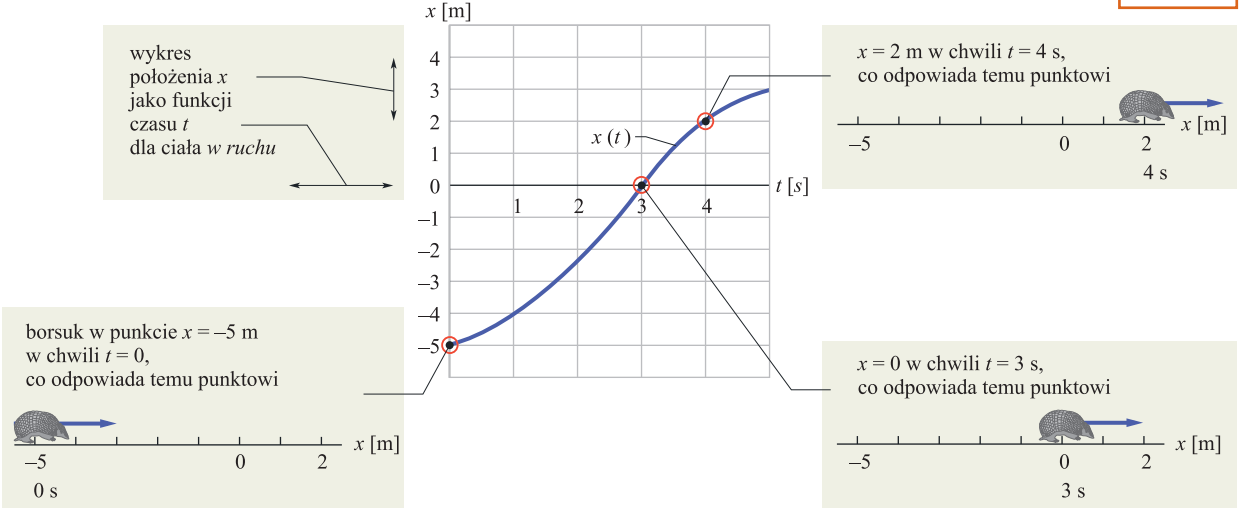
Prędkość średnia

Wygodnym sposobem przedstawienia ruchu ciała jest wykreślenie jego położenia x jako funkcji czasu t, tzn. sporządzenie wykresu $x(t)$ (zapis $x(t)$ oznacza x jako funkcję t, a nie iloczyn x i t). Na rysunku 2.2 przedstawiono — jako bardzo prosty przykład — funkcję $x(t)$ dla borsuka (traktowanego jako cząstka), który pozostaje w bezruchu w punkcie $x = -2$ m.



Rys. 2.2. Wykres $x(t)$ dla borsuka, który pozostaje w spoczynku w punkcie $x = -2$ m. Położenie borsuka x jest równe -2 m w każdej chwili

Rysunek 2.3 dotyczy ciekawszej sytuacji, albowiem borsuk się porusza. Pojawia się on w chwili $t = 0$, w punkcie $x = -5$ m, po czym porusza się w kierunku punktu $x = 0$, mija go w chwili $t = 3$ s, a następnie przesuwa się ku punktom o coraz większych współrzędnych dodatnich x. Na rysunku pokazano też położenie borsuka w trzech wybranych chwilach podczas jego ruchu prostoliniowego, czyli to, co możemy zaobserwować. Wykres ilustruje ruch borsuka w sposób bardziej abstrakcyjny, ale również pokazuje, jak szybko porusza się borsuk.



Rys. 2.3. Wykres $x(t)$ dla poruszającego się borsuka. Ruch borsuka przedstawiono również, pokazując jego położenie w trzech wybranych chwilach. Ikona z wirem informuje, że na stronie *WileyPLUS* dostępna jest animacja rysunku z komentarzem słownym

To, jak szybko porusza się cząstka, możemy wyrazić w różny sposób. Jedną z możliwości jest podanie **średniej prędkości** $v_{śr}$, którą opisujemy stosunkiem przemieszczenia cząstki Δx w pewnym przedziale czasu Δt, do wielkości tego przedziału czasu:

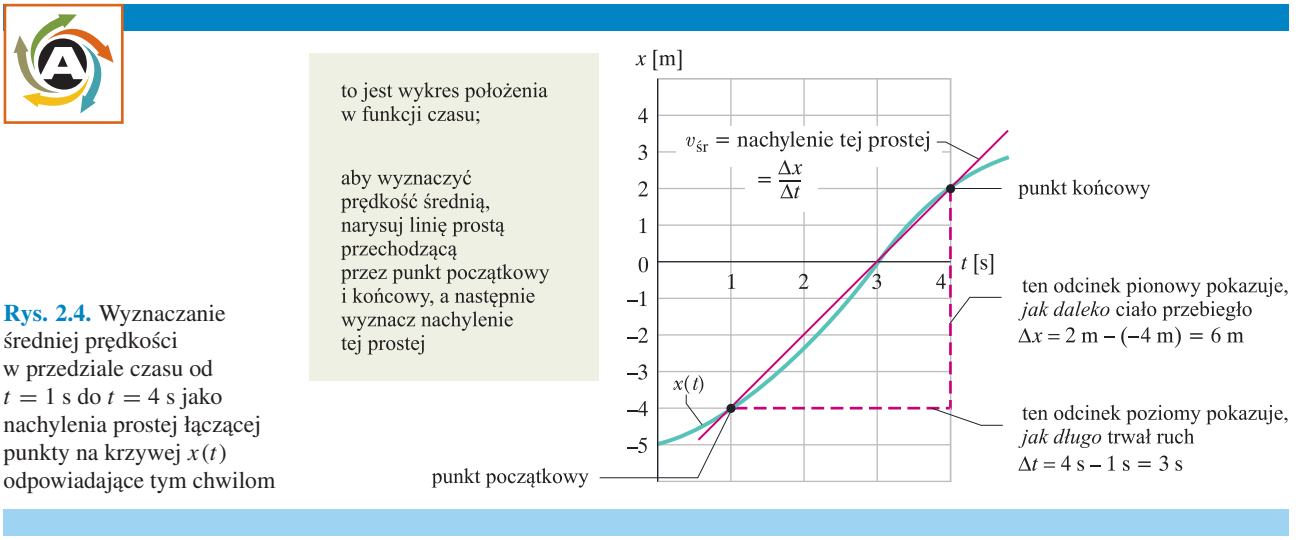
$$v_{śr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \qquad (2.2)$$

Zapis ten oznacza, że cząstka znajduje się w położeniu x_1 w chwili t_1, a w położeniu x_2 w chwili t_2. Typowym przykładem jednostki $v_{śr}$ jest metr na sekundę (m/s). W zadaniach spotkasz też inne jednostki, lecz zawsze będą mieć one postać ilorazu jednostki długości i jednostki czasu.

Wykresy. Na wykresie x jako funkcji t wartość $v_{śr}$ jest równa **nachyleniu** (współczynnikowi kierunkowemu) prostej łączącej dwa punkty na krzywej $x(t)$: punkt odpowiadający wartościom x_2 i t_2 oraz punkt odpowiadający wartościom x_1 i t_1. Podobnie jak przemieszczenie, $v_{śr}$ ma zarówno wartość bezwzględną, jak i kierunek (jest to również wielkość wektorowa). Wartość bezwzględna prędkości średniej jest równa wartości bezwzględnej nachylenia prostej. Jeśli $v_{śr}$, a więc i nachylenie są dodatnie, to linia na wykresie wznosi się wraz ze wzrostem t, a jeśli $v_{śr}$ i nachylenie są ujemne, to linia na wykresie opada wraz ze wzrostem t. Prędkość średnia $v_{śr}$ ma zawsze taki sam znak, jak przemieszczenie Δx, gdyż Δt we wzorze (2.2) jest zawsze dodatnie.

Na rysunku 2.4 pokazano sposób wyznaczenia $v_{śr}$ dla borsuka z rysunku 2.3, w przedziale czasu od $t = 1$ s do $t = 4$ s. Wykreślamy prostą łączącą punkt na krzywej, odpowiadający początkowi tego przedziału, i punkt odpowiadający końcowi przedziału. Następnie wyznaczamy nachylenie prostej $\Delta x/\Delta t$. Tak więc prędkość średnia w zadanym przedziale czasu wynosi

$$v_{śr} = \frac{6\text{ m}}{3\text{ s}} = 2\text{ m/s}.$$



Rys. 2.4. Wyznaczanie średniej prędkości w przedziale czasu od $t = 1$ s do $t = 4$ s jako nachylenia prostej łączącej punkty na krzywej $x(t)$ odpowiadające tym chwilom

Na pytanie, jak szybko poruszała się cząstka, możemy też odpowiedzieć w inny sposób, dzieląc przez czas nie przemieszczenie cząstki Δx, lecz całkowitą drogę (na przykład w metrach), przebytą w tym czasie przez cząstkę, niezależnie od kierunku, tzn. podając wielkość

$$s_{śr} = \frac{\text{całkowita droga}}{\Delta t}. \qquad (2.3)$$

Wielkość ta *nie* uwzględnia kierunku ruchu (mając w istocie znaczenie **średniej wartości bezwzględnej prędkości**), nie ma zatem znaku. Czasem jest ona równa wartości bezwzględnej $v_{śr}$, ale może też się od niej bardzo różnić. Wielkość tę nazywamy czasem prędkością „podróżną".

Przykład 2.01. Prędkość średnia, stara furgonetka

Jechałeś starą furgonetką po prostej drodze z prędkością 70 km/h. Po przebyciu drogi 8,4 km skończyła ci się benzyna i samochód się zatrzymał. Musiałeś więc iść pieszo 2 km do najbliższej stacji benzynowej, co zajęło ci 30 minut.

a) Ile wynosiło twoje całkowite przemieszczenie od początku podróży do stacji benzynowej?

PODSTAWOWE FAKTY

Załóżmy dla wygody, że poruszałeś się w dodatnim kierunku osi x, od położenia początkowego $x_1 = 0$ do położenia x_2. Twoje położenie końcowe to $x_2 = 8{,}4\ \text{km} + 2\ \text{km} = 10{,}4\ \text{km}$. Twoje przemieszczenie wzdłuż osi x jest równe różnicy położenia końcowego i początkowego.

Obliczenia: Z równania (2.1) otrzymujemy

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10{,}4\ \text{km} - 0 = 10{,}4\ \text{km} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Tak więc twoje całkowite przemieszczenie było równe 10,4 km w dodatnim kierunku osi x.

b) Ile czasu Δt upłynęło od początku podróży do chwili przybycia na stację benzynową?

PODSTAWOWE FAKTY

Znamy już czas marszu Δt_m, równy 0,5 h, ale nie znamy czasu jazdy samochodem Δt_j. Wiemy jednak, że w czasie jazdy przemieściłeś się o Δx_j, wynoszące 8,4 km, oraz że średnia prędkość jazdy $v_{śr,\,j}$ wynosiła 70 km/h. Prędkość średnia jest równa ilorazowi przemieszczenia w czasie jazdy i czasu jazdy.

Obliczenia: Przede wszystkim

$$v_{śr,\,j} = \frac{\Delta x_j}{\Delta t_j}.$$

Przekształcając ten wzór i podstawiając dane, otrzymujemy

$$\Delta t_j = \frac{\Delta x_j}{v_{śr,\,j}} = \frac{(8{,}4\ \text{km})}{(70\ \text{km/h})} = 0{,}12\ \text{h}.$$

Wobec tego

$$\Delta t = \Delta t_j + \Delta t_m = 0{,}12\ \text{h} + 0{,}5\ \text{h} = 0{,}62\ \text{h} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

c) Ile wynosiła twoja średnia prędkość $v_{śr}$ w czasie, który upłynął od początku podróży do chwili przybycia na stację benzynową? Wyznacz ją na drodze obliczeń oraz graficznie.

PODSTAWOWE FAKTY

Skorzystamy znów ze wzoru (2.2): $v_{śr}$ *dla całej podróży* jest równa ilorazowi przemieszczenia *w czasie całej podróży*, równego 10,4 km, oraz czasu *całej podróży*, równego 0,62 h.

Obliczenia: Mamy więc

$$v_{śr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10{,}4\ \text{km}}{0{,}62\ \text{h}} = 16{,}8\ \text{km/h} \approx 17\ \text{km/h} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Aby wyznaczyć $v_{śr}$ graficznie, sporządzimy najpierw wykres jak na rysunku 2.5, zaznaczając, że ruch odbywa się od początku układu współrzędnych do punktu oznaczonego jako „stacja". Prędkość średnia jest równa nachyleniu prostej łączącej te dwa punkty, czyli ilo-

razowi *różnicy ich rzędnych* ($\Delta x = 10{,}4$ km) i *różnicy ich odciętych* ($\Delta t = 0{,}62$ h), skąd otrzymujemy $v_{śr} = 16{,}8$ km/h.

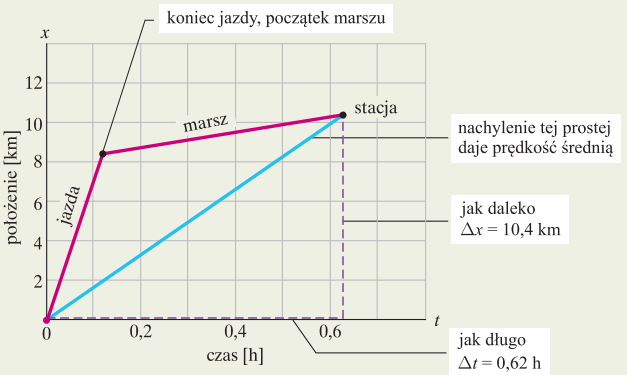
d) Załóżmy, że nabrałeś benzyny do kanistra, zapłaciłeś za nią i wróciłeś do samochodu w czasie 45 minut. Ile wynosi średnia droga, przebyta przez ciebie w jednostce czasu, od początku podróży do chwili powrotu z benzyną do furgonetki?

PODSTAWOWE FAKTY

Musimy obliczyć iloraz całkowitej przebytej przez ciebie drogi i całkowitego czasu podróży.

Obliczenia: Całkowita droga wynosi: 8,4 km + 2 km + 2 km = 12,4 km. Całkowity czas podróży jest równy: 0,12 h + 0,5 h + 0,75 h = 1,37 h. Ze wzoru (2.3) otrzymujemy więc:

$$s_{śr} = \frac{(12{,}4\text{ km})}{(1{,}37\text{ h})} = 9{,}1\text{ km/h} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$



Rys. 2.5. Odcinki oznaczone jako „jazda" oraz „marsz" są wykresami zależności położenia od czasu dla części podróży przebytych samochodem i pieszo (założono, że maszerowałeś ze stałą prędkością). Nachylenie prostej, przechodzącej przez początek układu współrzędnych i punkt oznaczony jako „stacja", jest równe średniej prędkości dla całej podróży, od jej początku do chwili przybycia na stację benzynową

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

2.2. PRĘDKOŚĆ CHWILOWA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

2.07 obliczyć prędkość chwilową ciała w dowolnej chwili, znając jego położenie jako funkcję czasu;

2.08 obliczyć prędkość chwilową ciała w dowolnej chwili, znając wykres położenia ciała jako funkcji czasu;

2.09 stwierdzić, że prędkość podróżna to wartość bezwzględna prędkości chwilowej.

Podstawowe fakty

- Prędkość chwilowa (czyli po prostu prędkość) v poruszającej się cząstki to

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

gdzie $\Delta x = x_2 - x_1$, a $\Delta t = t_2 - t_1$.

- Prędkość chwilową (w dowolnej chwili) można wyznaczyć jako nachylenie krzywej $x(t)$ dla tej chwili.

- Wartość bezwzględna prędkości chwilowej to tzw. prędkość podróżna.

Prędkość chwilowa

Wiesz już, że szybkość poruszania się ciała można określić na dwa sposoby: podając średnią prędkość i średnią drogę przebytą w jednostce czasu. Obie te wielkości odnoszą się do pewnego przedziału czasu Δt. Najczęściej jednak, pytając, jak szybko porusza się cząstka, chcemy wiedzieć, jak szybko porusza się ona w danej chwili, tzn. pytamy o jej **prędkość chwilową** (czyli po prostu **prędkość**) v.

Prędkość w danej chwili otrzymujemy z prędkości średniej, zmniejszając przedział czasu Δt do wartości coraz bliższej zera. Przy zmniejszaniu się Δt średnia prędkość dąży do granicy, którą jest prędkość w danej chwili:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \qquad (2.4)$$

Zauważ, że v jest szybkością zmiany położenia cząstki x przy zmianie czasu w danej chwili; tak więc v jest pochodną x względem t. Zauważ też, że wartość v jest w każdej chwili równa nachyleniu prostej stycznej do wykresu położenia cząstki, jako funkcji czasu, w punkcie odpowiadającym tej chwili. Prędkość jest kolejną poznaną przez nas wielkością wektorową, a więc ma kierunek.

Czasem wygodnie jest mówić nie o prędkości chwilowej, a tylko o jej wartości bezwzględnej (prędkości podróżnej). Oczywiście, wielkości te mogą się od siebie różnić (nawet znacznie), gdyż prędkość zawiera w sobie informację o kierunku ruchu, a jej wartość bezwzględna — nie. Na przykład zarówno prędkość równa $+5$ m/s, jak i równa -5 m/s mają wartość bezwzględną równą 5 m/s. Szybkościomierz w samochodzie pokazuje wartość bezwzględną prędkości, a nie samą prędkość, ponieważ jego wskazania nie zależą od kierunku ruchu pojazdu.

Sprawdzian 2

Niżej podano równania opisujące zależność położenia cząstki od czasu $x(t)$ (we wszystkich przypadkach x jest wyrażone w metrach, a t w sekundach, przy czym $t > 0$): 1) $x = 3t - 2$; 2) $x = -4t^2 - 2$; 3) $x = 2/t^2$; 4) $x = -2$. a) W którym przypadku prędkość cząstki v jest stała? b) W którym przypadku cząstka porusza się w ujemnym kierunku osi x?

Przykład 2.02. Prędkość i nachylenie krzywej $x(t)$, winda

Na rysunku 2.6a przedstawiono wykres $x(t)$ dla windy, początkowo nieruchomej, a następnie jadącej do góry (ten kierunek przyjmijmy za dodatni kierunek x) i w końcu się zatrzymującej. Sporządź wykres v jako funkcji czasu.

PODSTAWOWE FAKTY

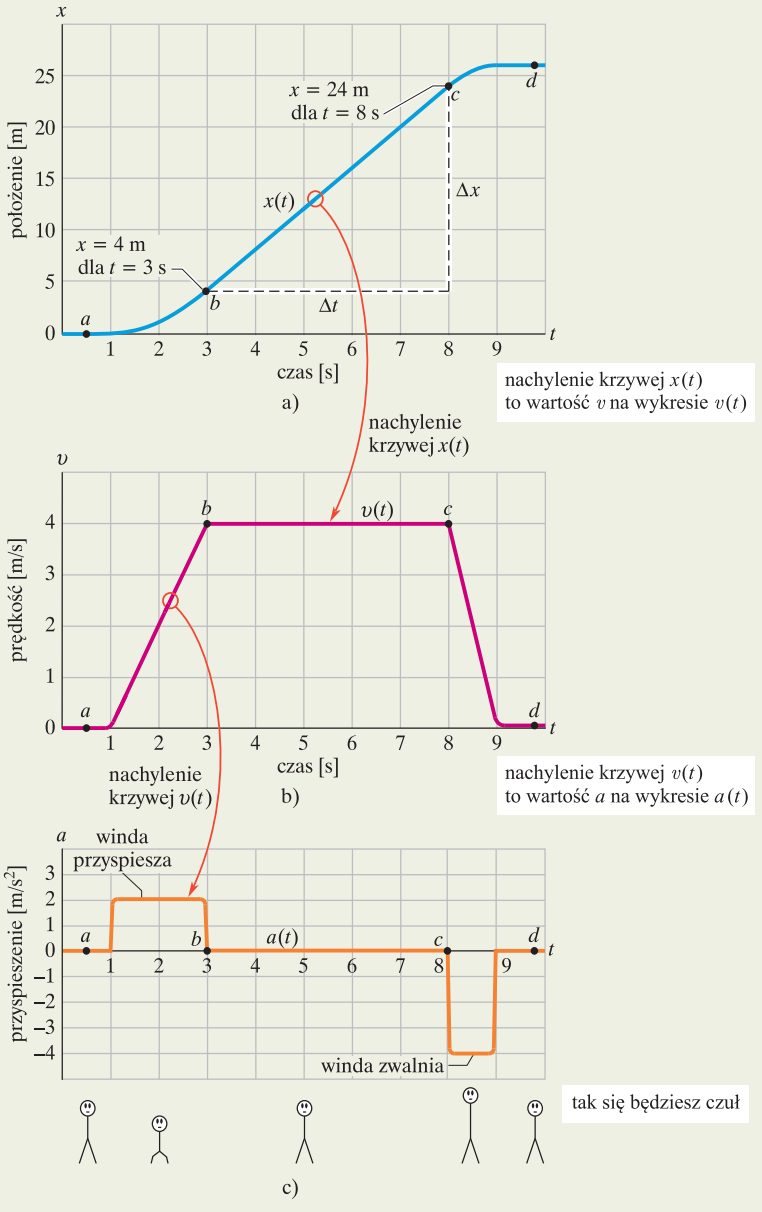
Wartość v w każdej chwili można wyznaczyć jako nachylenie krzywej $x(t)$ dla tej chwili.

Obliczenia: W przedziale od $t = 0$ do 1 s oraz dla $t = 9$ s i chwil późniejszych nachylenie wykresu $x(t)$, a więc i prędkość są równe zeru, tzn. winda jest w spoczynku. Między punktami b i c nachylenie jest stałe i różne od zera, tzn. winda porusza się ze stałą prędkością. Nachylenie to możemy obliczyć:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{(24\text{ m}) - (4\text{ m})}{(8\text{ s}) - (3\text{ s})} = +4\text{ m/s}. \qquad (2.5)$$

Znak plus oznacza, że wagonik porusza się w dodatnim kierunku osi x. Dla wymienionych przedziałów (dla których prędkość jest stała i wynosi $v = 0$ oraz $v = 4$ m/s) wykreślamy zatem na rysunku 2.6b odcinki poziome. Ponadto, winda początkowo zostaje wprawiona w ruch, a później zwalnia, aż do zatrzymania, odpowiednio w przedziałach czasu od 1 s do 3 s oraz od 8 s do 9 s. Dorysowując odcinki odpowiadające tym fazom ruchu, otrzymujemy żądany wykres — rysunek 2.6b (rys. 2.6c omówimy w podrozdz. 2.3).

Mając już wykres $v(t)$, jak na rysunku 2.6b, możemy spróbować „odwrócić" zadanie i wyznaczyć na tej podstawie wykres $x(t)$ (rys. 2.6a). Nie możemy jednak wyznaczyć konkretnych wartości x w poszczególnych



Rys. 2.6. a) Wykres $x(t)$ dla windy wznoszącej się wzdłuż osi x. b) Wykres $v(t)$ dla tej windy. Jest to wykres pochodnej funkcji $x(t)$ (gdyż $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$). c) Wykres $a(t)$ dla tej windy. Jest to wykres pochodnej funkcji $v(t)$ (gdyż $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$). Figurki z patyczków narysowane pod wykresem pokazują, jak przyspieszenie działa na ciało pasażera

momentach, gdyż wykres $v(t)$ informuje tylko o *zmianach* x. Aby otrzymać zmianę x w danym przedziale czasu, musimy obliczyć — jak wynika z rachunku całkowego — pole pod krzywą $v(t)$ dla tego przedziału. Na przykład w przedziale od 3 s do 8 s, gdy wagonik ma prędkość 4 m/s, zmiana położenia wynosi

$$\Delta x = (4\ \mathrm{m/s})(8\ \mathrm{s} - 3\ \mathrm{s}) = +20\ \mathrm{m} \qquad (2.6)$$

(pole to jest dodatnie, ponieważ krzywa $v(t)$ leży nad osią t). Jak widać z rysunku 2.6a, położenie istotnie zmienia się o 20 m w tym przedziale czasu. Jednakże z rysunku 2.6b nie możemy wyznaczyć *wartości* x w chwili początkowej i końcowej tego przedziału. Aby je wyznaczyć, musimy mieć jeszcze jakieś dodatkowe informacje, na przykład wartość x dla dowolnej chwili.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

2.3. PRZYSPIESZENIE

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

2.10 stosować zależność między średnim przyspieszeniem ciała a zmianą jego prędkości i przedziałem czasu, w jakim ta zmiana zaszła;

2.11 obliczyć przyspieszenie chwilowe ciała w dowolnej chwili, znając jego prędkość jako funkcję czasu;

2.12 obliczyć przyspieszenie chwilowe ciała w dowolnej chwili oraz jego przyspieszenie średnie w dowolnym przedziale czasu, znając wykres prędkości ciała jako funkcji czasu.

Podstawowe fakty

- Przyspieszenie średnie jest ilorazem zmiany prędkości ciała Δv i przedziału czasu Δt, w jakim ta zmiana zachodzi:

$$a_{śr} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Znak $a_{śr}$ wskazuje kierunek wektora przyspieszenia.

- Przyspieszenie chwilowe (czyli po prostu przyspieszenie) ciała a jest pierwszą pochodną prędkości $v(t)$ względem czasu i drugą pochodną położenia $x(t)$ względem czasu:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

- Na wykresie v jako funkcji t przyspieszenie ciała a w każdej chwili t jest nachyleniem krzywej $v(t)$ w żądanej chwili t.

Przyspieszenie

Gdy prędkość cząstki się zmienia, mówimy, że doznaje ona **przyspieszenia** (przyspiesza). Dla ruchu wzdłuż osi **przyspieszenie średnie** $a_{śr}$ w przedziale czasu Δt jest równe

$$a_{śr} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{2.7}$$

gdzie v_1 jest prędkością cząstki w chwili t_1, a v_2 — prędkością w późniejszej chwili t_2. **Przyspieszenie chwilowe** (czyli po prostu **przyspieszenie**) jest zdefiniowane jako

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{2.8}$$

Wyrażając to słowami, przyspieszenie cząstki w danej chwili jest równe szybkości zmiany prędkości cząstki w tej chwili. Na wykresie przedstawiającym zależność $v(t)$ przyspieszenie cząstki w danym punkcie jest równe nachyleniu krzywej $v(t)$ w tym punkcie.

Łącząc wzory (2.8) i (2.4), otrzymujemy

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2.9}$$

Oznacza to, że przyspieszenie cząstki w danej chwili jest równe drugiej pochodnej jej położenia $x(t)$ względem czasu.

Typową jednostką przyspieszenia jest metr na sekundę na sekundę: $m/(s \cdot s)$, czyli m/s^2. W treści zadań spotkasz i inne jednostki, które mają zawsze postać ilorazu jednostki długości i kwadratu jednostki czasu. Przyspieszenie ma zarówno wartość bezwzględną, jak i kierunek, czyli jest wielkością wektorową. Jego znak określa kierunek względem osi, podobnie jak

dla położenia i prędkości: przyspieszenie dodatnie jest skierowane w dodatnim kierunku osi, a przyspieszenie ujemne — w kierunku ujemnym.

Na rysunku 2.6 przedstawiono wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia wznoszącej się windy. Porównajmy wykres $a(t)$ z wykresem $v(t)$ — wartość $a(t)$ w każdym punkcie jest równa pochodnej krzywej $v(t)$ w tym punkcie (tzn. nachyleniu stycznej do krzywej). Gdy prędkość jest stała (w naszym przykładzie wynosi 0 lub 4 m/s), jej pochodna jest równa zeru, a więc przyspieszenie jest też równe zeru. Gdy wagonik nabiera prędkości, funkcja $v(t)$ ma pochodną dodatnią (nachylenie krzywej $v(t)$ jest dodatnie), a więc $a(t)$ jest dodatnie. Gdy wagonik zwalnia, aby się zatrzymać, pochodna i nachylenie są ujemne, a więc $a(t)$ jest ujemne.

Porównajmy jeszcze nachylenie krzywej $v(t)$ dla dwóch przedziałów, gdy winda porusza się z przyspieszeniem różnym od zera. Krzywa odpowiadająca hamowaniu windy (potocznie mówimy wtedy o ruchu opóźnionym) jest bardziej stroma, gdyż czas hamowania jest dwukrotnie krótszy od czasu rozpędzania windy. Bardziej stroma krzywa ma większe nachylenie (co do wartości bezwzględnej), a więc wartość bezwzględna przyspieszenia jest większa w czasie hamowania windy niż w czasie jej rozpędzania, jak pokazano na rysunku 2.6c.

Doznania. Figurki narysowane w dolnej części rysunku 2.6 przedstawiają doznania pasażera windy. Gdy winda nabiera prędkości, pasażer czuje się przyciskany do podłogi, a gdy winda hamuje, ma on poczucie rozciągania ku górze. Między tymi fazami ruchu nie odczuwa niczego niezwykłego. Jak widać, nasze ciało reaguje na przyspieszenie (jest „przyspieszeniomierzem"), a nie reaguje na prędkość (nie jest szybkościomierzem). W samochodzie jadącym z prędkością 90 km/h, czy w samolocie lecącym z prędkością 900 km/h, nasze ciało nie ma poczucia ruchu. Gdy jednak samochód lub samolot szybko zmieniają swoje prędkości, odczuwamy te zmiany wyraźnie, czasem nawet reagujemy na nie przestrachem. Emocje, jakich doznajemy, jadąc kolejką w wesołym miasteczku, związane są ze zmianami jej prędkości (płaci się za przyspieszenie, a nie za prędkość). Drastyczny przykład reakcji na przyspieszenie pokazano na rysunku 2.7,



Rys. 2.7. Pułkownik J.P. Stapp w saniach rakietowych, najpierw szybko nabierających prędkości — przyspieszenie skierowane zza zdjęcia, a potem gwałtownie hamujących — przyspieszenie skierowane w głąb zdjęcia (dzięki uprzejmości U.S. Air Force)

na którym przedstawiono zdjęcia pasażera sań rakietowych, najpierw gwałtownie przyspieszających, a potem gwałtownie hamowanych aż do zatrzymania.

Jednostki g. Duże wartości przyspieszenia podajemy czasem w jednostkach g, którego wartość jest równa

$$g = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \tag{2.10}$$

(jak dowiesz się w podrozdziale 2.5, g jest przyspieszeniem, z jakim spadają ciała w pobliżu powierzchni Ziemi). W czasie jazdy kolejką podczas zabawy w wesołym miasteczku możesz na krótko doznawać przyspieszenia nawet do $3g$, co wynosi $(3)(9{,}8 \text{ m/s}^2)$, czyli około 29 m/s^2, i co bez wątpienia uzasadnia cenę biletu na tę przejażdżkę.

Znak przyspieszenia. W języku potocznym mówimy czasem — co może być mylące — o przyspieszeniu („przyspieszeniu dodatnim"), gdy ciało porusza się coraz szybciej i opóźnieniu („przyspieszeniu ujemnym"), gdy ciało porusza się coraz wolniej. W fizyce, a więc i w tym podręczniku, znak przyspieszenia wskazuje na jego kierunek, a nie na to, czy wartość bezwzględna prędkości rośnie czy maleje. Na przykład, jeśli samochód poruszający się z prędkością początkową $v = -25$ m/s hamuje i zatrzymuje się po 5 s, to $a_{śr} = +5 \text{ m/s}^2$. Przyspieszenie jest *dodatnie*, choć wartość bezwzględna prędkości zmalała. Przyczyną jest różnica znaków prędkości i przyspieszenia — przyspieszenie ma kierunek przeciwny do prędkości.

Znak przyspieszenia należy interpretować następująco:

Jeśli znaki przyspieszenia i prędkości cząstki są takie same, to cząstka porusza się coraz szybciej (wartość bezwzględna jej prędkości rośnie). Jeśli znaki przyspieszenia i prędkości są przeciwne, to cząstka zwalnia (wartość bezwzględna jej prędkości maleje).

Sprawdzian 3

Wombat (mały torbacz australijski) porusza się wzdłuż osi x. Jaki jest znak jego przyspieszenia, jeśli porusza się on: a) coraz szybciej w kierunku dodatnim; b) coraz wolniej w kierunku dodatnim; c) coraz szybciej w kierunku ujemnym; d) coraz wolniej w kierunku ujemnym?

Przykład 2.03. Przyspieszenie i dv/dt

Położenie cząstki na osi x (patrz rys. 2.1) jest dane wzorem

$$x = 4 - 27t + t^3,$$

gdzie x jest wyrażone w metrach, a t w sekundach.

a) Ponieważ położenie cząstki zmienia się z upływem czasu, więc znajduje się ona w ruchu. Znajdź funkcje opisujące zależności prędkości od czasu $v(t)$ i przyspieszenia od czasu $a(t)$.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Funkcja $v(t)$ jest pochodną funkcji $x(t)$ względem czasu. 2) Funkcja $a(t)$ jest pochodną funkcji $v(t)$ względem czasu. Ich wyznaczenie wymaga więc różniczkowania.

Obliczenia: Różniczkując położenie względem czasu, otrzymujemy

$$v = -27 + 3t^2 \qquad \text{(odpowiedź)},$$

przy czym v jest wyrażone w metrach na sekundę. Podobnie, różniczkując prędkość względem czasu, dostajemy

$$a = +6t \qquad \text{(odpowiedź)},$$

przy czym a jest wyrażone w metrach na sekundę kwadrat.

b) Czy w jakiejkolwiek chwili $v = 0$?

Obliczenia: Kładąc $v(t) = 0$, otrzymujemy równanie

$$0 = -27 + 3t^2,$$

którego rozwiązaniem jest

$$t = \pm 3 \text{ s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Tak więc prędkość cząstki jest równa zeru, zarówno 3 s przed, jak i 3 s po zerowym wskazaniu zegara.

c) Opisz ruch cząstki dla $t \geqslant 0$.

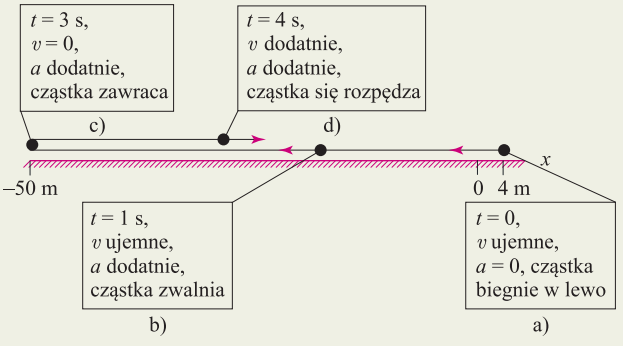
Rozumowanie: Musimy przeanalizować wyrażenia na $x(t)$, $v(t)$ i $a(t)$.

W chwili $t = 0$ położenie cząstki wynosi $x(0) = +4$ m. Jej prędkość jest równa $v(0) = -27$ m/s, tzn. jest skierowana w kierunku ujemnym osi x. Przyspieszenie cząstki $a(0) = 0$, ponieważ w tej właśnie chwili prędkość cząstki się nie zmienia (rys. 2.8a).

Dla $0 < t < 3$ s cząstka ma wciąż prędkość ujemną, tzn. porusza się w kierunku ujemnym. Jednakże jej przyspieszenie nie jest już równe zeru, lecz jest dodatnie i rośnie. Znaki prędkości i przyspieszenia są przeciwne, dlatego też cząstka porusza się coraz wolniej (rys. 2.8b).

Jak już przekonaliśmy się wcześniej, cząstka jest nieruchoma w chwili $t = 3$ s. W tej właśnie chwili jest ona najbardziej wysunięta w lewą stronę od początku osi na rysunku 2.1, w zakresie całego ruchu. Podstawiając $t = 3$ s do wyrażenia na $x(t)$, stwierdzamy, że położenie cząstki w tej chwili wynosi $x = -50$ m (rys. 2.8c). Przyspieszenie cząstki jest nadal dodatnie.

Dla $t > 3$ s cząstka porusza się po osi w prawą stronę. Jej przyspieszenie jest przez cały czas dodatnie, a jego wartość bezwzględna rośnie wraz z upływem czasu. Prędkość cząstki jest dodatnia, a jej wartość bezwzględna również rośnie wraz z upływem czasu (rys. 2.8d).



Rys. 2.8. Cztery fazy ruchu cząstki

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

2.4. RUCH ZE STAŁYM PRZYSPIESZENIEM

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

2.13 stosować zależność między położeniem, przemieszczeniem, prędkością, przyspieszeniem i czasem ruchu ciała, gdy przyspieszenie jest stałe (tabela 2.1);

2.14 wyznaczać zmianę prędkości cząstki, całkując funkcję $a(t)$ względem czasu;

2.15 wyznaczać zmianę położenia cząstki, całkując funkcję $v(t)$ względem czasu.

Podstawowe fakty

- Oto pięć równań, które obowiązują w ruchu cząstki ze stałym przyspieszeniem:

$$v = v_0 + at, \quad x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2, \quad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \quad x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t, \quad x - x_0 = vt - \tfrac{1}{2}at^2.$$

Równania te *nie obowiązują*, gdy przyspieszenie ciała nie jest stałe.

Ważny przypadek szczególny: ruch ze stałym przyspieszeniem

Bardzo często spotykamy się z ruchami, dla których przyspieszenie jest stałe lub niemal stałe. Na przykład, gdy na skrzyżowaniu ulic światła zmieniają się z czerwonych na zielone, ruszasz samochodem z miejsca, z przyspieszeniem w przybliżeniu stałym. Wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia samochodu mają wówczas postać taką, jak na rysunku 2.9 (zauważ, że skoro $a(t)$ na rysunku 2.9c jest funkcją stałą, to nachylenie wykresu $v(t)$ na rysunku 2.9b musi być stałe). Gdy później hamujesz, aby zatrzymać samochód, jego opóźnienie jest też zwykle w przybliżeniu stałe.

Takie sytuacje występują bardzo często, dlatego też warto poznać równania wiążące ze sobą położenie, prędkość i przyspieszenie dla tego rodzaju ruchu. W tym paragrafie pokażemy jeden sposób ich wyprowadzenia, a w paragrafie następnym przedstawimy inne podejście do tego zagadnienia. W trakcie lektury tych paragrafów, a także przy rozwiązywaniu zadań domowych należy pamiętać, że *równania te są spełnione tylko w przypadku stałego przyspieszenia (lub gdy założenie stałości przyspieszenia jest dobrym przybliżeniem sytuacji rzeczywistej).*

Pierwsze równanie podstawowe. Gdy przyspieszenie jest stałe, przyspieszenie średnie jest równe przyspieszeniu chwilowemu i — zmieniając nieco oznaczenia — możemy zapisać wzór (2.7) w postaci

$$a = a_{\text{śr}} = \frac{v - v_0}{t - 0}.$$

Przez v_0 oznaczyliśmy tu prędkość w chwili $t = 0$, a przez v — prędkość w pewnej późniejszej chwili t. Przekształcając to równanie, otrzymujemy

$$v = v_0 + at. \qquad (2.11)$$

Jak widać, dla $t = 0$ z powyższego równania mamy $v = v_0$, co jest zgodne z naszym założeniem. Ponadto, różniczkując stronami równanie (2.11), otrzymujemy $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = a$, co jest zgodne z definicją przyspieszenia. Na rysunku 2.9b przedstawiono wykres zależności $v(t)$ opisanej równaniem (2.11); zależność ta jest liniowa, a więc jej wykresem jest prosta.

Drugie równanie podstawowe. W podobny sposób, przekształcając równanie (2.2), otrzymujemy:

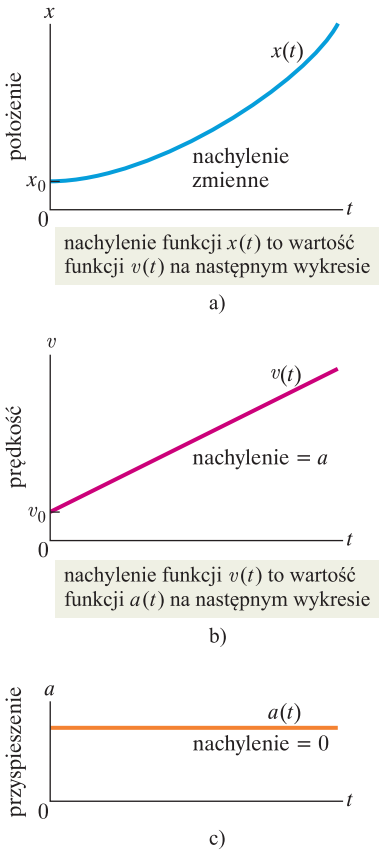
$$v_{\text{śr}} = \frac{x - x_0}{t - 0},$$

a stąd

$$x = x_0 + v_{\text{śr}}t, \qquad (2.12)$$

gdzie x_0 oznacza położenie cząstki w chwili $t = 0$, a $v_{\text{śr}}$ — średnią prędkość cząstki w przedziale od $t = 0$ do pewnej późniejszej chwili t.

Gdy prędkość zmienia się liniowo w czasie, jak w równaniu (2.11), prędkość *średnia* w pewnym przedziale czasu (powiedzmy od $t = 0$ do t) jest równa średniej arytmetycznej prędkości na początku tego przedziału (v_0) i na jego końcu (v). Tak więc w przedziale od $t = 0$ do późniejszej



Rys. 2.9. a) Położenie $x(t)$ cząstki poruszającej się ze stałym przyspieszeniem. b) Prędkość tej cząstki $v(t)$, równa w każdej chwili nachyleniu krzywej z rysunku (a). c) Przyspieszenie tej cząstki, które jest stałe, równe stałemu nachyleniu krzywej $v(t)$

chwili t prędkość średnia wynosi

$$v_{śr} = \frac{1}{2}(v_0 + v). \tag{2.13}$$

Podstawiając do tego równania v ze wzoru (2.11), otrzymujemy

$$v_{śr} = v_0 + \frac{1}{2}at. \tag{2.14}$$

I wreszcie, wstawiając (2.14) do (2.12), mamy

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{2.15}$$

Jak widać, dla $t = 0$ równanie powyższe daje $x = x_0$, co jest zgodne z naszym założeniem. Ponadto, różniczkując stronami równanie (2.15), otrzymujemy równanie (2.11), a zatem równania te są ze sobą zgodne. Na rysunku 2.9a przedstawiono wykres zależności opisanej równaniem (2.15); zależność ta jest kwadratowa, a więc jej wykres jest zakrzywiony.

Trzy dalsze równania. Równania (2.11) i (2.15) są to *podstawowe równania ruchu ze stałym przyspieszeniem*; korzystając z nich, można rozwiązać każde zadanie z tej książki, dotyczące takiego ruchu. Możemy również wyprowadzić inne równania, przydatne do rozwiązywania pewnych konkretnych rodzajów zadań. Zauważ najpierw, że w zadaniach na temat ruchu ze stałym przyspieszeniem możemy mieć do czynienia z pięcioma wielkościami: $x - x_0$, v, t, a i v_0. Zwykle jedna z tych wielkości *nie występuje* w zadaniu *ani jako dana, ani jako niewiadoma* — dane są trzy z pozostałych wielkości, a znaleźć należy czwartą.

Równania (2.11) i (2.15) zawierają właśnie po cztery z tych wielkości, w innych zestawach. W równaniu (2.11) nie występuje przemieszczenie $x - x_0$, a w równaniu (2.15) — prędkość v. Z tych dwóch równań można otrzymać trzy inne, z których żadne nie zawiera innej ze wspomnianych pięciu wielkości. Po pierwsze, możemy z nich wyeliminować t, otrzymując

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \tag{2.16}$$

Równanie to jest przydatne, gdy nie znamy t i nie musimy tej wielkości wyznaczać. Natomiast z równań (2.11) i (2.15) możemy wyeliminować przyspieszenie a, uzyskując równanie niezawierające a:

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t. \tag{2.17}$$

Wreszcie, eliminując v_0, otrzymujemy

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2. \tag{2.18}$$

Zwróć uwagę na różnicę między tym równaniem a równaniem (2.15): jedno z nich zawiera prędkość początkową v_0, a drugie — prędkość v w chwili t.

W tabeli 2.1 podano podstawowe równania ruchu ze stałym przyspieszeniem, tzn. równania (2.11) i (2.15), oraz wyprowadzone przed chwilą równania dla przypadków szczególnych. Proste zadania dotyczące ruchu ze stałym przyspieszeniem będziesz mógł zwykle rozwiązać, wybierając

Tabela 2.1. Równania ruchu ze stałym przyspieszeniem[1]

Numer równania	Równanie	„Brakująca" wielkość
(2.11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$
(2.15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v
(2.16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
(2.18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

[1] Zanim zastosujesz równania z tej tabeli, upewnij się, że zadanie, które rozwiązujesz, dotyczy istotnie ruchu ze stałym przyspieszeniem.

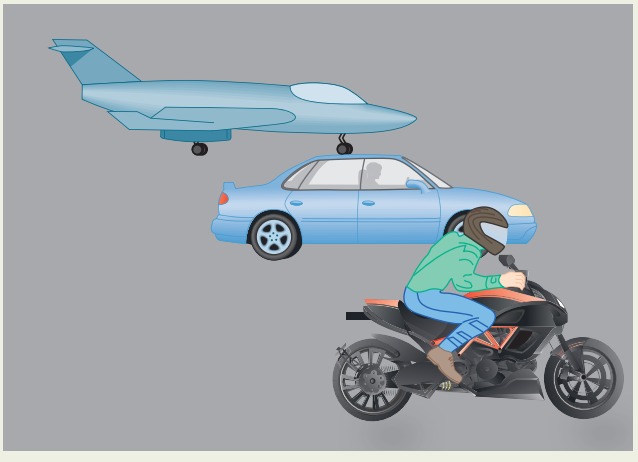
właściwe równanie z tej tabeli (oczywiście, o ile będziesz ją miał pod ręką). Należy wybrać to równanie, które zawiera trzy wielkości dane w zadaniu oraz wielkość, którą trzeba wyznaczyć. Można też pamiętać tylko równania (2.11) i (2.15) i rozwiązywać je łącznie, jako układ równań.

Sprawdzian 4

Niżej podano równania opisujące zależność położenia cząstki od czasu dla czterech przypadków: 1) $x = 3t - 4$; 2) $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$; 3) $x = 2/t^2 - 4/t$; 4) $x = 5t^2 - 3$. W którym z tych przypadków można skorzystać z równań zamieszczonych w tabeli 2.1?

Przykład 2.04. Wyścig sprinterski samochodu i motocykla

W internecie popularny jest filmik pokazujący wyścig ze startu zatrzymanego samolotu odrzutowego, samochodu i motocykla ma pasie startowym lotniska (rysunek 2.10). Ze startu najlepiej wychodzi motocykl, potem wyprzedza go samolot, a później także samochód. Skupmy się na dwóch uczestnikach wyścigu — samochodzie i motocyklu — i opiszmy ich ruch, korzystając z typowych wartości ich przyspieszenia. Na początku prowadzi motocykl, bo jego przyspieszenie (stałe) $a_\mathrm{m} = 8{,}40\ \mathrm{m/s^2}$ jest większe niż (także stałe) przyspieszenie samochodu $a_\mathrm{s} = 5{,}60\ \mathrm{m/s^2}$. Wkrótce jednak traci prowadzenie na rzecz samochodu, gdyż jego prędkość maksymalna $v_\mathrm{mmax} = 58{,}8$ m/s jest mniejsza niż prędkość maksymalna samochodu $v_\mathrm{smax} = 106$ m/s. Po jakim czasie od startu samochód dościga motocykl?



Rys. 2.10. Wyścig ze startu zatrzymanego samolotu odrzutowego, samochodu i motocykla — sytuacja wkrótce po starcie

PODSTAWOWE FAKTY

Ruch obu pojazdów po starcie możemy opisać, korzystając z równań ruchu ze stałym przyspieszeniem, ale musimy pamiętać, że ruch motocykla składa się z dwóch faz. 1) Najpierw porusza się on ze stałym przyspieszeniem $a_\mathrm{m} = 8{,}40\ \mathrm{m/s^2}$ — od prędkości zerowej na starcie aż do osiągnięcia swej prędkości maksymalnej $v_\mathrm{mmax} = 58{,}8$ m/s — przebywając w tym czasie drogę x_m1. 2) Potem porusza się ze stałą prędkością $v_\mathrm{mmax} = 58{,}8$ m/s, przebywając w tym czasie drogę x_m2. Zauważ, że ruch ze stałą prędkością, czyli z przyspieszeniem równym zeru, to też ruch ze stałym przyspieszeniem. Zauważ też, że drogi przebyte przez pojazd oznaczyliśmy symbolami, choć nie znamy ich wartości. Oznaczanie nieznanych wielkości symbolami przydaje się nieraz przy rozwiązywaniu zadań, choć możesz uznać, że wymaga to trochę odwagi.

Obliczenia: Aby ułatwić sobie rysowanie wykresów i obliczenie, załóżmy, że wyścig odbywa się w dodatnim kierunku osi x, a start jest w punkcie $x = 0$ i odbywa się w chwili $t = 0$ (wartości początkowe można wybrać dowolnie, bo interesuje nas przedział czasu, a nie konkretna chwila, więc najlepiej wybrać je jak najprostsze). Szukamy chwili, w której samochód dogoni motocykl. Co to oznacza matematycznie?

Otóż oznacza to, że w pewnej chwili t pojazdy są jednakowo odległe od punktu startowego, czyli droga przebyta przez samochód x_s jest równa sumie $x_\mathrm{m1} + x_\mathrm{m2}$, czyli drodze przebytej do tej chwili przez motocykl. Możemy to zapisać w postaci równania

$$x_\mathrm{s} = x_\mathrm{m1} + x_\mathrm{m2}. \qquad (2.19)$$

(Napisanie pierwszego równania to najtrudniejsza część każdego zadania. Jak przechodzi się od słownego opisu zagadnienia do jego opisu w języku matematyki? Jednym z celów tego podręcznika jest nauczenie cię radzenia sobie z tym pierwszym równaniem — wymaga to wiele pracy i ćwiczeń, jak przy nauce czegokolwiek, choćby sportów walki).

Postarajmy się teraz wyrazić obie strony równania (2.19) przez wielkości dane. x_s to droga przebyta przez samochód ze stałym przyspieszeniem. Z równania (2.15) ($x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$), do którego musimy wstawić wartości początkowe, tzn. $x_0 = 0$ i $v_0 = 0$, otrzymujemy

$$x_s = \tfrac{1}{2}a_s t^2. \qquad (2.25)$$

Aby wyznaczyć x_{m1}, obliczamy najpierw czas t_{mmax}, po jakim motocykl osiąga swą prędkość maksymalną v_{mmax}. Korzystamy z równania (2.11) ($v = v_0 + at$), do którego podstawiamy $v_0 = 0$, $v = v_{mmax} = 58{,}8$ m/s oraz $a = a_m = 8{,}40$ m/s^2 i wyznaczamy szukany czas

$$t_{mmax} = \frac{v_{mmax}}{a_m} = \frac{58{,}8\ \text{m/s}}{8{,}40\ \text{m/s}^2} = 7\ \text{s}. \qquad (2.21)$$

Aby obliczyć drogę przebytą w tym czasie przez motocykl, korzystamy znów z równania (2.15), do którego podstawiamy $x_0 = 0$ i $v_0 = 0$, a także czas z równania (2.21). Otrzymujemy

$$x_{m1} = \tfrac{1}{2}a_m t_{mmax}^2 = \tfrac{1}{2}a_m \left(\frac{v_{mmax}}{a_m}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_{mmax}^2}{a_m}. \qquad (2.22)$$

W drugiej fazie swego ruchu motocykl porusza się przez czas $t - t_{mmax}$ ze swą prędkością maksymalną i zerowym przyspieszeniem. Drogę przebytą wtedy przez motocykl możemy obliczyć znów z równania (2.15), podstawiając do niego teraz prędkość początkową $v_0 = v_{mmax}$ (prędkość na początku drugiej fazy ruchu motocykla) oraz przyspieszenie $a = 0$. Otrzymujemy

$$x_{m2} = v_{mmax}(t - t_{mmax}) = v_{mmax}(t - 7\ \text{s}). \qquad (2.23)$$

Zbliżając się do końca obliczeń, podstawiamy wyrażenia (2.20), (2.22) i (2.23) do równania (2.19) i dostajemy

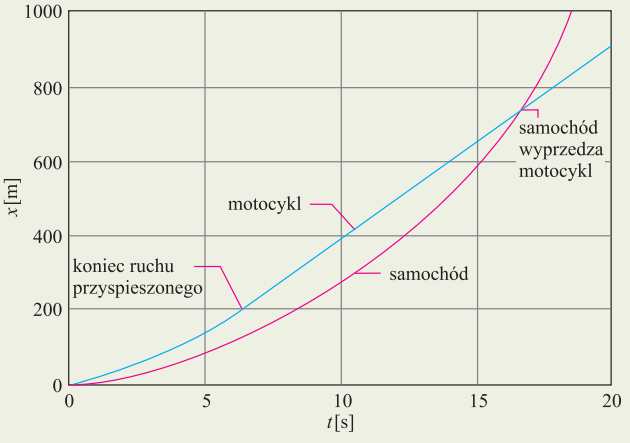
$$\tfrac{1}{2}a_s t^2 = \frac{1}{2}\frac{v_{mmax}^2}{a_m} + v_{mmax}(t - 7\ \text{s}). \qquad (2.24)$$

Jest to równanie kwadratowe. Podstawiając do niego wartości dane (przyspieszenia i prędkości) i rozwiązując je (algebraicznie lub komputerowo), otrzymujemy dwa rozwiązania: $t = 4{,}44$ s i $t = 16{,}6$ s.

Skąd się wzięły dwa rozwiązania? Chyba samochód nie wyprzedził motocykla dwukrotnie? Oczywiście, że nie, wszystko się odbyło jak na filmiku. Jedno z rozwiązań musi być zatem matematycznie prawdziwe, lecz niemożliwe fizycznie. Wiemy, że samochód doścignął motocykl *po tym*, jak motocykl osiągnął swą prędkość maksymalną w chwili $t = 7$ s, a zatem rozwiązanie z przedziału $t < 7$ s odrzucamy jako niefizyczne i stwierdzamy ostatecznie, że samochód wyprzedza motocykl w chwili

$$t = 16{,}6\ \text{s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Na rysunku 2.11 przedstawiono zależność położenia obu pojazdów od czasu. Zaznaczono też punkt odpowiadający momentowi wyprzedzenia motocykla przez samochód. Zauważ, że w chwili $t = 7$ s wykres dla motocykla przestaje być zakrzywiony (co oznacza wzrost prędkości) i staje się linią prostą (ponieważ prędkość już się nie zmienia).



Rys. 2.11. Zależność położenia samochodu i motocykla od czasu

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Stałe przyspieszenie w innym świetle*

Dwa pierwsze równania podane w tabeli 2.1 są równaniami podstawowymi, z których wyprowadzamy pozostałe. Te dwa równania można otrzymać, całkując równanie definiujące przyspieszenie przy założeniu, że a jest stałe. Aby wyprowadzić równanie (2.11), zapiszmy definicję przyspieszenia (wzór (2.8)) w postaci

$$dv = a\,dt.$$

Biorąc *całkę nieoznaczoną* z obydwu stron równania, otrzymujemy

$$\int dv = \int a\,dt.$$

Przyspieszenie a jest stałe, dlatego możemy je wynieść przed znak całki. Otrzymujemy więc

$$\int dv = a\int dt,$$

a stąd

$$v = at + C. \tag{2.25}$$

Wyznaczając stałą całkowania C, zauważ, że dla $t = 0$ mamy $v = v_0$. Podstawiając te wartości do równania (2.25) (które obowiązuje w każdej chwili, a więc i w chwili $t = 0$), otrzymujemy

$$v_0 = (a)(0) + C = C.$$

Wstawiając ten wynik do równania (2.25), dostajemy równanie (2.11).

Aby wyprowadzić równanie (2.15), zapiszmy definicję prędkości (wzór (2.4)) w postaci

$$dx = v\,dt.$$

Biorąc całkę nieoznaczoną z obydwu stron tego równania, otrzymujemy

$$\int dx = \int v\,dt.$$

Następnie zamiast prędkości v wstawiamy wyrażenie dane wzorem (2.11), otrzymując

$$\int dx = \int (v_0 + at)\,dt.$$

Zarówno v_0, jak i a są stałe, dlatego równanie powyższe można zapisać w postaci

$$\int dx = v_0\int dt + a\int t\,dt.$$

Całkowanie prowadzi do wzoru

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 + C', \tag{2.26}$$

gdzie C' jest inną stałą całkowania. W chwili $t = 0$ mamy $x = x_0$. Wstawiając to do równania (2.26), otrzymujemy $x_0 = C'$. Zastępując C' w równaniu (2.26) przez x_0, dostajemy równanie (2.15).

*Punkt ten przeznaczony jest dla czytelników znających już rachunek całkowy.

2.5. SPADEK SWOBODNY

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

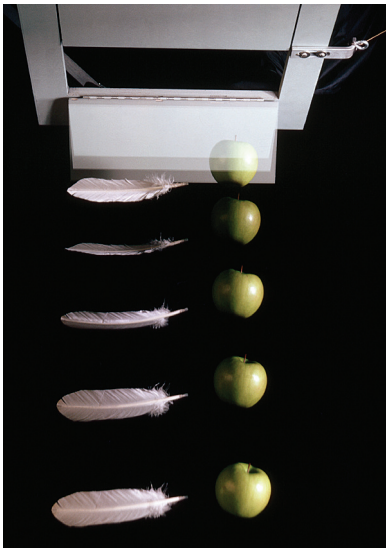
2.16 wyjaśnić, że przy ruchu swobodnym w pionie (zarówno w trakcie ruchu do góry, jak i w dół), o ile wpływ oporu powietrza na ruch można pominąć, przyspieszenie cząstki jest stałe, skierowane w dół, a jego wartość bezwzględna g wynosi 9,8 m/s^2;

2.17 stosować równania ruchu ze stałym przyspieszeniem (tab. 2.1) także w przypadku spadku swobodnego.

Podstawowe fakty

• Ważnym przykładem ruchu po linii prostej ze stałym przyspieszeniem jest ruch ciała wznoszącego się lub spadającego swobodnie w pobliżu powierzchni Ziemi. Ruch taki jest opisany równaniami ruchu ze stałym przyspieszeniem, ale stosujemy zwyczajowo umowę, że: 1) ruch odbywa się wzdłuż osi pionowej skierowanej w górę; 2) przyspieszenie a zapisujemy jako $-g$, gdzie g jest wartością bezwzględną przyspieszenia swobodnego spadku. W pobliżu powierzchni Ziemi

$$g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}.$$



Rys. 2.12. Spadając swobodnie w próżni, pióro i jabłko poruszają się w dół z takim samym przyspieszeniem o wartości bezwzględnej g. Ruch jest przyspieszony, dlatego kolejne obrazy ciał są coraz bardziej odległe od siebie. Widać jednak, że pod nieobecność powietrza pióro i jabłko spadają obok siebie (© Jim Sugar/CORBIS)

Spadek swobodny

Gdybyś rzucił jakieś ciało w górę lub w dół i mógł w jakiś sposób wyeliminować wpływ powietrza na jego ruch, mógłbyś stwierdzić, że doznaje ono przyspieszenia o stałej wartości skierowanego w dół. Przyspieszenie to nazywamy **przyspieszeniem ziemskim**, a jego wartość bezwzględną oznaczamy przez g. Nie zależy ono od właściwości przedmiotu, takich jak: masa, gęstość czy kształt — jest takie samo dla wszystkich ciał.

Przykład swobodnego spadku ciał pokazano na rysunku 2.12, na którym przedstawiono serię zdjęć stroboskopowych spadającego pióra i jabłka. Obydwa te przedmioty spadają z takim samym przyspieszeniem, którego wartość bezwzględna wynosi g. Inaczej mówiąc, ich prędkość rośnie w jednakowym tempie, a więc spadają obok siebie.

Wartość g zmienia się nieznacznie w zależności od szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza. O ile nie będzie innego polecenia, w zadaniach będziemy zawsze używać wartości $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, odpowiadającej średniej szerokości geograficznej i poziomowi morza.

Równania ruchu ze stałym przyspieszeniem, podane w tabeli 2.1, opisują także spadek swobodny ciał w pobliżu powierzchni Ziemi, tzn. ruch w pionie ciał rzuconych do góry lub w dół, o ile tylko wpływ powietrza na ruch ciała można pominąć. Zauważ jednak, że dla spadku swobodnego: 1) ruch zachodzi nie wzdłuż poziomej osi x, lecz wzdłuż pionowej osi y, przy czym kierunek dodatni y to kierunek ku górze (będzie to ważne w dalszych rozdziałach, gdy będziemy badać ruch łączny w pionie i w poziomie); 2) przyspieszenie ciała spadającego swobodnie jest zawsze ujemne, tzn. ma kierunek ujemny osi y — jest skierowane do środka Ziemi. W zadaniach będziemy więc zawsze przyjmować, że wynosi ono $-g$.

Przyspieszenie spadku swobodnego w pobliżu powierzchni Ziemi wynosi $a = -g = -9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, a *wartość bezwzględna* tego przyspieszenia jest równa $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. Zamiast g nie wolno podstawiać wartości $-9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

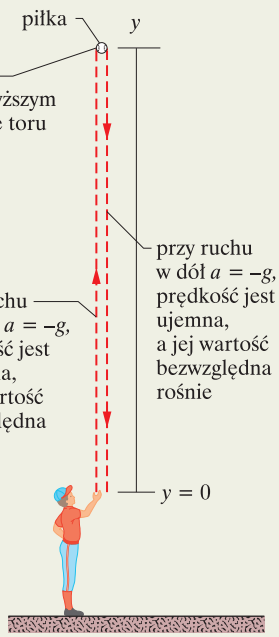
Wyobraź sobie, że rzuciłeś pomidora prosto do góry, z prędkością początkową v_0, a potem złapałeś go, gdy znalazł się znów w punkcie wyrzutu. W czasie jego *lotu swobodnego*, tzn. od chwili wyrzucenia do chwili pochwycenia, ruch pomidora opisują równania z tabeli 2.1. Przyspieszenie wynosi przez cały czas $a = -g = -9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ — jest ujemne, tzn. skierowane w dół. Natomiast prędkość pomidora zmienia się, jak to wskazują równania (2.11) i (2.16). W czasie wznoszenia się pomidora jego prędkość jest dodatnia, lecz coraz mniejsza, aż do zera. W chwili, gdy prędkość pomidora jest równa zeru, osiąga on największą wysokość. W czasie ruchu w dół jego prędkość jest ujemna, a jej wartość bezwzględna rośnie.

Sprawdzian 5

Odpowiedz na pytania odnoszące się rzutu piłki pionowo w górę: a) Jaki jest znak przemieszczenia piłki w czasie jej wznoszenia, od punktu wyrzucenia do punktu największego wzniesienia? b) Jaki jest ten znak w czasie spadku piłki, od punktu największego wzniesienia do punktu jej wyrzucenia? c) Jakie jest przyspieszenie piłki w punkcie jej największego wzniesienia?

Przykład 2.05. Pełny czas lotu piłki rzuconej pionowo do góry

Jak pokazano na rysunku 2.13, zawodnik rzuca piłkę baseballową pionowo do góry, wzdłuż osi y, z prędkością początkową 12 m/s.



Rys. 2.13. Zawodnik rzuca piłkę baseballową pionowo do góry. Równania dla spadku swobodnego można równie dobrze zastosować do przedmiotów wznoszących się, jak i do spadających, o ile opór powietrza można pominąć

a) Jak długo piłka będzie się wznosić aż do osiągnięcia największej wysokości?

PODSTAWOWE FAKTY

1. Podczas całego ruchu piłki — od momentu jej wyrzucenia do chwili powrotu do punktu wyjścia — porusza się ona z przyspieszeniem $a = -g$. Jej ruch jest więc opisany równaniami z tabeli 2.1. 2. Wiadomo, że w punkcie największego wzniesienia prędkość piłki v musi być równa 0.

Obliczenia: Znamy v, a i prędkość początkową $v_0 = 12$ m/s, dlatego możemy skorzystać z równania (2.11), zawierającego te cztery zmienne. Przekształcając je, otrzymujemy

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{(0) - (12\ \mathrm{m/s})}{(-9{,}8\ \mathrm{m/s^2})} = 1{,}2\ \mathrm{s} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Ile wynosi największa wysokość, na jaką wzniesie się piłka, w stosunku do punktu wyrzucenia?

Obliczenia: Przyjmijmy punkt wyrzucenia piłki za $y_0 = 0$. Zapiszmy równanie (2.16) dla współrzędnej y, położmy w nim $y - y_0 = y$ oraz $v = 0$ (w punkcie największego wzniesienia) i rozwiążmy je względem y. Otrzymujemy

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (12\ \mathrm{m/s})^2}{2(-9{,}8\ \mathrm{m/s^2})} = 7{,}3\ \mathrm{m}$$

(odpowiedź).

c) Jak długo będzie się wznosić piłka do punktu leżącego 5 m nad punktem jej wyrzucenia?

Obliczenia: Znamy $v_0, a = -g$ i przemieszczenie $y - y_0 = 5$ m, a szukamy t, skorzystamy więc z równania (2.15). Zapisując je dla współrzędnej y i podstawiając $y_0 = 0$, otrzymujemy

$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

czyli

$$5 \text{ m} = (12 \text{ m/s})t - (\tfrac{1}{2})(9{,}8 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Pomijając chwilowo jednostki (po stwierdzeniu, że są one zgodne), możemy zapisać to równanie w postaci

$$4{,}9t^2 - 12t + 5 = 0.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe względem t, otrzymujemy

$$t = 0{,}53 \text{ s} \quad \text{i} \quad t = 1{,}9 \text{ s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Istnieją dwa rozwiązania! Nie powinno cię to jednak dziwić, gdyż piłka przechodzi przecież dwukrotnie przez punkt $y = 5$ m — raz wznosząc się, a drugi raz spadając.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

2.6. CAŁKOWANIE GRAFICZNE PRZY BADANIU RUCHU

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

2.18 wyznaczyć zmianę prędkości cząstki, wykonując całkowanie graficzne zależności przyspieszenia od czasu;

2.19 wyznaczyć zmianę położenia cząstki, wykonując całkowanie graficzne zależności prędkości od czasu.

Podstawowe fakty

- Zmiana prędkości cząstki w przedziale czasu od t_0 do t_1 jest dana wzorem

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a\,dt.$$

Całka oznaczona jest równa polu powierzchni pod krzywą, czyli

$$\int_{t_0}^{t_1} a\,dt = \begin{pmatrix} \text{pole pod krzywą } a(t) \\ \text{od } t_0 \text{ do } t_1 \end{pmatrix}.$$

- Zmiana położenia cząstki w przedziale czasu od t_0 do t_1 jest dana wzorem

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt.$$

Całka oznaczona jest równa polu powierzchni pod krzywą, czyli

$$\int_{t_0}^{t_1} v\,dt = \begin{pmatrix} \text{pole pod krzywą } v(t) \\ \text{od } t_0 \text{ do } t_1 \end{pmatrix}.$$

Całkowanie graficzne przy badaniu ruchu

Całkowanie przyspieszenia. Gdy znamy przyspieszenie ciała a jako funkcję czasu t, wówczas prędkość ciała w dowolnej chwili możemy wyznaczyć jako całkę tej funkcji. Ponieważ a jest zdefiniowane jako $a = dv/dt$, więc z podstawowego twierdzenia analizy matematycznej otrzymujemy

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a\,dt. \qquad (2.27)$$

Prawa strona tego równania to całka oznaczona (a więc liczba, a nie funkcja), v_0 to prędkość w chwili t_0, a v_1 to prędkość w pewnej późniejszej

chwili t_1. Całkę oznaczoną można wyznaczyć liczbowo z wykresu funkcji $a(t)$, na przykład takiego, jak na rysunku 2.14a, gdyż

$$\int_{t_0}^{t_1} a\,dt = \begin{pmatrix}\text{pole pod krzywą } a(t)\\ \text{od } t_0 \text{ do } t_1\end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Przez pole pod krzywą $a(t)$ od t_0 do t_1 rozumiemy pole obszaru ograniczonego krzywą $a(t)$, osią x oraz prostymi o równaniach $t = t_0$ i $t = t_1$. Jeśli krzywa leży powyżej osi x, to pole pod krzywą uważamy za dodatnie, a jeśli krzywa leży poniżej tej osi, to pole pod krzywą uważamy za ujemne.

Jednostką przyspieszenia jest 1 m/s^2, a jednostką czasu 1 s, a zatem jednostką pola pod tą krzywą jest

$$(1\ \text{m/s}^2)(1\ \text{s}) = 1\ \text{m/s},$$

czyli (jak być powinno) jednostka prędkości.

Całkowanie prędkości. Podobnie, ponieważ v jest zdefiniowane jako $v = dx/dt$, to

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v\,dt, \tag{2.29}$$

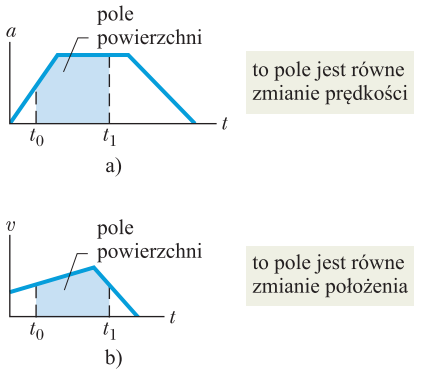
gdzie x_0 to położenie ciała w chwili t_0, a x_1 to jego położenie w chwili t_1. Całkę oznaczoną można wyznaczyć liczbowo z wykresu funkcji $v(t)$, na przykład takiego, jak na rysunku 2.14b, gdyż

$$\int_{t_0}^{t_1} v\,dt = \begin{pmatrix}\text{pole pod krzywą } v(t)\\ \text{od } t_0 \text{ do } t_1\end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Jednostką prędkości jest 1 m/s, a jednostką czasu 1 s, a zatem jednostką pola pod krzywą $v(t)$ jest

$$(1\ \text{m/s})(1\ \text{s}) = 1\ \text{m},$$

czyli (jak być powinno) jednostka położenia (i przemieszczenia). Tak samo, jak w przypadku przyspieszenia, pole „pod krzywą" uważamy za dodatnie, a pole „nad krzywą" za ujemne.



Rys. 2.14. Pole powierzchni między krzywą a osią poziomą i od t_0 do t_1 na wykresach: a) przyspieszenia a, b) prędkości v jako funkcji czasu t

Przykład 2.06. Całkowanie graficzne funkcji $a(t)$, uraz typu „whiplash"

Uraz typu „whiplash" zdarza się często w wypadkach drogowych, gdy samochód zostaje uderzony z tyłu przez inny pojazd. Kilkadziesiąt lat temu stwierdzono, że uraz pochodzi w tym przypadku od spowodowanego uderzeniem pojazdu z tyłu gwałtownego szarpnięcia głowy pasażera w tył, ponad górnym brzegiem siedzenia (stąd nazwa — ang. „whiplash" to bicz, uderzenie biczem). W wyniku tych ustaleń siedzenia samochodów wyposażono w zagłówki, lecz mimo to uszkodzenia kręgów szyjnych wciąż się zdarzają przy uderzeniach samochodów z tyłu.

Podczas wykonanych niedawno badań uszkodzeń kręgów szyjnych przy wypadkach opisanego rodzaju ochotnik został przypięty do siedzenia, które następnie gwałtownie przesunięto do przodu, co miało być symulacją uderzenia samochodu z tyłu przez pojazd poruszający się z prędkością 10,5 km/h. Na rysunku 2.15a przedstawiono zmierzone w tym doświadczeniu przyspieszenie tułowia i głowy ochotnika jako funkcję czasu, przy czym $t = 0$ odpowiada początkowi zderzenia. Przyspieszenie tułowia występuje dopiero po 40 milisekundach od początku zderzenia, bo wcze-

śniej następuje ściśnięcie oparcia siedzenia za pasażerem. Przyspieszenie głowy pasażera zachodzi dopiero po dalszych 70 milisekundach. Ile wynosi prędkość tułowia w chwili, w której pojawia się przyspieszenie głowy pasażera?

PODSTAWOWE FAKTY

Prędkość tułowia w dowolnej chwili można wyznaczyć jako pole pod krzywą na podanym wykresie $a(t)$.

Obliczenia: Wiemy, że w chwili $t_0 = 0$, gdy następuje uderzenie siedzenia z tyłu, prędkość tułowia wynosi $v_0 = 0$. Mamy wyznaczyć prędkość tułowia v_1 w chwili $t_1 = 110$ ms, gdy poruszać się z przyspieszeniem zaczyna również głowa pasażera.

Na podstawie równań (2.27) i (2.28) można stwierdzić, że

$$v_1 - v_0 = \begin{pmatrix} \text{pole pod krzywą } a(t) \\ \text{od } t_0 \text{ do } t_1 \end{pmatrix}. \qquad (2.31)$$

Dla wygody obliczeń podzielmy szukany obszar na trzy części, jak pokazano na rysunku 2.15b. W przedziale czasu od 0 do 40 ms mamy obszar A, którego pole jest równe zeru:

$$\text{pole}_A = 0.$$

W przedziale czasu od 40 do 100 ms mamy obszar B, który jest trójkątem o polu

$$\text{pole}_B = \tfrac{1}{2}(0{,}06\text{ s})(50\text{ m/s}^2) = 1{,}5\text{ m/s}.$$

W przedziale czasu od 100 do 110 ms mamy obszar C, który jest prostokątem o polu

$$\text{pole}_C = (0{,}01\text{ s})(50\text{ m/s}^2) = 0{,}5\text{ m/s}.$$

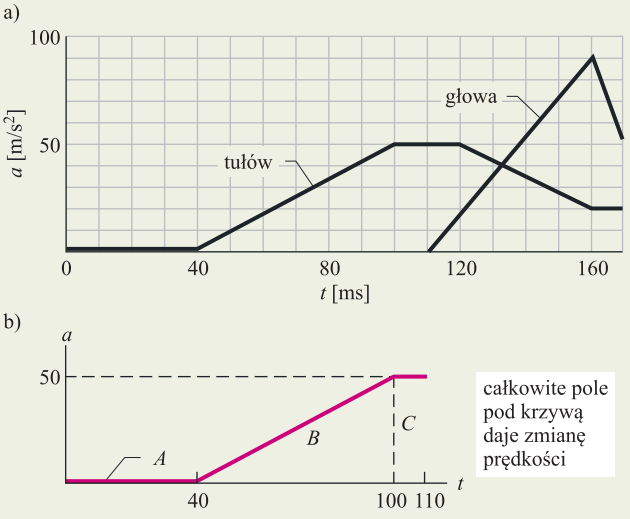
Podstawiając te wartości oraz $v_0 = 0$ do równania (2.31), otrzymujemy

$$v_1 - 0 = 0 + 1{,}5\text{ m/s} + 0{,}5\text{ m/s},$$

czyli

$$v_1 = 2\text{ m/s} = 7{,}2\text{ km/h}. \qquad \text{(odpowiedź)}$$

Uwaga: Gdy głowa zaczyna się przemieszczać do przodu, tułów ma już prędkość 7,2 km/h. Badacze uważają, że przyczyną urazów kręgów szyjnych przy uderzeniach pojazdu z tyłu jest właśnie ta różnica prędkości tułowia i głowy w początkowej fazie zderzenia. Gwałtowne szarpnięcie głowy w tył, które zachodzi nieco później, może jeszcze pogłębiać uraz, zwłaszcza gdy siedzenie nie ma zagłówka.



Rys. 2.15. a) Zależności $a(t)$ dla tułowia i głowy ochotnika biorącego udział w symulacji zderzenia drogowego, przy którym samochód zostaje uderzony z tyłu. b) Podział obszaru między krzywą $a(t)$ a osią x na trzy części, co ułatwia wyznaczenie całkowitego pola powierzchni

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Podsumowanie

Położenie *Położenie* ciała na osi x, czyli współrzędną punktu, w którym się ono znajduje, wyznaczamy w stosunku do **początku**, czyli punktu zerowego osi. Położenie może być dodatnie lub ujemne, zależnie od tego, po której stronie początku osi znajduje się ciało, może też być równe zeru, jeśli ciało znajduje się w początku osi. **Kierunek dodatni** osi to kierunek, w którym wzrastają współrzędne dodatnie punktów osi; kierunek przeciwny to **kierunek ujemny** tej osi.

Przemieszczenie *Przemieszczeniem* Δx ciała nazywamy zmianę jego położenia:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \qquad (2.1)$$

Przemieszczenie jest wielkością wektorową. Jest dodatnie, jeśli ciało przemieściło się w dodatnim kierunku osi x, oraz ujemne, jeśli ciało przemieściło się w kierunku ujemnym.

Prędkość średnia Jeśli ciało zmieniło położenie z x_1 na x_2 w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$, to *prędkość średnia* w tym przedziale czasu wynosi

$$v_{\text{śr}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

Znak wielkości $v_{\text{śr}}$ wskazuje średni kierunek ruchu ($v_{\text{śr}}$ jest wielkością wektorową). Prędkość średnia nie zależy od drogi, po jakiej poruszała się cząstka, a tylko od jej położenia początkowego i końcowego.

Na wykresie x jako funkcji t prędkość średnia w przedziale czasu Δt jest równa nachyleniu prostej przechodzącej przez punkty na krzywej, odpowiadające początkowi i końcowi tego przedziału czasu.

Średnia wartość bezwzględna prędkości *Średnia wartość bezwzględna prędkości* $s_{\text{śr}}$ ciała w przedziale czasu Δt zależy od drogi, którą przebywa ciało w tym przedziale czasu:

$$s_{\text{śr}} = \frac{\text{całkowita droga}}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

Prędkość chwilowa *Prędkość chwilowa* (czyli po prostu **prędkość**) v ciała, jest równa

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \tag{2.4}$$

przy czym wielkości Δx i Δt są zdefiniowane w równaniu (2.2). Prędkość chwilowa (w pewnej chwili) jest równa nachyleniu wykresu x jako funkcji t w punkcie odpowiadającym tej chwili.

Przyspieszenie średnie *Przyspieszenie średnie* jest to iloraz zmiany prędkości Δv ciała i przedziału czasu Δt, w jakim zaszła ta zmiana:

$$a_{\text{śr}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{2.7}$$

Znak przyspieszenia średniego wskazuje kierunek wektora $a_{\text{śr}}$.

Przyspieszenie chwilowe *Przyspieszenie chwilowe* (czyli po prostu **przyspieszenie**) a ciała jest równe pierwszej pochodnej prędkości $v(t)$ względem czasu, czyli drugiej pochodnej położenia $x(t)$ względem czasu:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2.8, 2.9}$$

Na wykresie v jako funkcji t przyspieszenie a w chwili t jest równe nachyleniu krzywej w punkcie odpowiadającym tej chwili.

Przyspieszenie stałe Ruch ciała ze stałym przyspieszeniem jest opisany przez pięć równań zebranych w tabeli 2.1:

$$v = v_0 + at, \tag{2.11}$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2, \tag{2.15}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \tag{2.16}$$

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t, \tag{2.17}$$

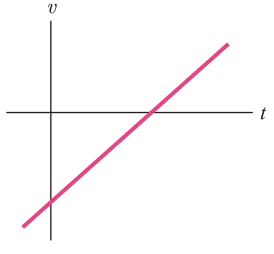
$$x - x_0 = vt - \tfrac{1}{2}at^2. \tag{2.18}$$

Równania te *nie są spełnione*, gdy przyspieszenie nie jest stałe.

Spadek swobodny Ważnym przykładem ruchu po prostej ze stałym przyspieszeniem jest ruch ciała spadającego lub wznoszącego się swobodnie w pobliżu powierzchni Ziemi. Do opisu tego ruchu stosujemy równania ruchu ze stałym przyspieszeniem, przyjmując dwie zmiany w ich zapisie: 1) oś pionową, wzdłuż której zachodzi ruch, nazywamy osią y o kierunku dodatnim, skierowanym *ku górze*; 2) zamiast a wstawiamy $-g$, przy czym g jest wartością bezwzględną przyspieszenia ziemskiego. W pobliżu powierzchni Ziemi $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

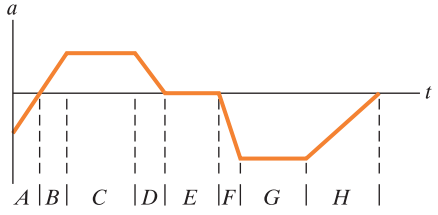
Pytania

1 Na rysunku 2.16 przedstawiono wykres prędkości cząstki poruszającej się wzdłuż osi x jako funkcji czasu. Jaki jest kierunek ruchu cząstki: a) początkowy, b) końcowy? c) Czy w jakiejś chwili cząstka się nie porusza? d) Czy przyspieszenie cząstki jest dodatnie, czy ujemne? e) Czy jest ono stałe, czy zmienne?



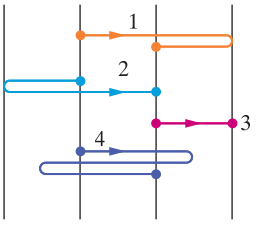
Rys. 2.16. Pytanie 1

2 Na rysunku 2.17 przedstawiono przyspieszenie $a(t)$ ratlerka goniącego owczarka alzackiego wzdłuż osi x. Wskaż przedział lub przedziały czasu, w których ratlerek biegnie ze stałą prędkością.



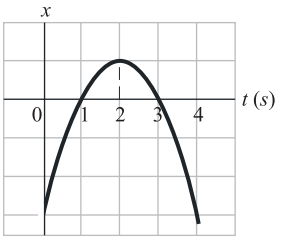
Rys. 2.17. Pytanie 2

3 Na rysunku 2.18 przedstawiono drogi przebyte przez cztery ciała w tym samym czasie. Linie pionowe są jednakowo odległe od siebie. Uszereguj te ciała pod względem: a) średniej prędkości, b) średniej wartości bezwzględnej prędkości, poczynając od największej wartości tych wielkości.



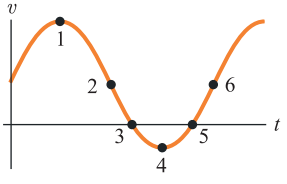
Rys. 2.18. Pytanie 3

4 Na rysunku 2.19 przedstawiono wykres położenia cząstki na osi x jako funkcji czasu. a) Jaki jest znak położenia cząstki w chwili $t = 0$? Czy prędkość cząstki jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru w chwili: b) $t = 1$ s, c) $t = 2$ s, d) $t = 3$ s? e) Ile razy cząstka przechodzi przez punkt $x = 0$?



Rys. 2.19. Pytanie 4

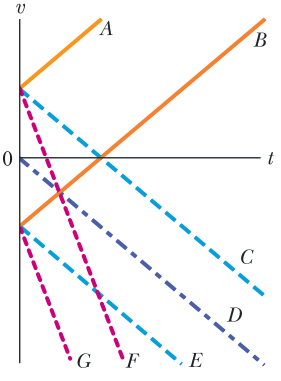
5 Na rysunku 2.20 przedstawiono zależność od czasu prędkości cząstki poruszającej się wzdłuż pewnej osi. Punkt 1 to najwyższy punkt tej krzywej, punkt 4 to jej punkt najniższy, a punkty 2 i 6 leżą na tej samej wysokości. W jakim kierunku porusza się cząstka: a) w chwili $t = 0$, b) w chwili, której odpowiada punkt 4? c) W którym z sześciu oznaczonych punktów cząstka zmienia kierunek ruchu? d) Uszereguj te sześć punktów według wartości bezwzględnej przyspieszenia cząstki, od największej do najmniejszej.



Rys. 2.20. Pytanie 5

6 W chwili $t = 0$ cząstka, poruszająca się wzdłuż osi x, znajduje się w punkcie $x_0 = -20$ m. Niżej podano znak prędkości początkowej cząstki v_0 (w chwili t_0) oraz znak jej stałego przyspieszenia a w czterech przypadkach: 1) +, +; 2) +, −; 3) −, +; 4) −, −. W którym z tych przypadków cząstka: a) będzie miała w pewnej chwili prędkość równą zeru, b) przejdzie w pewnej chwili przez początek osi, c) nigdy nie przejdzie przez początek osi?

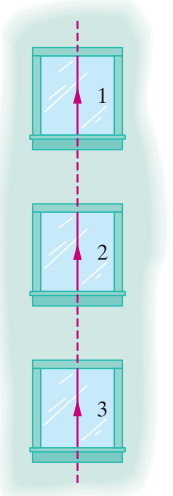
7 Przechylając się przez barierkę na moście, wypuszczasz z ręki jajko (bez prędkości początkowej), a drugie rzucasz w dół (nadajesz mu pewną prędkość początkową). Które z krzywych z rysunku 2.21 mogą opisywać zależność $v(t)$ dla: a) jajka upuszczonego, b) jajka rzuconego w dół? (Krzywe A i B są równoległe, podobnie krzywe C, D, i E, a także krzywe F i G).



Rys. 2.21. Pytanie 7

8 Poniższe równania opisują zależność $v(t)$ pewnych cząstek: a) $v = 3$, b) $v = 4t^2 + 2t - 6$, c) $v = 3t - 4$, d) $v = 5t^2 - 3$. W którym z tych przypadków można stosować równania z tabeli 2.1?

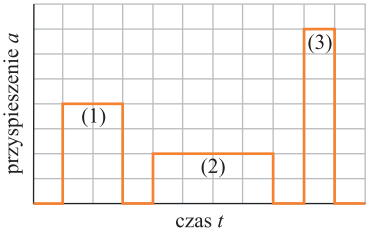
9 Jak pokazano na rysunku 2.22, rzucona pionowo do góry mandarynka mija trzy okna o jednakowej wysokości, znajdujące się w takiej samej odległości od siebie. Uszereguj okna pod względem: a) średniej prędkości, b) czasu, c) wartości przyspieszenia, d) zmiany prędkości Δv, odpowiadających przelotowi mandarynki przed każdym z okien, od największych do najmniejszych wartości tych wielkości.



Rys. 2.22. Pytanie 9

10 Lecący po raz pierwszy balonem pasażer postanawia pożywić się zaraz po starcie i niechcący upuszcza jabłko za brzeg gondoli. W chwili tego upuszczenia jabłka balon porusza się ze skierowanym w górę przyspieszeniem o wartości bezwzględnej 4 m/s^2 i skierowaną w górę prędkością o wartości bezwzględnej 2 m/s. Podaj: a) wartość bezwzględną i b) kierunek przyspieszenia jabłka tuż po wypadnięciu z gondoli. c) Czy jabłko poruszało się w tej chwili do góry, w dół, lub może wcale się nie poruszało? d) Jaka była w tej chwili wartość bezwzględna prędkości jabłka? e) Czy niedługo potem prędkość jabłka rosła, malała, czy może pozostawała stała?

11 Rysunek 2.23 dotyczy cząstki, która porusza się wzdłuż osi x i w trzech przedziałach czasu doznaje przyspieszenia. Bez pisemnych obliczeń uszereguj te okresy przyspieszania cząstki w zależności od uzyskanego w nich wzrostu prędkości cząstki, od największego do najmniejszego.



Rys. 2.23. Pytanie 11

Zadania

GO Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

•–••• Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

Podrozdział 2.1. Położenie, przemieszczenie i prędkość średnia

•1 Jedziesz samochodem z prędkością 90 km/h i trochę przysypiasz. Jaką drogę przebywa samochód, gdy zamykasz oczy na 0,5 s?

•2 Pewnego dnia a) przeszedłeś prostą drogą 73,2 m z prędkością 1,22 m/s, a następnie przebiegłeś 73,2 m z prędkością 3,05 m/s, a innego dnia b) tą samą drogą najpierw szedłeś przez 1 minutę z prędkością 1,22 m/s, a następnie biegłeś przez 1 minutę z prędkością 3,05 m/s. Oblicz w obu przypadkach swoją prędkość średnią. Sporządź dla obu przypadków wykres x jako funkcji t i wyjaśnij, jak można wyznaczyć prędkość średnią za pomocą tych wykresów.

•3 ssm www Samochód jadący po prostej drodze przebył 40 km z prędkością 30 km/h, a następne 40 km, w tym samym kierunku, przebył z prędkością 60 km/h. a) Ile wynosi średnia prędkość samochodu w czasie 80-kilometrowej podróży (przyjmij, że samochód porusza się w dodatnim kierunku osi x)? b) Ile wynosi średnia wartość bezwzględna prędkości pojazdu? c) Wykreśl zależność x od t dla tego ruchu i pokaż, jak z wykresu wyznaczyć prędkość średnią.

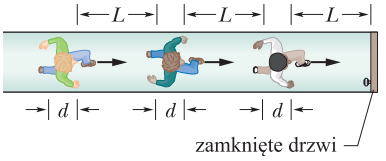
•4 Samochód wjeżdża na wzgórze z prędkością 40 km/h, a potem zjeżdża z niego tą samą drogą z prędkością 60 km/h. Ile wynosi prędkość średnia dla całej tej przejażdżki?

•5 ssm Położenie ciała poruszającego się wzdłuż osi x jest dane wzorem $x = 3t - 4t^2 + t^3$, przy czym x wyrażono w metrach, a t w sekundach. a) Ile wynosi położenie ciała w chwilach $t = 1$, 2, 3 i 4 s? b) Jakie jest przemieszczenie ciała od chwili $t = 0$ do chwili $t = 4$ s? c) Ile wynosi średnia prędkość ciała w przedziale czasu od $t = 2$ s do $t = 4$ s? d) Sporządź wykres x jako funkcji t dla $0 \leqslant t \leqslant 4$ s i pokaż, jak, korzystając z tego wykresu, znaleźć odpowiedź na pytanie (c).

•6 Chris Huber ustanowił w 1992 roku światowy rekord prędkości jazdy rowerem (pojazdem napędzanym przez człowieka). Dystans 200 m przebył on w imponującym czasie 6,509 s i kończąc jazdę, wykrzyknął: „Cogito ergo zoom!" (myślę, więc pędzę!). W roku 2001 Sam Whittingham pobił rekord Hubera o 19 km/h. Jaki czas uzyskał on na dystansie 200 m?

••7 Dwa pociągi jadą naprzeciwko siebie po prostym torze z prędkością 30 km/h każdy. Ptak rozwijający w locie prędkość 60 km/h wylatuje z lokomotywy jednego z pociągów, gdy są one odległe od siebie o 60 km i leci w stronę drugiego pociągu. Doleciawszy do niego ptak (chyba szalony) zawraca i leci z powrotem do pierwszego itd. Jaką całkowitą drogę przeleci ptak aż do zderzenia się pociągów ze sobą?

••8 GO *Paniczna ucieczka.* Na rysunku 2.24 widać grupkę ludzi starających się uciec drzwiami wyjściowymi, które jednak okazują się zamknięte. Ludzie biegną w stronę drzwi z prędkością $v = 3{,}5$ m/s każdy, kolejne osoby są od siebie odległe o $L = 1{,}75$ m, a średni rozmiar osoby w kierunku ruchu wynosi $d = 0{,}25$ m. Sytuacja na rysunku 2.24 dotyczy chwili $t = 0$. a) Z jaką średnią szybkością narasta rozmiar podłużny grupy ludzi przy drzwiach? b) Po jakim czasie ten rozmiar osiągnie wartość 5 m? Odpowiedź pokazuje, jak szybko taka sytuacja staje się niebezpieczna.



Rys. 2.24. Zadanie 8

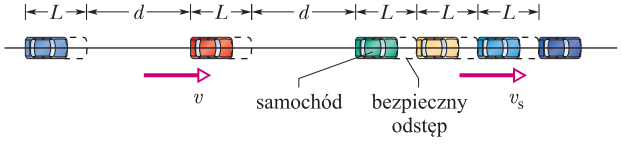
••9 ilw Dwaj zawodnicy uzyskali w biegu na 1 km czasy: 2 min 27,95 s (zawodnik nr 1 na torze nr 1) i 2 min 28,15 s (zawodnik nr 2 na torze nr 2). Wyglądało więc na to, że zawodnik nr 1 biegł szybciej. Okazało się jednak, że długość toru nr 2, L_2, mogła być nieco większa niż długość toru nr 1, L_1. Jak duża może być różnica $L_2 - L_1$, aby wciąż można było stwierdzić, że zawodnik nr 1 biegł szybciej?

••10 Rekordy prędkości samochodów wyścigowych mierzone są w sytuacji, w której samochód przebywa tę samą prostą drogę o długości d w jednym kierunku (w czasie t_1), a następnie w kierunku przeciwnym (w czasie t_2). Chodzi o to, aby wyeliminować wpływ wiatru. a) Czy prędkość samochodu w warunkach bezwietrznych v_s powinna być wyznaczona jako wartość średnia ilorazów d/t_1 i d/t_2 (metoda nr 1), czy jako iloraz d i wartości średniej t_1 i t_2 (metoda nr 2)? b) Ile wynosi względna różnica wyników uzyskanych obiema metodami, gdy wiatr wieje wzdłuż kierunku jazdy ze stałą

prędkością v_w, której stosunek do prędkości samochodu jest równy 0,024?

••11 GO Jesteś umówiony o godzinie 11.15 na spotkanie w miejscu odległym od domu o 300 km. Masz zamiar jechać z prędkością 100 km/h, więc wyruszasz w drogę o godzinie 8, co daje ci pewną rezerwę czasu. Przez pierwsze 100 km drogi jedziesz z planowaną prędkością, ale potem napotykasz roboty drogowe, które zmuszają cię do jazdy przez 40 km z prędkością zaledwie 40 km/h. Z jaką najmniejszą prędkością musisz przejechać pozostałą część drogi, by zdążyć na spotkanie?

•••12 *Drogowa fala uderzeniowa*. Nagłe spowolnienie ruchu ciągłego strumienia pojazdów powoduje powstanie impulsu, nazywanego *falą uderzeniową*, który może się przemieszczać w kierunku ruchu, w kierunku przeciwnym lub pozostawać w tym samym miejscu strumienia. Na rysunku 2.25 widzimy szereg samochodów poruszających się z prędkością $v = 25$ m/s w kierunku grupki samochodów, których ruch został spowolniony do prędkości $v_s = 5$ m/s. Załóżmy, że dojeżdżające do samochodów powolnych samochody szybkie zwiększają długość szeregu tych ostatnich o $L = 12$ m (długość pojazdu plus bezpieczny odstęp), hamując gwałtownie w ostatniej chwili. a) Dla jakiej odległości d między samochodami szybkimi otrzymujemy stacjonarną (nieprzemieszczającą się) drogową falę uderzeniową? Jakie będą: b) prędkość i c) kierunek fali uderzeniowej (kierunek ruchu czy kierunek przeciwny), gdy odległość pojazdów szybkich będzie dwa razy większa niż d?



Rys. 2.25. Zadanie 12

•••13 ilw Jedziesz autostradą międzystanową z San Antonio do Houston z prędkością 55 km/h przez połowę *czasu* jazdy, a drugą połowę czasu z prędkością 90 km/h. Wracając, połowę *drogi* przebywasz z prędkością 55 km/h, a drugą połowę z prędkością 90 km/h. Ile wynosi średnia wartość bezwzględna twojej prędkości: a) w czasie jazdy z San Antonio do Houston, b) w czasie drogi powrotnej z Houston do San Antonio, c) w czasie całej podróży? d) Ile wynosi twoja prędkość średnia w czasie całej podróży? e) Wykreśl zależność x od t dla przypadku (a), zakładając, że ruch odbywa się przez cały czas w kierunku dodatnim osi x. Pokaż, jak z tego wykresu wyznaczyć prędkość średnią.

Podrozdział 2.2. Prędkość chwilowa

•14 GO Elektron porusza się wzdłuż osi x, a jego położenie jest dane wzorem $x = 16te^{-t}$ m, gdzie t wyrażono w sekundach. W jakiej odległości od początku osi elektron znajduje się przez chwilę w bezruchu?

•15 GO Położenie cząstki opisano wzorem $x = 4 - 12t + 3t^2$, przy czym t wyrażono w sekundach, a x w metrach. a) Ile wynosi prędkość cząstki w chwili $t = 1$ s? b) Czy w tej chwili porusza się ona w dodatnim, czy w ujemnym kierunku osi x? c) Ile wynosi wartość bezwzględna jej prędkości w tej chwili? d) Czy w następnych chwilach wartość bezwzględna jej prędkości jest większa, czy mniejsza? Na następne dwa pytania postaraj się odpowiedzieć bez wykonywania dalszych obliczeń. e) Czy w jakiejkolwiek chwili prędkość cząstki jest równa zeru? Jeśli tak, to ile wynosi wtedy t? f) Czy istnieje chwila późniejsza niż $t = 3$ s, w której cząstka poruszałaby się w ujemnym kierunku osi x? Jeśli tak, to ile wynosi wtedy t?

•16 Zależność położenia cząstki poruszającej się wzdłuż osi x od czasu $x(t)$ jest dana wzorem $x = 4 - 6t^2$, przy czym x jest wyrażone w metrach, a t w sekundach. a) W jakiej chwili cząstka ma prędkość równą zeru i b) gdzie się wtedy znajduje? W jakich dwóch chwilach o t c) ujemnym i d) dodatnim cząstka przechodzi przez początek osi? e) Sporządź wykres x jako funkcji t w przedziale od -5 s do $+5$ s. f) Chcemy, aby krzywa na wykresie przesunęła się w prawo. Czy powinniśmy dopisać po prawej stronie wyrażenia na $x(t)$ wyraz $+20t$, czy wyraz $-20t$? g) Czy po tej zmianie współrzędna x punktu, w którym prędkość cząstki jest równa zeru, wzrośnie, czy zmaleje?

••17 Położenie cząstki, poruszającej się wzdłuż osi x, jest opisane wzorem $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$, przy czym x jest wyrażone w centymetrach, a t — w sekundach. Oblicz: a) prędkość średnią w przedziale czasu od $t = 2$ s do $t = 3$ s; b) prędkość chwilową w chwili $t = 2$ s; c) prędkość chwilową w chwili $t = 3$ s; d) prędkość chwilową w chwili $t = 2{,}5$ s, e) prędkość chwilową cząstki, gdy jest ona w połowie drogi między położeniami zajmowanymi w chwilach $t = 2$ s i $t = 3$ s. f) Wykreśl zależność x od t i wskaż, jak otrzymać graficznie odpowiedzi na poprzednie pytania.

Podrozdział 2.3. Przyspieszenie

•18 Położenie ciała poruszającego się wzdłuż osi x zmienia się zgodnie ze wzorem $x = 12t^2 - 2t^3$, gdzie x jest wyrażone w metrach, a t w sekundach. Wyznacz: a) położenie, b) prędkość i c) przyspieszenie ciała w chwili $t = 3$ s. d) Jaka jest największa współrzędna punktu, do którego ciało może dotrzeć i e) w jakiej chwili to nastąpi? f) Jaką największą prędkość może uzyskać to ciało i g) w jakiej chwili to nastąpi? h) Jakie jest przyspieszenie ciała, gdy jego prędkość jest równa zeru (nie licząc chwili $t = 0$)? i) Wyznacz średnią prędkość ciała w przedziale od $t = 0$ do $t = 3$ s.

•19 ssm Cząstka ma w pewnej chwili prędkość o wartości bezwzględnej równej 18 m/s skierowaną w dodatnim kierunku osi x. W chwili późniejszej o 2,4 s wartość bezwzględna jej prędkości wynosi 30 m/s, lecz cząstka porusza się wówczas w kierunku przeciwnym. Jaka jest wartość bez-

względna i kierunek średniego przyspieszenia cząstki w ciągu tych 2,4 s?

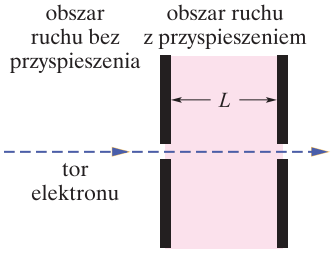
•20 Położenie cząstki jest dane wzorem $x = 20t - 5t^3$, przy czym x jest wyrażone w metrach, a t w sekundach. a) Czy prędkość cząstki jest kiedykolwiek równa zeru, a jeśli tak, to kiedy? b) Kiedy przyspieszenie cząstki a jest równe zeru? W jakim przedziale czasu (dla t dodatnich czy ujemnych) a jest c) ujemne, d) dodatnie? e) Sporządź wykresy $x(t)$, $v(t)$ i $a(t)$.

••21 Od chwili $t = 0$ do chwili $t = 5$ min człowiek stoi nieruchomo, a następnie od chwili $t = 5$ min do chwili $t = 10$ min idzie szybko po linii prostej ze stałą prędkością równą 2,2 m/s. Ile wynosi: a) jego średnia prędkość $v_{śr}$, b) jego średnie przyspieszenie $a_{śr}$ w przedziale czasu od 2 min do 8 min? Ile wynosi: c) $v_{śr}$, d) $a_{śr}$ w przedziale czasu od 3 min do 9 min? e) Naszkicuj wykresy zależności $x(t)$ i $v(t)$ oraz pokaż, jak, korzystając z tych wykresów, otrzymać odpowiedzi na pytania od (a) do (d).

••22 Położenie cząstki poruszającej się wzdłuż osi x zależy od czasu, zgodnie z równaniem $x = ct^2 - bt^3$, przy czym x wyrażono w metrach, a t w sekundach. W jakich jednostkach muszą być wyrażone stałe a) c i b) b? Załóżmy, że ich wartości liczbowe wynoszą odpowiednio 3 i 2. c) W jakiej chwili cząstka osiąga swe największe położenie na osi x? Ile wynosi: d) droga przebyta przez cząstkę, e) jej przemieszczenie w przedziale czasu od $t = 0$ do $t = 4$ s? Ile wynosi prędkość cząstki w chwilach: f) $t = 1$ s, g) $t = 2$ s, h) $t = 3$ s, i) $t = 4$ s? Ile wynosi przyspieszenie cząstki w chwilach: j) $t = 1$ s, k) $t = 2$ s, l) $t = 3$ s, m) $t = 4$ s?

Podrozdział 2.4. Ruch ze stałym przyspieszeniem

•23 ssm Elektron o prędkości początkowej o wartości $v_0 = 1{,}5 \cdot 10^5$ m/s wpada w obszar o długości $L = 1$ cm, w którym jest przyspieszany polem elektrycznym (rys. 2.26). Wylatuje z tego obszaru z prędkością o wartości $v = 5{,}7 \cdot 10^6$ m/s. Ile wynosiło jego przyspieszenie przy założeniu, że było ono stałe?



Rys. 2.26. Zadanie 23

•24 *Wyrzutnie grzybowe*. Zarodniki niektórych grzybów są wyrzucane w powietrze jak z katapulty. Para wodna z powietrza skrapla się na zarodniku, tworząc kroplę wody z jednej jego strony, a cienką warstwę z drugiej. Zarodnik zgina się pod ciężarem kropli, a gdy kropla dociera do warstwy, wcieka w nią i zarodnik zostaje podrzucony do góry tak gwałtownie, że odrywa się od grzyba. W fazie wyrzutu zarodnik uzyskuje średnio prędkość 1,6 m/s, przebywając w tej fazie drogę 5 μm. W powietrzu prędkość zarodnika spada do zera na drodze około 1 mm. Załóż, że w obu sytuacjach zarodnik porusza się ze stałym przyspieszeniem, i oblicz to przyspieszenie: a) w fazie wyrzutu, b) w powietrzu.

•25 Pojazd elektryczny znajduje się początkowo w spoczynku, a potem zaczyna się poruszać ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej z przyspieszeniem równym 2 m/s^2. Po osiągnięciu prędkości 20 m/s pojazd zaczyna zwalniać ze stałym przyspieszeniem równym 1 m/s^2 i w końcu się zatrzymuje. a) Jak długo pojazd znajdował się w ruchu? b) Jaką przebył przy tym drogę?

•26 Mion (jedna z cząstek elementarnych) wpada w pewien obszar z prędkością równą $5 \cdot 10^6$ m/s i jest w nim spowalniany w tempie $1{,}25 \cdot 10^{14}$ m/s^2. a) Po przebyciu jakiej drogi mion się zatrzyma? b) Sporządź dla tego mionu wykresy zależności $x(t)$ i $v(t)$.

•27 Elektron porusza się ze stałym przyspieszeniem równym +3,2 m/s^2. W pewnej chwili jego prędkość wynosiła +9,6 m/s. Wyznacz jego prędkość w chwili: a) o 2,5 s wcześniejszej, b) o 2,5 s późniejszej.

•28 Samochód wyposażony w dobre opony może uzyskać w czasie hamowania na suchej nawierzchni stałe przyspieszenie o wartości 4,92 m/s^2. a) Po jakim czasie może się zatrzymać ten samochód, jeśli początkowo jedzie z prędkością 24,6 m/s? b) Jaką drogę przebędzie on w czasie hamowania? c) Sporządź wykresy x jako funkcji t i v jako funkcji t opisujące ruch samochodu w czasie jego hamowania.

•29 ilw Wysokość szybu pewnej windy wynosi 190 m. Maksymalna prędkość kabiny jest równa 305 m/min. Przyspieszenie windy w obydwu kierunkach jazdy ma wartość 1,22 m/s^2. a) Na jakiej drodze ruszający z miejsca wagonik osiąga maksymalną prędkość jazdy? b) Jak długo trwa pełny, 190-metrowy przejazd wagonika bez zatrzymania po drodze, licząc od chwili zatrzymania na dole do chwili zatrzymania na górze?

•30 Hamulce twojego samochodu są zdolne hamować pojazd z przyspieszeniem równym 5,2 m/s^2. a) Jeśli jedziesz z prędkością o wartości 137 km/h i nagle spostrzegasz patrol policyjny, to w jakim czasie możesz zwolnić do dopuszczalnej prędkości 90 km/h? Odpowiedź na to pytanie pokaże ci, że nie masz szans, aby uniknąć zmierzenia twej nadmiernej prędkości przez radar policyjny. b) Sporządź wykresy zależności $x(t)$ i $v(t)$ w czasie hamowania samochodu.

•31 ssm Wyobraź sobie, że pojazd rakietowy porusza się w kosmosie z przyspieszeniem o wartości 9,8 m/s^2, co daje załodze złudzenie, że znajduje się w standardowym ziemskim polu grawitacyjnym. a) Zakładając, że w chwili początkowej pojazd spoczywa, oblicz czas potrzebny na osiągnięcie prędkości równej jednej dziesiątej prędkości światła (przyjmij, że prędkość światła wynosi $3 \cdot 10^8$ m/s). b) Jaką drogę przebędzie pojazd w tym czasie?

•32 Rekord świata prędkości lądowej został ustanowiony przez pułkownika Johna P. Stappa, który w marcu 1954 roku osiągnął w saniach rakietowych prędkość o wartości 1020 km/h. Pojazd został zatrzymany w czasie 1,4 s (patrz rys. 2.7). Wyraź przyspieszenie, jakiego doznawał rekordzista w czasie zatrzymywania pojazdu, w jednostkach przyspieszenia ziemskiego g.

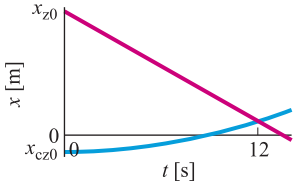
•33 ssm ilw Samochód jadący z prędkością 56 km/h znajdował się w odległości 24 m od bariery, gdy kierowca z całej siły nacisnął na pedał hamulca. Dwie sekundy później pojazd uderzył w barierę. a) Ile wynosiło stałe przyspieszenie pojazdu w czasie jego hamowania? b) Ile wynosiła prędkość samochodu w chwili zderzenia?

••34 GO Jak widać na rysunku 2.27, samochody czerwony i zielony, identyczne poza kolorem, na jaki je pomalowano, jadą w przeciwnych kierunkach po sąsiednich pasach drogi równoległej do osi x. W chwili $t = 0$ współrzędna samochodu czerwonego jest równa $x_{cz} = 0$, a samochodu zielonego — $x_z = 220$ m. Gdyby samochód czerwony jechał ze stałą prędkością 20 km/h, pojazdy minęłyby się w punkcie $x = 44{,}5$ m, a gdyby ta stała prędkość wynosiła 40 km/h, minęłyby się w punkcie $x = 76{,}6$ m. Wyznacz a) prędkość początkową i b) stałe przyspieszenie samochodu zielonego.



Rys. 2.27. Zadania 34 i 35

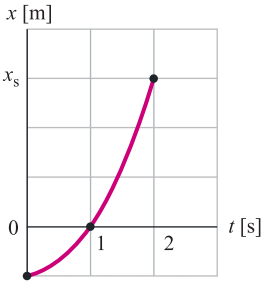
••35 Samochody czerwony i zielony z rysunku 2.27 poruszają się w przeciwnych kierunkach po równoległych pasach drogi. Na rysunku 2.28 przedstawiono wykres ich położenia jako funkcji czasu, przy czym położenia początkowe samochodów (w chwili $t = 0$) wynoszą $x_{z0} = 270$ m i $x_{cz0} = -35$ m. Zielony samochód porusza się ze stałą prędkością równą 20 m/s, a czerwony samochód ma w chwili $t = 0$ prędkość równą zeru. Wyznacz wartość bezwzględną przyspieszenia samochodu czerwonego.



Rys. 2.28. Zadanie 35

••36 Samochód przebywa wzdłuż osi x drogę 900 m, przy czym znajduje się w spoczynku i na początku drogi (w punkcie $x = 0$) i na jej końcu (w punkcie $x = 900$ m). Pierwszą jedną czwartą drogi porusza się on z przyspieszeniem $+2{,}25$ m/s^2, a pozostałą część drogi — z przyspieszeniem $-0{,}75$ m/s^2. Wyznacz: a) czas, w którym samochód przebył całą drogę o długości 900 m, b) jego maksymalną prędkość. c) Sporządź wykres położenia x, prędkości v i przyspieszenia a tego samochodu jako funkcji czasu t dotyczących opisanej podróży.

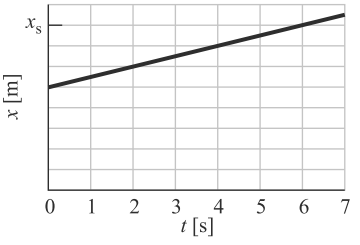
••37 Wykres na rysunku 2.29 ilustruje ruch cząstki wzdłuż osi x, ze stałym przyspieszeniem. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $x_s = 6$ m. Jaka jest a) wartość bezwzględna i b) kierunek przyspieszenia cząstki?



Rys. 2.29. Zadanie 37

••38 a) Ile może wynieść maksymalna prędkość pociągu metra między stacjami, jeśli te stacje są od siebie odległe o 806 m, a największe znośne dla pasażerów przyspieszenie jest równe 1,34 m/s^2? b) Jak długo jedzie metro z jednej stacji do drugiej? c) Ile może wynieść maksymalna średnia prędkość pociągu metra od wyjazdu z pierwszej stacji do wyjazdu z drugiej, jeśli czas postoju na stacji wynosi 20 s? d) Sporządź wykres x, v i a jako funkcji t od wyjazdu pociągu z pierwszej stacji do wyjazdu z drugiej.

••39 Samochody A i B jadą w tym samym kierunku po sąsiednich pasach ruchu. Na rysunku 2.30 przedstawiono położenie x samochodu A jako funkcję czasu od chwili $t = 0$ do chwili $t = 7$ s. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $x_s = 32$ m. W chwili $t = 0$ samochód B znajduje się w punkcie $x = 0$, ma prędkość 12 m/s i stałe ujemne przyspieszenie o wartości bezwzględnej a_B. a) Ile musi wynosić a_B, aby samochody znajdowały się (przez chwilę) w tym samym punkcie w chwili $t = 4$ s? b) Ile razy podczas swego ruchu samochody znajdowały się (przez chwilę) w tym samym punkcie dla tej wartości a_B? c) Sporządź wykres położenia x samochodu B od czasu t na rysunku 2.30. Ile razy podczas swego ruchu samochody będą znajdowały się (przez chwilę) w tym samym punkcie dla wartości a_B d) większej i e) mniejszej od wartości obliczonej w punkcie (a)?

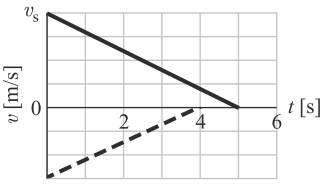


Rys. 2.30. Zadanie 39

••40 Jadąc samochodem z maksymalną dozwoloną w danym rejonie prędkością 55 km/h i zbliżając się do skrzyżowania ze światłami, spostrzegasz, że zapala się żółte światło. Hamulce twojego pojazdu umożliwiają uzyskanie przyspieszenia o wartości co najwyżej $a = 5{,}18$ m/s^2, a twój czas reakcji, który musi upłynąć, zanim uruchomisz hamulce, wynosi co najmniej $T = 0{,}75$ s. Nie chciałbyś, aby po zapaleniu się czerwonego światła twój samochód znalazł się na skrzyżowaniu. Co powinieneś zrobić: hamować, by zatrzymać się

przed skrzyżowaniem, czy jechać nadal z prędkością 55 km/h, aby zdążyć je przejechać, jeśli twoja odległość od skrzyżowania i czas, przez jaki pali się żółte światło, wynoszą: a) 40 m i 2,8 s, b) 32 m i 1,8 s? A może jest tak, że każde z tych rozwiązań (hamować lub nie) jest dobre, albo wreszcie żadne nie umożliwia osiągnięcia celu, tzn. znalezienia się poza skrzyżowaniem po zapaleniu się czerwonego światła?

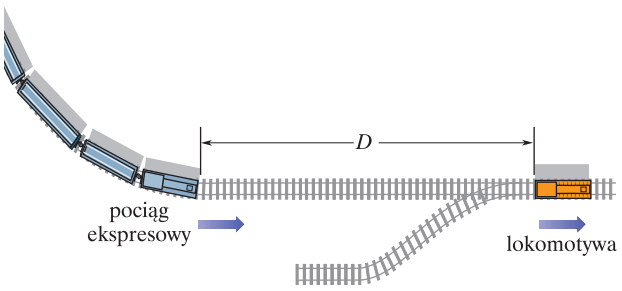
••41 GO Dwa pociągi jadą po tym samym torze w przeciwnych kierunkach. Ich maszyniści spostrzegają to w pewnej chwili z przerażeniem i zaczynają hamować, by uniknąć zderzenia. Na rysunku 2.31 przedstawiono, jak zmieniają się prędkości pociągów z upływem czasu t podczas ich hamowania. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $v_s = 40$ m/s. Maszyniści zaczęli hamować swe pociągi w chwili, gdy były one od siebie odległe o 200 m. Oblicz odległość pociągów od siebie po ich zatrzymaniu.



Rys. 2.31. Zadanie 41

•••42 GO Kłócisz się z kimś przez komórkę, jadąc 25 m za nieoznakowanym samochodem policyjnym. Prędkość obu pojazdów wynosi 110 km/h. Rozmowa odwraca twoją uwagę od jadącego przez tobą samochodu na 2 sekundy (akurat tyle, by spojrzeć na telefon i krzyknąć: „Tego nie zrobię!"). Na początku tych 2 sekund kierujący pojazdem policjant zaczyna gwałtownie hamować z przyspieszeniem 5 m/s^2. a) Ile wynosi odległość samochodów od siebie, gdy znów zaczynasz zajmować się jazdą? b) Przyjmij, że ocena sytuacji zajmuje ci dalsze 0,4 s, a po tym czasie zaczynasz hamować z przyspieszeniem 5 m/s^2. Z jaką prędkością uderzysz w tył samochodu policyjnego?

•••43 GO Gdy pasażerski pociąg ekspresowy jadący z prędkością 161 km/h wychodzi z zakrętu na prosty tor, jego maszynista dostrzega z przerażeniem, że z bocznicy wyjeżdża właśnie omyłkowo na główny tor lokomotywa w odległości $D = 676$ m przed jego pociągiem (rys. 2.32). Lokomotywa porusza się z prędkością 29 km/h. Maszynista pociągu ekspresowego natychmiast zaczyna hamować. a) Jaka musi być wartość bezwzględna stałego opóźnienia pociągu, aby nie doszło do zderzenia? b) Załóż, że w chwili $t = 0$, w której maszynista spostrzega lokomotywę, czoło pociągu znajduje się w punkcie $x = 0$. Naszkicuj wykres zależności $x(t)$ dla lokomotywy i pociągu ekspresowego w dwóch przypadkach: gdy omal nie doszło do zderzenia oraz gdy zderzenie jednak nastąpiło, lecz było bardzo słabe.



Rys. 2.32. Zadanie 43

Podrozdział 2.5. Spadek swobodny

•44 Przerażony zając podskakuje, wznosząc się na wysokość 0,544 m w ciągu pierwszych 0,2 s skoku. a) Z jaką początkową prędkością oderwał się on od ziemi? b) Ile wynosi jego prędkość na wysokości 0,544 m? Jak dużo wyżej jeszcze się wzniesie?

•45 ssm www a) Z jaką prędkością trzeba rzucić piłkę z ziemi pionowo do góry, aby jej maksymalne wzniesienie wyniosło 50 m? b) Jak długo będzie ona w powietrzu? c) Naszkicuj wykresy zależności y, v i a od t dla tej piłki. Na pierwszych dwóch wykresach zaznacz chwilę, w której piłka osiąga wysokość 50 m.

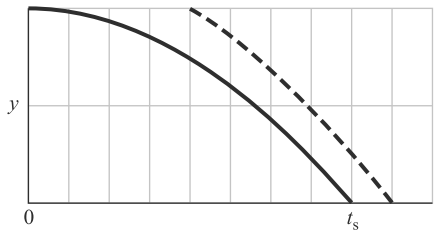
•46 Krople deszczu spadają na ziemię z chmury znajdującej się na wysokości 1700 m. a) Jaką prędkość miałyby te krople w chwili upadku na ziemię, gdyby ich ruch nie był spowalniany w wyniku oporu powietrza? b) Czy byłoby wówczas bezpiecznie spacerować po dworze w czasie silnego deszczu?

•47 ssm Na budowie spadający klucz hydrauliczny uderzył w ziemię z prędkością 24 m/s. a) Na jakiej wysokości wypadł on komuś z ręki? b) Jak długo spadał? c) Naszkicuj wykres zależności y, v i a od t dla tego klucza.

•48 Łobuz rzuca z dachu budynku kamień, pionowo w dół, z prędkością początkową o wartości 12 m/s. Dach znajduje się 30 m nad ziemią. a) Jak długo będzie leciał kamień do chwili uderzenia w ziemię? b) Ile wynosić będzie jego prędkość na końcu lotu?

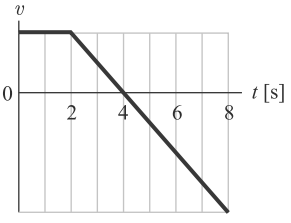
•49 ssm Balon na ogrzane powietrze wznosi się z prędkością 12 m/s. Gdy znajduje się on na wysokości 80 m, za burtę wypada pewien pakunek. a) Po jakim czasie pakunek spadnie na ziemię? b) Z jaką prędkością uderzy on w ziemię?

••50 W chwili $t = 0$ z wiaduktu nad szosą upuszczono jabłko nr 1, a po pewnym czasie z tego samego miejsca rzucono w dół jabłko nr 2. Na rysunku 2.33 pokazano położenie obu jabłek w pionie jako funkcję czasu t od początku ich ruchu do upadku na szosę. Jednostki na osi poziomej są wyznaczone przez współrzędną punktu $t_s = 2$ s. Wyznacz przybliżoną wartość prędkości początkowej jabłka nr 2.



Rys. 2.33. Zadanie 50

••51 Od gondoli balonu doświadczalnego, który urwał się z uwięzi i wznosi się z prędkością 19,6 m/s, odrywa się pewien przyrząd pomiarowy i zaczyna spadać swobodnie na ziemię. Na rysunku 2.34 przedstawiono prędkość przyrządu w pionie jako funkcję czasu, od chwili nieco poprzedzającej jej oderwanie się od gondoli do chwili upadku na ziemię. a) Na jaką największą wysokość ponad punkt, w którym wypadł z gondoli, wzniesie się przyrząd? b) Na jakiej wysokości nad ziemią przyrząd wypadł z gondoli?



Rys. 2.34. Zadanie 51

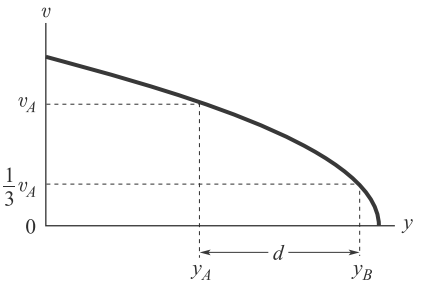
••52 GO Z wiaduktu w budowie wypada wkręt i spada na drodze 90 m aż do doliny pod wiaduktem. a) Ile czasu zajmuje wkrętowi przebycie ostatnich 20% drogi, po jakiej spada? Ile wynosi jego prędkość b) na początku i c) na końcu tych 20% drogi spadku?

••53 ssm ilw Klucz spada z mostu o wysokości 45 m nad wodą i trafia w model łódki, płynący ze stałą prędkością, który w chwili upuszczenia klucza znajdował się w odległości 12 m od miejsca zderzenia. Ile wynosi prędkość łódki?

••54 GO Z mostu o wysokości 43,9 m nad wodą upuszczono jeden kamień, a o 1 s później rzucono pionowo w dół drugi. Te dwa kamienie wpadły do wody jednocześnie. a) Ile wynosiła prędkość początkowa drugiego kamienia? b) Sporządź wykres prędkości każdego kamienia jako funkcji czasu, przyjmując za chwilę zerową moment upuszczenia pierwszego kamienia.

••55 ssm Kula mokrej gliny spada na ziemię z wysokości 15 m. Jej zetknięcie z ziemią następuje na 20 ms przed całkowitym zatrzymaniem. a) Ile wynosi wartość bezwzględna średniego przyspieszenia kuli od początku jej zetknięcia z ziemią (potraktuj kulę jako cząstkę)? b) Czy to średnie przyspieszenie jest skierowane w górę, czy w dół?

••56 GO Na rysunku 2.35 przedstawiono zależność prędkości v od wysokości y piłki rzuconej pionowo w górę wzdłuż osi y. Odległość d wynosi 0,4 m. Prędkość piłki wynosi v_A na wysokości y_A, a na wysokości y_B jest równa $\frac{1}{3}v_A$. Ile wynosi prędkość v_A?



Rys. 2.35. Zadanie 56

••57 Aby sprawdzić jakość piłki tenisowej, upuszczasz ją na ziemię z wysokości 4 m. Po odbiciu piłka wznosi się na wysokość 2 m. Ile wynosi wartość bezwzględna średniego przyspieszenia piłki w czasie zetknięcia się jej z ziemią, jeśli zetknięcie trwa 12 ms? b) Czy to średnie przyspieszenie jest skierowane w górę, czy w dół?

••58 Ciało spada bez prędkości początkowej z wysokości h, przebywając połowę tej drogi w ciągu ostatniej sekundy lotu. Wyznacz a) czas spadku ciała i b) wysokość, z jakiej spadło. c) Wyjaśnij, dlaczego jedno z rozwiązań otrzymywanego równania kwadratowego zmiennej t jest nie do przyjęcia z punktu widzenia fizyki zjawiska.

••59 Woda wycieka kroplami z sitka prysznica znajdującego się na wysokości 200 cm nad podłogą. Krople wypadają z sitka w równych odstępach czasu, przy czym pierwsza kropla spada na podłogę w chwili, gdy czwarta kropla odrywa się od sitka. Znajdź położenie nad podłogą kropli a) drugiej oraz b) trzeciej, gdy pierwsza kropla uderza w podłogę.

••60 GO Kamień wyrzucono pionowo w górę z poziomu ziemi w chwili $t = 0$. W chwili $t = 1{,}5$ s kamień przelatuje obok szczytu wysokiej wieży, a 1 s później osiąga maksymalne wzniesienie. Oblicz wysokość wieży.

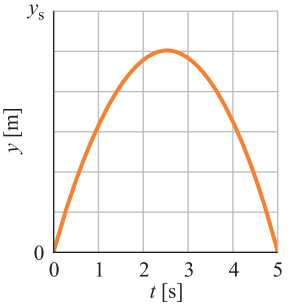
•••61 GO Stalową kulkę upuszczono z dachu budynku. Jej przelot za oknem o wysokości 1,2 m trwał 0,125 s. Następnie kulka odbiła się od chodnika i znów przeleciała przed tym samym oknem w czasie 0,125 s. Przyjmij, że lot kulki w górę jest dokładnym odwróceniem jej lotu w dół. Czas, jaki upłynął od chwili, gdy kulka zniknęła za dolną krawędzią okna, do chwili, gdy znów minęła tę krawędź, wyniósł 2 s. Oblicz wysokość budynku.

•••62 Koszykarz stojący pod koszem skacze w górę na wysokość 76 cm, aby przechwycić piłkę odbitą od tablicy. Jak długo (w sumie) znajduje się on: a) na wysokości mniejszej o 15 cm od maksymalnej wysokości wyskoku, b) na wysokości nie większej niż 15 cm od parkietu? (Zawodnicy zdają się w wyskoku zawisać w powietrzu).

•••63 GO Układający się do drzemki kot spostrzega doniczkę przelatującą za oknem najpierw w górę, a potem w dół.

Łączny czas, w jakim kot ma doniczkę w polu widzenia, wynosi 0,5 s, a wysokość okna, przez które ją obserwuje, jest równa 2 m. Jak wysoko nad górną framugę okna wzniosła się doniczka?

•••64 Kulę wystrzelono pionowo w górę z powierzchni pewnej planety układu słonecznego. Na rysunku 2.36 pokazano wykres $y(t)$ dla tej kuli, przy czym y jest wysokością kuli ponad punkt startowy, a wystrzał nastąpił w chwili $t = 0$. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $y_s = 30$ m. Wyznacz wartość bezwzględną: a) przyspieszenia grawitacyjnego na tej planecie, b) prędkości początkowej kuli.

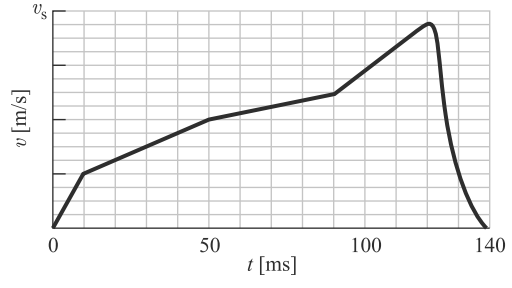


Rys. 2.36. Zadanie 64

Podrozdział 2.6. Całkowanie graficzne przy badaniu ruchu

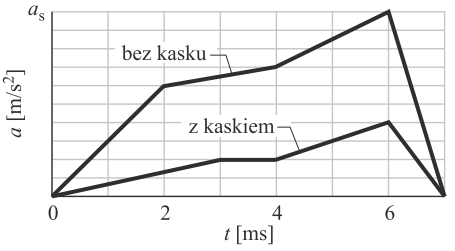
•65 Na rysunku 2.15a przedstawiono wykres zależności od czasu przyspieszenia głowy i tułowia ochotnika biorącego udział w symulacji zderzenia drogowego. Ile wynosi prędkość: a) głowy, b) tułowia tej osoby, gdy przyspieszenie głowy jest największe?

••66 Podczas ciosu prostego pięścią w karate pięść początkowo spoczywa, a następnie przemieszcza się gwałtownie do przodu, aż do całkowitego wyprostowania ramienia. Na rysunku 2.37 przedstawiono zależność od czasu prędkości pięści $v(t)$ podczas takiego ciosu wyprowadzonego przez osobę dobrze znającą karate. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $v_s = 8$ m/s. a) Jaką drogę przebywa pięść do chwili $t = 50$ ms? b) Kiedy prędkość pięści jest największa?



Rys. 2.37. Zadanie 66

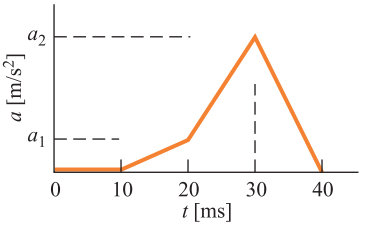
••67 Jeśli piłkarz kopnie piłkę w kierunku przeciwnika, a ten zdecyduje się na zmianę jej toru własną głową, to przyspieszenie głowy obrońcy może być bardzo znaczne. Na rysunku 2.38 przedstawiono zmierzone przyspieszenie $a(t)$ głowy piłkarza w przypadku, gdy zawodnik ma kask chroniący głowę i gdy go nie ma. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone



Rys. 2.38. Zadanie 67

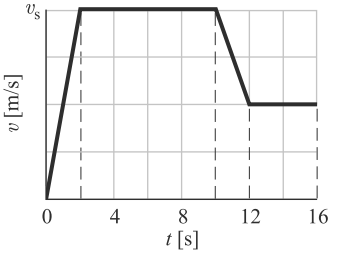
przez współrzędną punktu $a_s = 200$ m/s^2. Wyznacz różnicę prędkości głowy piłkarza bez kasku i z kaskiem w chwili $t = 7$ ms.

••68 Salamandra *Hydromantes* poluje, używając swego języka jako pocisku. Część kostna języka zostaje wyrzucona do przodu, reszta języka się rozwija i jego koniec spada na ofiarę, przywierając do niej. Na rysunku 2.39 przedstawiono zależność przyspieszenia a od czasu t podczas wyrzutu języka przez salamandrę. Zaznaczone na rysunku wartości przyspieszenia wynoszą $a_1 = 100$ m/s^2 i $a_2 = 400$ m/s^2. Ile wynosi prędkość języka salamandry na końcu jego ruchu przyspieszonego?



Rys. 2.39. Zadanie 68

••69 ilw Na rysunku 2.40 przedstawiono wykres zależności prędkości biegacza od czasu. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $v_s = 8$ m/s. Jaką drogę przebędzie biegacz w ciągu 16 s?



Rys. 2.40. Zadanie 69

•••70 Dwie cząstki poruszają się wzdłuż osi x. Położenie cząstki 1 jest dane wzorem $x = 6t^2 + 3t + 2$ (x w metrach, t w sekundach), przyspieszenie cząstki 2 — wzorem $a = -8t$ (a w metrach na sekundę kwadrat, t w sekundach), a prędkość cząstki 2 wynosi 20 m/s w chwili $t = 0$. W pewnej chwili prędkości cząstek są (na chwilę) jednakowe. Ile wtedy wynoszą?

Zadania dodatkowe

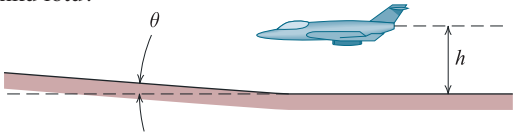
71 W pewnej grze wideo plamka porusza się na ekranie zgodnie ze wzorem $x = 9t - 0{,}75t^3$, gdzie x jest odległością od lewej krawędzi ekranu w centymetrach, a t — czasem w sekundach. Gdy plamka dociera do brzegu ekranu, czyli $x = 0$

lub $x = 15$ cm, czas ulega wyzerowaniu i plamka zaczyna się znów poruszać zgodnie z podaną zależnością $x(t)$. a) W jakiej chwili (licząc od startu) plamka się (przez chwilę) nie porusza? b) W jakim punkcie x to zachodzi? c) Jakie jest w tej chwili przyspieszenie plamki (w tym jego znak)? d) Czy trochę wcześniej plamka porusza się w lewo, czy w prawo? e) A trochę później? f) W jakiej chwili $t > 0$ plamka po raz pierwszy dociera do brzegu ekranu?

72 Kamień zostaje rzucony do góry z krawędzi dachu budynku. Kamień osiąga największą wysokość 1,6 s po wyrzucie, a następnie spada, przelatując tuż obok krawędzi dachu, i uderza w ziemię po 6 s od wyrzutu. Wyznacz w jednostkach SI: a) prędkość, z jaką kamień został rzucony do góry, b) maksymalną wysokość, na jaką wzniósł się kamień ponad dach budynku, c) wysokość tego budynku.

73 GO W chwili, gdy zapala się zielone światło, samochód osobowy rusza z miejsca ze stałym przyspieszeniem a równym 2,2 m/s^2. W tej samej chwili wyprzedza go ciężarówka jadąca ze stałą prędkością 9,5 m/s. a) W jakiej odległości od sygnalizatora samochód osobowy dogoni ciężarówkę? b) Ile wynosić będzie wówczas jego prędkość?

74 Samolot leci poziomo z prędkością 1300 km/h na wysokości $h = 35$ m nad ziemią. W chwili $t = 0$ teren pod samolotem przestaje być poziomy, jak uprzednio, lecz wznosi się łagodnie pod kątem $\theta = 4{,}3°$ (rys. 2.41). Po jakim czasie samolot uderzyłby w ziemię, gdyby pilot nie skorygował kierunku lotu?

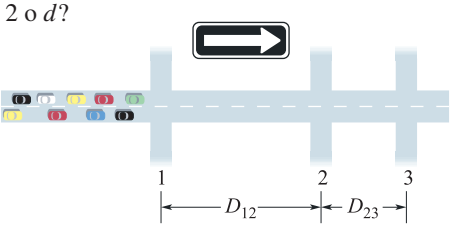


Rys. 2.41. Zadanie 74

75 GO Czas zatrzymania samochodu składa się z czasu reakcji kierowcy, po którym naciska on pedał hamulca, oraz czasu, w którym pojazd jest faktycznie hamowany, czyli poddany stałemu przyspieszeniu. Załóżmy, że całkowita droga przebyta przez samochód od momentu, w którym kierowca stwierdził potrzebę hamowania, do chwili zatrzymania pojazdu wyniosła 56,7 m, gdy prędkość początkowa była równa 80,5 km/h, a 24,4 m, gdy prędkość początkowa była równa 48,3 km/h. Ile wynosiły: a) czas reakcji kierowcy, b) wartość bezwzględna przyspieszenia?

76 GO Na rysunku 2.42 pokazano ulicę jednokierunkową, na której ruchem trzeba kierować tak, aby kolumna pojazdów przebyła ją bez zakłóceń. Wyobraź sobie, że czoło kolumny właśnie dotarło do skrzyżowania 2, na którym zielone światło zapaliło się, gdy czoło kolumny jest od niego odległe o d. Odległości między skrzyżowaniami wynoszą D_{23} i D_{12}. a) O ile później powinno się zapalić zielone światło na skrzyżowaniu 3 niż na skrzyżowaniu 2, aby kolumna przebyła ulicę bez zakłóceń?

Załóż dla odmiany, że na skrzyżowaniu 1 kolumna musiała się zatrzymać na czerwonym świetle. Po zmianie światła na zielone kolumna osiąga prędkość jazdy v_k dopiero po pewnym czasie, równym sumie czasu reakcji kierowców t_r i czasu przyspieszenia pojazdów z pewnym przyspieszeniem a do prędkości v_k. b) O ile później powinno się zapalić zielone światło na skrzyżowaniu 2 niż na skrzyżowaniu 1, aby nastąpiło to w chwili, w której kolumna jest odległa od skrzyżowania 2 o d?

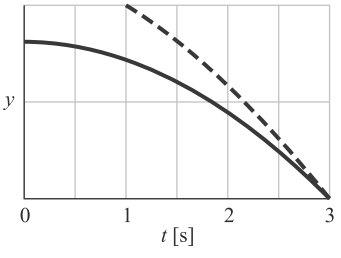


Rys. 2.42. Zadanie 76

77 ssm Samochód może zwiększyć prędkość od 0 do 60 km/h w czasie 5,4 s. a) Ile wynosi jego średnie przyspieszenie, wyrażone w m/s^2, w czasie takiego rozpędzania pojazdu? b) Jaką drogę przebędzie on w tym czasie przy założeniu, że jego przyspieszenie jest stałe? c) W jakim czasie od startu samochód pokona drogę 0,25 km, poruszając się przez cały czas z przyspieszeniem o wartości wyznaczonej w punkcie (a)?

78 GO Pociągi czerwony i zielony jadą naprzeciw siebie po prostym, płaskim torze; pociąg czerwony jedzie z prędkością 72 km/h, a pociąg zielony z prędkością 144 km/h. Gdy pociągi znajdują się w odległości 950 m od siebie, maszyniści orientują się, co się dzieje i włączają hamulce, które zwalniają ruch pojazdów w tempie 1 m/s^2. Czy dojdzie do zderzenia? Jeśli tak, wyznacz prędkość jednego i drugiego pociągu w chwili zderzenia. Jeśli nie, podaj odległość pociągów po ich zatrzymaniu.

79 GO W chwili $t = 0$ wspinacz upuszcza niechcący hak, który wbijał w ścianę, tak że hak spada w dolinę pod ścianą. Nieco później jego towarzysz wspinaczki, znajdujący sięo 10 m wyżej, rzuca w dół inny hak. Na rysunku 2.43 pokazano położenie obu haków w pionie jako funkcję czasu t podczas ich spadku w dolinę. Wyznacz prędkość początkową drugiego haka.



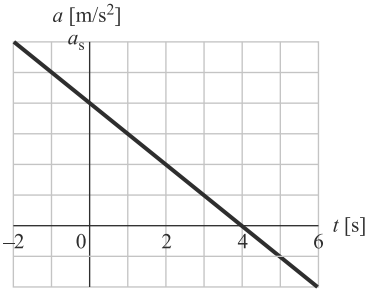
Rys. 2.43. Zadanie 79

80 Pociąg rusza z postoju na stacji i porusza się ze stałym przyspieszeniem. W pewnej chwili ma prędkość 30 m/s, a po

przebyciu dalszych 160 m ma już prędkość 50 m/s. Wyznacz: a) przyspieszenie pociągu, b) czas, w którym pociąg przebył wspomniane 160 m, c) czas potrzebny pociągowi do uzyskania prędkości 30 m/s oraz d) drogę przebytą przez pociąg od stacji do chwili, w której osiągnął prędkość 30 m/s. e) Sporządź wykres zależności x od t oraz v od t dla tego pociągu od chwili odjazdu ze stacji.

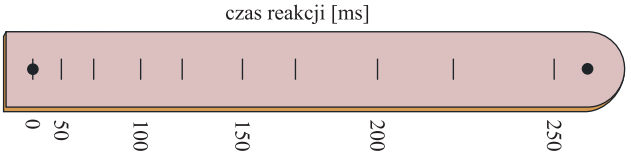
81 ssm Przyspieszenie cząstki wzdłuż osi x wynosi $a = 5t$, gdzie a wyrażono w metrach na sekundę kwadrat, a t w sekundach. W chwili $t = 2$ s prędkość cząstki wynosi $+17$ m/s. Ile wynosi jej prędkość w chwili $t = 4$ s?

82 Na rysunku 2.44 przedstawiono zależność przyspieszenia a od czasu t dla cząstki poruszającej się wzdłuż osi x. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $a_s = 12$ m/s^2. W chwili $t = -2$ s prędkość cząstki jest równa 7 m/s. Ile wynosi jej prędkość w chwili $t = 6$ s?



Rys. 2.44. Zadanie 82

83 Na rysunku 2.45 pokazano prosty przyrząd do pomiaru twego czasu reakcji. Jest to pasek kartonowy, na którym zaznaczono podziałkę i dwie duże kropki. Kolega trzyma pasek *pionowo*, ujmując go kciukiem i palcem wskazującym, w miejscu prawej kropki rysunku 2.45. Ty umieszczasz kciuk i palec wskazujący w pobliżu drugiej kropki (lewej na rys. 2.45), nie dotykając jednak paska. Kolega puszcza pasek, a ty starasz się schwytać go natychmiast po zauważeniu, że pasek spada. Miejsce, w którym złapiesz pasek, wskazuje twój czas reakcji. a) Jak daleko od dolnej kropki musi znajdować się kreska oznaczająca czas reakcji 50 ms? O ile wyżej należy umieścić kreski dla: b) 100, c) 150, d) 200 i e) 250 ms? Na przykład, czy kreska oznaczona 100 ms powinna być dwa razy dalej od kropki niż kreska oznaczona 50 ms? Czy potrafisz dostrzec, jaka prawidłowość rządzi układem kresek?



Rys. 2.45. Zadanie 83

84 Do badania wpływu dużego przyspieszenia na organizm ludzki wykorzystuje się sanie z napędem rakietowym poruszające się po prostym, poziomym torze. Jedne z takich sań pozwalają na uzyskanie prędkości 1600 km/h w czasie 1,8 s po starcie ze stanu spoczynku. Wyznacz: a) przyspieszenie tych sań w jednostkach g (załóż, że przyspieszenie to jest stałe), b) drogę przebytą przez sanie w podanym czasie.

85 Wagonik kolejki górniczej jest wciągany na wzgórze z prędkością 20 km/h, a potem ciągnięty w dół na poziom wyjściowy z prędkością 35 km/h. Czas potrzebny do zmiany kierunku jazdy wagonika na górnym końcu jego trasy jest do pominięcia. Wyznacz średnią wartość bezwzględną prędkości wagonika na całej jego trasie.

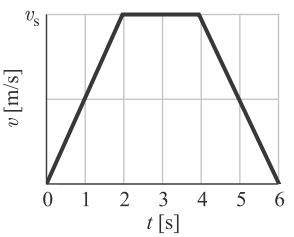
86 Motocyklista jedzie na wschód wzdłuż osi x. Jego przyspieszenie jest dane wzorem $a = (6{,}1 - 1{,}2t)$ m/s^2 dla $0 \leqslant t \leqslant 6$ s. W chwili $t = 0$ prędkość i położenie motocykla są równe 2,7 m/s i 7,3 m. a) Jaka jest największa prędkość uzyskana przez motocykl? b) Jaka jest całkowita droga przebyta przez motocykl od chwili $t = 0$ do chwili $t = 6$ s?

87 ssm Ograniczenie prędkości na nowojorskiej drodze szybkiego ruchu wynosi 55 mil/h. O ile krócej trwałaby podróż na tej drodze z maksymalną dozwoloną prędkością od wjazdu w Buffalo do zjazdu w centrum Nowego Jorku, odległych od siebie o 700 km, gdyby ograniczenie prędkości zmieniono na 65 mil/h?

88 Samochód jadący ze stałym przyspieszeniem przebył drogę między dwoma punktami odległymi od siebie o 60 m w czasie 6 s. W drugim z tych punktów miał prędkość o wartości bezwzględnej wynoszącej 15 m/s. a) Jaką wartość bezwzględną prędkości miał samochód w pierwszym z tych punktów? b) Ile wynosiła wartość bezwzględna przyspieszenia samochodu? c) W jakiej odległości od pierwszego punktu samochód rozpoczął ruch bez prędkości początkowej? d) Sporządź wykres x jako funkcji t i v jako funkcji t dla tego samochodu (w chwili $t = 0$ samochód został wprawiony w ruch).

89 ssm Pewien żongler zwykle podrzuca kule na wysokość H. Na jaką wysokość należałoby je wyrzucać, aby przebywały w powietrzu dwa razy dłużej?

90 Cząstka rusza z początku osi x w chwili $t = 0$ i biegnie w dodatnim kierunku tej osi. Wykres prędkości cząstki jako funkcji czasu przedstawiono na rysunku 2.46, na którym jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $v_s = 4$ m/s. a) Ile wynosi współrzędna cząstki w chwili $t = 5$ s? b) Ile wynosi prędkość cząstki w chwili $t = 5$ s? c) Ile wynosi przyspieszenie cząstki w chwili $t = 5$ s? d) Ile wynosi średnia prędkość cząstki w przedziale od $t = 1$ s do $t = 5$ s? e) Ile wynosi średnie przyspieszenie cząstki w przedziale od $t = 1$ s do $t = 5$ s?



Rys. 2.46. Zadanie 90

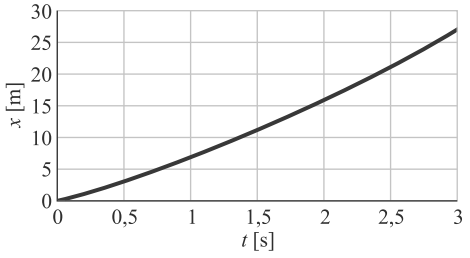
91 Z urwiska skalnego o wysokości 100 m spada mały odłamek skały. Jak długo zajmuje mu przebycie: a) pierwszych 50 m, b) drugich 50 m?

92 Dwie stacje metra są od siebie odległe o 1100 m. Pociąg rusza ze stacji i porusza się z przyspieszeniem $+1{,}2\ \mathrm{m/s^2}$ przez pierwszą połowę dystansu dzielącego te stacje, a drugą połowę dystansu pokonuje z przyspieszeniem $-1{,}2\ \mathrm{m/s^2}$. Wyznacz: a) czas jazdy pociągu między stacjami, b) maksymalną prędkość, jaką osiąga pociąg na tej drodze. c) Sporządź opisujący ruch pociągu wykres x, v i a jako funkcji t.

93 Kamień rzucono pionowo do góry. Mija on punkt A z prędkością v, a punkt B, leżący 3 m wyżej niż punkt A — z prędkością $\frac{1}{2}v$. Wyznacz: a) prędkość v, b) maksymalną wysokość wzniesienia się kamienia ponad punkt B.

94 Kamień spada (z prędkością początkową równą zeru) z dachu budynku o wysokości 60 m. Jak wysoko nad ziemią znajdzie się ten kamień na 1,2 s przed upadkiem na ziemię?

95 ssm Bojer ślizga się ze stałą prędkością w kierunku wschodnim, gdy gwałtowny podmuch wiatru sprawia, że przez 3 sekundy pojazd porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, nie zmieniając kierunku ruchu. Zależność x od t dla tego bojera przedstawiono na rysunku 2.47, gdzie $t = 0$ odpowiada początkowi podmuchu, a kierunek dodatni osi x to kierunek wschodni. a) Ile wynosi przyspieszenie bojera podczas 3 sekund, gdy wiał silny wiatr? b) Ile wynosi prędkość bojera dla tego przedziału czasu? c) Jeśli przyspieszenie bojera pozostawałoby stałe przez dalsze 3 sekundy, jaką drogę przebyłby bojer w ciągu tych drugich 3 sekund?



Rys. 2.47. Zadanie 95

96 Ołowiana kulka spadła z trampoliny znajdującej się 5,2 m nad wodą w jeziorze. Dotarła ona do powierzchni wody z pewną prędkością, a następnie spadała w wodzie ze stałą prędkością równą jej prędkości w chwili wejścia do wody. Kulka dotarła do dna jeziora po czasie 4,8 s od chwili, w której spadła z trampoliny. a) Jaka jest głębokość jeziora? Podaj b) wartość bezwzględną i c) kierunek (do góry czy na dół) średniej prędkości kulki podczas spadku z trampoliny na dno jeziora. Gdyby woda w jeziorze wyschła, kulkę trzeba by było rzucić w dół z trampoliny, aby znów dotarła do dna po 4,8 s. Podaj d) wartość bezwzględną i e) kierunek prędkości początkowej, jaką należało by nadać kulce.

97 Pojedyncza lina, na której zawieszony jest pusty wagonik windy budowlanej, urywa się, gdy wagonik stoi w swym najwyższym położeniu na wysokości 120 m. a) Z jaką prędkością wagonik uderzy w ziemię? b) Jak długo będzie spadał? c) Jaką prędkość będzie miał na wysokości nad ziemią równej połowie wysokości początkowej? d) Jak długo będzie spadał na ten poziom?

98 Dwa brylanty spadają swobodnie z prędkością początkową równą zeru, z tej samej wysokości, przy czym jeden z nich zaczyna spadać 1 s po drugim. Po jakim czasie od początku ruchu pierwszego brylantu będą one odległe od siebie o 10 m?

99 Piłkę rzucono pionowo w dół z dachu budynku o wysokości 36,6 m. Piłka dotarła do górnej krawędzi okna, która znajduje się 12,2 m nad ziemią, po 2 s od jej wyrzutu. Ile wynosiła wówczas prędkość piłki?

100 Spadochroniarz wyskakuje z samolotu i spada swobodnie przez pierwsze 50 m. Następnie otwiera spadochron i od tego czasu spada z opóźnieniem $2\ \mathrm{m/s^2}$. W chwili zetknięcia z ziemią ma prędkość 3 m/s. a) Jak długo spadochroniarz pozostaje w powietrzu? b) Z jakiej wysokości odbył się ten skok?

101 Piłkę rzucono pionowo *w dół* z wysokości h, z prędkością początkową o *wartości bezwzględnej* v_0. a) Ile wynosi jej prędkość tuż przed uderzeniem w ziemię? b) W jakim czasie piłka spada na ziemię? Jaka byłaby odpowiedź na: c) pytanie (a), d) pytanie (b), gdyby piłkę rzucono pionowo *do góry* z takiej samej wysokości i z taką samą wartością bezwzględną prędkości? Zanim zaczniesz rozwiązywać równania, zastanów się, czy w przypadkach (c) i (d) otrzymasz wynik większy, mniejszy czy taki sam, jak w przypadkach (a) i (b).

102 Gra, w której piłka porusza się najszybciej, nawet do 303 km/h, to pelota. Jeśli zawodowy gracz w pelotę, w kierunku którego leci piłka z taką prędkością, niechcący mrugnie oczami, to straci ją z oczu na około 100 ms. Jaką drogę przebędzie piłka w tym czasie?

103 Zawodnik rzuca „szybką” piłkę baseballową poziomo, z prędkością początkową równą 160 km/h. Po jakim czasie doleci ona do pola odległego od miejsca wyrzutu o 18,4 m?

104 Proton porusza się wzdłuż osi x zgodnie z równaniem $x = 50t + 10t^2$, w którym x jest wyrażone w metrach, a t w sekundach. Oblicz: a) średnią prędkość protonu w czasie pierwszych 3 s jego ruchu, b) prędkość chwilową protonu w chwili $t = 3$ s, c) przyspieszenie chwilowe protonu w chwili $t = 3$ s. d) Wykreśl x jako funkcję t i pokaż jak, korzystając z tego wykresu, uzyskać odpowiedź na pytanie (a). e) Wskaż jak, korzystając z tego wykresu, otrzymać odpowiedź na pytanie (b). f) Wykreśl v jako funkcję t i wyznacz z tego wykresu odpowiedź na pytanie (c).

105 Kierowca motocykla jadącego z prędkością 30 m/s naciska w pewnej chwili pedał hamulca, wprawiając pojazd w ruch ze stałym przyspieszeniem. Po 3 sekundach od tej chwili prędkość motocykla maleje do 15 m/s. Ile wynosi droga przebyta przez motocykl do chwili jego zatrzymania, licząc od chwili rozpoczęcia hamowania?

106 Dysk do gry *shuffleboard* porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym popychany przez gracza kijem i po przebyciu drogi 1,8 m ma prędkość 6 m/s. W tej właśnie chwili

gracz cofa kij i dysk zaczyna zwalniać ze stałym przyspieszeniem 2,5 m/s^2, aż w końcu się zatrzymuje. a) Jak długo poruszał się dysk od początku pchania go przez gracza do końcowego zatrzymania. b) Ile wynosi całkowita droga, jaką dysk przebył?

107 Łeb grzechotnika może się poruszać z przyspieszeniem nawet 50 m/s^2, gdy uderza na swą ofiarę. Gdyby udało się zbudować samochód o takim przyspieszeniu, jak szybko mógłby on osiągnąć prędkość 100 km/h, ruszając ze stanu spoczynku?

108 Jumbo jet musi uzyskać na pasie startowym prędkość 360 km/h, przy której może oderwać się od ziemi. Jakie jest najmniejsze przyspieszenie odrzutowca pozwalające mu wznieść się w powietrze na pasie o długości 1,8 km?

109 Automobilista w czasie 0,5 min zwiększa prędkość pojazdu w sposób jednostajny od 25 km/h do 55 km/h. Rowerzysta w czasie 0,5 min rozpędza się jednostajnie od spoczynku do prędkości równej 30 km/h. Oblicz wartość bezwzględną przyspieszenia: a) automobilisty, b) rowerzysty.

110 Mrugnięcie oczu trwa zwykle około 100 ms. Ile wynosi droga przebyta w tym czasie przez myśliwiec MiG-25 lecący ze średnią prędkością 3400 km/h?

111 Maksymalna prędkość, jaką może osiągnąć pewien sprinter, wynosi 11 m/s. Poruszając się ze stałym przyspieszeniem, osiąga on tę prędkość w odległości 12 m od linii startu, a następnie utrzymuje ją aż do końca biegu na 100 m. a) Po jakim czasie od startu dobiega on do mety? b) Aby skrócić czas biegu, sprinter stara się zmniejszyć drogę, na jakiej osiąga swą maksymalną prędkość. Ile musi wynosić ta droga, aby czas jego biegu zmniejszył się do 10 s?

112 Pomiar wykazał, że w chwili wylotu z lufy o długości 1,2 m pocisk ma prędkość 640 m/s. Załóż, że pocisk porusza się w lufie ze stałym przyspieszeniem i wyznacz czas, w jakim ten ruch zachodzi.

113 W laboratorium NASA, w którym bada się ruch w warunkach nieważkości, w Ośrodku Badawczym im. Johna Glenna w Cleveland, znajduje się opróżniona z powietrza wieża o wysokości 145 m. Służy ona m.in. do badania spadku pojemników w kształcie kuli, o średnicy 1 m, zawierających różne ciała. a) Jak długo spada swobodnie taka kula? b) Ile wynosi jej prędkość, gdy dociera do układu wychwytu, znajdującego się na dole wieży? c) W układzie wychwytu kula doznaje zatrzymującego ją opóźnienia $25g$. Na jakiej drodze układ ten zatrzymuje kulę?

114  Samochód jadący na autostradzie (w Niemczech) z prędkością 200 km/h można zatrzymać na drodze 170 m. Przyjmując, że w czasie hamowania przyspieszenie pojazdu jest stałe, oblicz wartość tego przyspieszenia i wyraź ją a) w jednostkach układu SI oraz b) jako wielokrotność g. c) Ile wynosi czas hamowania T_h? Twój *czas reakcji* T_r to czas potrzebny ci na dostrzeżenie niebezpieczeństwa, przeniesienie stopy na pedał hamulca i naciśnięcie go. Przyjmij, że $T_r = 400$ ms. d) Ile wynosi T_h wyrażone jako wielokrotność T_r? e) Czy większość czasu, potrzebnego do zatrzymania pojazdu, stanowi czas reakcji, czy czas hamowania? Gdy prowadzisz samochód w ciemnych okularach, czas przekazania sygnałów z oczu do mózgu wzrasta, co zwiększa czas reakcji T_r. f) Przyjmij, że w najgorszym przypadku twój czas reakcji T_r może dzięki temu wzrosnąć o 100 ms. O ile zwiększy się dzięki temu droga przebyta przez pojazd przed zatrzymaniem?

115 Zawody w przeciąganiu liny, rozgrywane w 1889 roku w mieście Jubbulpore w Indiach zostały rozstrzygnięte po 2 godzinach i 41 minutach, gdy zwycięski zespół przemieścił środek liny o 3,7 m. Wyznacz wartość średniej prędkości środka liny w czasie tych zawodów, wyrażając ją w centymetrach na minutę.

116 Najbardziej użytecznym elementem w analizie wypadków lotniczych jest zapis parametrów lotu wykonany przez rejestrator danych, nazywany popularnie czarną skrzynką (choć jest zwykle pomalowany na pomarańczowo). Rejestrator jest skonstruowany tak, by mógł wytrzymać przyspieszenie średnie do $3400g$ w czasie 6,5 ms. Ile wynosi prędkość początkowa samolotu, który podczas katastrofy zatrzymuje się po takim właśnie czasie i porusza się z takim właśnie maksymalnym przyspieszeniem?

117 Anglik George Meegan wyruszył 26 stycznia 1977 roku z miasta Ushuaia na południowym krańcu Ameryki Południowej i przebył piechotą drogę do Prudhoe Bay na północy Alaski, docierając tam 18 września 1983 roku po pokonaniu dystansu 30 600 km. Oblicz średnią prędkość podróżną Meegana w czasie całej wyprawy i wyraź ją w metrach na sekundę.

118 Widelnica to owad, który nie macha skrzydłami, a zatem nie lata. Może on jednak ślizgać się po powierzchni wody, wznosząc skrzydła, tak by był popychany przez wiatr. Wyobraź sobie, że obserwujesz widelnice na wodzie i mierzysz czas, w jakim przebywają one pewien dystans. Stwierdzasz, że czas ten wynosi średnio 7,1 s, gdy owad ma skrzydła uniesione jak żagiel, a 25 s, gdy owad ma skrzydła opuszczone. a) Wyznacz stosunek prędkości widelnic „z żaglem” $v_{z\dot{z}}$ do ich prędkości „bez żagla” $v_{b\dot{z}}$. b) Oblicz różnicę czasów, w jakich widelnice przebywają drogę 2 m z żaglem i bez żagla, wyrażając tę różnicę przez $v_{z\dot{z}}$.

119 Położenie cząstki poruszającej się wzdłuż osi y zmienia się zgodnie ze wzorem

$$y = (2\text{ cm})\sin(\pi t/4),$$

gdzie t wyrażono w sekundach, a y w centymetrach. a) Wyznacz średnią prędkość cząstki w przedziale czasu od $t = 0$ do $t = 2$ s. b) Wyznacz prędkość chwilową cząstki dla $t = 0$, 1 i 2 s. c) Wyznacz średnie przyspieszenie cząstki w przedziale czasu od $t = 0$ do $t = 2$ s. d) Wyznacz przyspieszenie chwilowe cząstki dla $t = 0$, 1 i 2 s.

ROZDZIAŁ 3

Wektory

3.1. WEKTORY I ICH SKŁADOWE

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

3.01 dodać wektory graficznie oraz zastosować prawa przemienności i łączności ich dodawania;

3.02 odjąć jeden wektor od drugiego;

3.03 wyznaczyć składowe w układzie współrzędnych i wskazać je na wykresie;

3.04 narysować wektor oraz wyznaczyć jego wartość bezwzględną (moduł) i kierunek, znając składowe wektora;

3.05 zamienić miarę łukową kąta na stopnie i na odwrót.

Podstawowe fakty

- Skalary, jak na przykład temperatura, mają tylko wartość. Podajemy je w pewnych jednostkach (np. 10°C). Skalary spełniają prawa zwykłej algebry. Wektory, jak na przykład przemieszczenie, mają i wartość, i kierunek (np. 5 m, kierunek północny). Wektory spełniają prawa algebry wektorowej.

- Dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ można dodać geometrycznie, rysując je w tej samej skali i umieszczając początek wektora $\vec{b}$ tam, gdzie znajduje się koniec wektora $\vec{a}$. Wektor łączący wówczas początek pierwszego wektora z końcem drugiego to wektor będący ich sumą $\vec{s}$. Aby odjąć $\vec{b}$ od $\vec{a}$, zmieniamy kierunek $\vec{b}$ na przeciwny, czyli zmieniamy wektor $\vec{b}$ w $-\vec{b}$, po czym dodajemy $-\vec{b}$ do $\vec{a}$. Dodawanie wektorów jest przemienne i łączne.

- W przestrzeni dwuwymiarowej składowe (skalarne) a_x i a_y wektora $\vec{a}$ w układzie współrzędnych x i y wyznaczamy, rzutując wektor na osie tego układu. Składowe są więc dane jako

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{i} \quad a_y = a\sin\theta,$$

gdzie θ jest kątem między dodatnim kierunkiem osi x a kierunkiem wektora $\vec{a}$. Znając składowe wektora, możemy wyznaczyć jego długość i kierunek ze wzorów

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}.$$

O fizyce

W fizyce spotkamy bardzo wiele wielkości, które mają zarówno wartość, jak i kierunek. Do opisu takich wielkości jest potrzebna specjalna algebra — algebra wektorowa. Wektorami zajmują się również inżynierowie oraz specjaliści z innych dziedzin nauki, spotykamy je też w języku codziennym. Gdy mówimy do kogoś: „Idź teraz prosto, a potem skręć w piątą przecznicę w lewo i idź w tym kierunku do drugiego skrzyżowania", praktycznie używamy języka wektorów. W istocie każdy system nawigacyjny jest oparty na pojęciu wektora. Fizycy i inżynierowie używają jednak wektorów także — w trochę inny sposób — do opisu zjawisk związanych z ruchem obrotowym oraz oddziaływaniami magnetycznymi, którymi zajmiemy się w dalszych rozdziałach. W tym rozdziale omówimy podstawowe cechy wektorów.

Wektory i skalary

Cząstka poruszająca się wzdłuż linii prostej ma do wyboru tylko dwa kierunki ruchu. Jeden z tych kierunków możemy przyjąć za dodatni, a drugi — za ujemny. Jednak dla cząstki poruszającej się w przestrzeni trójwymiarowej znak plus lub minus nie wystarcza już do wskazania kierunku ruchu. Musimy wtedy zastosować pojęcie *wektora*.

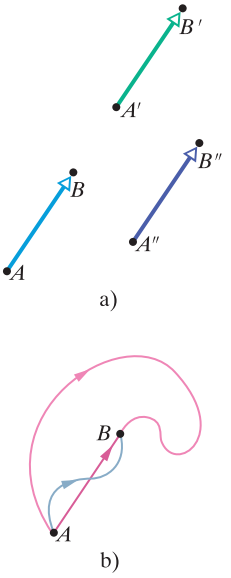
Wektor ma nie tylko wartość, lecz i kierunek. Działania na wektorach podlegają pewnym szczególnym prawom (prawom rachunku wektorowego), które omówimy w tym rozdziale. **Wielkość wektorowa** to wielkość, która ma zarówno wartość (wartość bezwzględną, moduł), jak i kierunek, a więc może być przedstawiona za pomocą pewnego wektora. Wektorowymi wielkościami fizycznymi są m.in. przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie. W niniejszej książce spotkasz wiele innych wielkości wektorowych, warto zatem poznać teraz prawa działań na wektorach, gdyż bardzo przydadzą ci się one w dalszych rozdziałach podręcznika.

Nie wszystkie wielkości fizyczne wiążą się z jakimś kierunkiem. Na przykład takie wielkości, jak: temperatura, ciśnienie, energia, masa i czas nie wskazują żadnego kierunku w przestrzeni. Takie wielkości nazywamy **skalarami**. Skalary podlegają zwykłym prawom algebry. Do określenia skalara wystarczy podać wartość bezwzględną oraz znak (np. temperatura $-40°C$).

Najprostszą wielkością wektorową jest przemieszczenie, czyli zmiana położenia. Przedstawiający je wektor nazywamy, jak się można domyślać, **wektorem przemieszczenia** (podobnie, mamy wektory prędkości i przyspieszenia). Jeśli cząstka zmienia swe położenie, poruszając się z punktu A do punktu B, jak na rysunku 3.1, to mówimy, że cząstka doznaje przemieszczenia z A do B, co przedstawiamy za pomocą strzałki łączącej punkt A z punktem B. Strzałka jest graficznym symbolem wektora. Aby odróżnić wektory od innego rodzaju strzałek, z jakimi spotkamy się w tej książce, grot wektora będziemy zaznaczać jako trójkąt.

Trzy strzałki pokazane na rysunku 3.1a, łączące punkty A i B, A' i B' oraz A'' i B'' mają taką samą długość i taki sam kierunek. Ilustrują one zatem takie same wektory przemieszczenia, a więc taką samą *zmianę położenia* cząstki. Wektor nie zmienia swej wielkości, jeśli ulega przesunięciu bez zmiany jego długości (modułu) i kierunku.

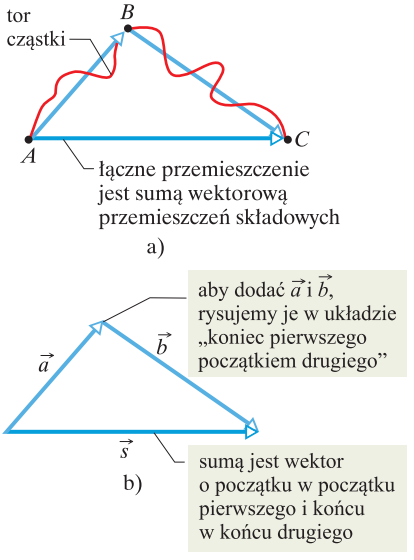
Wektor przemieszczenia nie informuje nas o drodze, po jakiej poruszała się cząstka. Na rysunku 3.1b przedstawiono trzy możliwe drogi między punktami A i B, którym odpowiada ten sam wektor przemieszczenia — ten, który pokazano na rysunku 3.1a. Tak więc wektor przemieszczenia ilustruje efekt końcowy ruchu, a nie sam ruch.



Rys. 3.1. a) Wszystkie trzy strzałki mają taką samą długość i taki sam kierunek, ilustrują więc takie samo przemieszczenie. b) Wszystkie pokazane drogi, po których poruszają się ciała między punktami A i B, odpowiadają takiemu samemu wektorowi przemieszczenia

Geometryczne dodawanie wektorów

Załóżmy, że cząstka porusza się od punktu A do B, a następnie od punktu B do C, jak pokazano na diagramie wektorowym na rysunku 3.2a. Całkowite przemieszczenie cząstki możemy przedstawić (niezależnie od drogi, po jakiej poruszała się cząstka między tymi punktami) za pomocą wektorów kolejnych przemieszczeń, tzn. AB i BC. Efekt *łączny* tych dwóch przemieszczeń jest przemieszczeniem cząstki od punktu A do C. Wektor



Rys. 3.2. a) AC jest sumą wektorową wektorów AB i BC. b) Te same wektory w innych oznaczeniach

AC nazywamy **sumą wektorową** (lub **wektorem wypadkowym**) wektorów AB i BC. Nie jest to zwykła suma algebraiczna.

Na rysunku 3.2b przerysowaliśmy wektory z rysunku 3.2a, oznaczając je — jak będziemy odtąd zawsze postępować — za pomocą strzałki nad symbolem zapisanym kursywą, np. $\vec{a}$. Długość (moduł) wektora, czyli wielkość niemającą ani znaku, ani kierunku będziemy oznaczać takim samym symbolem bez strzałki, np. a, b lub s (takie same oznaczenia należy stosować przy zapisie odręcznym). Symbol ze strzałką u góry będzie zawsze oznaczał wszystkie cechy wektora, tzn. i długość, i kierunek.

Związek między trzema wektorami z rysunku 3.2b możemy przedstawić jako *równanie wektorowe*

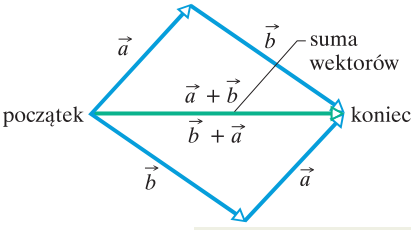
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3.1}$$

oznaczające, że wektor $\vec{s}$ jest sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Symbol + w równaniu (3.1), a także słowa „suma" i „dodawanie" mają inne znaczenie w działaniach na wektorach niż w zwykłej algebrze, ponieważ wynik operacji zależy zarówno od wartości bezwzględnych, jak i od kierunków składników.

Z rysunku 3.2 wynika sposób, w jaki należy dodawać geometrycznie dwuwymiarowe wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$: 1) na kartce należy narysować wektor $\vec{a}$ w jakiejś dogodnej skali i pod właściwym kątem; 2) w tej samej skali należy narysować wektor $\vec{b}$ tak, aby jego początek był końcem wektora $\vec{a}$, oczywiście pod odpowiednim kątem; 3) sumą tych dwóch wektorów jest wektor $\vec{s}$, którego początkiem jest początek wektora $\vec{a}$, a końcem — koniec wektora $\vec{b}$.

Właściwości. Zdefiniowane w ten sposób dodawanie wektorów ma dwie ważne właściwości. Po pierwsze, wynik nie zależy od kolejności składników. Dodając $\vec{a}$ do $\vec{b}$, dostajemy to samo, co dodając $\vec{b}$ do $\vec{a}$ (rys. 3.3), tzn.

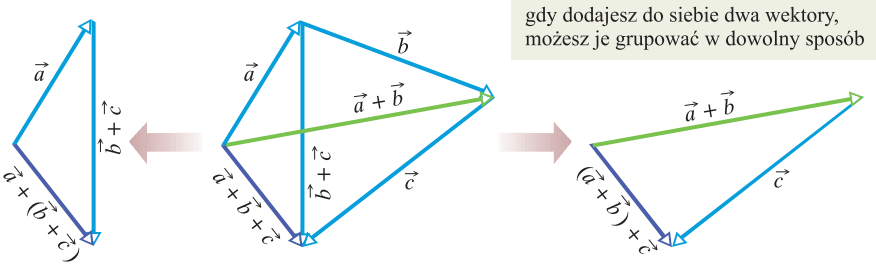
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{(przemienność dodawania).} \tag{3.2}$$



Rys. 3.3. Dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ można do siebie dodawać w dowolnej kolejności — patrz równanie (3.2)

Po drugie, jeśli mamy dodać więcej niż dwa wektory, to możemy ustawić je przy tym w dowolnej kolejności. Tak więc, jeśli mamy dodać do siebie wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, to możemy najpierw dodać do siebie $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a potem ich sumę dodać do $\vec{c}$. Możemy również najpierw dodać do siebie $\vec{b}$ i $\vec{c}$, a potem dodać tę sumę do $\vec{a}$. W obydwu przypadkach otrzymujemy taki sam wynik, co pokazano na rysunku 3.4. Wobec tego mamy

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{(łączność dodawania).} \tag{3.3}$$



Rys. 3.4. Dodając trzy wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, można je grupować w dowolny sposób — patrz równanie (3.3)

Wektor $-\vec{b}$ jest to wektor o takiej samej długości jak wektor $\vec{b}$, lecz o przeciwnym kierunku (patrz rys. 3.5). Z rysunku 3.5 wynika, że dodając te wektory, otrzymujemy

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0.$$

Dodanie $-\vec{b}$ daje więc taki sam wynik, jak odjęcie $\vec{b}$. Właściwość tę można zastosować do określenia różnicy dwóch wektorów. Jeśli $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, to

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad \text{(odejmowanie wektorów)}, \qquad (3.4)$$

co oznacza, że aby znaleźć różnicę wektorów $\vec{d}$, należy dodać wektor $-\vec{b}$ do wektora $\vec{a}$. Na rysunku 3.6 pokazano, jak to się robi geometrycznie.

Podobnie, jak w zwykłej algebrze, wyraz zawierający wektor można przenieść na drugą stronę równania, zmieniając jego znak. Na przykład, jeśli mamy dane równanie (3.4) i chcemy z niego wyznaczyć $\vec{a}$, to możemy przekształcić je do postaci

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}, \qquad \text{czyli} \qquad \vec{a} = \vec{d} + \vec{b}.$$

Zapamiętaj, że choć w powyższych rozważaniach zastosowaliśmy wektory przemieszczenia, to prawa dodawania i odejmowania wektorów obowiązują dla wszystkich wektorów, niezależnie o tego, czy są to wektory przedstawiające prędkość, przyspieszenie, czy jakąkolwiek inną wielkość wektorową. Jednak dodawać do siebie można tylko wektory tej samej wielkości fizycznej, np. dwa wektory przemieszczenia lub dwa wektory prędkości, natomiast dodawanie przemieszczenia do prędkości nie ma sensu. Podobnie jest i dla skalarów: nie ma sensu dodawanie 21 s do 12 m.



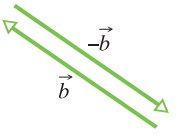
Sprawdzian 1

Długości przemieszczeń $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wynoszą odpowiednio 3 m i 4 m, a $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Rozważ różne ustawienia wzajemne wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i powiedz, jaka jest długość $\vec{c}$: a) największa, b) najmniejsza z możliwych.

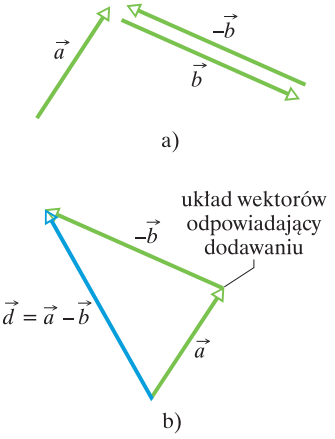
Składowe wektorów

Geometryczne dodawanie wektorów bywa żmudne. Można to zrobić dokładniej i łatwiej metodą algebraiczną. Wymaga to jednak umieszczenia wektorów w prostokątnym układzie współrzędnych. Jego osie x i y rysujemy zwykle tak, jak na rysunku 3.7a. Oś z skierowana jest do góry, prostopadle do kartki i przechodzi przez początek układu; tymczasem nie będziemy jej uwzględniać i zajmiemy się tylko wektorami dwuwymiarowymi.

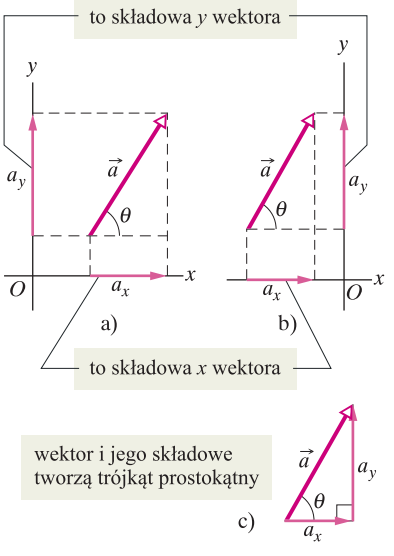
Składową wektora nazywamy jego rzut na oś. Na przykład na rysunku 3.7a a_x jest składową wektora $\vec{a}$ wzdłuż osi x, a a_y jego składową wzdłuż osi y. Aby znaleźć rzut wektora na oś, rysujemy linie prostopadłe do osi, przechodzące przez obydwa końce wektora, jak pokazano na rysunku. Rzut wektora na oś x nazywamy jego *składową* x, a rzut na oś y — *składową* y. Proces znajdowania składowych wektora nazywamy jego **rozkładem na składowe**.



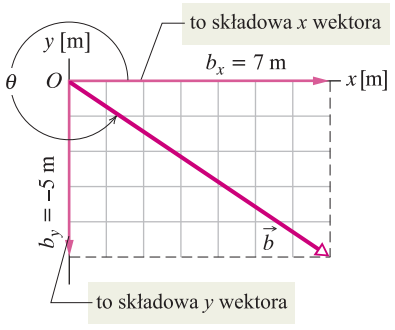
Rys. 3.5. Wektory $\vec{b}$ i $-\vec{b}$ mają taką samą długość, lecz przeciwny kierunek



Rys. 3.6. a) Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $-\vec{b}$. b) Aby odjąć wektor $\vec{b}$ od wektora $\vec{a}$, dodaj wektor $-\vec{b}$ do wektora $\vec{a}$



Rys. 3.7. a) Składowe a_x i a_y wektora $\vec{a}$. b) Składowe wektora nie ulegają zmianie przy jego przesunięciu, przy którym nie zmieniają się jego długość i kierunek. c) Składowe wektora są przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną jest moduł tego wektora



Rys. 3.8. Składowa wektora $\vec{b}$ wzdłuż osi x jest dodatnia, a jego składowa wzdłuż osi y — ujemna

Na rysunku 3.7 obie składowe a_x i a_y są dodatnie, ponieważ wektor $\vec{a}$ jest skierowany w stronę dodatnią wzdłuż obydwu osi (zwróć uwagę na małe groty na końcach składowych). Gdybyśmy odwrócili wektor $\vec{a}$, to otrzymalibyśmy obie składowe ujemne, tzn. skierowane ku ujemnym wartościom współrzędnych x i y. Rozkład na składowe wektora $\vec{b}$ na rysunku 3.8 daje dodatnią składową b_x i ujemną składową b_y.

W przypadku ogólnym wektor ma trzy składowe — wektor pokazany na rysunku 3.7a można uważać za wektor trójwymiarowy o składowej wzdłuż osi z równej zeru. Jak widać z rysunków 3.7a i b, przy przesunięciu wektora bez zmiany jego długości i kierunku, jego składowe się nie zmieniają.

Wyznaczanie składowych. Składowe wektora $\vec{a}$ z rysunku 3.7a możemy wyznaczyć z narysowanego tam trójkąta jako

$$a_x = a\cos\theta \qquad \text{oraz} \qquad a_y = a\sin\theta, \tag{3.5}$$

przy czym θ jest kątem, jaki tworzy wektor $\vec{a}$ z dodatnim kierunkiem osi x, a a jest długością wektora $\vec{a}$. Na rysunku 3.7c pokazano, że wektor $\vec{a}$ oraz jego składowe x i y tworzą trójkąt prostokątny. Widać też, że wektor możemy utworzyć z jego składowych, ustawiając je tak, aby koniec jednej był początkiem drugiej. Wektor $\vec{a}$ jest skierowany wzdłuż przeciwprostokątnej powstałego trójkąta tak, że jego początek jest początkiem jednej składowej, a koniec — końcem drugiej.

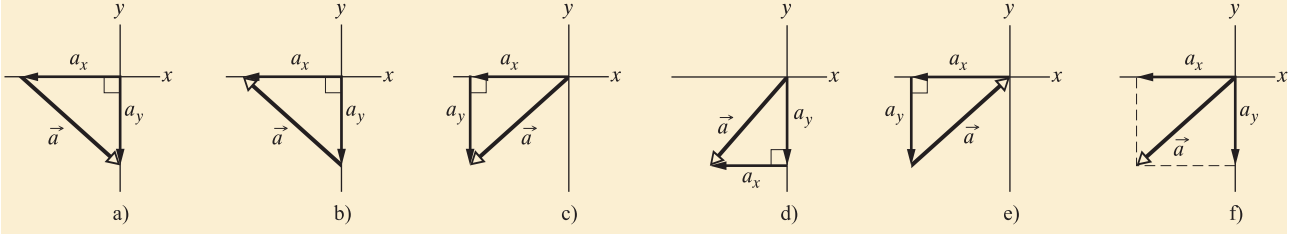
Gdy dokonamy rozkładu wektora na składowe w ustalonym układzie współrzędnych, możemy zamiast wektora zastosować te składowe. Na przykład wektor $\vec{a}$ z rysunku 3.7a jest dany (tzn. całkowicie wyznaczony) przez wielkości a i θ. Można go również określić, podając składowe a_x i a_y. Obie pary wielkości zawierają tę samą informację. Są one ze sobą powiązane zależnościami:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

W bardziej ogólnym przypadku trójwymiarowym wektor jest wyznaczony przez jego długość i dwa kąty (np. a, θ i ϕ) lub jego trzy składowe (a_x, a_y i a_z).

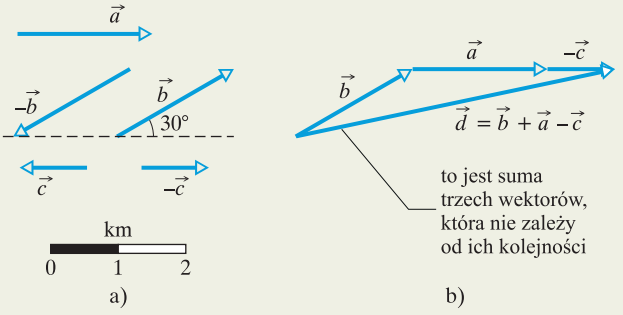
Sprawdzian 2

Na którym z poniższych rysunków poprawnie wyznaczono wektor $\vec{a}$ na podstawie jego składowych x i y?



Przykład 3.01. Dodawanie wektorów, orientacja w terenie

Podczas ćwiczenia orientacji w terenie masz za zadanie jak najbardziej oddalić się od obozu (licząc w linii prostej), pokonując marszem trzy odcinki. Masz do wyboru następujące długości i kierunki marszu (w dowolnej kolejności): a) 2 km w kierunku wschodnim ($\vec{a}$), b) 2 km w kierunku północno-wschodnim, 30° od kierunku wschodniego ($\vec{b}$), c) 1 km w kierunku zachodnim ($\vec{c}$). Możesz także wybrać $-\vec{b}$ zamiast $\vec{b}$ oraz $-\vec{c}$ zamiast $\vec{c}$. Ile wynosi największa odległość od obozu, jaką możesz uzyskać na końcu trzeciego odcinka (kierunkiem się nie interesujemy)?



Rys. 3.9. a) Wektory przemieszczenia; można zastosować trzy z nich. b) Osiągniesz największą odległość od obozu, jeśli wybierzesz przemieszczenia $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $-\vec{c}$ (w dowolnej kolejności). Narysowano jedno z ustawień, dających przemieszczenie łączne $\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$

Rozumowanie: W dogodnej skali rysujemy wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $-\vec{b}$ i $-\vec{c}$, jak na rysunku 3.9a. Następnie wyobrażamy sobie przesuwanie tych wektorów po kartce, łącząc ich końce z początkami tak, aby wyznaczyć ich sumę $\vec{d}$. Początek pierwszego wektora oznacza położenie obozu, koniec trzeciego — miejsce, do którego dotrzesz na końcu wyprawy. Początek wektora $\vec{d}$ pokrywa się z początkiem wektora pierwszego, a jego koniec — z końcem wektora trzeciego. Długość wektora $\vec{d}$ (d), oznacza twoją odległość od obozu na końcu marszu. Chcemy, by była ona jak największa.

Nietrudno zauważyć, że d jest największe, jeśli wybierzemy wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $-\vec{c}$. Ich kolejność nie ma znaczenia, ponieważ suma wektorów nie zależy od kolejności ich dodawania (przypomnij sobie, że dodawanie wektorów jest przemienne — równanie (3.2)). Na rysunku 3.9b sumę tę obliczono w kolejności:

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} + (-\vec{c}).$$

Korzystając ze skali podanej na rysunku 3.9a, mierzymy długość wektora $\vec{d}$, co daje

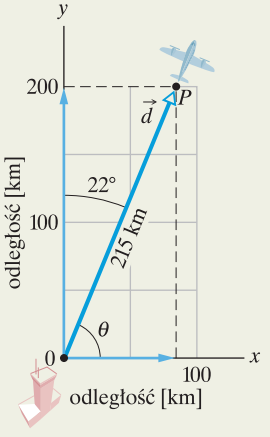
$$d = 4{,}8 \text{ km} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Przykład 3.02. Wyznaczanie składowych, lot samolotu

Mały samolot wystartował z lotniska i wkrótce przestał być widoczny, gdyż niebo było zachmurzone. Dostrzeżono go dopiero w odległości 215 km od lotniska, w kierunku północno-wschodnim, tworzącym kąt 22° z kierunkiem północnym. Jak daleko na północy i jak daleko na wschodzie znajdował się wówczas samolot?

PODSTAWOWE FAKTY

Mamy dane: długość wektora (215 km) i kąt, jaki tworzy on z pewnym kierunkiem (22° na wschód od kierunku północnego), a musimy wyznaczyć składowe tego wektora.



Rys. 3.10. Samolot wystartował z lotniska umieszczonego w początku układu współrzędnych, a po pewnym czasie został dostrzeżony w punkcie P

Obliczenia: Narysujmy układ współrzędnych x, y tak, że kierunek dodatni osi x jest kierunkiem ku wschodowi, a osi y — ku północy (rys. 3.10). Dla wygody wybierzmy początek tego układu w miejscu, w którym znajduje się lotnisko. (Nie musimy tak robić — wynik zadania nie zależy od wyboru układu współrzędnych,

ale po co mielibyśmy sobie utrudniać życie?). Tak więc wektor przemieszczenia samolotu $\vec{d}$ ma początek w początku układu, a koniec w punkcie, w którym dostrzeżono samolot.

Aby obliczyć składowe wektora $\vec{d}$, korzystamy z równania (3.5), do którego podstawiamy $\theta = 68°$ $(= 90° - 22°)$, co daje

$$d_x = d\cos\theta = (215\text{ km})(\cos 68°)$$
$$= 81\text{ km} \qquad \text{(odpowiedź)},$$
$$d_y = d\sin\theta = (215\text{ km})(\sin 68°)$$
$$= 199\text{ km} \qquad \text{(odpowiedź)},$$

Dany samolot oddalił się zatem od lotniska o 81 km na wschód i o 199 km na północ.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Sztuka rozwiązywania zadań — kąty, funkcje trygonometryczne i odwrotne funkcje trygonometryczne

Porada 1: miara kąta — stopnie i radiany

Kąty mierzymy względem dodatniego kierunku osi x, przy czym kąt jest dodatni, jeśli liczy się go w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a ujemny, jeśli liczy się go w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Na przykład wartości 210° i −150° oznaczają ten sam kąt.

Jednostkami kąta są stopnie oraz radiany (rad). Związek między tymi jednostkami łatwo zapamiętać, wiedząc, że kąt pełny jest równy 360° lub 2π rad. Jeśli trzeba zamienić — powiedzmy — 40° na radiany, to wystarczy podstawić:

$$40°\frac{2\pi\text{ rad}}{360°} = 0{,}7\text{ rad}.$$

Porada 2: funkcje trygonometryczne

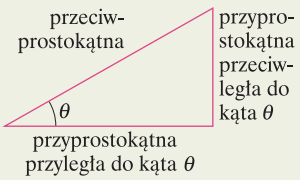
Musisz znać definicje podstawowych funkcji trygonometrycznych — sinusa, cosinusa i tangensa — bo są one powszechnie stosowane w nauce i technice. Definicje te podano na rysunku 3.11 w postaci niezależnej od oznaczeń wierzchołków trójkąta prostokątnego.

Powinieneś też znać wykresy funkcji trygonometrycznych, przedstawione na rysunku 3.12, aby móc ocenić, czy wynik otrzymany za pomocą kalkulatora odpowiada warunkom zadania. Pomocna może być w tym choćby znajomość znaków funkcji w poszczególnych ćwiartkach układu.

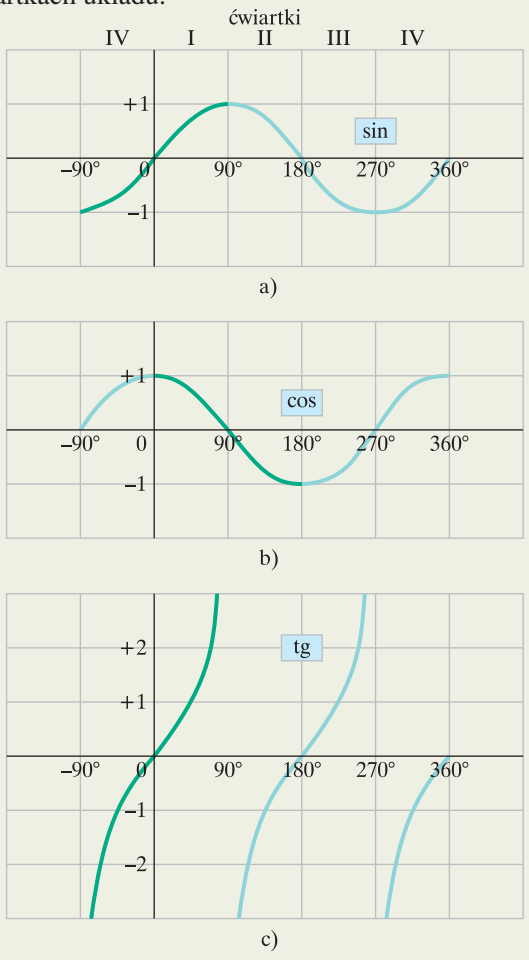
$$\sin\theta = \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa do kąta }\theta}{\text{przeciwprostokątna}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{przyprostokątna przyległa do kąta }\theta}{\text{przeciwprostokątna}}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{przyprostokątna przeciwległa do kąta }\theta}{\text{przyprostokątna przyległa do kąta }\theta}$$



Rys. 3.11. Trójkąt prostokątny służący do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych. Patrz także dodatek E



Rys. 3.12. Trzy ważne krzywe, których kształt należy pamiętać. Krzywą pogrubiono w zakresie kątów, w którym są zdefiniowane (i podawane przez kalkulator) *odwrotne* funkcje trygonometryczne

Porada 3: odwrotne funkcje trygonometryczne
Jeśli wyznaczasz za pomocą kalkulatora odwrotne funkcje trygonometryczne — $\arcsin x$, $\arccos x$ i $\operatorname{arctg} x$ (oznaczane na klawiszach kalkulatora np. jako $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, tg^{-1} lub otrzymywane przez naciśnięcie kolejno dwóch klawiszy, np. „inv" i „sin"), musisz zastanowić się nad tym, czy otrzymana wartość odpowiada warunkom zadania, gdyż może je spełniać wartość, której kalkulator ci nie poda. Zakresy, w których zdefiniowane są odwrotne funkcje trygonometryczne, a więc do których należy kąt podawany przez kalkulator, zaznaczono na rysunku 3.12. Na przykład, $\arcsin 0{,}5 = 30°$ (i taki wynik podaje kalkulator), ale wartość 0,5 ma także $\sin 150°$. Aby się o tym przekonać, wystarczy narysować na wykresie z rysunku 3.12a prostą poziomą, przecinającą oś y w punkcie $y = 0{,}5$ i zauważyć, w których punktach przecina ona wykres funkcji sinus. Jak poznać, która odpowiedź jest właściwa? Trzeba się zastanowić, która z nich odpowiada warunkom rozwiązywanego zadania.

Porada 4: jak mierzyć kąty?
Równanie (3.5), w którym występują funkcje $\cos\theta$ i $\sin\theta$, oraz równanie (3.6), w którym występuje funkcja $\operatorname{tg}\theta$, są słuszne tylko wtedy, gdy kąt jest mierzony względem dodatniego kierunku osi x. Jeśli jest on liczony względem innego kierunku, to może zajść potrzeba zamiany funkcji trygonometrycznych w równaniu (3.5) lub wzięcia odwrotności stosunku w równaniu (3.6). Aby nie popełnić błędu, najlepiej zawsze liczyć kąty względem dodatniego kierunku osi x. Na stronie *WileyPLUS* powinieneś zawsze podawać kąty w ten sposób (i przyjmować je za dodatnie, jeśli odpowiadają obrotowi w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a za ujemne — gdy odpowiadają obrotowi w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara).

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy wideo i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

3.2. WEKTORY JEDNOSTKOWE, DODAWANIE WEKTORÓW NA SKŁADOWYCH

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

3.06 przechodzić od opisu wektora za pomocą długości i kąta do opisu za pomocą wektorów jednostkowych oraz na odwrót;

3.07 dodawać i odejmować wektory wyrażone na te dwa sposoby;

3.08 wyjaśnić, że obrót układu współrzędnych względem jego początku może prowadzić do zmiany współrzędnych wektora, ale sam wektor nie ulega przy tym zmianie.

Podstawowe fakty

- Wektory jednostkowe $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ i $\hat{\mathrm{k}}$ mają długość równą jedności i są skierowane w dodatnich kierunkach osi x, y i z prawoskrętnego układu współrzędnych. Wektor $\vec{a}$ można zapisać za ich pomocą jako

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}},$$

gdzie $a_x\hat{\mathrm{i}}$, $a_y\hat{\mathrm{j}}$ i $a_z\hat{\mathrm{k}}$ są wektorowymi składowymi wektora $\vec{a}$, a a_x, a_y i a_z są składowymi skalarnymi tego wektora.

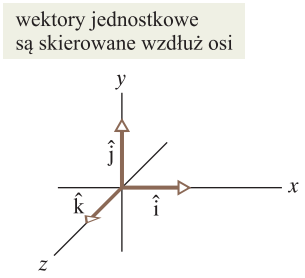
- Aby dodać wektory na składowych, obliczamy

$$r_x = a_x + b_x, \qquad r_y = a_y + b_y, \qquad r_z = a_z + b_z,$$

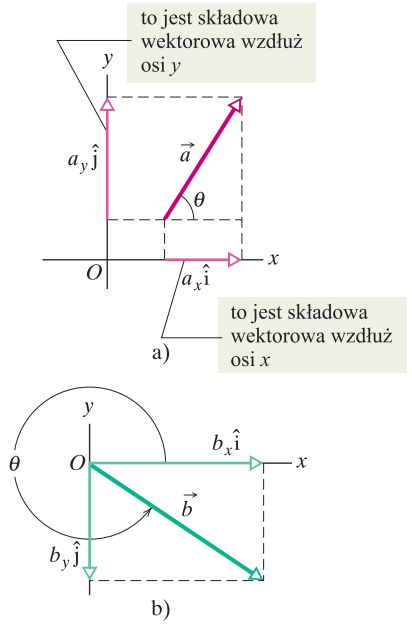
gdzie $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są wektorami, które dodajemy do siebie, a wektor $\vec{r}$ jest ich sumą. Zauważ, że dodajemy osobno składowe wzdłuż każdej osi.

Wektory jednostkowe

Wektorem jednostkowym nazywamy wektor o długości równej 1, skierowany w określonym kierunku. Nie ma on wymiaru ani jednostki, służy jedynie do wskazywania, czyli wyznaczania kierunku. Wektory jednostkowe dodatnich kierunków osi x, y i z oznaczamy jako $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ i $\hat{\mathrm{k}}$, gdzie



Rys. 3.13. Wektory jednostkowe $\hat{i}$, $\hat{j}$ i $\hat{k}$ wyznaczają kierunki osi prawoskrętnego układu współrzędnych



Rys. 3.14. a) Wektory składowe wektora $\vec{a}$. b) Wektory składowe wektora $\vec{b}$

zamiast strzałki nad wektorem używamy symbolu ˆ (rys. 3.13). Układ osi przedstawiony na rysunku 3.13 nazywamy **prawoskrętnym układem współrzędnych**. Obrót takiego układu, przy którym nie zmienia się wzajemne ustawienie osi, daje układ, który jest również prawoskrętny. W tym podręczniku będziemy posługiwać się wyłącznie takimi układami współrzędnych.

Wektorów jednostkowych można używać także do zapisu innych wektorów. Na przykład wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ z rysunków 3.7 i 3.8 można zapisać jako

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \tag{3.7}$$

oraz

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}, \tag{3.8}$$

jak pokazano na rysunku 3.14. Wielkości $a_x\hat{i}$ i $a_y\hat{j}$ są wektorami zwanymi **wektorami składowymi** wektora $\vec{a}$. Wielkości a_x i a_y są skalarami zwanymi **składowymi skalarnymi** wektora $\vec{a}$ (lub, jak poprzednio, po prostu jego **składowymi**).

Dodawanie wektorów na składowych

Możemy dodawać wektory geometrycznie, korzystając z rysunku (lub przy użyciu specjalnych kalkulatorów). Inną metodą dodawania wektorów jest dodawanie ich składowych dla każdej osi.

Na początek rozważmy równanie

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3.9}$$

z którego wynika, że wektor $\vec{r}$ jest taki sam jak wektor $(\vec{a} + \vec{b})$. Skoro tak jest, to obydwa te wektory ($\vec{r}$ i $(\vec{a}+\vec{b})$) muszą mieć jednakowe odpowiednie składowe, tzn.:

$$r_x = a_x + b_x, \tag{3.10}$$
$$r_y = a_y + b_y, \tag{3.11}$$
$$r_z = a_z + b_z. \tag{3.12}$$

Innymi słowy, dwa wektory są sobie równe, jeśli są sobie równe ich odpowiednie składowe. Z równań (3.9)–(3.12) wynika, że aby dodać do siebie dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, należy: 1) rozłożyć wektory na składowe (skalarne); 2) dodać do siebie składowe dla każdej osi tak, aby otrzymać składowe sumy wektorów $\vec{r}$; 3) wyznaczyć wektor $\vec{r}$ na podstawie jego składowych. W ostatnim punkcie mamy możliwość wyboru sposobu postępowania. Możemy wyrazić $\vec{r}$ przez wektory jednostkowe lub przez jego moduł i kąt.

W podobny sposób można odejmować wektory na składowych. Przypomnijmy, że różnicę wektorów, np. $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, można sprowadzić do sumy, pisząc $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Tak więc, odejmując wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, po prostu dodajemy składowe wektorów $\vec{a}$ i $-\vec{b}$, co daje:

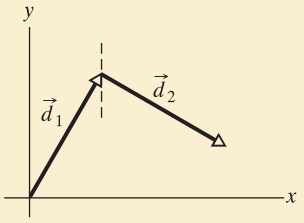
$$d_x = a_x - b_x, \quad d_y = a_y - b_y \quad \text{oraz} \quad d_z = a_z - b_z,$$

przy czym

$$\vec{d} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k}. \tag{3.13}$$

Sprawdzian 3

Spójrz na rysunek obok i powiedz: a) jakie są znaki składowych x wektorów $\vec{d}_1$ i $\vec{d}_2$, b) jakie są znaki składowych y wektorów $\vec{d}_1$ i $\vec{d}_2$, c) jakie są znaki składowych x i y wektora $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$.



Wektory a prawa fizyki

Na wszystkich rysunkach zawierających układ współrzędnych, jakie przedstawiliśmy do tej pory, osie x i y były równoległe do krawędzi strony. Gdy więc rozważaliśmy wektory, ich składowe były także równoległe do tych krawędzi, jak składowe a_x i a_y wektora $\vec{a}$ na rysunku 3.15a. Nie ma żadnego istotnego powodu, aby tak właśnie wybierać kierunki osi (poza tym, że taki rysunek najwygodniej oglądać). Możemy równie dobrze obrócić osie (ale nie wektor $\vec{a}$) np. o kąt ϕ, jak na rysunku 3.15b, otrzymując inne składowe wektora, które oznaczyliśmy przez a'_x i a'_y. Istnieje nieskończenie wiele różnych kątów ϕ, dlatego możemy mieć nieskończenie wiele różnych par składowych wektora $\vec{a}$.

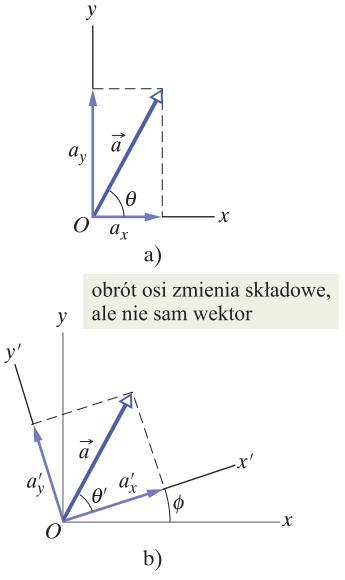
Która z tych par jest „najwłaściwsza”? Otóż każda z nich jest równie prawidłowa, gdyż każda z nich (w połączeniu z odpowiadającymi jej osiami) pokazuje inny sposób wyrażenia tego samego wektora $\vec{a}$; każda z nich pozwala wyznaczyć taki sam moduł i kierunek danego wektora. Z rysunku 3.15 otrzymujemy

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2} \tag{3.14}$$

oraz

$$\theta = \theta' + \phi. \tag{3.15}$$

Ważne jest to, że mamy wielką swobodę wyboru układu współrzędnych, ponieważ związki między wektorami (m.in. ich dodawanie — równanie (3.1)) nie zależą od położenia początku układu współrzędnych i kierunku jego osi. Dotyczy to również związków między wielkościami fizycznymi: nie zależą one od wyboru układu współrzędnych. Ponadto, opis wektorowy odznacza się prostotą zapisu bogatej treści — jedno równanie, jak (3.9), zawiera w sobie trzy równania, jak (3.10), (3.11) i (3.12), a czasem nawet większą ich liczbę — trudno się zatem dziwić, że prawa fizyki przedstawiane są niemal zawsze w postaci wektorowej.

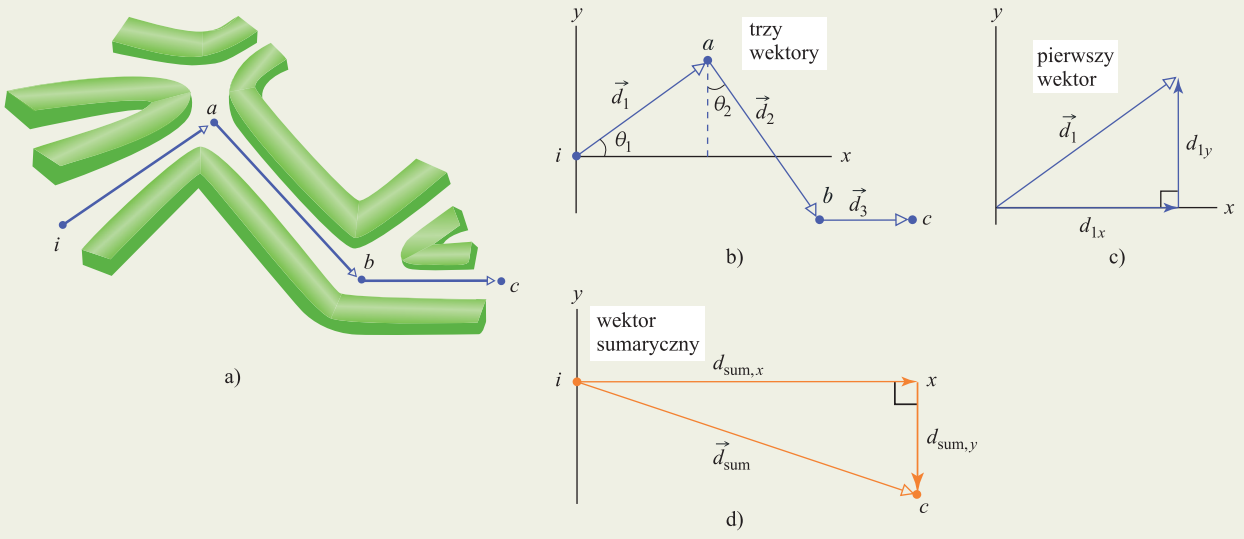


Rys. 3.15. a) Wektor $\vec{a}$ i jego składowe. b) Ten sam wektor w układzie współrzędnych obróconym o kąt ϕ

Przykład 3.03. Labirynt ogrodowy

W labiryncie ogrodowym ścianami są wysokie żywopłoty. Po wejściu do labiryntu należy znaleźć drogę do środka ogrodu, a potem — drogę do wyjścia z labiryntu. Na rysunku 3.16a przedstawiono wejście do takiego labiryntu oraz początek drogi — od punktu i do punktu c — jaką ktoś obrał. Na rysunku 3.16b pokazano kolejne odcinki drogi wędrowca w układzie współrzędnych, przy czym długości tych odcinków oraz kąty wyznaczające kierunek marszu wynoszą:

$$d_1 = 6\ \text{m}, \qquad \theta_1 = 40°,$$
$$d_2 = 8\ \text{m}, \qquad \theta_2 = 30°,$$
$$d_3 = 5\ \text{m}, \qquad \theta_3 = 0°,$$



Rys. 3.16. a) Trzy odcinki drogi wędrowca w labiryncie. b) Wektory przemieszczenia. c) Pierwszy wektor przemieszczenia i jego składowe. d) Wektor przemieszczenia sumarycznego i jego składowe

a układ współrzędnych wybrano tak, że jego początkiem jest punkt wejścia do labiryntu, a oś x jest równoległa do ostatniego odcinka drogi wędrowca. Wyznacz przemieszczenie wędrowca $\vec{d}$ z punktu i do punktu c, podając długość wektora i kąt wyznaczający jego kierunek.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Aby wyznaczyć przemieszczenie sumaryczne $\vec{d}_{\text{sum}}$, musimy dodać do siebie wektory kolejnych przemieszczeń wędrowca:

$$\vec{d}_{\text{sum}} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3.$$

2) W tym celu obliczamy najpierw sumę składowych x:

$$d_{\text{sum,x}} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x}, \qquad (3.16)$$

a następnie sumę składowych y:

$$d_{\text{sum,y}} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y}. \qquad (3.17)$$

3) Na koniec określamy długość i kąt wyznaczający kierunek wektora $\vec{d}_{\text{sum}}$ na podstawie jego składowych.

Obliczenia: Aby wykorzystać równania (3.16) i (3.17), musimy najpierw obliczyć składowe x i y każdego z wektorów składowych. Na rysunku 3.16c pokazano składowe wektora pierwszego przemieszczenia. Podobne rysunki sporządzamy dla pozostałych przemieszczeń składowych, a następnie korzystamy z równania (3.5), aby wyznaczyć składowe x poszczególnych przemieszczeń na podstawie odpowiednich długości i kątów, co daje:

$$d_{1x} = (6\text{ m})\cos 40^\circ = 4{,}6\text{ m},$$
$$d_{2x} = (8\text{ m})\cos(-60^\circ) = 4\text{ m},$$
$$d_{3x} = (5\text{ m})\cos 0^\circ = 5\text{ m}.$$

Możemy już więc skorzystać z równania (3.16), z którego otrzymujemy

$$d_{\text{sum,x}} = 4{,}6\text{ m} + 4\text{ m} + 5\text{ m} = 13{,}6\text{ m}.$$

W podobny sposób otrzymujemy z równania (3.5) składowe y poszczególnych przemieszczeń:

$$d_{1y} = (6\text{ m})\sin 40^\circ = 3{,}86\text{ m},$$
$$d_{2y} = (8\text{ m})\sin(-60^\circ) = -6{,}93\text{ m},$$
$$d_{3y} = (5\text{ m})\sin 0^\circ = 0\text{ m},$$

a z równania (3.17) dostajemy

$$d_{\text{sum,y}} = 3{,}86\text{ m} - 6{,}93\text{ m} + 0\text{ m} = -3{,}07\text{ m}.$$

Otrzymane przed chwilą składowe umożliwiają nam wyznaczenie wektora $\vec{d}_{\text{sum}}$. Jak widać na rysunku 3.16d, składowe i sam wektor tworzą trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną stanowi wektor. Długość wektora $\vec{d}_{\text{sum}}$ możemy więc wyznaczyć z równania (3.6), co daje

$$d_{\text{sum}} = \sqrt{d_{\text{sum},x}^2 + d_{\text{sum},y}^2} \qquad (3.18)$$
$$= \sqrt{(13{,}6\text{ m})^2 + (-3{,}07\text{ m})^2} = 13{,}9\text{ m} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Kąt, jaki tworzy wektor z dodatnim kierunkiem osi x, wyznaczamy także z równania (3.6), obliczając funkcję odwrotną do funkcji tangens:

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{d_{\text{sum},y}}{d_{\text{sum},x}}\right) \qquad (3.19)$$

$$= \text{arctg}\left(\frac{-3{,}07\text{ m}}{13{,}6\text{ m}}\right) = -12{,}7^\circ \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Otrzymaliśmy kąt ujemny, ponieważ dodatnią półoś x trzeba obrócić w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, aby nałożyć ją na kierunek naszego wektora. Trzeba zawsze uważać, gdy do obliczenia kąta na postawie wartości jego tangensa wykorzystujemy kalkulator. Wynik podany na wyświetlaczu może być poprawny matematycznie, ale nie odpowiadać warunkom zadania. W takim przypadku należy do podanej wartości kąta dodać 180°, aby odwrócić kierunek wektora. Najlepiej zawsze narysować wektor i jego składowe, jak to zrobiono na rysunku 3.16d. Z tego rysunku widać wyraźnie, że $\theta = -12{,}7^\circ$ jest odpowiedzią zgodną z warunkami zadania, a wartość $-12{,}7^\circ + 180^\circ \approx 167^\circ$ tych warunków nie spełnia.

Wszystko to wynika też z wykresu funkcji tangens na rysunku 3.12c. W naszym zadaniu argument funkcji arcus tangens wynosi $-3{,}07/13{,}6$, czyli $-0{,}226$. Jeśli na wykresie funkcji tangens narysujemy prostą poziomą przecinającą oś y w punkcie o współrzędnej $-0{,}226$, to przetnie ona wykres funkcji tangens w punkcie o współrzędnej x równej $-12{,}7^\circ$ oraz w wielu innych, w tym ok. 167°. Jednak tylko ta pierwsza wartość leży na pogrubionym fragmencie krzywej i dlatego jest podawana przez kalkulator.

Przykład 3.04. Dodawanie wektorów, użycie wektorów jednostkowych

Na rysunku 3.17a przedstawiono trzy wektory:

$$\vec{a} = (4{,}2\text{ m})\hat{\text{i}} - (1{,}5\text{ m})\hat{\text{j}},$$
$$\vec{b} = (-1{,}6\text{ m})\hat{\text{i}} + (2{,}9\text{ m})\hat{\text{j}},$$
$$\vec{c} = (-3{,}7\text{ m})\hat{\text{j}}.$$

Wyznacz wektor $\vec{r}$, który jest ich sumą (również pokazany na tym rysunku).

PODSTAWOWE FAKTY

Trzy dane wektory możemy dodać, dodając ich odpowiednie składowe. Mając składowe wektora $\vec{r}$, wyznaczymy jego długość i kierunek.

Obliczenia: Dodając składowe x wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, otrzymujemy składową x wektora $\vec{r}$

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$
$$= 4{,}2\text{ m} - 1{,}6\text{ m} + 0 = 2{,}6\text{ m}.$$

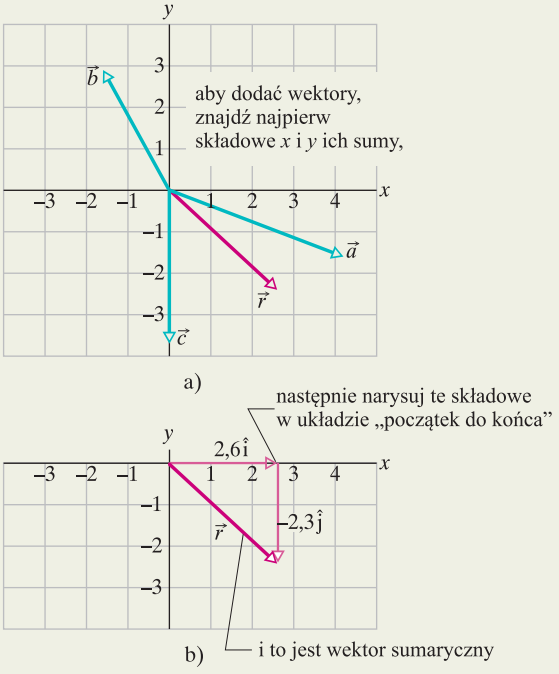
Analogicznie

$$r_y = a_y + b_y + c_y$$
$$= -1{,}5\text{ m} + 2{,}9\text{ m} - 3{,}7\text{ m} = -2{,}3\text{ m}.$$

Znając składowe wektora $\vec{r}$, możemy go zapisać za pomocą wektorów jednostkowych:

$$\vec{r} = (2{,}6\text{ m})\hat{\text{i}} - (2{,}3\text{ m})\hat{\text{j}} \qquad \text{(odpowiedź)},$$

przy czym $(2{,}6\text{ m})\hat{\text{i}}$ jest wektorem składowym wektora $\vec{r}$ wzdłuż osi x, a $-(2{,}3\text{ m})\hat{\text{j}}$ — wzdłuż osi y. Na rysunku 3.17b przedstawiono jeden ze sposobów, w jaki można z nich utworzyć wektor $\vec{r}$ (czy potrafisz narysować drugi z tych sposobów?).



Rys. 3.17. Wektor $\vec{r}$ jest sumą trzech pozostałych wektorów

Możemy również podać odpowiedź w postaci modułu (długości) wektora $\vec{r}$ i kąta wyznaczającego jego kierunek. Z równania (3.6) wynika, że moduł jest równy

$$r = \sqrt{(2{,}6\text{ m})^2 + (-2{,}3\text{ m})^2} \approx 3{,}5\text{ m} \qquad \text{(odpowiedź)},$$

a kąt (mierzony od dodatniego kierunku osi x) wynosi

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2{,}3\text{ m}}{2{,}6\text{ m}}\right) = -41^\circ \qquad \text{(odpowiedź)},$$

przy czym znak minus wskazuje, że kąt jest mierzony w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

3.3. MNOŻENIE WEKTORÓW

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

3.09 mnożyć wektory przez skalary;

3.10 wyjaśnić, że mnożąc wektor przez skalar, otrzymuje się wektor, obliczając iloczyn skalarny dwóch wektorów, otrzymuje się skalar, a wyznaczając iloczyn wektorowy dwóch wektorów, dostaje się wektor prostopadły do obydwu mnożonych wektorów;

3.11 wyznaczyć iloczyn skalarny dwóch wektorów zapisanych zarówno za pomocą długości i kąta, jak i za pomocą wektorów jednostkowych;

3.12 wyznaczyć kąt między dwoma wektorami, obliczając ich iloczyn skalarny i korzystając z zapisu zarówno za pomocą długości i kąta, jak i za pomocą wektorów jednostkowych;

3.13 określić położenie dwóch wektorów względem siebie na podstawie wartości ich iloczynu skalarnego;

3.14 wyznaczyć iloczyn wektorowy dwóch wektorów zapisanych zarówno za pomocą długości i kąta, jak i za pomocą wektorów jednostkowych;

3.15 określić kierunek wektora będącego iloczynem wektorowym dwóch wektorów, korzystając z reguły prawej dłoni;

3.16 obliczać skomplikowane wyrażenia z iloczynami wektorów, pamiętając że także tu obowiązują zwykłe reguły algebry dotyczące kolejności wykonywania działań w nawiasach.

Podstawowe fakty

- Iloczyn skalara s i wektora $\vec{w}$ to wektor o długości sw i kierunku zgodnym z kierunkiem wektora $\vec{w}$, gdy s jest dodatnie, a kierunku przeciwnym do kierunku wektora $\vec{w}$, gdy s jest ujemne. Iloraz wektora $\vec{w}$ przez skalar s to iloczyn $\vec{w}$ i $1/s$.

- Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, który oznaczamy jako $\vec{a} \cdot \vec{b}$, jest to *skalar* równy $ab\cos\phi$, tzn.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi,$$

przy czym ϕ jest kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Iloczyn skalarny jest równy iloczynowi długości jednego z mnożonych przez siebie wektorów i składowej skalarnej drugiego z nich w kierunku pierwszego wektora. W zapisie za pomocą wektorów jednostkowych

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \cdot (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}),$$

co można obliczać dalej, korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania. Należy też zauważyć, że $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

- Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, który oznaczamy jako $\vec{a} \times \vec{b}$, jest to *wektor* $\vec{c}$, którego długość c jest równa

$$c = ab\sin\phi,$$

przy czym ϕ jest mniejszym z kątów między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kierunek wektora $\vec{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i dany regułą prawej dłoni, jak pokazano na rysunku 3.19. Iloczyn wektorowy nie jest przemienny, gdyż $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. W zapisie za pomocą wektorów jednostkowych

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \times (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}),$$

co można obliczać dalej, korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania.

- W skomplikowanych wyrażeniach z iloczynami wektorów, gdy np. jeden z czynników jest jeszcze innym iloczynem wektorów, obowiązują zwykłe reguły algebry dotyczące kolejności wykonywania działań w nawiasach.

Mnożenie wektorów*

Mnożenie wektorów można wykonywać na trzy sposoby, lecz żaden z nich nie jest taki sam, jak zwykłe mnożenie algebraiczne, należy zatem dobrze poznać podstawowe prawa tych działań.

Mnożenie wektora przez skalar

W wyniku pomnożenia wektora $\vec{a}$ przez skalar s otrzymujemy nowy wektor. Jego moduł jest równy iloczynowi modułu $\vec{a}$ i wartości bezwzględnej s. Jego kierunek jest zgodny z kierunkiem $\vec{a}$, jeśli s jest dodatnie, a przeciwny, jeśli s jest ujemne. Aby podzielić $\vec{a}$ przez s, mnożymy $\vec{a}$ przez $1/s$.

Mnożenie wektora przez wektor

Istnieją dwa sposoby mnożenia wektora przez wektor: w jednym przypadku otrzymujemy w wyniku skalar (nazywany *iloczynem skalarnym*), a w drugim — nowy wektor (nazywany *iloczynem wektorowym*). Studentom często mylą się te dwa iloczyny.

Iloczyn skalarny

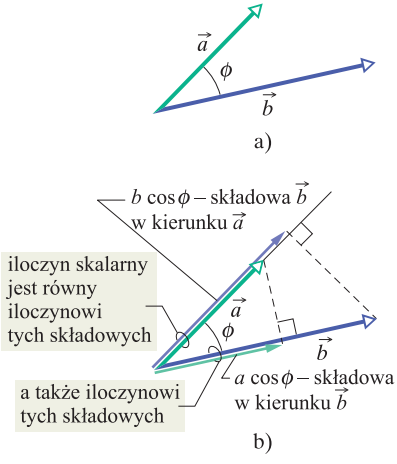
Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (patrz rysunek 3.18a), oznaczany $\vec{a} \cdot \vec{b}$, jest zdefiniowany jako

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi, \tag{3.20}$$

przy czym a jest modułem $\vec{a}$, b — modułem $\vec{b}$, a ϕ — kątem między $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (czyli — mówiąc ściślej — między kierunkami $\vec{a}$ i $\vec{b}$). W rzeczywistości są dwa kąty spełniające ten warunek: ϕ oraz $360° - \phi$. Do równania (3.20) możesz wstawić którykolwiek z nich, gdyż ich cosinusy mają taką samą wartość.

Zauważ, że po prawej stronie równania (3.20) występują same skalary (w tym wartość $\cos\phi$). Wobec tego wyrażenie po lewej stronie równania, tzn. $\vec{a} \cdot \vec{b}$, jest wielkością *skalarną*.

Iloczyn skalarny można uważać za iloczyn dwóch wielkości: 1) modułu jednego z wektorów, 2) składowej drugiego wektora w kierunku pierwszego z nich. Na przykład, jak pokazano na rysunku 3.18b, $a\cos\phi$ jest składową $\vec{a}$ w kierunku $\vec{b}$; zauważ, że jest ona równa rzutowi prostopadłemu $\vec{a}$ na kierunek $\vec{b}$. Analogicznie $b\cos\phi$ jest składową $\vec{b}$ w kierunku $\vec{a}$.



Rys. 3.18. a) Dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tworzące ze sobą kąt ϕ. b) Składowe każdego z tych wektorów w kierunku drugiego z nich

Jeśli kąt ϕ między dwoma wektorami jest równy 0°, to składowa jednego wektora w kierunku drugiego jest maksymalna, a więc iloczyn skalarny wektorów jest też największy. Jeśli natomiast ϕ jest równe 90°, to składowa jednego wektora w kierunku drugiego jest równa zeru, zatem iloczyn skalarny wektorów także wynosi zero.

Równanie (3.20) można zapisać w takiej postaci, w której składowe są wyraźnie wyróżnione:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a\cos\phi)(b) = (a)(b\cos\phi). \tag{3.21}$$

*Przedstawione w tym podrozdziale zagadnienia będą niezbędne w dalszych częściach wykładu (iloczyn skalarny w rozdziale 7, a iloczyn wektorowy w rozdziale 11), wobec czego jego lektura może być odłożona na później.

Iloczyn skalarny jest przemienny, można więc napisać

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Jeśli wyrazimy obydwa wektory przez wektory jednostkowe, to ich iloczyn skalarny możemy zapisać w postaci

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \cdot (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \tag{3.22}$$

a następnie skorzystać z rozdzielności mnożenia względem dodawania i wyrazić prawą stronę powyższego równania w postaci sumy iloczynów skalarnych każdego wektora składowego pierwszego wektora i każdego wektora składowego drugiego. W ten sposób można wykazać, że

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{3.23}$$

Sprawdzian 4

Długości wektorów $\vec{C}$ i $\vec{D}$ wynoszą odpowiednio 3 jednostki i 4 jednostki. Ile wynosi kąt między kierunkami $\vec{C}$ i $\vec{D}$, jeśli $\vec{C} \cdot \vec{D}$ wynosi: a) zero, b) 12 jednostek, c) -12 jednostek?

Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, oznaczanym jako $\vec{a} \times \vec{b}$, jest wektor $\vec{c}$ o długości

$$c = ab \sin\phi, \tag{3.24}$$

przy czym ϕ jest *mniejszym* z kątów między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (ważne jest, aby wziąć mniejszy z dwóch kątów między wektorami, ponieważ wartości $\sin\phi$ i $\sin(360^\circ - \phi)$ różnią się znakiem).

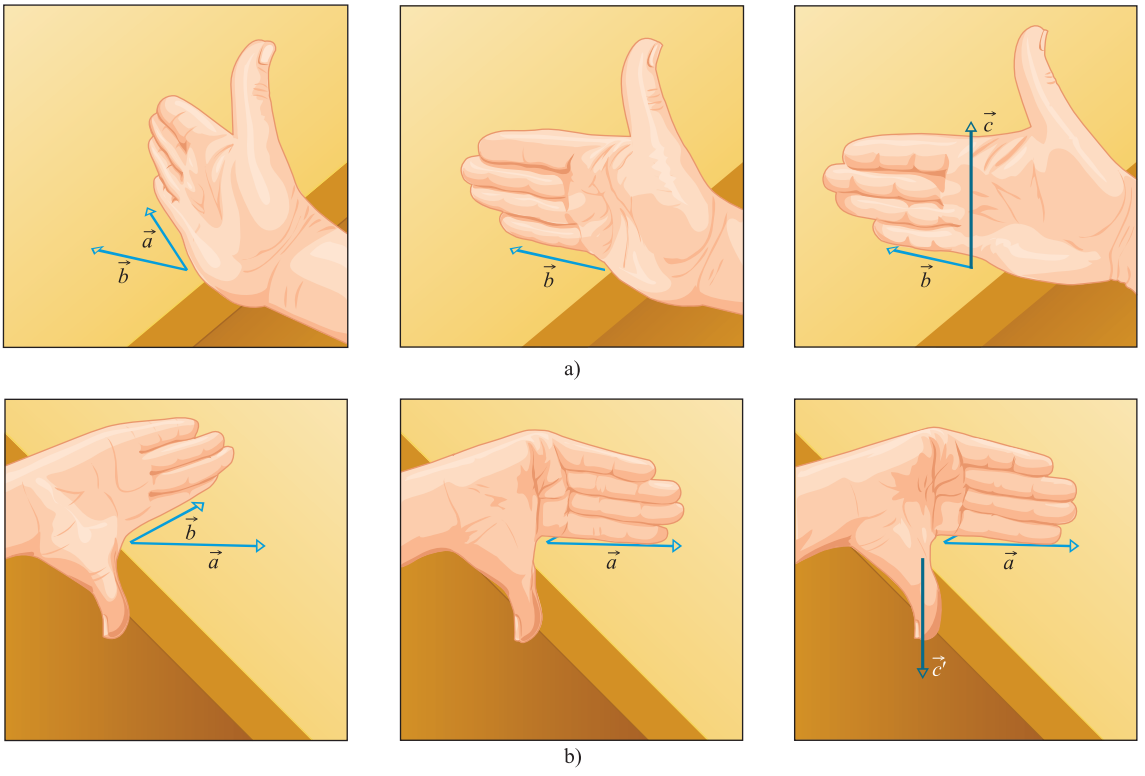
Jeśli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe lub antyrównoległe, to $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. Długość wektora $\vec{a} \times \vec{b}$, którą można zapisać w postaci $|\vec{a} \times \vec{b}|$ jest największa, gdy wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są do siebie prostopadłe.

Kierunek wektora $\vec{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Na rysunku 3.19a pokazano, jak możesz wyznaczyć kierunek $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, korzystając z tzw. **reguły prawej dłoni**. W tym celu przesuń wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tak, aby miały wspólny początek (nie zmieniając oczywiście ich kierunków) i wyobraź sobie przechodzącą przez ten punkt linię prostopadłą do płaszczyzny tworzonej przez $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Otocz tę linię *prawą* dłonią tak, aby kierunek palców pokazywał łuk od $\vec{a}$ do $\vec{b}$ wzdłuż mniejszego kąta między nimi. Odgięty kciuk wskazuje wówczas kierunek wektora $\vec{c}$.

Kolejność wektorów w iloczynie wektorowym jest istotna. Na rysunku 3.19b przedstawiono sposób wyznaczania kierunku wektora $\vec{c}' = \vec{b} \times \vec{a}$, przy którym palce ustawione są wzdłuż łuku mniejszego kąta od $\vec{b}$ do $\vec{a}$. Kciuk wskazuje teraz kierunek przeciwny do poprzedniego, wobec czego $\vec{c}' = -\vec{c}$, czyli

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}). \tag{3.25}$$

Innymi słowy, iloczyn wektorowy nie jest przemienny.



Rys. 3.19. Reguła prawej dłoni do wyznaczania kierunku iloczynu wektorowego. a) Jeśli zegniesz palce wzdłuż łuku mniejszego kąta między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, to odgięty kciuk wskaże kierunek wektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. b) Jak widać, kierunek wektora $\vec{b} \times \vec{a}$ jest przeciwny do kierunku wektora $\vec{a} \times \vec{b}$

Korzystając z zapisu za pomocą wektorów jednostkowych, otrzymujemy

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}). \qquad (3.26)$$

Wyrażenie to można rozwinąć, korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania i zapisać prawą stronę w postaci sumy iloczynów wektorowych każdego wektora składowego pierwszego wektora i każdego wektora składowego drugiego. Wartości iloczynu wektorowego wektorów jednostkowych podane są w dodatku E (w punkcie: Iloczyny wektorów). Na przykład w rozwinięciu prawej strony równania (3.29) występuje wyraz

$$a_x\hat{\imath} \times b_x\hat{\imath} = a_x b_x(\hat{\imath} \times \hat{\imath}) = 0.$$

Jest on równy zeru, ponieważ wektory jednostkowe $\hat{\imath}$ oraz $\hat{\imath}$ są równoległe, a więc ich iloczyn wektorowy jest równy zeru. Podobnie otrzymujemy

$$a_x\hat{\imath} \times b_y\hat{\jmath} = a_x b_y(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) = a_x b_y\hat{k}.$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że długość wektora $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$ jest równa jedności. Wynika to z równania (3.24) — wektory $\hat{\imath}$ i $\hat{\jmath}$ mają długość równą jedności,

a kąt między nimi wynosi 90°. Kierunek wektora $\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{j}}$ wyznaczyliśmy za pomocą reguły prawej dłoni. Jest to dodatni kierunek osi z, a więc kierunek wektora $\hat{\mathrm{k}}$.

Wyznaczając w ten sposób wartości wszystkich składników rozwinięcia prawej strony równania (3.26), otrzymujemy

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}}. \quad (3.27)$$

Wartość iloczynu wektorowego można również wyznaczyć, zapisując i obliczając odpowiedni wyznacznik (jak pokazano w dodatku E).

Aby stwierdzić, czy dany układ współrzędnych xyz jest prawoskrętny, zastosujemy regułę prawej dłoni do iloczynu wektorowego $\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}$ w tym układzie. Jeśli ustawisz palce prawej ręki wzdłuż łuku od $\hat{\mathrm{i}}$ (dodatniego kierunku osi x) do $\hat{\mathrm{j}}$ (dodatniego kierunku osi y), a odgięty kciuk wskaże dodatni kierunek osi z, to układ jest prawoskrętny.

Sprawdzian 5

Długości wektorów $\vec{C}$ i $\vec{D}$ wynoszą odpowiednio 3 jednostki i 4 jednostki. Ile wynosi kąt między kierunkami $\vec{C}$ i $\vec{D}$, jeśli długość iloczynu wektorowego $\vec{C} \times \vec{D}$ wynosi: a) zero, b) 12 jednostek?

Przykład 3.05. Iloczyn skalarny, kąt między wektorami

Ile wynosi kąt ϕ utworzony przez wektory $\vec{a} = 3\hat{\mathrm{i}} - 4\hat{\mathrm{j}}$ oraz $\vec{b} = -2\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{k}}$?

PODSTAWOWE FAKTY

Kąt między kierunkami dwóch wektorów występuje w definicji ich iloczynu skalarnego (równanie (3.20)):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi. \quad (3.28)$$

Obliczenia: W równaniu (3.28) a jest długością wektora $\vec{a}$, czyli

$$a = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5, \quad (3.29)$$

a b jest długością wektora $\vec{b}$, czyli

$$b = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3{,}61. \quad (3.30)$$

Zapisując obydwa wektory za pomocą wektorów jednostkowych i stosując rozdzielność mnożenia względem dodawania, możemy obliczyć wartość lewej strony równania (3.28):

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (3\hat{\mathrm{i}} - 4\hat{\mathrm{j}}) \cdot (-2\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{k}}) \\ &= (3\hat{\mathrm{i}}) \cdot (-2\hat{\mathrm{i}}) + (3\hat{\mathrm{i}}) \cdot (3\hat{\mathrm{k}}) + (-4\hat{\mathrm{j}}) \cdot (-2\hat{\mathrm{i}}) \\ &\quad + (-4\hat{\mathrm{j}}) \cdot (3\hat{\mathrm{k}}).\end{aligned}$$

Następnie zastosujemy równanie (3.20) do wyznaczenia wartości każdego składnika prawej strony powyższego równania. Kąt między wektorami w pierwszym składniku (tzn. $3\hat{\mathrm{i}}$ i $-2\hat{\mathrm{i}}$) wynosi 0°, w pozostałych jest równy 90°. Mamy więc

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -(6)(1) + (9)(0) + (8)(0) - (12)(0) = -6.$$

Podstawiając ten wynik oraz wartości z równań (3.29) i (3.30) do równania (3.28), otrzymujemy

$$-6 = (5)(3{,}61)\cos\phi,$$

a stąd

$$\phi = \arccos\frac{-6}{(5)(3{,}61)} = 109° \approx 110° \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Przykład 3.06. Iloczyn wektorowy, reguła prawej dłoni

Jak pokazano na rysunku 3.20 wektor $\vec{a}$ leży w płaszczyźnie xy, ma długość równą 18 jednostek, a jego kierunek tworzy kąt 250° z dodatnim kierunkiem osi x. Wektor $\vec{b}$ ma długość równą 12 jednostek i kierunek dodatni osi z. Wyznacz iloczyn wektorowy $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

PODSTAWOWE FAKTY

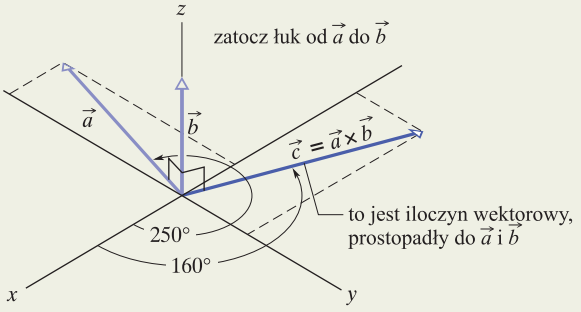
Mając długości i (dane za pomocą kątów) kierunki dwóch wektorów, możemy wyznaczyć długość ich iloczynu wektorowego (tzn. wektora otrzymanego w wyniku obliczenia ich iloczynu wektorowego) na podstawie równania (3.24).

Obliczenia: Dla danych z tego zadania otrzymujemy

$$c = ab \sin\phi = (18)(12)(\sin 90°) = 216 \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Znając długości i kierunki dwóch wektorów, możemy wyznaczyć kierunek ich iloczynu wektorowego na podstawie reguły prawej dłoni z rysunku 3.19. Wyobraźmy sobie na rysunku 3.20 prawą dłoń, której palce otaczają linię prostopadłą do kierunku wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (tzn. linię, na której leży pokazany na rysunku wektor $\vec{c}$) wzdłuż łuku od $\vec{a}$ do $\vec{b}$. Odgięty kciuk wyznacza wówczas kierunek wektora $\vec{c}$. Jak widać z rysunku 3.20, wektor $\vec{c}$ leży w płaszczyźnie xy. Jego kierunek jest prostopadły do kierunku wektora $\vec{a}$, dlatego tworzy on z dodatnim kierunkiem osi x kąt

$$250° - 90° = 160° \quad \text{(odpowiedź)}.$$



Rys. 3.20. Wektor $\vec{c}$ (leżący w płaszczyźnie xy) jest iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$

Przykład 3.07. Iloczyn wektorowy, wektory jednostkowe

Jeśli $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$, a $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$, to ile wynosi $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

PODSTAWOWE FAKTY

Gdy mamy dane dwa wektory wyrażone za pomocą wektorów jednostkowych, wtedy ich iloczyn wektorowy możemy znaleźć, mnożąc kolejno przez siebie składniki rozwinięcia obydwu wektorów.

Obliczenia: W przypadku tego zadania otrzymujemy

$$\vec{c} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k})$$
$$= 3\hat{i} \times (-2\hat{i}) + 3\hat{i} \times 3\hat{k} + (-4\hat{j}) \times (-2\hat{i}) + (-4\hat{j}) \times 3\hat{k}.$$

Następnie obliczamy każdy wektor składowy, wyznaczając jego wartość z równania (3.24), a kierunek — z reguły prawej dłoni. Dla pierwszego wyrazu kąt między wektorami wynosi 0°, a dla pozostałych — 90°. Mamy więc

$$\vec{c} = 6(0) + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12\hat{i} = -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Wektor $\vec{c}$ jest prostopadły zarówno do $\vec{a}$, jak i do $\vec{b}$, co łatwo sprawdzić, obliczając, że $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ oraz $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$. Innymi słowy oznacza to, że składowe $\vec{c}$ w kierunkach $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wynoszą zero.

Zapamiętajmy: iloczyn wektorowy daje wektor prostopadły do obu wektorów, które mnożymy przez siebie, iloczyn skalarny jest równy zeru, gdy mnożymy przez siebie wektory wzajemnie prostopadłe, a iloczyn wektorowy jest równy zeru, gdy mnożymy przez siebie wektory o kierunku tym samym lub przeciwnym.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Podsumowanie

Skalary i wektory *Skalar*, np. temperatura, ma tylko wartość. Podajemy go jako liczbę i jednostkę (np. 10°C); spełnia on prawa arytmetyki i zwykłej algebry. *Wektor*, np. przemieszczenie, ma wartość bezwzględną i kierunek (np. 5 m na północ); działania na wektorach wymagają użycia reguł algebry wektorów.

Geometryczne dodawanie wektorów Dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ można do siebie dodać geometrycznie, rysując je w jednakowej skali i umieszczając początek drugiego w tym samym punkcie, co koniec pierwszego. Wektor łączący początek pierwszego wektora z końcem drugiego jest wtedy ich sumą wektorową $\vec{c}$. Aby odjąć $\vec{b}$ od $\vec{a}$, należy odwrócić kierunek $\vec{b}$, co daje wektor $-\vec{b}$, a następnie dodać $-\vec{b}$ do $\vec{a}$. Dodawanie wektorów jest przemienne, tzn.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \tag{3.2}$$

a także łączne, tzn.

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \tag{3.3}$$

Składowe wektora *Składowe* wektora dwuwymiarowego $\vec{a}$ w danym układzie współrzędnych a_x i a_y wyznaczamy, rzutując obydwa końce $\vec{a}$ na osie układu współrzędnych. Są one równe:

$$a_x = a\cos\theta \qquad \text{i} \qquad a_y = a\sin\theta, \tag{3.5}$$

przy czym θ jest kątem między kierunkiem $\vec{a}$ a dodatnim kierunkiem osi x. Znak składowej wskazuje na kierunek wektora w stosunku do odpowiedniej osi. Mając składowe wektora $\vec{a}$, można wyznaczyć jego długość i kierunek, korzystając ze związków:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

Wektory jednostkowe. *Wektory jednostkowe* $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ i $\hat{\mathrm{k}}$ są to wektory o długości równej jedności i kierunkach osi — odpowiednio x, y i z — prawoskrętnego układu współrzędnych. Wektor $\vec{a}$ można zapisać za pomocą wektorów jednostkowych jako:

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}, \tag{3.7}$$

gdzie a_x, a_y i a_z są **składowymi wektora** $\vec{a}$, a wektory $a_x\hat{\mathrm{i}}$, $a_y\hat{\mathrm{j}}$ i $a_z\hat{\mathrm{k}}$ — jego **wektorami składowymi**, skierowanymi wzdłuż osi układu współrzędnych.

Dodawanie wektorów na składowych Aby dodać dwa wektory dane za pomocą ich składowych, stosujemy wzory:

$$r_x = a_x + b_x, \qquad r_y = a_y + b_y, \qquad r_z = a_z + b_z, \tag{3.10–3.12}$$

przy czym wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są wektorami, które dodajemy, a wektor $\vec{r}$ jest ich sumą. Zauważ, że dodajemy do siebie składowe wzdłuż tej samej osi, kolejno dla każdej osi. Wektor sumy możemy potem zapisać za pomocą wektorów jednostkowych lub z użyciem długości i kąta.

Wektory a prawa fizyki Każdą sytuację fizyczną, w której mamy do czynienia z wektorami, można opisywać w dowolnym układzie współrzędnych. Wybieramy zwykle ten układ, w którym opis zjawisk fizycznych jest najprostszy. Związki między wielkościami fizycznymi nie zależą od tego, w jakim układzie współrzędnych je wyrażono. Prawa fizyki także są niezależne od wyboru układu współrzędnych.

Iloczyn skalara i wektora Iloczynem skalara s i wektora $\vec{v}$ jest wektor o długości sv i kierunku zgodnym z kierunkiem $\vec{v}$, jeśli s jest dodatnie, a przeciwnym — jeśli s jest ujemne. Aby podzielić $\vec{v}$ przez s, należy pomnożyć $\vec{v}$ przez $(1/s)$.

Iloczyn skalarny wektorów **Iloczynem skalarnym** dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, zapisywanym jako $\vec{a}\cdot\vec{b}$, jest *skalar* o wartości

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi, \tag{3.20}$$

przy czym ϕ jest kątem utworzonym przez kierunki wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Iloczyn skalarny wektorów może być liczbą dodatnią, ujemną lub zerem, w zależności od wartości kąta ϕ. Iloczyn skalarny jest równy iloczynowi długości jednego z wektorów i składowej drugiego w kierunku pierwszego. Zauważ, że $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, tzn. iloczyn skalarny jest przemienny.

Gdy wektory są wyrażone za pomocą wektorów jednostkowych, ich iloczyn skalarny

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}) \tag{3.22}$$

można wyznaczyć, mnożąc kolejno przez siebie wektory składowe każdego z nich.

Iloczyn wektorowy wektorów **Iloczynem wektorowym** dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, zapisywanym jako $\vec{a}\times\vec{b}$, jest *wektor* $\vec{c}$ o długości

$$c = ab\sin\phi, \tag{3.24}$$

przy czym ϕ jest mniejszym z kątów między kierunkami wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Wektor $\vec{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a jego kierunek jest wyznaczony przez regułę prawej dłoni, przedstawioną na rysunku 3.19. Należy pamiętać, że $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$, co oznacza, że iloczyn wektorowy nie jest przemienny.

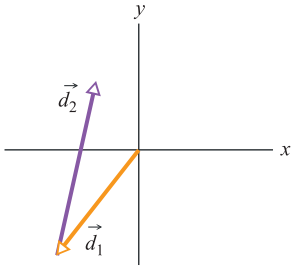
Mając wektory zapisane za pomocą wektorów jednostkowych, ich iloczyn wektorowy można obliczyć jako sumę iloczynów wektorowych każdego wektora składowego pierwszego wektora i każdego wektora składowego drugiego:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\times(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}). \tag{3.26}$$

Pytania

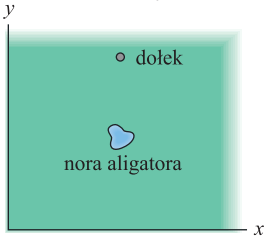
1 Czy suma długości dwóch wektorów może być równa długości sumy tych wektorów? Jeśli nie, to dlaczego? Jeśli tak, to kiedy?

2 Na rysunku 3.21 przedstawiono dwa wektory leżące w płaszczyźnie xy. Podaj znaki składowych x i y wektorów: a) $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$, b) $\vec{d}_1 - \vec{d}_2$ i c) $\vec{d}_2 - \vec{d}_1$.



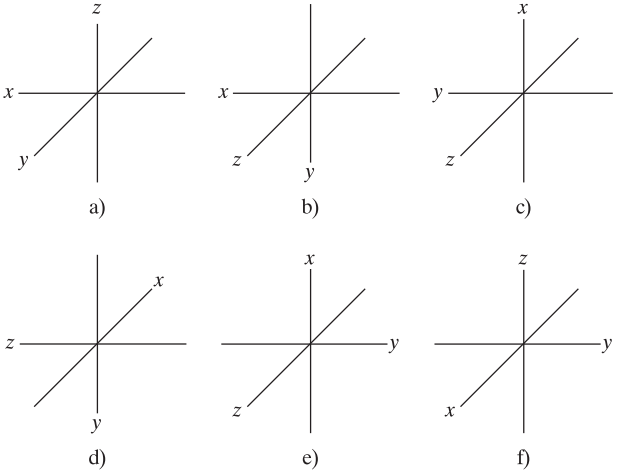
Rys. 3.21. Pytanie 2

3 Drużyna golfistów z University of Florida rozgrywa wszystkie swoje zawody na polu, na którym znajduje się „nora aligatora". Na rysunku 3.22 pokazano fragment takiego pola wraz z pewnym układem współrzędnych. Piłkę należy wybić z początku tego układu i umieścić ją w dołku znajdującym się w punkcie o współrzędnych 8 m (x) i 12 m (y), przy czym dozwolone są tylko przemieszczenia $\vec{d}_1 = (8\text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (6\text{ m})\hat{\mathrm{j}}$, $\vec{d}_2 = (6\text{ m})\hat{\mathrm{j}}$ i $\vec{d}_3 = (8\text{ m})\hat{\mathrm{i}}$ (każdego można użyć kilkakrotnie). Nora aligatora ma współrzędne (8 m, 6 m). Jeśli gracz wrzuci piłkę do nory, zostanie natychmiast przeniesiony do zespołu z Florida State University, odwiecznego rywala University of Florida. Jaki ciąg przemieszczeń należy wybrać, aby uniknąć wrzucenia piłki do nory, a więc i natychmiastowej zmiany barw klubowych?



Rys. 3.22. Pytanie 3

4 Z równania (3.2) wynika, że dodawanie dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest przemienne. Czy oznacza to, że przemienne jest także ich odejmowanie, tzn. że $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$?



Rys. 3.23. Pytanie 5

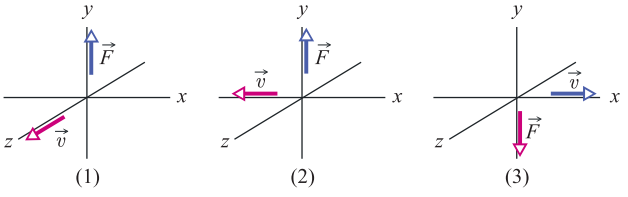
5 Które z układów współrzędnych, pokazanych na rysunku 3.23, są układami prawoskrętnymi? Oznaczenie osi wskazuje jej kierunek dodatni.

6 Dla jakich wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ spełnione są związki: a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ oraz $a + b = c$, b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$, c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ oraz $a^2 + b^2 = c^2$?

7 Jeśli $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$, to czy: a) $\vec{a} + (-\vec{d}) = \vec{c} + (-\vec{b})$, b) $\vec{a} = (-\vec{b}) + \vec{d} + \vec{c}$, c) $\vec{c} + (-\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b}$?

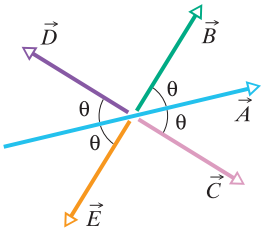
8 Czy $\vec{b}$ musi być równy $\vec{c}$, jeśli $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$?

9 Skorzystaj ze związku $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ oraz załóż, że wektory $\vec{v}$ i $\vec{B}$ są do siebie prostopadłe, i wyznacz kierunek $\vec{B}$ w trzech przypadkach przedstawionych na rysunku 3.24, jeśli q jest a) dodatnie, b) ujemne.



Rys. 3.24. Pytanie 9

10 Na rysunku 3.25 pokazano wektor $\vec{A}$ oraz cztery inne wektory o jednakowych długościach, lecz różnych kierunkach. O których z nich można powiedzieć, że: a) pomnożone skalarnie przez $\vec{A}$ dadzą taki sam wynik, b) pomnożone skalarnie przez $\vec{A}$ dadzą wynik ujemny?



Rys. 3.25. Pytanie 10

11 W grze, która rozgrywa się w trójwymiarowym labiryncie, musisz przemieścić swój pionek z pola START o współrzędnych (0, 0, 0) na pole META o współrzędnych (−2 cm, 4 cm, −4 cm). Możesz wykonywać jedynie ruchy prowadzące do przemieszczeń podanych poniżej (przy czym ich składowe są wyrażone w centymetrach):

$$\vec{p} = -7\hat{\mathrm{i}} + 2\hat{\mathrm{j}} - 3\hat{\mathrm{k}}, \qquad \vec{r} = 2\hat{\mathrm{i}} - 3\hat{\mathrm{j}} + 2\hat{\mathrm{k}},$$
$$\vec{q} = 2\hat{\mathrm{i}} - \hat{\mathrm{j}} + 4\hat{\mathrm{k}}, \qquad \vec{s} = 3\hat{\mathrm{i}} + 5\hat{\mathrm{j}} - 3\hat{\mathrm{k}}.$$

Jeśli poruszając się po labiryncie staniesz w punkcie o współrzędnych (−5 cm, −1 cm, −1 cm) lub (5 cm, 2 cm, −1 cm), to wypadasz z gry. Jakie przemieszczenia i w jakiej kolejności musisz wykonać, by dotrzeć bezpiecznie do pola META?

12 Poniżej podano współrzędne x i y czterech wektorów: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$:

$$a_x = 3, \quad a_y = 3, \quad c_x = -3, \quad c_y = -3,$$
$$b_x = -3, \quad b_y = 3, \quad d_x = 3, \quad d_y = -3.$$

Wyobraź sobie, że chcesz wyznaczyć dla tych wektorów kąt θ ze wzoru (3.6) i korzystasz z kalkulatora. Dla których wektorów otrzymasz poprawny wynik? Odpowiedz na to pytanie na podstawie wykresów z rysunku 3.12, a potem zobacz, jaki wynik daje kalkulator.

13 Z poniższych wyrażeń wybierz te, które są poprawne, tzn. mają dobrze określone znaczenie:

a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$, f) $\vec{A} + (\vec{B} \times \vec{C})$,
b) $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$, g) $5 + \vec{A}$,
c) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$, h) $5 + (\vec{B} \cdot \vec{C})$,
d) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$, i) $5 + (\vec{B} \times \vec{C})$,
e) $\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{C})$, j) $(\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \times \vec{C})$.

Co jest nie w porządku w wyrażeniach niepoprawnych?

Zadania

Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

●_●●● Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

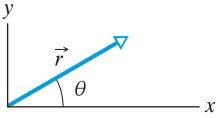
ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

Podrozdział 3.1. Wektory i ich składowe

•1 **ssm** Wektor $\vec{a}$ leży w płaszczyźnie xy. Jego kierunek tworzy kąt 250° z dodatnim kierunkiem osi x (licząc w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara), a jego długość wynosi 7,3 m. Jaka jest jego składowa: a) x, b) y?

•2 Wektor przemieszczenia $\vec{r}$ leży w płaszczyźnie xy, ma długość równą 15 m, a jego kierunek jest wyznaczony przez kąt $\theta = 30°$ na rysunku 3.26. Wyznacz składowe tego wektora: a) x, b) y.



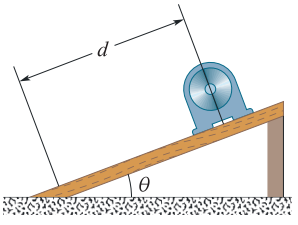
Rys. 3.26. Pytanie 2

•3 **ssm** Składowa x wektora $\vec{A}$ wynosi −25 m, a jego składowa y jest równa +40 m. a) Ile wynosi długość wektora $\vec{A}$? b) Jaki kąt tworzy kierunek wektora $\vec{A}$ z dodatnim kierunkiem osi x?

•4 Wyraź w radianach kąty: a) 20°, b) 50°, c) 100°. Zamień następujące kąty na stopnie: d) 0,33 rad, e) 2,1 rad, f) 7,7 rad.

•5 Żaglowiec ma dopłynąć do miejsca odległego od punktu wyjściowego o 120 km w kierunku na północ. Niespodziewany sztorm spycha go o 100 km na wschód od punktu wyjściowego. a) Jaką drogę musi teraz przebyć żaglowiec i b) w jakim kierunku musi płynąć, aby dotrzeć do ustalonego celu podróży?

•6 Jak pokazano na rysunku 3.27, pewna ciężka maszyna została przemieszczona ku górze wzdłuż pochylni nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 20°$, o $d = 12{,}5$ m. a) O ile wzniesiono tę maszynę w pionie? b) Jak daleko przesunięto ją w poziomie?



Rys. 3.27. Zadanie 6

•7 Rozważ dwa wektory przemieszczenia, jeden o długości 3 m, a drugi o długości 4 m. Wskaż, jak muszą być względem siebie ustawione, aby przemieszczenie łączne miało długość: a) 7 m, b) 1 m, c) 5 m.

Podrozdział 3.2. Wektory jednostkowe, dodawanie wektorów na składowych

•8 Pewna osoba odbyła następujący marsz: 3,1 km na północ, potem 2,4 km na zachód, wreszcie 5,2 km na południe. a) Narysuj wektory ilustrujące ten marsz. Wyznacz: b) długość, c) kierunek lotu ptaka, który leciałby po linii prostej od punktu startowego do punktu końcowego tego marszu.

•9 Dane są dwa wektory: $\vec{a} = (4\text{ m})\hat{i} - (3\text{ m})\hat{j} + (1\text{ m})\hat{k}$ i $\vec{b} = (-1\text{ m})\hat{i} + (1\text{ m})\hat{j} + (4\text{ m})\hat{k}$. Wyraź za pomocą wektorów jednostkowych wektory: a) $\vec{a} + \vec{b}$ i b) $\vec{a} - \vec{b}$ oraz c) wektor $\vec{c}$, taki że $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.

•10 Znajdź składowe: a) x, b) y, c) z sumy $\vec{r}$ dwóch przemieszczeń $\vec{c}$ i $\vec{d}$, których składowe wzdłuż trzech osi wynoszą w metrach: $c_x = 7{,}4$; $c_y = -3{,}8$; $c_z = -6{,}1$; $d_x = 4{,}4$; $d_y = -2{,}0$; $d_z = 3{,}3$.

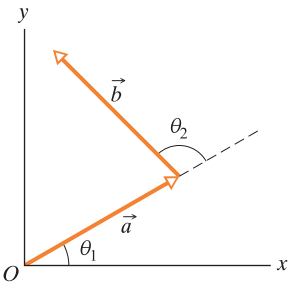
•11 **ssm** a) Oblicz sumę wektorów $\vec{a} = (4\text{ m})\hat{i} + (3\text{ m})\hat{j}$ oraz $\vec{b} = (-13\text{ m})\hat{i} + (7\text{ m})\hat{j}$, wyrażając ją za pomocą wektorów jednostkowych. Wyznacz: b) długość wektora $\vec{a} + \vec{b}$, c) jego kierunek (w stosunku do $\hat{i}$).

•12 Samochód przebywa 50 km na wschód, następnie 30 km na północ, a potem 25 km w kierunku 30° na wschód od kierunku północnego. Narysuj odpowiednie wektory i wyznacz: a) długość, b) kierunek całkowitego przemieszczenia samochodu od początku jego jazdy.

•13 Pewna osoba chce dotrzeć do miejsca odległego o 3,4 km od jej obecnego położenia w kierunku północno-wschodnim tworzącym kąt 35° z kierunkiem wschodnim. Musi tam jednak dojść, poruszając się jedynie wzdłuż ulic mających kierunek północ–południe lub wschód–zachód. Ile wynosi najkrótsza droga, jaką ta osoba musi przebyć?

•14 Masz przebyć cztery odcinki na pustym, płaskim placu, wychodząc z początku układu współrzędnych xy i kończąc marsz w punkcie o współrzędnych $(x, y) = (140\text{ m}, 30\text{ m})$. Kolejne przemieszczenia mają być następujące (zapisane jako (x, y), obie składowe w metrach): $(20, 60)$, potem $(b_x, -70)$, potem $(-20, c_y)$ i wreszcie $(-60, -70)$. Ile wynosi a) b_x, b) c_y? Wyznacz c) długość i d) kierunek (względem dodatniej półosi x) twojego całkowitego przemieszczenia.

•15 ssm ilw www Dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, przedstawione na rysunku 3.28, mają jednakowe długości, równe 10 m, a ich kierunki są wyznaczone przez zaznaczone na rysunku kąty $\theta_1 = 30°$ i $\theta_2 = 105°$. Wyznacz: a) składową x, b) składową y wektora $\vec{r}$, który jest ich sumą. Podaj: c) długość wektora $\vec{r}$, d) kąt, jaki tworzy on z dodatnim kierunkiem osi x.



Rys. 3.28. Zadanie 15

•16 Oto dwa wektory przemieszczenia: $\vec{a} = (3\text{ m})\hat{i} + (4\text{ m})\hat{j}$ i $\vec{b} = (5\text{ m})\hat{i} + (-2\text{ m})\hat{j}$. Zapisz wektor $\vec{a} + \vec{b}$ a) przy użyciu wektorów jednostkowych oraz podając jego b) długość i c) kąt względem $\hat{i}$. Zapisz wektor $\vec{b} - \vec{a}$ d) przy użyciu wektorów jednostkowych oraz podając jego e) długość i f) kąt względem $\hat{i}$.

•17 GO ilw Trzy wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ mają długość 50 m każdy i leżą w płaszczyźnie xy. Ich kierunki tworzą z dodatnim kierunkiem osi x kąty odpowiednio 30°, 195° i 315°. Wyznacz: a) długość wektora $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, b) kąt utworzony przez ten wektor z osią x, c) długość wektora $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, d) kąt utworzony przez ten wektor z osią x. Ile wynosi: e) długość wektora $\vec{d}$ spełniającego związek $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d})$, f) kąt utworzony przez ten wektor z osią x?

•18 Wektor $\vec{C}$ jest sumą wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ ($\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$). Wektor $\vec{A}$ ma długość 12 m i jest skierowany pod kątem 40° (przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara) względem kierunku $+x$, a wektor $\vec{C}$ ma długość 15 m i jest skierowany pod kątem 20° (przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara) względem kierunku $-x$. Znajdź: a) długość wektora $\vec{B}$, b) kąt, jaki tworzy on z kierunkiem $+x$.

•19 Ogrodowe szachy rozgrywa się na trawniku, na którym wyznaczono szachownicę o polach będących kwadratami o boku 1 m. Figury stawia się na środku pola. Skoczek wykonał kolejno ruchy: 1) dwa pola do przodu, jedno w prawo, 2) dwa pola w lewo, jedno do przodu i 3) dwa pola do przodu, jedno w lewo. Wyznacz a) długość i b) kierunek (względem kierunku do przodu) łącznego przemieszczenia skoczka.

••20 Podczas powrotu do bazy podróżnik napotkał zamieć śnieżną tak znaczną, że nie mógł odróżnić ziemi od nieba. Miał przebyć 5,6 km na północ, lecz stwierdził, gdy śnieg przestał padać, że w rzeczywistości przeszedł 7,8 km w kierunku północno-wschodnim tworzącym kąt 50° z kierunkiem wschodnim. a) Jak daleko od bazy jest teraz podróżnik? b) W jakim kierunku musi pójść, by dojść do bazy?

••21 GO Nie mogąc znieść popołudniowego teksaskiego upału, mrówka miota się na płaszczyźnie xy wyrysowanej na piasku. Składowe x i y jej czterech kolejnych przemieszczeń są równe (w centymetrach): $(30, 40)$, $(b_x, -70)$, $(-20, c_y)$ i $(-80, -70)$, a jej łączne przemieszczenie ma współrzędne x i y równe $(-140, -20)$. Wyznacz: a) składową b_x, b) składową c_y. Podaj: c) długość, d) kierunek (wyznaczony przez kąt z osią x) całkowitego przemieszczenia mrówki.

••22 Wyznacz sumę następujących czterech wektorów: $\vec{E}$: 6 m, +0,9 rad; $\vec{F}$: 5 m, −75°; $\vec{G}$: 4 m, +1,2 rad; $\vec{H}$: 6 m, −210° (dodatnia wartość kąta oznacza, że jest on mierzony względem dodatniego kierunku osi x przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, a ujemna — że jest mierzony zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara) i wyraź ją za pomocą: a) wektorów jednostkowych, b) długości i kąta. W tym drugim przypadku podaj kąty zarówno w stopniach, jak i w radianach.

••23 Jeśli do wektora $\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ dodamy wektor $\vec{B}$, to otrzymamy wektor o kierunku dodatniej półosi y i długości takiej samej jak długość wektora $\vec{C}$. Ile wynosi długość wektora $\vec{B}$?

••24 GO Wektor $\vec{A}$ o kierunku osi x dodano do wektora $\vec{B}$ o długości 7 m, tak że ich suma ma kierunek osi y i długość 3 razy większą niż długość wektora $\vec{A}$. Ile wynosi długość wektora $\vec{A}$?

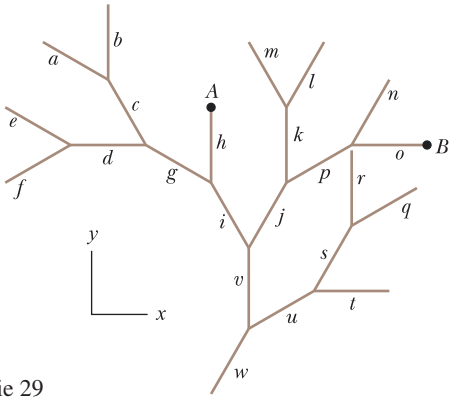
••25 GO Oaza B jest 25 km na wschód od oazy A. Wielbłąd wychodzi z oazy A, przechodzi 24 km w kierunku południowo-wschodnim, tworzącym kąt 15° z kierunkiem wschodnim, a potem 8 km w kierunku północnym. Jak daleko od oazy B się teraz znajduje?

••26 Wyznacz sumę następujących czterech wektorów: $\vec{A}$: $(2\text{ m})\hat{i} + (3\text{ m})\hat{j}$; $\vec{B}$: 4 m, +65°; $\vec{C}$: $(-4\text{ m})\hat{i} + (-6\text{ m})\hat{j}$; $\vec{D}$: 5 m, −235° i wyraź ją za pomocą: a) wektorów jednostkowych oraz b) długości i c) kąta.

••27 GO Wiemy, że $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 5\vec{d}_3$, $\vec{d}_1 - \vec{d}_2 = 3\vec{d}_3$, a $\vec{d}_3 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$. Wyznacz wektory a) $\vec{d}_1$ i b) $\vec{d}_2$ w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

••28 Dwa żuczki chodzą sobie po płaskiej plaży. Wychodzą z tego samego miejsca i żuczek nr 1 przechodzi najpierw 0,5 m na wschód, a potem 0,8 m w kierunku północno-wschodnim tworzącym kąt 30° z kierunkiem wschodnim. Żuczek nr 2 przechodzi najpierw 1,6 m w kierunku północno-wschodnim tworzącym kąt 40° z kierunkiem północnym, a potem idzie wprost do punktu, do którego już doszedł żuczek nr 1. Wyznacz a) długość i b) kierunek drugiego przemieszczenia żuczka nr 2.

••29 GO Zwykłe mrówki ogrodowe tworzą nieraz sieć śladów chemicznych, umożliwiających im odnalezienie drogi do gniazda. Ślady rozchodzą się z gniazda i co pewien czas rozgałęziają się tak, że kąt między nowymi śladami wynosi 60° (jak na rys. 3.29). Jeśli zagubiona w ogrodzie mrówka natrafi na taki ślad, to w najbliższym punkcie rozgałęzienia będzie wiedziała, czy kieruje się do czy od gniazda: w drodze od gniazda oba nowe ślady prowadzą pod kątem 30° do jej kierunku ruchu, a w drodze do gniazda jest tylko jedna droga pod tym kątem. Na rysunku 3.29 przedstawiono taką sieć, w której odcinki między rozgałęzieniami mają wszystkie długość 2 cm. Odcinki te oznaczono literami i wprowadzono układ współrzędnych tak, że odcinek v jest równoległy do osi y. Wyznacz a) długość i b) kąt (względem dodatniego kierunku osi x) przemieszczenia mrówki z gniazda do punktu A. Wyznacz c) długość i d) kąt przemieszczenia mrówki z gniazda do punktu B.

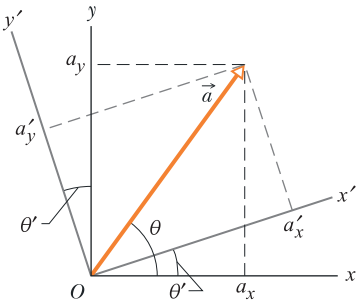


Rys. 3.29. Zadanie 29

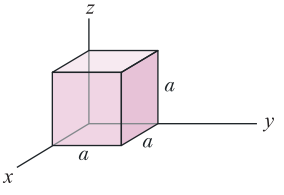
••30 GO Oto dwa wektory: $\vec{a} = (4\text{ m})\hat{i} - (3\text{ m})\hat{j}$ i $\vec{b} = (6\text{ m})\hat{i} + (8\text{ m})\hat{j}$. Wyznacz a) długość i b) kierunek (względem $\hat{i}$) wektora $\vec{a}$. Wyznacz c) długość i d) kierunek wektora $\vec{b}$. Wyznacz e) długość i f) kierunek wektora $\vec{a} + \vec{b}$. Wyznacz g) długość i h) kierunek wektora $\vec{b} - \vec{a}$. Wyznacz i) długość i j) kierunek wektora $\vec{a} - \vec{b}$. k) Jaki kąt tworzą ze sobą wektory $\vec{b} - \vec{a}$ i $\vec{a} - \vec{b}$?

••31 Na rysunku 3.30 przedstawiono wektor $\vec{a}$, który ma długość 17 m i jest skierowany pod kątem $\theta = 56°$ (licząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) do osi $+x$. Oblicz składowe tego wektora: a) a_x i b) a_y. Rozważ drugi układ współrzędnych $x'y'$ obrócony o $\theta' = 18°$ względem układu xy. Oblicz składowe c) a'_x i d) a'_y danego wektora w tym nowym układzie.

•••32 Jak przedstawiono na rysunku 3.31, w jednym z wierzchołków sześcianu o krawędzi a jest początek układu współrzędnych, a krawędzie wychodzące z tego wierzchołka leżą na dodatnich półosiach tego układu. Przekątne sześcianu (łączące dwa wierzchołki i przechodzące przez środek sześcianu) można zapisać jako wektory, których początki i końce są wierzchołkami sześcianu. Zapisz przy użyciu wektorów jednostkowych takie wektory, których początkiem są wierz chołki o współrzędnych: a) (0, 0, 0), b) $(a, 0, 0)$, c) $(0, a, 0)$, d) $(a, a, 0)$. e) Wyznacz kąty utworzone przez te przekątne z sąsiadującymi z nimi krawędziami sześcianu. f) Znajdź długość przekątnej w jednostkach a.



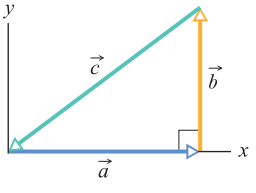
Rys. 3.30. Zadanie 31



Rys. 3.31. Zadanie 32

Podrozdział 3.3. Mnożenie wektorów

•33 Długości wektorów z rysunku 3.32 wynoszą $a = 4$, $b = 3$ i $c = 5$. Wyznacz: a) długość i b) kierunek wektora $\vec{a} \times \vec{b}$, c) długość i d) kierunek wektora $\vec{a} \times \vec{c}$, e) długość i f) kierunek wektora $\vec{b} \times \vec{c}$ (osi z nie zaznaczono na rysunku).



Rys. 3.32. Zadania 33 i 54

•34 Dane są dwa wektory: $\vec{a} = (3\text{ m})\hat{i} + (5\text{ m})\hat{j}$ i $\vec{b} = (2\text{ m})\hat{i} + (4\text{ m})\hat{j}$. Wyznacz: a) $\vec{a} \times \vec{b}$, b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ oraz d) składową $\vec{a}$ w kierunku $\vec{b}$ (*wskazówka*: w punkcie (d) skorzystaj z równania (3.20) i rys. 3.18).

•35 Wektory $\vec{r}$ i $\vec{s}$ leżą w płaszczyźnie xy, ich długości wynoszą 4,5 oraz 7,3 jednostki, a ich kierunki tworzą kąty 320° i 85° z dodatnim kierunkiem osi x (licząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Wyznacz a) $\vec{r} \cdot \vec{s}$ i b) $\vec{r} \times \vec{s}$.

•36 Wiemy, że $\vec{d}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, a $\vec{d}_2 = -5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$. Oblicz: $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot (\vec{d}_1 \times 4\vec{d}_2)$.

•37 Dane są trzy wektory: $\vec{a} = 3\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$ oraz $\vec{c} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$. Oblicz a) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, b) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$, c) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$.

••38 GO Dane są trzy wektory: $\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{B} = -3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$ i $\vec{C} = 7\hat{i}-8\hat{j}$. Ile wynosi $3\vec{C}\cdot(2\vec{A}\times\vec{B})$?

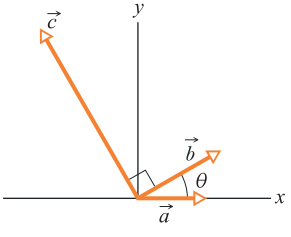
••39 Wektor $\vec{A}$ ma długość 6 jednostek, wektor $\vec{B}$ ma długość 7 jednostek, a $\vec{A}\cdot\vec{B}$ wynosi 14. Jaki kąt tworzą ze sobą wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$?

••40 GO Przemieszczenie $\vec{d}_1$ leży w płaszczyźnie yz, tworzy kąt 63° z dodatnim kierunkiem osi y, jego składowa z jest dodatnia, a długość wynosi 4,5 m. Przemieszczenie $\vec{d}_2$ leży w płaszczyźnie xz, tworzy kąt 30° z dodatnim kierunkiem osi x, jego składowa z jest dodatnia, a długość wynosi 1,4 m. Wyznacz a) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$, b) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$ oraz c) kąt między $\vec{d}_1$ a $\vec{d}_2$.

••41 ssm ilw www Korzystając z definicji iloczynu skalarnego $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$, oraz z tego, że $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$, wyznacz kąt między wektorami $\vec{a} = 3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}$ i $\vec{b} = 2\hat{i}+1\hat{j}+3\hat{k}$.

••42 Na spotkaniu mimów jeden z nich doznał przemieszczenia $\vec{d}_1 = (4\text{ m})\hat{i} + (5\text{ m})\hat{j}$, a drugi przemieszczenia $\vec{d}_2 = (-3\text{ m})\hat{i}+(4\text{ m})\hat{j}$. Wyznacz: a) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$, b) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$, c) $(\vec{d}_1+\vec{d}_2)\cdot\vec{d}_2$ i d) składową $\vec{d}_1$ w kierunku $\vec{d}_2$. (*Wskazówka*: w punkcie (d) skorzystaj z równania (3.20) i rys. 3.18).

••43 ssm ilw Trzy wektory przedstawione na rysunku 3.33 mają długości: $a = 3$ m, $b = 4$ m i $c = 10$ m, a zaznaczony na rysunku kąt θ wynosi 30°. Wyznacz: a) składową x, b) składową y wektora a; c) składową x, d) składową y wektora b; e) składową x, f) składową y wektora c. Ile wynoszą wartości: g) p, h) q, jeśli $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$?

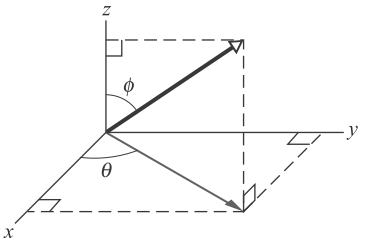


Rys. 3.33. Zadanie 43

••44 GO W równaniu $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ przyjmij $q = 2$, $\vec{v} = 2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ i $\vec{F} = 4\hat{i}-20\hat{j}+12\hat{k}$. Ile wynosi wektor $\vec{B}$, wyrażony przez wektory jednostkowe, jeśli $B_x = B_y$?

Zadania dodatkowe

45 Wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ leżą w płaszczyźnie xy. Wektor $\vec{A}$ ma długość 8 jednostek, a kąt określający jego kierunek wynosi 130°. Wektor $\vec{B}$ ma składowe $B_x = -7{,}72$ i $B_y = -9{,}2$. a) Ile wynosi $5\vec{A}\cdot\vec{B}$? Wyznacz wektor $4\vec{A}\times3\vec{B}$, podając wynik b) w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych, c) przy użyciu długości i kątów we współrzędnych sferycznych θ i ϕ (patrz rysunek 3.34). d) Ile wynosi kąt między kierunkami wektorów $\vec{A}$ i $4\vec{A}\times3\vec{B}$ (*wskazówka*: pomyśl chwilę, zanim przystąpisz do obliczeń)? Wyznacz wektor $\vec{A}+3\hat{k}$, podając wynik b) w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych, c) przy użyciu długości i kątów we współrzędnych sferycznych.



Rys. 3.34. Zadanie 45

46 GO Wektor $\vec{a}$ ma długość 5 m i jest skierowany na wschód, a wektor $\vec{b}$ ma długość 4 m i kierunek 35° na zachód od kierunku północnego. Wyznacz: a) długość, b) kierunek wektora $\vec{a}+\vec{b}$, c) długość, d) kierunek wektora $\vec{b}-\vec{a}$. e) Narysuj te wektory.

47 Wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ leżą w płaszczyźnie xy. Długość $\vec{A}$ wynosi 8, a charakteryzujący go kąt jest równy 130°, $\vec{B}$ ma składowe $B_x = -7{,}72$ i $B_y = -9{,}2$. Wyznacz kąt, jaki tworzy z ujemnym kierunkiem osi y a) kierunek $\vec{A}$, b) kierunek iloczynu $\vec{A}\times\vec{B}$ i c) kierunek $\vec{A}\times(\vec{B}+3\hat{k})$.

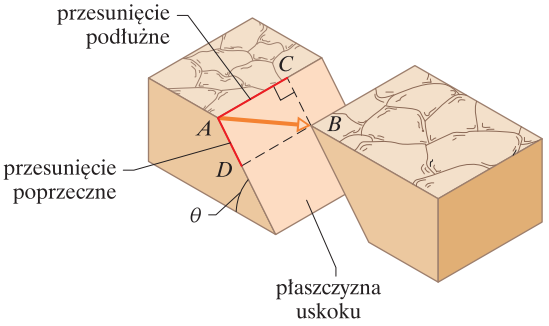
48 GO Dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają składowe (w metrach): $a_x = 3{,}2$, $a_y = 1{,}6$, $b_x = 0{,}5$ i $b_y = 4{,}5$. a) Znajdź kąt między kierunkami wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Na płaszczyźnie xy można znaleźć dwa wektory, które są prostopadłe do wektora $\vec{a}$ i mają długość równą 5 m. Jeden z nich $\vec{c}$ ma dodatnią składową x, a drugi $\vec{d}$ ma składową x ujemną. Wyznacz: b) składową x, c) składową y wektora $\vec{c}$; d) składową x, e) składową y wektora $\vec{d}$.

49 ssm Żeglarz wypływa z przystani na amerykańskim brzegu jeziora Erie z zamiarem dopłynięcia do portu na brzegu kanadyjskim leżącego 90 km wprost na północ od przystani, z której wypływa. Po pewnym czasie żeglarz orientuje się jednak, że dotarł do punktu leżącego 50 km na wschód od punktu wyjścia. a) Jaką drogę i b) w jakim kierunku musi teraz przebyć, aby dopłynąć tam, gdzie planował?

50 Wektor $\vec{d}_1$ ma kierunek ujemny osi y, a wektor $\vec{d}_2$ — kierunek dodatni osi x. Jaki kierunek mają wektory: a) $\vec{d}_2/4$ i b) $\vec{d}_1/(-4)$? Jaka jest wartość bezwzględna iloczynów c) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$ i d) $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}_2/4)$? Jaki jest kierunek wektorów e) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$ i f) $\vec{d}_2\times\vec{d}_1$? Jaka jest długość wektorów g) z punktu (e) i h) z punktu (f)? Jakie są: i) długość i j) kierunek wektora $\vec{d}_1\times(\vec{d}_2/4)$?

51 Uskoki skalne są to pęknięcia skały, przy czym ściany, wzdłuż których nastąpiło pęknięcie, przesunęły się względem siebie. Uskok taki pokazano na rysunku 3.35 — punkty A i B były jednym punktem przed pęknięciem, przy którym skała widoczna z przodu przesunęła się w prawo i w dół. Przemieszczenie $\overrightarrow{AB}$ leży w płaszczyźnie uskoku. Jego składowa

podłużna wynosi AC, a poprzeczna — AD. a) Ile wynosi długość wektora przemieszczenia, jeśli jego składowa podłużna wynosi 22 m, a składowa poprzeczna — 17 m? b) Ile wynosi składowa pionowa wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli płaszczyzna uskoku jest nachylona do poziomu pod kątem $\theta = 52°$?



Rys. 3.35. Zadanie 51

52 Trzy przemieszczenia wynoszą (w metrach): $\vec{d}_1 = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$, $\vec{d}_2 = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ i $\vec{d}_3 = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$. a) Wyznacz $\vec{r} = \vec{d}_1 - \vec{d}_2 + \vec{d}_3$. b) Jaki kąt tworzy $\vec{r}$ z dodatnim kierunkiem osi z? c) Ile wynosi składowa $\vec{d}_1$ w kierunku $\vec{d}_2$? d) Ile wynosi składowa $\vec{d}_1$ w kierunku prostopadłym do $\vec{d}_2$ i płaszczyzny, w której leżą $\vec{d}_1$ i $\vec{d}_2$? (*wskazówka*: w punkcie (c) skorzystaj z równania (3.20) i rysunku 3.18, a w punkcie (d) — z równania (3.24)).

53 ssm Wektor $\vec{a}$ o długości 10 jednostek i wektor $\vec{b}$ o długości 6 jednostek tworzą ze sobą kąt 60°. Ile wynosi: a) iloczyn skalarny tych wektorów, b) długość iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$?

54 Dla wektorów z rysunku 3.32, których długości wynoszą $a = 4$, $b = 3$ i $c = 5$, oblicz: a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, b) $\vec{a} \cdot \vec{c}$ i c) $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

55 Cząstka porusza się na płaszczyźnie, przemieszczając się najpierw o 4 m w kierunku południowo-zachodnim ($\vec{d}_1$), potem o 5 m w kierunku wschodnim ($\vec{d}_2$) i w końcu o 6 m w kierunku północno-wschodnim tworzącym kąt 60° z kierunkiem wschodnim ($\vec{d}_3$). Wybierz układ współrzędnych, którego oś y jest skierowana na północ, a oś x jest skierowana na wschód, i wyznacz: a) składową x i b) składową y wektora $\vec{d}_1$, c) składową x i d) składową y wektora $\vec{d}_2$, e) składową x i f) składową y wektora $\vec{d}_3$. Wyznacz: g) składową x, h) składową y, i) długość, j) kierunek całkowitego przemieszczenia cząstki. Cząstka ma następnie powrócić wprost do punktu wyjściowego. Podaj k) długość i l) kierunek jej przemieszczenia powrotnego.

56 Wyznacz sumę następujących czterech wektorów: $\vec{P}$: 10 m, 25° przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara względem kierunku $+x$; $\vec{Q}$: 12 m, 10° przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara względem kierunku $+y$; $\vec{R}$: 8 m, 20° zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara względem kierunku $-y$; $\vec{S}$: 9 m, 40° przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara względem kierunku $-y$; i wyraź ją za pomocą: a) wektorów jednostkowych, b) długości, c) kąta względem kierunku $+x$.

57 ssm Gdy $\vec{B}$ dodamy do $\vec{A}$, otrzymamy $6\hat{i} + \hat{j}$, a gdy $\vec{B}$ odejmiemy od $\vec{A}$, otrzymamy $-4\hat{i} + 7\hat{j}$. Ile wynosi długość $\vec{A}$?

58 Wektor $\vec{d}$ ma długość 2,5 m i kierunek północny. Wyznacz: a) długość i b) kierunek wektora $4\vec{d}$ oraz c) długość i d) kierunek wektora $-3\vec{d}$.

59 Wektor $\vec{A}$ ma długość 12 m i w układzie współrzędnych xy tworzy z dodatnim kierunkiem osi x kąt 60° (licząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara), a wektor $\vec{B} = 12\hat{i} + 8\hat{j}$ (w tym samym układzie współrzędnych). Obracamy układ współrzędnych względem początku układu o 20° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, tworząc nowy układ współrzędnych $x'y'$. Wyznacz wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ w tym nowym układzie współrzędnych, wyrażając je za pomocą wektorów jednostkowych.

60 Wiemy, że $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{c}$, a $\vec{c} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$. Wyznacz a) $\vec{a}$ i b) $\vec{b}$.

61 Dane są trzy wektory: $\vec{a} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ oraz $\vec{c} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$. a) Oblicz wektor $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, wyrażając go za pomocą wektorów jednostkowych. b) Wyznacz kąt tworzony przez wektor $\vec{r}$ z dodatnim kierunkiem osi z. c) Oblicz składową wektora $\vec{a}$ w kierunku wektora $\vec{b}$. d) Oblicz składową wektora $\vec{a}$ wzdłuż osi prostopadłej do wektora $\vec{b}$ i leżącej w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. (*Wskazówka*: w punkcie (c) skorzystaj ze wzoru (3.20) i rysunku 3.18, a w punkcie (d) skorzystaj ze wzoru (3.24)).

62 Golfista wbija piłkę do dołka w trzech uderzeniach kija. W pierwszym przemieszcza piłkę o 3,66 m na północ, w drugim o 1,83 m w kierunku południowo-wschodnim, a w trzecim o 0,91 m w kierunku południowo-zachodnim. Jakie powinny być: a) wartość oraz b) kierunek przemieszczenia niezbędnego do wbicia piłki do dołka w jednym ruchu?

63 Dane są trzy wektory wynoszące (w metrach): $\vec{d}_1 = -3\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{d}_2 = -2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ i $\vec{d}_3 = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$. Wyznacz: a) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$, b) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 \times \vec{d}_3)$ i c) $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$.

64 ssm www Pokój ma wymiary 3 m (wysokość) × 3,7 m × 4,3 m. Mucha, siedząca początkowo w jednym z rogów pokoju, podrywa się do lotu, po którym siada w rogu przeciwległym (po przekątnej pokoju). a) Ile wynosi długość jej przemieszczenia? b) Czy droga przebyta przez muchę w locie może być mniejsza od tej długości? c) Czy może być od niej większa? d) Czy może być jej równa? e) Wybierz wygodny układ współrzędnych i wyznacz składowe wektora przemieszczenia w tym układzie. f) Wyznacz najkrótszą drogę muchy między przeciwległymi rogami pokoju przy założeniu,

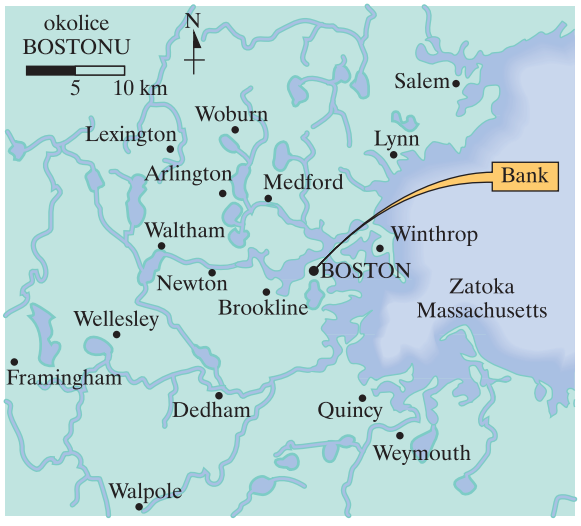
że może ona tylko iść po ścianie, a nie może latać. (*Wskazówka:* Znalezienie odpowiedzi nie wymaga rachunku różniczkowego. Pokój ma kształt prostopadłościennego pudła. Wykonaj jego siatkę na płaszczyźnie).

65 Demonstrant niesie swój transparent, wychodząc z początku układu współrzędnych xyz, przy czym płaszczyzna xy jest pozioma, i najpierw przechodzi 40 m w ujemnym kierunku osi x, po czym skręca pod kątem prostym w lewo, przechodzi w tym kierunku 20 m i wreszcie wchodzi na dach wieży ciśnień o wysokości 25 m. a) Podaj łączne przemieszczenie demonstranta, wyrażając je za pomocą wektorów jednostkowych. b) Transparent wypada mu następnie z rąk i ląduje u podnóża wieży. Podaj długość całkowitego przemieszczenia transparentu.

66 Wektor $\vec{a}$ ma dodatni kierunek osi x, wektor $\vec{b}$ dodatni kierunek osi y, a d jest skalarem. Jaki kierunek ma wektor $\vec{b}/d$, jeśli d jest: a) dodatnie, b) ujemne? Ile wynosi długość wektora: c) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, d) $\vec{a}\cdot\vec{b}/d$? Jaki kierunek ma wektor: e) $\vec{a}\times\vec{b}$, f) $\vec{b}\times\vec{a}$? g) Ile wynosi wartość iloczynów wektorowych w punktach (e) i (f)? Podaj h) wartość oraz i) kierunek iloczynu $\vec{a}\times\vec{b}/d$, jeśli d jest dodatnie.

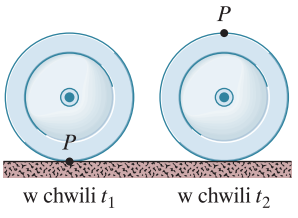
67 Niech $\hat{\mathrm{i}}$ ma kierunek wschodni, $\hat{\mathrm{j}}$ północny, a $\hat{\mathrm{k}}$ do góry. Oblicz iloczyny: a) $\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{k}}$, b) $(-\hat{\mathrm{k}})\cdot(-\hat{\mathrm{j}})$ i c) $\hat{\mathrm{j}}\cdot(-\hat{\mathrm{j}})$. Podaj kierunek iloczynów: d) $\hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{j}}$, e) $(-\hat{\mathrm{i}})\times(-\hat{\mathrm{j}})$ i f) $(-\hat{\mathrm{k}})\times(-\hat{\mathrm{j}})$.

68 Obrabowano bank w centrum Bostonu (patrz mapka na rysunku 3.36). Uciekając przed pościgiem policyjnym, rabusie użyli śmigłowca, pokonując kolejno w powietrzu trzy odcinki o następujących przemieszczeniach: 32 km, 45° na południe od kierunku wschodniego; 53 km, 26° na północ od kierunku zachodniego; 26 km, 18° na wschód od kierunku południowego. Po zakończeniu trzeciego lotu zostali schwytani. W jakim mieście byli wówczas?



Rys. 3.36. Zadanie 68

69 Koło o promieniu 45 cm toczy się bez poślizgu po poziomym podłożu (rysunek 3.37). W chwili t_1 kropka P namalowana na jego obręczy znajduje się w punkcie zetknięcia koła z podłożem, a do późniejszej chwili t_2 koło wykonuje pół pełnego obrotu. Ile wynosi: a) długość wektora przemieszczenia punktu P w przedziale czasu od t_1 do t_2, b) kąt utworzony przez ten wektor z podłożem?



Rys. 3.37. Zadanie 69

70 Kobieta idzie 250 m w kierunku 30° na wschód od kierunku północnego, a potem 175 m prosto na wschód. Znajdź: a) długość, b) kierunek jej całkowitego przemieszczenia od początku spaceru. c) Wyznacz drogę przebytą przez kobietę. d) Co jest większe: ta droga czy długość wektora przemieszczenia?

71 Wektor $\vec{d}$ ma długość 2,5 m i jest skierowany na południe. Podaj a) długość i b) kierunek wektora $5\vec{d}$. Podaj c) długość i d) kierunek wektora $-2\vec{d}$.

72 Pewna czerwona mrówka szuka pikantnego sosu na placyku piknikowym, przemieszczając się przy tym o: $\vec{d}_1$, czyli 0,4 m w kierunku południowo-wschodnim (pod kątem 45° do kierunków południowego i wschodniego), $\vec{d}_2$, czyli 0,5 m w kierunku wschodnim i $\vec{d}_3$, czyli 0,6 m w kierunku północno-wschodnim tworzącym kąt 60° z kierunkiem wschodnim. Przyjmij, że dodatni kierunek osi x to kierunek wschodni, a dodatni kierunek osi y to kierunek północny. Wyznacz: a) składową x i b) składową y przemieszczenia $\vec{d}_1$, c) składową x i d) składową y przemieszczenia $\vec{d}_2$ oraz e) składową x i f) składową y przemieszczenia $\vec{d}_3$. Wyznacz następnie: g) składową x, h) składową y, i) długość i j) kierunek całkowitego przemieszczenia mrówki. Jeśli mrówka chce teraz wrócić wprost do punktu wyjścia, to k) jaką drogę musi przebyć i l) w jakim kierunku?

73 Dane są dwa wektory: $\vec{a}=3\hat{\mathrm{i}}+5\hat{\mathrm{j}}$ oraz $\vec{b}=2\hat{\mathrm{i}}+4\hat{\mathrm{j}}$. Oblicz: a) $\vec{a}\times\vec{b}$, b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, c) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$, d) składową wektora $\vec{a}$ w kierunku wektora $\vec{b}$.

74 Wektor $\vec{a}$ leży w płaszczyźnie yz, tworząc z dodatnim kierunkiem osi y kąt 63°, ma dodatnią składową z i długość równą 3,2 jednostki. Wektor $\vec{b}$ leży w płaszczyźnie xz, tworząc z dodatnim kierunkiem osi x kąt 48°, ma dodatnią składową z i długość równą 1,4 jednostki. Wyznacz: a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, b) $\vec{a}\times\vec{b}$, c) kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

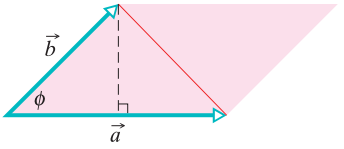
75 Wyznacz a) iloczyn wektorowy „północy” i „zachodu”, b) iloczyn skalarny „w dół” i „południa”, c) iloczyn wektorowy „wschodu” i „w górę”, d) iloczyn skalarny „zachodu” i „zachodu”, e) iloczyn wektorowy „południa” i „południa”. Przyjmij, że każdy z tych „wektorów” ma jednostkową długość.

76 Wektor $\vec{A}$ leży wzdłuż osi x. Suma tego wektora i wektora $\vec{B}$, którego długość wynosi 8 m, leży wzdłuż osi y i ma długość dwa razy większą niż długość wektora $\vec{A}$. Wyznacz długość wektora $\vec{A}$.

77 Mężczyzna wychodzi na spacer z początku układu współrzędnych xyz, którego płaszczyzna xy jest pozioma, a oś x jest skierowana na wschód. Mając ze sobą fałszywą monetę, mężczyzna przechodzi 1300 m na wschód, potem 2200 m na północ i na koniec wyrzuca monetę z brzegu urwiska o wysokości 410 m. a) Wyznacz całkowite przemieszczenie monety, wyrażając je za pomocą wektorów jednostkowych. b) Podaj długość przemieszczenia mężczyzny podczas jego powrotu do początku układu współrzędnych.

78 Jaka jest długość wektora $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$, jeśli $a = 3{,}9$, $b = 2{,}7$, a kąt między tymi dwoma wektorami wynosi 63°?

79 Na rysunku 3.38 długość wektora $\vec{a}$ wynosi 4,3, długość wektora $\vec{b}$ wynosi 5,4, a $\phi = 46°$. Oblicz pole powierzchni trójkąta tworzonego przez dane wektory i zaznaczoną na rysunku przekątną równoległoboku.



Rys. 3.38. Zadanie 79

ROZDZIAŁ 4

Ruch w dwóch i trzech wymiarach

4.1. POŁOŻENIE I PRZEMIESZCZENIE

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

4.01 narysować dwu- i trójwymiarowe wektory położenia cząstki, wskazując ich składowe wzdłuż osi układu współrzędnych;

4.02 wyznaczyć kierunek i długość wektora położenia cząstki w układzie współrzędnych na podstawie składowych wektora i na odwrót;

4.03 zastosować związek między wektorem przemieszczenia cząstki a wektorami jej położenia początkowego i końcowego.

Podstawowe fakty

- Położenie ciała (cząstki) względem początku układu współrzędnych wyznacza wektor jego położenia $\vec{r}$, który w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych wyraża się jako

$$\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}.$$

W tym wzorze $x\hat{\mathrm{i}}$, $y\hat{\mathrm{j}}$ i $z\hat{\mathrm{k}}$ to składowe wektorowe wektora położenia $\vec{r}$, a x, y i z to jego składowe skalarne (a także współrzędne cząstki).

- Wektor położenia można przedstawić, podając jego długość oraz jeden lub dwa kąty wyznaczające jego kierunek, lub podając jego składowe wektorowe albo skalarne.

- Jeśli ciało się porusza, to jego wektor położenia zmienia się z $\vec{r}_1$ w $\vec{r}_2$, tak że przemieszczenie ciała $\Delta\vec{r}$ wyraża się jako

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Przemieszczenie ciała można też zapisać jako

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= (x_2 - x_1)\hat{\mathrm{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathrm{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathrm{k}} \\ &= \Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}}.\end{aligned}$$

O fizyce

W tym rozdziale będziemy się nadal zajmować różnymi cechami ruchów ciał, przy czym teraz ciała mogą się poruszać w przestrzeni dwu-, a także trójwymiarowej. Na przykład badacze w zakresie medycyny lub inżynierowie w zakresie lotów kosmicznych muszą znać parametry ruchu myśliwców w warunkach współczesnej bitwy powietrznej, gdyż zbyt gwałtowne skręty samolotów mogą powodować utratę przytomności pilotów. Inżynierowie zajmujący się sportem mogą badać fizykę rzutów w koszykówce. Na przykład przy *rzucie wolnym* (gdy gracz wykonuje nieutrudniany mu przez przeciwnika rzut do kosza z odległości około 4,3 m) piłka może być rzucona do kosza z wysokości uniesionych ramion lub z wysokości pasa zawodnika. Ten pierwszy sposób jest najczęściej stosowany przez zawodowych koszykarzy, lecz słynny koszykarz amerykański Rick Barry bił rekordy skuteczności rzutów osobistych, wykonując rzuty tą drugą techniką.

Ruch w przestrzeni trójwymiarowej jest skomplikowany. Pewnie dobrze sobie radzisz, prowadząc samochód na autostradzie (czyli w ruchu jednowymiarowym), ale miałbyś zapewne wielki kłopot, gdybyś musiał wylądować samolotem na lotnisku (co już jest ruchem trójwymiarowym) — jest to bardzo trudne bez intensywnego szkolenia i treningu.

Badanie ruchu w przestrzeni dwu- i trójwymiarowej zaczniemy od opisu położenia i przemieszczenia ciała.

Położenie i przemieszczenie

Do określenia położenia cząstki (lub innego ciała punktowego) stosujemy zwykle **wektor położenia** $\vec{r}$ (nazywany także wektorem wodzącym), czyli wektor łączący punkt odniesienia (najczęściej początek układu współrzędnych) z punktem, w którym znajduje się cząstka. W zapisie z użyciem wektorów jednostkowych z podrozdziału 3.2 wektor $\vec{r}$ można wyrazić jako

$$\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}, \tag{4.1}$$

przy czym $x\hat{\mathrm{i}}$, $y\hat{\mathrm{j}}$ i $z\hat{\mathrm{k}}$ są wektorami składowymi wektora $\vec{r}$ wzdłuż osi układu współrzędnych, a x, y i z — składowymi tego wektora.

Współczynniki x, y i z określają położenie cząstki, liczone wzdłuż osi układu współrzędnych, od początku tego układu, tzn. współrzędne cząstki w tym układzie wynoszą (x, y, z). Na przykład na rysunku 4.1 przedstawiono cząstkę o położeniu danym przez wektor:

$$\vec{r} = (-3\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (2\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}} + (5\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{k}},$$

a więc o współrzędnych (−3 m, 2 m, 5 m). Licząc wzdłuż osi x, cząstka ta jest odległa od początku układu o 3 m w kierunku $-\hat{\mathrm{i}}$, licząc wzdłuż osi y — o 2 m w kierunku $\hat{\mathrm{j}}$, a licząc wzdłuż osi z — o 5 m w kierunku $\hat{\mathrm{k}}$.

Gdy cząstka porusza się, wektor położenia zmienia się, tak aby zawsze łączył początek układu współrzędnych z punktem, w którym znajduje się cząstka. Jeśli w pewnym przedziale czasu wektor położenia zmienia się — powiedzmy — od $\vec{r}_1$ do $\vec{r}_2$, to **przemieszczenie** cząstki w tym przedziale czasu wynosi

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{4.2}$$

Możemy je zapisać za pomocą wektorów jednostkowych, jak w równaniu (4.1), co daje

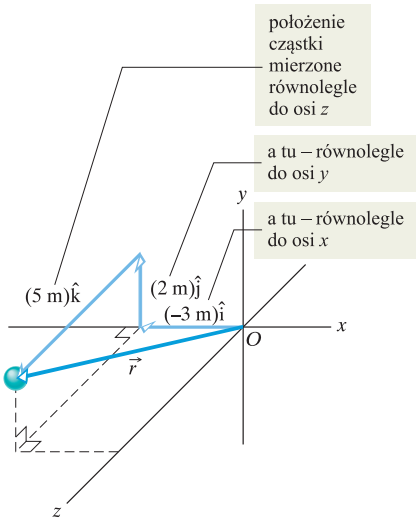
$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{\mathrm{i}} + y_2\hat{\mathrm{j}} + z_2\hat{\mathrm{k}}) - (x_1\hat{\mathrm{i}} + y_1\hat{\mathrm{j}} + z_1\hat{\mathrm{k}}),$$

czyli

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\mathrm{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathrm{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathrm{k}}, \tag{4.3}$$

przy czym współrzędne (x_1, y_1, z_1) odpowiadają wektorowi położenia $\vec{r}_1$, a współrzędne (x_2, y_2, z_2) — wektorowi położenia $\vec{r}_2$. Możemy to zapisać jeszcze inaczej, podstawiając Δx za $(x_2 - x_1)$, Δy za $(y_2 - y_1)$ oraz Δz za $(z_2 - z_1)$, co daje

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}}. \tag{4.4}$$



Rys. 4.1. Wektor położenia $\vec{r}$ cząstki jest sumą jego wektorów składowych w kierunku osi układu współrzędnych

Przykład 4.01. Dwuwymiarowy wektor położenia, bieg królika

Na parkingu wymalowano — co słusznie może ci się wydać dziwaczne — układ osi współrzędnych. Po tym parkingu biegnie królik. Współrzędne położenia królika zależą od czasu t zgodnie z wzorami:

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28 \qquad (4.5)$$

oraz

$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30, \qquad (4.6)$$

gdzie t wyrażono w sekundach, a x i y w metrach.

a) Znajdź wektor położenia $\vec{r}$ królika w chwili $t = 15$ s; wyraź go za pomocą wektorów jednostkowych oraz przez jego długość i kierunek.

PODSTAWOWE FAKTY

Współrzędne x i y położenia królika, dane wzorami (4.5) i (4.6), są składowymi jego wektora położenia $\vec{r}$. Współrzędne te możemy wyznaczyć dla danej chwili, a następnie skorzystać z równania (3.6), aby wyznaczyć długość i kierunek wektora $\vec{r}$.

Obliczenia: Możemy napisać, że

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\mathrm{i}} + y(t)\hat{\mathrm{j}} \qquad (4.7)$$

(wektor położenia zapisaliśmy jako $\vec{r}(t)$, a nie $\vec{r}$, ponieważ jego składowe, a więc i sam wektor, są funkcjami t).

W chwili $t = 15$ s składowe wynoszą:

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

oraz

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57 \text{ m}.$$

Tak więc w chwili $t = 15$ s,

$$\vec{r} = (66 \text{ m})\hat{\mathrm{i}} - (57 \text{ m})\hat{\mathrm{j}} \qquad \text{(odpowiedź)},$$

jak pokazano na rysunku 4.2a.

Aby wyznaczyć długość i kierunek wektora $\vec{r}$, możemy skorzystać z równania (3.6) (pamiętając, że składowe są przyprostokątnymi, a długość wektora przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego), co daje

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66 \text{ m})^2 + (-57 \text{ m})^2} = 87 \text{ m} \qquad \text{(odpowiedź)}$$

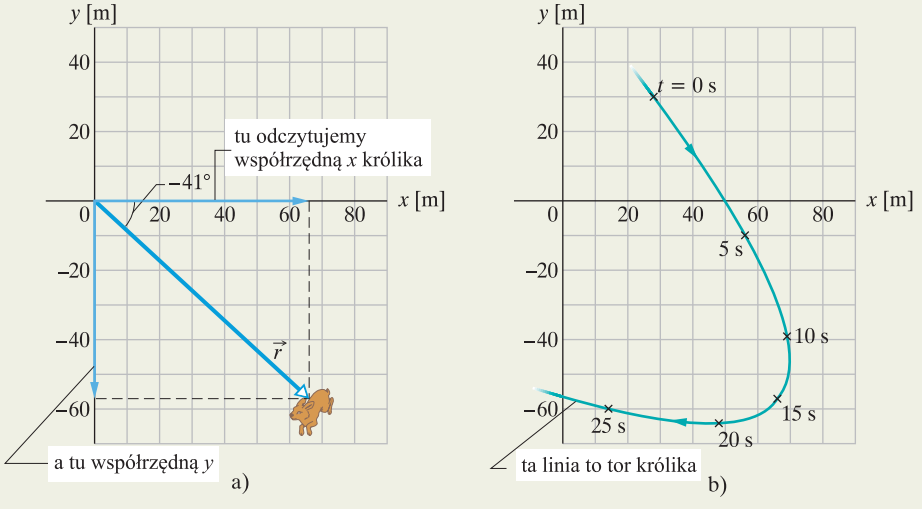
oraz

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-57 \text{ m}}{66 \text{ m}}\right) = -41^\circ \quad \text{odpowiedź}).$$

Sprawdzenie: Tangens kąta $\theta = 139^\circ$ jest taki sam, jak tangens kąta -41°, lecz analiza znaków składowych wektora $\vec{r}$ wykazuje, że kąt 139° nie spełnia warunków zadania.

b) Wykreśl tor królika od $t = 0$ do $t = 25$ s.

Sporządzanie wykresu: Powtarzamy obliczenia z punktu (a) dla kilku wartości t, po czym odkładamy otrzymane wartości na wykresie. Na rysunku 4.2b pokazano punkty odpowiadające sześciu wartościom t i łączącą je linię.



Rys. 4.2. a) Wektor położenia $\vec{r}$ królika w chwili $t = 15$ s. Składowe tego wektora zaznaczono na osiach układu współrzędnych. b) Tor królika i jego położenie dla sześciu wartości t

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

4.2. PRĘDKOŚĆ ŚREDNIA I PRĘDKOŚĆ CHWILOWA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

4.04 wyjaśnić, że prędkość to wielkość wektorowa, a zatem ma wartość bezwzględną i kierunek, może być również wyrażona przez składowe;

4.05 narysować dwu- i trójwymiarowy wektor prędkości cząstki, wskazując jego składowe wzdłuż osi układu współrzędnych;

4.06 powiązać wektory początkowego i końcowego położenia cząstki oraz odpowiadający im przedział czasu z wektorem średniej prędkości cząstki, zarówno za pomocą wektorów jednostkowych, jak i przy użyciu długości i kierunków wektorów;

4.07 wyznaczyć wektor prędkości (chwilowej) cząstki, znając jej wektor położenia jako funkcję czasu.

Podstawowe fakty

- Jeśli w przedziale czasu Δt przemieszczenie cząstki wynosi $\Delta\vec{r}$, to jej prędkość średnia $\vec{v}_{śr}$ w tym przedziale czasu jest równa

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

- Granicę, do której dąży $\Delta\vec{r}$, gdy Δt dąży do zera, nazywamy prędkością średnią (lub po prostu prędkością) $\vec{v}$ równą

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

co można też zapisać za pomocą wektorów jednostkowych jako

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k},$$

gdzie $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, a $v_z = dz/dt$.

- Prędkość chwilowa cząstki $\vec{v}$ jest zawsze skierowana stycznie do toru cząstki (w punkcie, w którym cząstka się w tej chwili znajduje).

Prędkość średnia i prędkość chwilowa

Jeśli ciało porusza się z jednego punktu do drugiego, to nieraz chcielibyśmy wiedzieć, jak szybko to się dzieje. Podobnie jak w rozdziale 2, zdefiniujemy dwie wielkości opisujące, jak szybki jest ruch: *prędkość średnią* oraz *prędkość chwilową*. Jednakże teraz musimy uważać te wielkości za wektory i stosować zapis wektorowy.

Jeśli w przedziale czasu Δt cząstka doznała przemieszczenia $\Delta\vec{r}$, to jej **prędkość średnia** $\vec{v}_{śr}$ jest równa

$$\text{prędkość średnia} = \frac{\text{przemieszczenie}}{\text{przedział czasu}},$$

czyli

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{4.8}$$

Z równania tego wynika, że kierunek $\vec{v}_{śr}$ (wektora stojącego po lewej stronie równania (4.8)) jest taki sam, jak kierunek przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ (wektora stojącego po prawej stronie tego równania). Korzystając z równania (4.4), możemy zapisać równanie (4.8) za pomocą wektorów składowych jako

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}. \tag{4.9}$$

Na przykład, jeśli przemieszczenie cząstki w czasie 2 s wynosi $(12\ \text{m})\hat{\text{i}} + (3\ \text{m})\hat{\text{k}}$, to jej prędkość średnia w tym przedziale czasu jest równa

$$\vec{v}_{\text{śr}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12\ \text{m})\hat{\text{i}} + (3\ \text{m})\hat{\text{k}}}{2\ \text{s}} = (6\ \text{m/s})\hat{\text{i}} + (1{,}5\ \text{m/s})\hat{\text{k}}.$$

Tak więc prędkość średnia (która jest wektorem) ma składową x równą 6 m/s i składową z równą 1,5 m/s.

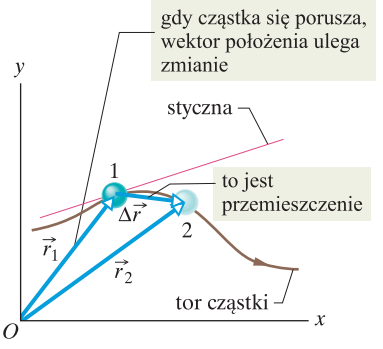
Mówiąc o **prędkości** cząstki, mamy zwykle na myśli jej **prędkość chwilową** $\vec{v}$ w pewnej chwili. Wartość tę otrzymujemy jako wartość graniczną $\vec{v}_{\text{śr}}$, gdy przedział czasu Δt zmierza do zera wokół tej chwili. Korzystając z pojęć rachunku różniczkowego, możemy zapisać $\vec{v}$ jako pochodną:

$$\vec{v} = \frac{\text{d}\vec{r}}{\text{d}t}. \qquad (4.10)$$

Na rysunku 4.3 przedstawiono tor cząstki poruszającej się w płaszczyźnie xy. Gdy cząstka porusza się po tym torze w prawą stronę, jej wektor położenia obraca się w prawo. W przedziale czasu Δt wektor położenia zmienia wartość z $\vec{r}_1$ na $\vec{r}_2$, a przemieszczenie cząstki wynosi $\Delta\vec{r}$.

Aby znaleźć prędkość chwilową cząstki w chwili — dajmy na to — t_1 (tzn. gdy cząstka zajmuje położenie 1), zmniejszamy przedział Δt wokół t_1 do zera. Wówczas: 1) wektor położenia $\vec{r}_2$ na rysunku 4.3 dąży do $\vec{r}_1$, tak że $\Delta\vec{r}$ dąży do zera; 2) kierunek $\Delta\vec{r}/\Delta t$ (a więc i kierunek $\vec{v}_{\text{śr}}$) zmierza do kierunku stycznej do toru cząstki w punkcie 1; 3) prędkość średnia $\vec{v}_{\text{śr}}$ dąży do prędkości chwilowej $\vec{v}$ w chwili t_1.

W granicy, gdy $\Delta t \to 0$, mamy więc $\vec{v}_{\text{śr}} \to \vec{v}$, a także — co jest tu najważniejsze — $\vec{v}_{\text{śr}}$ przyjmuje kierunek stycznej do toru. Jest to więc kierunek prędkości chwilowej $\vec{v}$:



Rys. 4.3. Przemieszczenie $\Delta\vec{r}$ cząstki w przedziale czasu Δt. W chwili początkowej t_1 cząstka znajduje się w punkcie 1, o wektorze położenia $\vec{r}_1$, a w chwili końcowej t_2 — w punkcie 2, o wektorze położenia $\vec{r}_2$. Pokazano styczną do toru cząstki w punkcie 1

Kierunek prędkości chwilowej $\vec{v}$ cząstki jest zgodny z kierunkiem stycznej do toru cząstki w punkcie, w którym się ona znajduje.

Tak samo jest w przestrzeni trójwymiarowej: wektor $\vec{v}$ jest zawsze styczny do toru cząstki w punkcie, w którym się ona znajduje.

Zapiszmy równanie (4.10) za pomocą wektorów jednostkowych, biorąc $\vec{r}$ z równania (4.1). Otrzymujemy

$$\vec{v} = \frac{\text{d}}{\text{d}t}(x\hat{\text{i}} + y\hat{\text{j}} + z\hat{\text{k}}) = \frac{\text{d}x}{\text{d}t}\hat{\text{i}} + \frac{\text{d}y}{\text{d}t}\hat{\text{j}} + \frac{\text{d}z}{\text{d}t}\hat{\text{k}}.$$

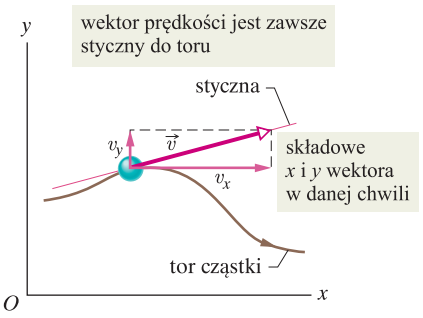
Równanie to można zapisać w nieco prostszej postaci

$$\vec{v} = v_x\hat{\text{i}} + v_y\hat{\text{j}} + v_z\hat{\text{k}}, \qquad (4.11)$$

wprowadzając składowe prędkości $\vec{v}$:

$$v_x = \frac{\text{d}x}{\text{d}t}, \quad v_y = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} \quad \text{oraz} \quad v_z = \frac{\text{d}z}{\text{d}t}. \qquad (4.12)$$

Na przykład $\text{d}x/\text{d}t$ jest składową wektora $\vec{v}$ wzdłuż osi x. Składowe wektora $\vec{v}$ otrzymujemy, różniczkując po czasie składowe wektora $\vec{r}$.

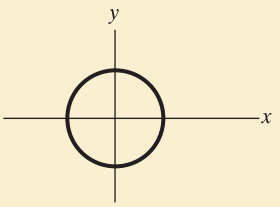


Rys. 4.4. Prędkość $\vec{v}$ cząstki i jej składowe wzdłuż kierunków osi

Na rysunku 4.4 przedstawiono wektor prędkości $\vec{v}$ oraz jego składowe x i y. Zauważ, że wektor $\vec{v}$ jest styczny do toru cząstki w punkcie, w którym się ona znajduje. *Uwaga*: gdy na rysunkach 4.1–4.3 zaznaczaliśmy wektor położenia, był on odcinkiem ze strzałką, zaczynającym się w pewnym punkcie (jakimś „stąd"), a kończącym się w innym punkcie (jakimś „dotąd"). Gdy natomiast rysujemy wektor prędkości, jak na rysunku 4.4, to *nie prowadzi on* z jednego punktu do drugiego. Pokazuje on chwilowy kierunek ruchu cząstki, której położenie jest początkiem wektora; długość wektora prędkości (równa wartości bezwzględnej prędkości) może być narysowana w dowolnej skali.

Sprawdzian 1

Na rysunku przedstawiono kołowy tor cząstki. W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się cząstka w chwili, gdy jej prędkość chwilowa wynosi $\vec{v} = (2\ \text{m/s})\hat{i} - (2\ \text{m/s})\hat{j}$, jeśli porusza się ona po tym okręgu w kierunku: a) zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, b) przeciwnym do ruchu wskazówek zegara? Zaznacz wektor $\vec{v}$ na rysunku w tych dwóch przypadkach.



Przykład 4.02. Dwuwymiarowy wektor prędkości, bieg królika

Znajdź prędkość $\vec{v}$ królika z poprzedniego przykładu w chwili $t = 15$ s.

PODSTAWOWE FAKTY

Wektor prędkości $\vec{v}$ wyznaczymy, obliczając pochodne składowych wektora położenia królika.

Obliczenia: Podstawiając równanie (4.5) do pierwszego z równań (4.12), znajdujemy składową x wektora $\vec{v}$ równą

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28) = -0{,}62t + 7{,}2. \tag{4.13}$$

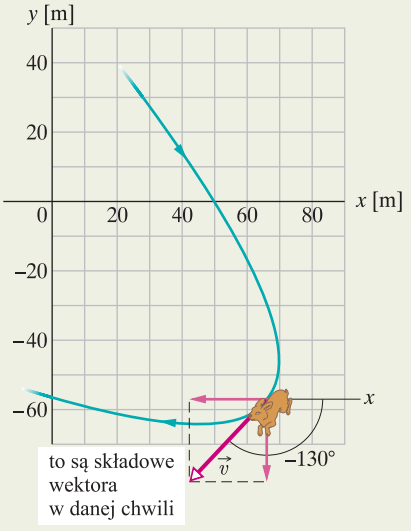
W chwili $t = 15$ s wynosi ona $v_x = -2{,}1$ m/s. Analogicznie, podstawiając (4.6) do drugiego z równań (4.12), otrzymujemy składową y równą

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30) = 0{,}44t - 9{,}1. \tag{4.14}$$

W chwili $t = 15$ s mamy $v_y = -2{,}5$ m/s. Z równania (4.11) otrzymujemy zatem:

$$\vec{v} = -(2{,}1\ \text{m/s})\hat{i} - (2{,}5\ \text{m/s})\hat{j} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Wektor ten pokazano na rysunku 4.5 — jest on styczny do toru królika i skierowany w kierunku jego biegu w chwili $t = 15$ s.



Rys. 4.5. Prędkość $\vec{v}$ królika w chwili $t = 15$ s

Aby wyznaczyć długość i kierunek tego wektora, skorzystamy z równania (3.6), co daje

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(-2{,}1\ \text{m/s})^2 + (-2{,}5\ \text{m/s})^2} \\ &= 3{,}3\ \text{m/s} \qquad \text{(odpowiedź)} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \theta &= \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{arctg} \left(\frac{-2{,}5\ \text{m/s}}{-2{,}1\ \text{m/s}} \right) \\ &= \operatorname{arctg} 1{,}19 = -130^\circ \qquad \text{(odpowiedź).} \end{aligned}$$

Sprawdzenie: Czy poprawnym rozwiązaniem jest kąt -130°, czy kąt $-130^\circ + 180^\circ = 50^\circ$?

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

4.3. PRZYSPIESZENIE ŚREDNIE I PRZYSPIESZENIE CHWILOWE

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

4.08 wyjaśnić, że przyspieszenie to wielkość wektorowa, a zatem ma wartość bezwzględną i kierunek, może być również wyrażona przez składowe;

4.09 narysować dwu- i trójwymiarowy wektor przyspieszenia cząstki, wskazując jego składowe wzdłuż osi układu współrzędnych;

4.10 powiązać wektory początkowej i końcowej prędkości cząstki oraz odpowiadający im przedział czasu z wektorem średniego przyspieszenia cząstki, zarówno za pomocą wektorów jednostkowych, jak i przy użyciu długości i kierunków wektorów;

4.11 wyznaczyć wektor przyspieszenia (chwilowego) cząstki, znając jej wektor prędkości jako funkcję czasu;

4.12 wykorzystać równania ruchu ze stałym przyspieszeniem (z rozdziału 2) do powiązania ze sobą składowych przyspieszenia, prędkości i położenia cząstki jako funkcji czasu w celu opisania ruchu w kierunku każdej z osi układu współrzędnych.

Podstawowe fakty

- Jeśli w przedziale czasu Δt prędkość cząstki zmienia się z $\vec{v}_1$ w $\vec{v}_2$, to jej średnie przyspieszenie w tym przedziale czasu jest równe

$$\vec{a}_{\text{śr}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

- Granicę, do której dąży $\vec{a}_{\text{śr}}$, gdy Δt dąży do zera, nazywamy przyspieszeniem średnim (lub po prostu przyspieszeniem) $\vec{a}$ równym

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

- W zapisie za pomocą wektorów jednostkowych

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k},$$

gdzie $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$, a $a_z = dv_z/dt$.

Przyspieszenie średnie i przyspieszenie chwilowe

Jeśli w przedziale czasu Δt prędkość cząstki zmienia się z $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2$, to jej **przyspieszenie średnie** $\vec{a}_{\text{śr}}$ w tym przedziale jest równe

$$\text{przyspieszenie średnie} = \frac{\text{zmiana prędkości}}{\text{przedział czasu}},$$

czyli

$$\vec{a}_{\text{śr}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \qquad (4.15)$$

Jeśli zwężamy przedział czasu Δt do zera wokół pewnej chwili, to przyspieszenie średnie $\vec{a}_{\text{śr}}$ dąży w granicy do **przyspieszenia chwilowego** (czyli po

prostu **przyspieszenia**) $\vec{a}$ w tej chwili, tzn.:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{4.16}$$

Jeśli zmienia się wartość prędkości lub jej kierunek (lub obie te wielkości naraz), to cząstka doznaje przyspieszenia.

Równanie (4.16) możemy zapisać za pomocą wektorów jednostkowych, podstawiając do niego $\vec{v}$ z równania (4.11), co daje

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}.$$

Możemy je też przedstawić w postaci

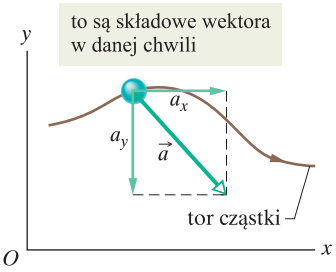
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \tag{4.17}$$

wprowadzając składowe przyspieszenia $\vec{a}$:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad \text{oraz} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{4.18}$$

Składowe przyspieszenia $\vec{a}$ są pochodnymi składowych prędkości $\vec{v}$.

Na rysunku 4.6 pokazano wektor przyspieszenia $\vec{a}$ i jego składowe dla cząstki poruszającej się w dwóch wymiarach. *Uwaga*: wektor przyspieszenia, np. ten z rysunku 4.6, *nie łączy* dwóch położeń cząstki. Pokazuje on kierunek przyspieszenia cząstki, której położenie stanowi jego początek; długość wektora przyspieszenia (równa wartości bezwzględnej przyspieszenia) może być narysowana w dowolnej skali.



Rys. 4.6. Wektor przyspieszenia $\vec{a}$ cząstki i jego składowe

Sprawdzian 2

Niżej podano równania opisujące położenie krążka hokejowego w płaszczyźnie xy (w metrach) jako funkcję czasu dla czterech różnych przypadków jego ruchu: 1) $x = -3t^2 + 4t - 2$, $y = 6t^2 - 4t$; 2) $x = -3t^3 - 4t$, $y = -5t^2 + 6$; 3) $\vec{r} = 2t^2\hat{i} - (4t + 3)\hat{j}$; 4) $\vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{i} + 3\hat{j}$. Sprawdź dla każdego z przypadków, czy składowe x i y przyspieszenia krążka są stałe i czy stałe jest przyspieszenie $\vec{a}$.

Przykład 4.03. Dwuwymiarowy wektor przyspieszenia, bieg królika

Znajdź przyspieszenie $\vec{a}$ królika z poprzednich przykładów w chwili $t = 15$ s.

PODSTAWOWE FAKTY

Możemy znaleźć przyspieszenie $\vec{a}$ królika, wyznaczając jego składowe jako pochodne składowych prędkości królika.

Obliczenia: Podstawiając równanie (4.13) do pierwszego z równań (4.18), znajdujemy składową x wektora $\vec{a}$ równą

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62 \text{ m/s}^2.$$

Analogicznie, podstawiając (4.14) do drugiego z równań (4.12), otrzymujemy składową y równą

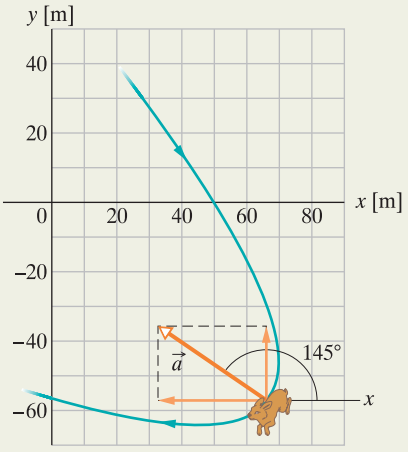
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}44t - 9{,}1) = 0{,}44 \text{ m/s}^2.$$

Jak widać, przyspieszenie nie zależy od czasu (jest stałe), gdyż zmienna t nie występuje w wyrażeniu na

żadną ze składowych przyspieszenia. Z równania (4.17) otrzymujemy

$$\vec{a} = (-0{,}62\ \mathrm{m/s^2})\hat{\mathrm{i}} + (0{,}44\ \mathrm{m/s^2})\hat{\mathrm{j}} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Wektor ten wraz z torem królika przedstawiono na rysunku 4.7.



Rys. 4.7. Przyspieszenie $\vec{a}$ królika w chwili $t = 15$ s. W naszym przykładzie przyspieszenie to jest stałe, a więc jednakowe we wszystkich punktach toru królika

Aby wyznaczyć długość i kierunek tego wektora, skorzystamy z równania (3.6). Otrzymujemy długość równą

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62\ \mathrm{m/s^2})^2 + (0{,}44\ \mathrm{m/s^2})^2} = 0 \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Wartość kąta wyznaczającego kierunek wektora przyspieszenia

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{a_y}{a_x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{0{,}44\ \mathrm{m/s^2}}{-0{,}62\ \mathrm{m/s^2}}\right) = -35°$$

otrzymana za pomocą kalkulatora wskazuje na to, że wektor przyspieszenia $\vec{a}$ jest skierowany w prawo i w dół na rysunku 4.7. Jednak wiemy z wartości otrzymanych wcześniej składowych tego wektora, że musi on być skierowany w lewo i do góry. Musimy więc znaleźć inny kąt, którego tangens wynosi tyle samo co tangens kąta $-35°$. Jest to kąt

$$-35° + 180° = 145° \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Ta wartość *jest zgodna* z wartościami składowych $\vec{a}$. Zauważ, że wektor $\vec{a}$ ma taką samą długość i taki sam kierunek w każdym punkcie toru królika, ponieważ — jak stwierdziliśmy nieco wcześniej — przyspieszenie ruchu królika jest stałe. To znaczy, że jeśli chcemy narysować wektor przyspieszenia w jakimkolwiek innym punkcie toru królika, to powinniśmy przesunąć wektor $\vec{a}$ do tego punktu, nie zmieniając jego długości ani kierunku.

Był to już drugi przykład, w którym obliczaliśmy pochodną wektora zapisanego przy użyciu wektorów jednostkowych. Jednym z częstych błędów jest w tej sytuacji zapominanie o wektorach jednostkowych i podawanie tylko liczb i jednostek. Pamiętaj, że pochodna wektora to też wektor.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

4.4. RZUT UKOŚNY

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

4.13 wyjaśnić, jak zmieniają się z upływem czasu długość oraz kierunek prędkości i przyspieszenia cząstki w rzucie ukośnym, korzystając z rysunku toru cząstki;

4.14 obliczyć położenie, przemieszczenie i prędkość cząstki w rzucie ukośnym w dowolnej chwili, znając jej prędkość początkową wyrażoną przez wektory jednostkowe lub przez długość i kąt;

4.15 wyznaczyć prędkość początkową, znając wielkości opisujące ruch cząstki w dowolnej chwili.

Podstawowe fakty

- W rzucie ukośnym ciało zostaje wyrzucone w powietrze z prędkością początkową o wartości bezwzględnej v_0 pod kątem θ_0 względem dodatniego kierunku osi x. W ruchu ciała przyspieszenie w poziomie jest równe zeru, a przyspieszenie w pionie wynosi $-g$ (jest skierowane w dół, a oś y jest skierowana w górę).
- Równania ruchu ciała w rzucie ukośnym są następujące:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t,$$
$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$
$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt,$$
$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0).$$

- Tor ciała w rzucie ukośnym jest parabolą o równaniu

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2},$$

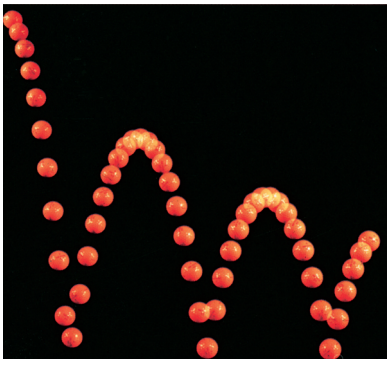
przy założeniu, że x_0 i y_0 są równe zeru.

- Zasięg rzutu w poziomie R równy odległości w poziomie od punktu wyrzucenia ciała do punktu, w którym osiąga ono ponownie wysokość punktu wyjściowego wynosi

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0.$$

Rzut ukośny

Rozważymy obecnie ważny przypadek szczególny ruchu w dwóch wymiarach. Polega on na tym, że cząstka porusza się w płaszczyźnie pionowej z pewną prędkością początkową v_0 oraz z przyspieszeniem ziemskim $\vec{g}$, skierowanym zawsze pionowo w dół. Taki ruch nazywamy **rzutem ukośnym**. Może to być lot piłki tenisowej, jak na rysunku 4.8, lub baseballowej, ale nie lot kaczki. W różnych dyscyplinach sportowych ważną rolę odgrywają cechy lotu piłki. Na przykład gracz w racquetball (pewną odmianę squasha), który wymyślił w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku odbicie typu Z, odnosił wiele zwycięstw dzięki posyłaniu tym sposobem wprawiających przeciwnika w osłupienie piłek tuż pod linię końcową kortu.



Rys. 4.8. Zdjęcie stroboskopowe piłki tenisowej odbijającej się od twardego podłoża. Ruch piłki między odbiciami jest rzutem ukośnym (fot. Richard Megna/Fundamental Photographs)

Opiszemy rzut ukośny, korzystając z pojęć omówionych w podrozdziałach 4.1–4.3 i zakładając, że opór powietrza nie ma wpływu na ruch cząstki. Na rysunku 4.9, który omówimy szczegółowo nieco później, przedstawiono tor cząstki (pocisku) w warunkach, gdy pomijamy opór powietrza. Pocisk wyrzucono z prędkością początkową $\vec{v}_0$, którą możemy zapisać jako

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathrm{i}} + v_{0y}\hat{\mathrm{j}}. \tag{4.19}$$

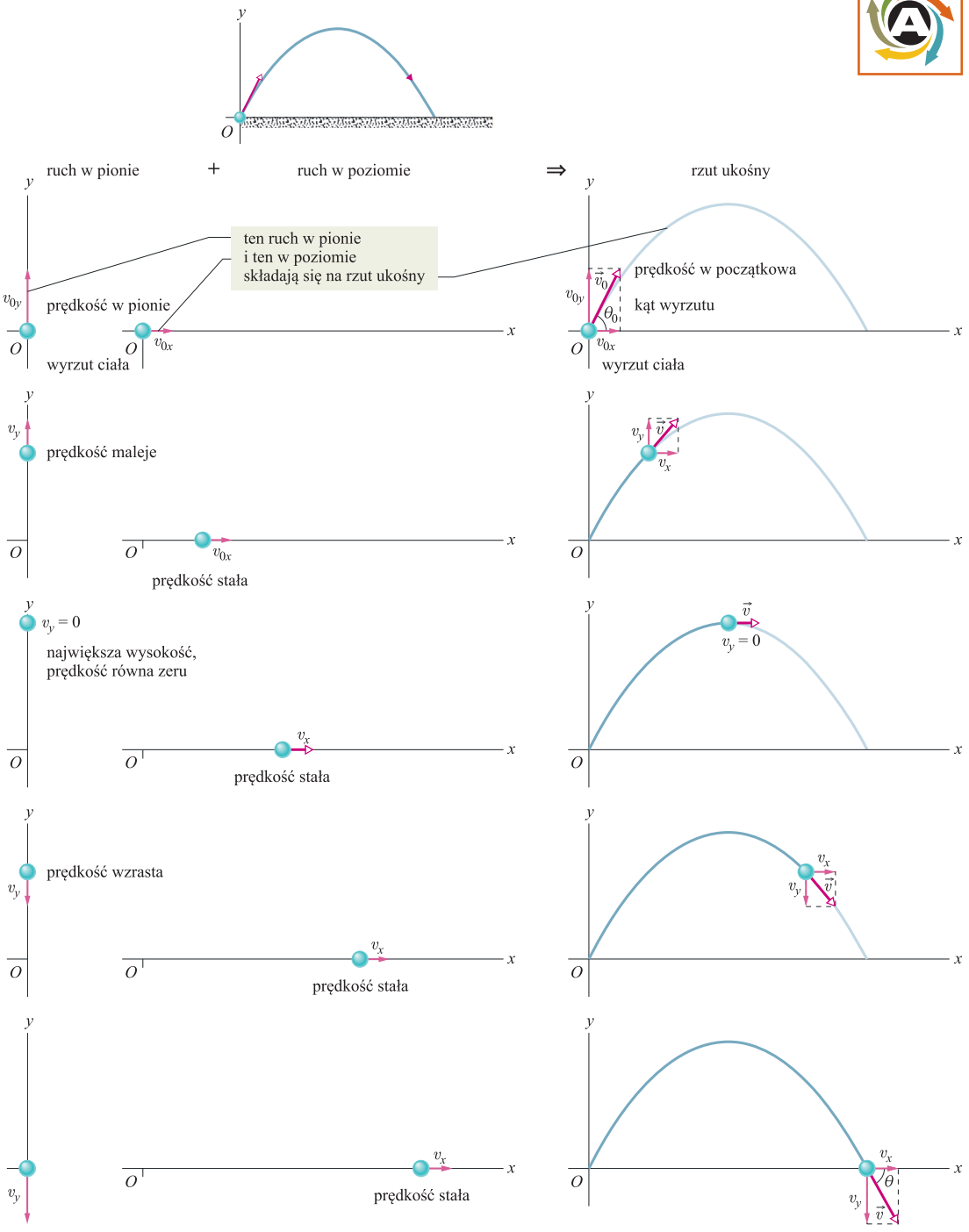
Składowe v_{0x} i v_{0y} możemy wyznaczyć, jeśli znamy kąt θ_0 utworzony przez $\vec{v}_0$ z dodatnim kierunkiem osi x, co daje

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \qquad \text{oraz} \qquad v_{0y} = v_0 \sin\theta_0. \tag{4.20}$$

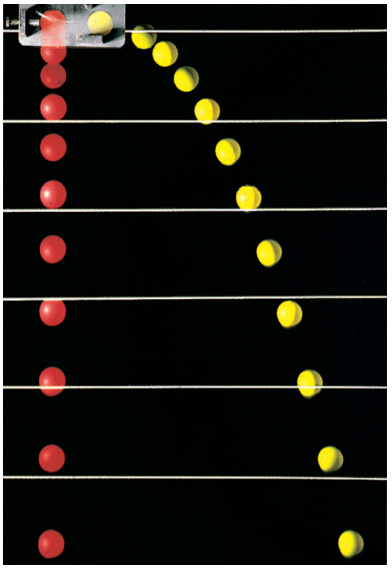
Podczas tego ruchu w dwóch wymiarach wektor położenia $\vec{r}$ cząstki i wektor jej prędkości $\vec{v}$ zmieniają się w sposób ciągły, lecz wektor jej przyspieszenia $\vec{a}$ jest stały i *zawsze* skierowany pionowo w dół. Cząstka *nie doznaje* żadnego przyspieszenia w kierunku poziomym.

Rzut ukośny cząstki, taki jak przedstawione na rysunkach 4.8 i 4.9, może się wydawać nieco złożony, lecz jego opis można znacznie uprościć, korzystając ze znanej z doświadczenia właściwości.

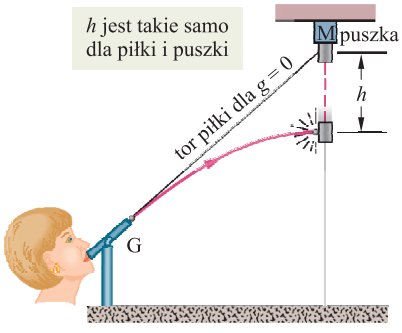
W rzucie ukośnym ruchy cząstki w kierunku poziomym i w kierunku pionowym można traktować jako niezależne — żaden z nich nie ma wpływu na drugi.



Rys. 4.9. *Ruch ukośny* ciała wyrzuconego w powietrze z początku układu współrzędnych z prędkością początkową $\vec{v}_0$ pod kątem θ_0. Ruch ciała jest połączeniem ruchu w pionie ze stałym przyspieszeniem i ruchu w poziomie ze stałą prędkością — patrz składowe prędkości ciała



Rys. 4.10. Jedna piłka zostaje upuszczona w tej samej chwili, w której druga zostaje wystrzelona poziomo w prawą stronę. Ich ruch w pionie jest taki sam (fot. Richard Megna/Fundamental Photographs)



Rys. 4.11. Piłeczka wystrzelona z armatki pneumatycznej zawsze trafia w spadającą puszkę. Piłka i puszka tracą taką samą wysokość h w stosunku do ich położeń końcowych pod nieobecność przyciągania ziemskiego

Dzięki tej właściwości zagadnienie ruchu w dwóch wymiarach można rozbić na dwa prostsze zagadnienia jednowymiarowe: ruch cząstki w kierunku poziomym (w którym *przyspieszenie wynosi zero*) oraz jej ruch w kierunku pionowym (ze *stałym przyspieszeniem skierowanym w dół*). Oto dwa doświadczenia świadczące o tym, że ruchy cząstki w kierunku poziomym i pionowym są niezależne.

Dwie piłki golfowe

Na rysunku 4.10 przedstawione zostało zdjęcie stroboskopowe dwóch piłek golfowych, z których jedna została po prostu upuszczona, a druga — wystrzelona poziomo za pomocą sprężyny. Ruch w pionie obydwu piłek jest taki sam, tzn. obie przebywają takie same drogi w jednakowych odstępach czasu. *To, że jedna z nich oprócz tego, że spada, porusza się w poziomie, nie wpływa w żaden sposób na jej ruch w pionie*. Oznacza to, że jej ruchy w pionie i w poziomie są od siebie niezależne.

Doświadczenie, które zawsze zachwyca studentów

Na rysunku 4.11 przedstawiono doświadczenie, które było już ozdobą wielu wykładów. Wykonuje się je w ten sposób, że z armatki pneumatycznej G zostaje wystrzelona piłeczka. Celem jest puszka podwieszona za pomocą magnesu M, przy czym armatka jest wycelowana wprost w puszkę, a magnes zwalnia puszkę w chwili, gdy piłka opuszcza lufę armatki. Gdyby przyspieszenie ziemskie g było równe zeru, torem piłki na rysunku 4.11 byłaby linia prosta, a puszka, po uwolnieniu jej przez magnes, lewitowałaby ciągle w tym samym położeniu. Jednym słowem, piłka z pewnością trafiłaby w puszkę. Jednak g *nie jest* równe zeru, a mimo to piłka *i tak* trafia w puszkę! Jak widać z rysunku 4.11, w czasie lotu piłki zarówno piłka, jak i puszka tracą taką samą wysokość h w stosunku do ich położeń końcowych pod nieobecność przyciągania ziemskiego. Im silniej dmuchamy w armatkę, tym większą prędkość początkową nadajemy piłce. Lot trwa wtedy krócej i wartość h jest mniejsza.

Sprawdzian 3

W pewnej chwili prędkość piłki w rzucie ukośnym jest równa $\vec{v} = 25\hat{i} - 4{,}9\hat{j}$, przy czym oś x jest pozioma, oś y skierowana pionowo w górę, a prędkość wyrażona w metrach na sekundę. Czy piłka znajduje się już za punktem swego największego wzniesienia?

Ruch w poziomie

Teraz jesteś już przygotowany do szczegółowej analizy rzutu ukośnego, tzn. opisania ruchu pocisku w pionie i w poziomie. Zaczniemy od ruchu w poziomie. Ruch w kierunku poziomym odbywa się *bez przyspieszenia*, dlatego składowa pozioma prędkości pocisku nie ulega zmianie w czasie ruchu i pozostaje równa swej wartości początkowej v_{0x}. Pokazano to np. na rysunku 4.12. Przemieszczenie cząstki w poziomie od jej położenia początkowego x_0, $x - x_0$, jest dane wzorem (2.15), w którym należy przyjąć

$a = 0$, czyli jest równe w chwili t

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Ponieważ $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, więc

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t. \tag{4.21}$$

Ruch w pionie

Ruch pocisku w pionie jest taki sam, jak ruch ciała w rzucie pionowym, który omówiliśmy już w podrozdziale 2.5. Najważniejsze jest to, że przyspieszenie jest stałe. Wobec tego możemy zastosować wzory z tabeli 2.1 pod warunkiem, że zamiast a podstawimy $-g$ i zamienimy współrzędną x na y. Na przykład z równania (2.15) otrzymujemy

$$y - y_0 = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \tag{4.22}$$

przy czym wartość początkową poziomej składowej prędkości v_{0y} zapisaliśmy w postaci $v_0 \sin\theta_0$. Podobnie z równań (2.11) i (2.16) otrzymujemy

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \tag{4.23}$$

oraz

$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.24}$$

Jak widać z rysunku 4.9 oraz z równania (4.23) składowa pionowa prędkości jest dokładnie taka sama, jak dla piłki rzuconej pionowo w górę. Na początku ruchu jest ona skierowana do góry, a potem jej wartość maleje stopniowo do zera *i jest równa zeru w chwili, w której cząstka ma największą wysokość*. Następnie kierunek składowej pionowej prędkości zmienia się na przeciwny, a jej wartość rośnie wraz z upływem czasu.

Równanie toru

Równanie toru cząstki można wyznaczyć, eliminując t z równań (4.21) i (4.22). Wyznaczając t z równania (4.21) i podstawiając je do równania (4.22), otrzymujemy po drobnych przekształceniach

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} \qquad \text{(równanie toru)}. \tag{4.25}$$

Jest to równanie toru przedstawionego na rysunku 4.9. Przy jego wyprowadzeniu przyjęliśmy dla prostoty $x_0 = 0$ w równaniu (4.21) oraz $y_0 = 0$ w równaniu (4.22). Wielkości g, θ_0 i v_0 są stałe, dlatego równanie (4.25) ma postać $y = ax + bx^2$, przy czym a i b są stałymi. Jest to równanie paraboli, tzn. tor pocisku jest *paraboliczny*.

Zasięg rzutu

Zasięgiem poziomym R pocisku jest odległość, którą przebyła cząstka *w poziomie*, do chwili jej powrotu na wysokość początkową (tzn. tę, z której została wyrzucona). Aby wyznaczyć zasięg R wstawmy $x - x_0 = R$ w równaniu (4.21) oraz $y - y_0 = 0$ w równaniu (4.22), co daje

$$R = (v_0 \cos\theta_0)t$$



Rys. 4.12. Gdy chłopak jadący na deskorolce wykonuje skok, zmienia się składowa pionowa jego prędkości, lecz składowa pozioma nie ulega zmianie. Składowa pozioma pozostaje równa prędkości deskorolki, dzięki czemu skoczek jest przez cały czas nad deskorolką, a więc może na niej wylądować po skoku (fot. Jose Gil/Shutterstock)

oraz

$$0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Eliminując z tych równań t, otrzymujemy

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0.$$

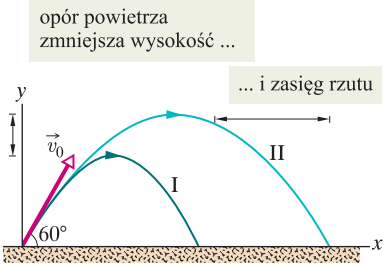
Korzystając z tożsamości trygonometrycznej $\sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0\cos\theta_0$ (patrz dodatek E), otrzymujemy

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0. \tag{4.26}$$

Z równania tego *nie otrzymamy* odległości przebytej przez ciało w poziomie, jeśli położenie końcowe ciała nie znajduje się na tej samej wysokości, co punkt jego wystrzelenia. Warto zauważyć, że R w równaniu (4.26) osiąga największą wartość, gdy $\sin 2\theta_0 = 1$, co oznacza, że $2\theta_0 = 90°$, czyli $\theta_0 = 45°$.

Zasięg R pocisku w poziomie jest największy, gdy pocisk zostaje wystrzelony pod kątem 45°.

Jeśli jednak poziom wyrzutu i lądowania ciała nie są jednakowe, co się często zdarza w różnych dyscyplinach sportowych, to wyrzucenie ciała pod kątem 45° nie zapewnia największej odległości poziomej.



Rys. 4.13. I) Tor „wysokiej piłki" obliczony z uwzględnieniem oporu powietrza. II) Tor piłki w próżni, tzn. obliczony przy zastosowaniu metod przedstawionych w tym rozdziale. Dane liczbowe zebrano w tabeli 4.1 (na podstawie artykułu Petera J. Brancazio „The Trajectory of a Fly Ball", *The Physics Teacher*, styczeń 1985)

Tabela 4.1. Dwie „wysokie piłki"[1]

	Tor I (w powietrzu)	Tor II (w próżni)
zasięg	98,5 m	177 m
największa wysokość	53 m	76,8 m
czas lotu	6,6 s	7,9 s

[1] Patrz rysunek 4.13. Prędkość początkowa ma wartość 44,7 m/s i jest skierowana pod kątem 60° do poziomu.

Opór powietrza

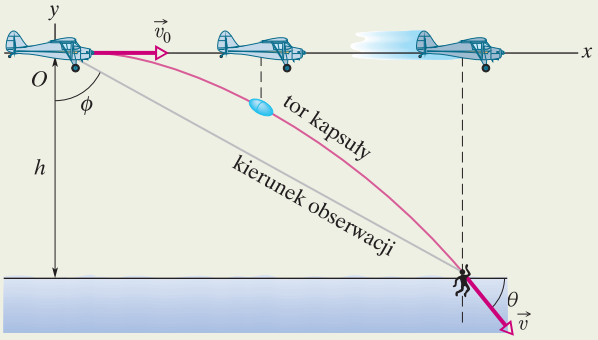
Dotychczas zakładaliśmy, że powietrze, w którym porusza się wystrzelony pocisk nie ma żadnego wpływu na jego ruch. Jednak w wielu przypadkach wyniki naszych obliczeń mogą dawać znaczne odstępstwa od rzeczywistych parametrów ruchu pocisku, gdyż powietrze stawia opór poruszającemu się w nim ciału. Na rysunku 4.13 pokazano, jako przykład, tory dwóch wysoko wybitych piłek baseballowych, o prędkości początkowej równej 44,7 m/s i kącie utworzonym przez tę prędkość z poziomem, równym 60°. Tor I („wysoka piłka" gracza w baseball) to tor obliczony dla typowych warunków gry, tzn. w powietrzu, a tor II („wysoka piłka" profesora fizyki) to tor piłki w próżni.

Sprawdzian 4

Zawodnik odbił piłkę, posyłając ją wysoko w powietrze. Pomiń opór powietrza i powiedz, jak będą zmieniać się składowe prędkości piłki: a) pozioma, b) pionowa. Jakie są składowe przyspieszenia piłki: c) pozioma, d) pionowa, w czasie wznoszenia się i opadania piłki oraz w najwyższym punkcie jej toru?

Przykład 4.04. Przedmiot upuszczony z samolotu

Na rysunku 4.14 przedstawiono samolot ratowniczy lecący z prędkością 198 km/h (= 55 m/s) na stałej wysokości 500 m ku punktowi znajdującemu się bezpośrednio nad rozbitkiem zmagającym się z falami. Pilot chce wypuścić kapsułę ratowniczą tak, aby wpadła do wody możliwie blisko rozbitka.



Rys. 4.14. Z samolotu lecącego poziomo ze stałą prędkością wypuszczona zostaje kapsuła ratownicza. Gdy kapsuła spada, składowa pozioma jej prędkości jest nadal równa prędkości lecącego samolotu

a) Wyznacz kąt ϕ, pod jakim pilot widzi rozbitka w chwili najbardziej odpowiedniej do zwolnienia kapsuły.

PODSTAWOWE FAKTY

Po oderwaniu się od samolotu kapsuła leci jak pocisk, a więc jej ruch w poziomie jest niezależny od ruchu w pionie, można je zatem rozważać oddzielnie.

Obliczenia: Z rysunku 4.14 wynika, że kąt ϕ jest równy:

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{x}{h}, \tag{4.27}$$

gdzie x jest współrzędną poziomą rozbitka (jak również współrzędną kapsuły w chwili upadku do wody), a h — wysokością samolotu nad wodą. Wiemy, że ta wysokość wynosi 500 m, a więc do wyznaczenia kąta ϕ potrzebna jest nam tylko wartość x. Aby znaleźć x, możemy skorzystać z równania (4.21):

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t. \tag{4.28}$$

Początek układu współrzędnych znajduje się w punkcie wyrzucenia kapsuły, dlatego też $x_0 = 0$. Ponadto, ponieważ kapsuła zostaje *upuszczona*, a nie wystrzelona, jej prędkość początkowa $\vec{v}_0$ jest równa prędkości samolotu. Wiemy zatem, że prędkość początkowa kapsuły ma wartość $v_0 = 55$ m/s i jest skierowana pod kątem $\theta_0 = 0°$ (w stosunku do dodatniego kierunku osi x). Nie znamy jednak czasu t, po jakim kapsuła dotrze od samolotu do rozbitka.

Aby znaleźć t, rozważmy ruch kapsuły w pionie. Skorzystajmy z równania (4.22):

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \tag{4.29}$$

Przemieszczenie kapsuły w pionie $y - y_0$ wynosi -500 m (znak minus wskazuje, że kapsuła porusza się *w dół*). Podstawiając do równania (4.29) tę i inne wartości liczbowe, otrzymujemy

$$-500\text{ m} = (55\text{ m/s})(\sin 0°)t - \tfrac{1}{2}(9{,}8\text{ m/s}^2)t^2. \tag{4.30}$$

Rozwiązując to równanie względem t, wyznaczamy $t = 10{,}1$ s. Wstawiając tę wartość do równania (4.28), otrzymujemy

$$x - 0 = (55\text{ m/s})(\cos 0°)(10{,}1\text{ s}), \tag{4.31}$$

czyli

$$x = 555{,}5\text{ m}.$$

Wobec tego z równania (4.27) mamy

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{555{,}5\text{ m}}{500\text{ m}}\right) = 48° \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Wyznacz prędkość $\vec{v}$ kapsuły w chwili, gdy wpada ona do wody.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Ruch kapsuły w poziomie jest niezależny od ruchu w pionie podczas jej lotu. W szczególności nie zależą od siebie składowe jej prędkości: pozioma i pionowa. 2) Składowa pozioma prędkości v_x jest cały czas równa jej wartości początkowej $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$, ponieważ ruch w poziomie odbywa się bez przyspieszenia. 3) Składowa pionowa prędkości v_y ulega zmianie w stosunku do jej wartości początkowej $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$, gdyż ruch kapsuły w pionie jest przyspieszony.

Obliczenia: W chwili, gdy kapsuła wpada do wody:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = (55\text{ m/s})(\cos 0°) = 55\text{ m/s}.$$

Korzystając z równania (4.23) oraz z wartości czasu spadku kapsuły, równego $t = 10{,}1$ s, wyznaczamy wartość tej składowej w chwili upadku kapsuły do wody:

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin\theta_0 - gt \\ &= (55\text{ m/s})(\sin 0°) - (9{,}8\text{ m/s}^2)(10{,}1\text{ s}) \\ &= -99\text{ m/s}. \end{aligned}$$

Wobec tego w chwili upadku do wody kapsuła ma prędkość

$$\vec{v} = (55\ \text{m/s})\hat{\imath} - (99\ \text{m/s})\hat{\jmath} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Korzystając z równania (3.6), wyznaczamy długość i kierunek wektora $\vec{v}$:

$$v = 113\ \text{m/s} \qquad \text{oraz} \qquad \theta = -61° \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 4.05. Wyrzut w powietrze ze zjeżdżalni wodnej

Jeden z najbardziej przejmujących filmików w internecie (jednak całkiem fałszywy) przedstawia człowieka zjeżdżającego długim torem wodnym, wyrzucanego z progu i lądującego po dość długim locie w małym, nadmuchiwanym baseniku ogrodowym. Spróbujmy przyjąć jakieś rozsądne dane i obliczyć prędkość, z jaką skoczek powinien wpaść do basenu. Na rysunku 4.15a przedstawiono próg, jakim kończy się zjeżdżalnia i basen wraz z układem współrzędnych wybranym dla wygody tak, że jego początek jest na końcu zjeżdżalni. Na podstawie filmu można przyjąć, że zasięg lotu w poziomie wynosi $D = 20$ m, czas lotu $t = 2{,}5$ s, a kąt wylotu skoczka w powietrze $\theta_0 = 40°$. Wyznaczmy wartość bezwzględną prędkości skoczka w chwili wylotu z progu i w chwili upadku do basenu.

PODSTAWOWE FAKTY

1) W rzucie ukośnym możemy badać ruch ciała w pionie i w poziomie niezależnie od siebie. 2) W pionie ciało porusza się ze stałym przyspieszeniem równym $a_y = -g = -9{,}8\ \text{m/s}^2$. W poziomie przyspieszenie ciała jest równe zeru: $a_x = 0$.

Obliczenia: W zadaniach dotyczących rzutu ukośnego trzeba na początku zdecydować, z których równań skorzystać. Nie ma nic złego w tym, by wypróbować różne podejścia i zobaczyć, które jest w danym przypadku najwygodniejsze. W naszym zadaniu najlepiej skorzystać z faktu, że równania ruchu ze stałym przyspieszeniem możemy zastosować oddzielnie dla ruchu skoczka w kierunkach x i y, wyznaczyć składowe prędkości w obu tych kierunkach, a z nich prędkość w kierunku ruchu. Zrobimy to w punkcie wylotu skoczka z progu i w punkcie jego upadku do basenu.

Ponieważ znamy przemieszczenie skoczka w poziomie $D = 20$ m, zaczniemy od ruchu w poziomie. Wiemy, że $a_x = 0$, a zatem składowa pozioma prędkości v_x się nie zmienia i przez cały czas lotu jest równa prędkości poziomej na końcu zjeżdżalni v_{0x}. Tę składową możemy wyznaczyć z równania (2.15):

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2, \qquad (4.32)$$

gdyż znamy przemieszczenie w poziomie $D = x - x_0$ i czas lotu oraz wiemy, że $a_x = 0$. Otrzymujemy

$$20\ \text{m} = v_{0x}(2{,}5\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(0)(2{,}5\ \text{s})^2,$$

a stąd

$$v_{0x} = 8\ \text{m/s}.$$

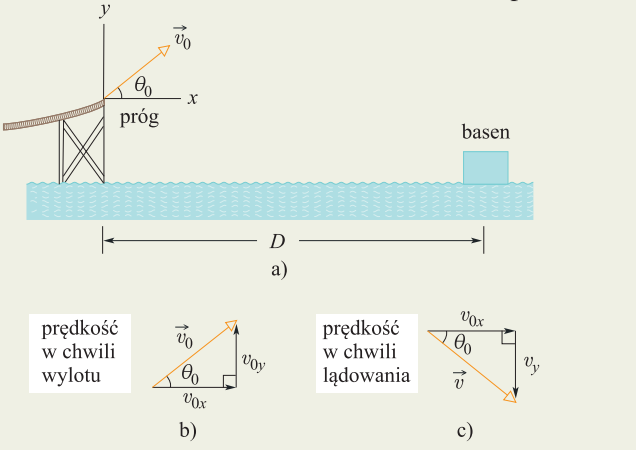
Wyznaczyliśmy w ten sposób składową poziomą prędkości skoczka, ale potrzebna nam jest wartość bezwzględna wektora prędkości, pokazanego na rysunku 4.15b. Składowe wzdłuż osi to przyprostokątne trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną jest wartość bezwzględna wektora. Możemy zatem skorzystać z definicji funkcji trygonometrycznych. W punkcie wylotu skoczka z progu mamy

$$\cos\theta_0 = \frac{v_{0x}}{v_0},$$

wobec czego

$$v_0 = \frac{v_{0x}}{\cos\theta_0} = \frac{8\ \text{m/s}}{\cos 40°} = 10{,}44\ \text{m/s} \approx 10{,}4\ \text{m/s}.$$

(odpowiedź).



Rys. 4.15. a) Wylot skoczka z progu na końcu zjeżdżalni wodnej, aby wylądować w basenie. Prędkość skoczka w punkcie b) wylotu z progu, c) lądowania w basenie

Obliczmy teraz prędkość v skoczka w chwili, gdy wpada on do basenu. Wiemy, że składowa pozioma prędkości się nie zmienia i wynosi 8 m/s. Składową pionową v_y możemy wyznaczyć z równania (2.11):

$$v_y = v_{0y} + a_y t,$$

gdyż znamy czas lotu i przyspieszenie w pionie ($a_y = -9{,}8\ \text{m/s}^2$). Otrzymujemy (na podstawie rysunku 4.15b $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$)

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 + a_y t. \qquad (4.33)$$

Podstawiając dane liczbowe i $a_y = -g$, dostajemy

$$v_y = (10{,}44\ \text{m/s}) \sin 40^\circ - (9{,}8\ \text{m/s}^2)(2{,}5\ \text{s}) = -(17{,}78\ \text{m/s}).$$

Znając obie składowe prędkości skoczka w chwili lądowania w basenie, obliczamy wartość bezwzględną wektora prędkości ze wzoru (3.6):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(8\ \text{m/s})^2 + (-17{,}78\ \text{m/s})^2} = 19{,}49\ \text{m/s} \approx 19{,}5\ \text{m/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

4.5. RUCH JEDNOSTAJNY PO OKRĘGU

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

4.16 narysować tor ciała w ruchu jednostajnym po okręgu oraz podać długości i kierunki wektorów prędkości i przyspieszenia tego ciała;

4.17 zastosować związki między promieniem okręgu, okresem obiegu, wartością bezwzględną prędkości i wartością bezwzględną przyspieszenia w ruchu jednostajnym ciała po okręgu.

Podstawowe fakty

- Jeśli ciało porusza się po okręgu o promieniu r z prędkością o stałej wartości bezwzględnej v, to jej ruch nazywamy ruchem jednostajnym po okręgu, w którym przyspieszenie ciała $\vec{a}$ ma też stałą wartość bezwzględną równą

$$a = \frac{v^2}{r},$$

Wektor przyspieszenia $\vec{a}$ jest skierowany w każdej chwili do środka okręgu, po którym porusza się ciało, i dlatego nosi nazwę przyspieszenia dośrodkowego. Czas, w jakim ciało przebywa cały okrąg, wynosi

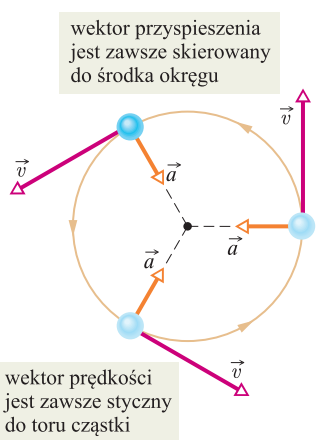
$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Czas T nosi nazwę okresu tego ruchu.

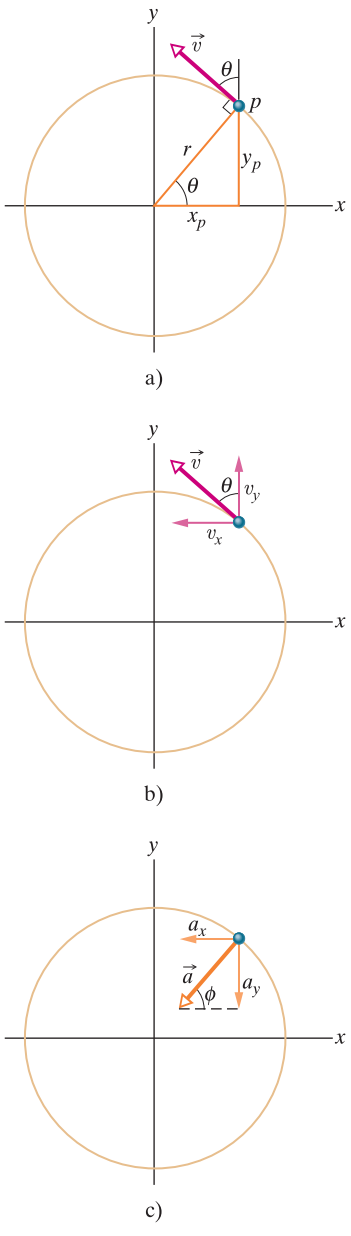
Ruch jednostajny po okręgu

Ruch cząstki nazywamy **ruchem jednostajnym po okręgu**, jeśli porusza się ona po okręgu lub kołowym łuku z prędkością o stałej wartości bezwzględnej. Choć wartość prędkości nie zmienia się, *ruch cząstki jest przyspieszony*, gdyż zmienia się w nim kierunek wektora prędkości.

Na rysunku 4.16 przedstawiono wektory prędkości i przyspieszenia w różnych fazach ruchu jednostajnego po okręgu. Obydwa wektory mają przez cały czas takie same długości, lecz ich kierunki zmieniają się w sposób ciągły. Wektor prędkości jest zawsze styczny do okręgu i skierowany w kierunku ruchu cząstki. Wektor przyspieszenia jest zawsze skierowany *wzdłuż promienia okręgu, ku jego środkowi*. Z tego względu przyspieszenie



Rys. 4.16. Wektory przyspieszenia i prędkości cząstki poruszającej się jednostajnie po okręgu



Rys. 4.17. Cząstka p porusza się jednostajnie po okręgu w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara: a) jej położenie i prędkość $\vec{v}$ w pewnej chwili; b) prędkość $\vec{v}$ i jej składowe; c) przyspieszenie $\vec{a}$ cząstki i jego składowe

w ruchu jednostajnym po okręgu nazywamy **przyspieszeniem dośrodkowym**. Jak wykażemy za chwilę, wartość tego przyspieszenia $\vec{a}$ wynosi

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad \text{(przyspieszenie dośrodkowe)}, \tag{4.34}$$

przy czym r jest promieniem okręgu, a v — modułem prędkości cząstki.

W tym ruchu przyspieszonym o stałym module prędkości cząstka obiega okrąg (czyli przebywa drogę $2\pi r$) w czasie

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad \text{(okres)}. \tag{4.35}$$

Czas T nazywamy *okresem obiegu* lub po prostu *okresem* tego ruchu. Mówiąc ogólniej, jest to czas potrzebny cząstce na jednokrotny obieg zamkniętego toru.

Wyprowadzenie wzoru (4.34)

W celu wyznaczenia wartości i kierunku przyspieszenia w ruchu jednostajnym po okręgu przeanalizujmy rysunek 4.17. Na rysunku 4.17a cząstka p porusza się z prędkością v o stałej wartości po okręgu o promieniu r. W chwili, dla której wykonano ten rysunek, współrzędne tej cząstki wynoszą x_p i y_p.

W podrozdziale 4.2 stwierdziliśmy, że prędkość $\vec{v}$ poruszającej się cząstki jest zawsze styczna do jej toru w punkcie, w którym cząstka właśnie się znajduje. Jak widać z rysunku 4.17a, oznacza to, że wektor $\vec{v}$ jest prostopadły do promienia w punkcie, w którym znajduje się cząstka. Kąt θ utworzony przez $\vec{v}$ z pionem w punkcie p jest więc równy kątowi utworzonemu przez promień r z osią x.

Składowe wektora $\vec{v}$ pokazano na rysunku 4.17b. Korzystając z nich, możemy zapisać prędkość $\vec{v}$ jako

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} = (-v\sin\theta)\hat{\mathrm{i}} + (v\cos\theta)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4.36}$$

Z trójkąta prostokątnego na rysunku 4.17a widać, że $\sin\theta = y_p/r$, a $\cos\theta = x_p/r$, co daje

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4.37}$$

Aby wyznaczyć przyspieszenie $\vec{a}$ cząstki p, należy zróżniczkować to równanie względem czasu. Wartości prędkości v oraz promienia r nie zależą od czasu, otrzymujemy więc

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{v}{r}\frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{v}{r}\frac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4.38}$$

Zauważ teraz, że szybkość zmiany y_p, $\mathrm{d}y_p/\mathrm{d}t$, jest równa składowej prędkości v_y. Analogicznie, $\mathrm{d}x_p/\mathrm{d}t = v_x$. Z rysunku 4.17b widać, że $v_x = -v\sin\theta$, a $v_y = v\cos\theta$. Podstawiając te związki do równania (4.38), otrzymujemy

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\hat{\mathrm{j}}. \tag{4.39}$$

Ten wektor oraz jego składowe pokazano na rysunku 4.17c. W zgodzie z równaniem (3.6) otrzymujemy

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

czego należało dowieść. Kierunek wektora $\vec{a}$ jest wyznaczony przez kąt ϕ z rysunku 4.17c:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r)\sin\theta}{-(v^2/r)\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta.$$

Tak więc $\phi = \theta$, co oznacza, że wektor $\vec{a}$ jest skierowany wzdłuż promienia r z rysunku 4.17a, w kierunku środka okręgu, co także należało wykazać.

Sprawdzian 5

Ciało porusza się w poziomej płaszczyźnie xy po torze kołowym, o środku w początku układu współrzędnych, a jego prędkość ma stałą wartość. Gdy ciało znajduje się w punkcie o współrzędnej $x = -2$ m, jego prędkość jest równa $-(4\ \text{m/s})\hat{\text{j}}$. Ile wynosi: a) prędkość, b) przyspieszenie ciała, gdy znajduje się ono w punkcie o współrzędnej $y = 2$ m?

Przykład 4.06. Piloci myśliwców na zakrętach

Piloci myśliwców zawsze obawiali się zbyt ostrych zakrętów. Gdy pilot ma przyspieszenie dośrodkowe, a jego głowa jest zwrócona w kierunku środka krzywizny łuku, ciśnienie krwi w mózgu maleje, co prowadzi do osłabienia funkcji tego organu.

Istnieją różne objawy, na podstawie których pilot może stwierdzić, że zwrot jest zbyt gwałtowny. Gdy przyspieszenie dośrodkowe wynosi od $2g$ do $3g$, pilot odczuwa ociężałość. Przy wartości około $4g$ pilot traci zdolność rozróżniania barw (widzi obrazy czarno-białe) i zmniejsza się jego kąt widzenia („widzenie tunelowe"). Gdy takie przyspieszenie utrzymuje się lub jeszcze wzrasta, pilot przestaje cokolwiek widzieć i wkrótce potem traci przytomność.

Ile wynosi wartość bezwzględna (moduł) przyspieszenia, w jednostkach g, pilota myśliwca wchodzącego w kołowy łuk z prędkością o wartości $\vec{v}_{\text{pocz}} = (400\,\hat{\text{i}} + 500\,\hat{\text{j}})$ m/s, a wychodzącego z niego 24 s później z prędkością $\vec{v}_{\text{końc}} = (-400\,\hat{\text{i}} - 500\,\hat{\text{j}})$ m/s?

PODSTAWOWE FAKTY

Zakładamy, że lot myśliwca po łuku to ruch jednostajny po okręgu. Przyspieszenie w tym ruchu to przyspieszenie dośrodkowe o wartości a danej równaniem (4.34), czyli $a = v^2/R$, gdzie R jest promieniem okręgu. Czas potrzebny do wykonania pełnego obiegu okręgu — okres ruchu — jest dany wzorem (4.35): $T = 2\pi R/v$.

Obliczenia: Nie znamy promienia R, więc wyznaczamy go ze wzoru (4.35) i podstawiamy do wzoru (4.34), co daje

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Moduł prędkości wyznaczamy, znając jej składowe, z równania (3.6):

$$v = \sqrt{(400\ \text{m/s})^2 + (500\ \text{m/s})^2} = 640{,}31\ \text{m/s}.$$

Aby wyznaczyć okres ruchu T, zauważmy, że wektor końcowy prędkości jest przeciwny do wektora prędkości początkowej. To znaczy, że samolot opuszcza kołowy łuk po przeciwnej stronie niż na niego wszedł, czyli w ciągu danych 24 s przebył połowę długości okręgu, a więc całą długość okręgu przebyłby w czasie $T = 48$ s. Korzystając z obliczonych wartości, dostajemy ostatecznie

$$a = \frac{2\pi(640{,}31\ \text{m/s})}{48\ \text{s}} = 83{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 8{,}6g$$

(odpowiedź).

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

4.6. RUCH WZGLĘDNY W JEDNYM WYMIARZE

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

4.18 zastosować związek między położeniem, prędkością i przyspieszeniem ciała mierzonymi w dwóch układach odniesienia poruszających się względem siebie ze stałą prędkością po linii prostej.

Podstawowe fakty

- Gdy dwa układy odniesienia A i B poruszają się względem siebie ze stałą prędkością, to prędkość ciała C mierzona przez obserwatora w układzie A jest na ogół inna niż prędkość tego ciała mierzona przez obserwatora w układzie B. Te prędkości są ze sobą związane równaniem

$$\vec{v}_{CA} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{BA},$$

gdzie $\vec{v}_{BA}$ to prędkość układu B względem układu A. Przyspieszenie ciała jest natomiast takie samo dla obydwu obserwatorów, tzn.

$$\vec{a}_{CA} = \vec{a}_{CB}.$$

Ruch względny w jednym wymiarze

Wyobraź sobie, że widzisz kaczkę lecącą na północ z prędkością 30 km/h. Innej kaczce, lecącej obok niej, wydaje się ona nieruchoma. Innymi słowy, prędkość ciała zależy od **układu odniesienia**, z którego obserwujemy lub mierzymy tę prędkość. Układem odniesienia jest jakiś obiekt fizyczny, z którym związany jest nasz układ współrzędnych. W życiu codziennym jest nim zwykle ziemia. Na przykład prędkość wypisana na mandacie za zbyt szybką jazdę jest zawsze mierzona względem ziemi. Prędkość względem radiowozu policyjnego jest inna, jeśli radiowóz porusza się w trakcie pomiaru.

Załóżmy, że Adam siedzi w samochodzie zaparkowanym na poboczu szosy (w początku układu współrzędnych A z rysunku 4.18) i widzi mijający go samochód C (ciało). Barbara (znajdująca się w początku układu współrzędnych B) jedzie tą szosą ze stałą prędkością i także widzi samochód C. Wyobraź sobie, że obydwoje określają położenie tego samochodu. Z rysunku 4.18 wynika, że

$$x_{CA} = x_{CB} + x_{BA}. \tag{4.40}$$

Równanie to należy odczytać następująco: współrzędna x_{CA} ciała C rejestrowana przez obserwatora A *jest równa sumie* współrzędnej x_{CB} ciała C rejestrowanej przez obserwatora B i współrzędnej x_{BA} obserwatora B rejestrowanej przez obserwatora A. Zauważ, że stwierdzenie to znajduje odbicie w kolejności liter we wskaźnikach przy współrzędnych.

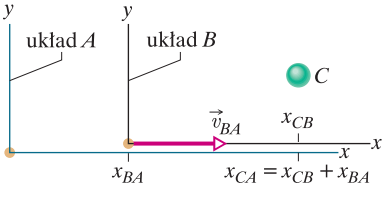
Różniczkując stronami równanie (4.40) względem czasu, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{CA}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{CB}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_{BA}),$$

czyli składowe prędkości są ze sobą związane zależnością

$$v_{CA} = v_{CB} + v_{BA}. \tag{4.41}$$

układ B porusza się względem układu A, a w obu badamy ruch ciała C



Rys. 4.18. Adam (układ A) i Barbara (układ B) obserwują samochód C, przy czym ciała B i C poruszają się z różną prędkością wzdłuż wspólnej osi x obydwu układów współrzędnych. W chwili, dla której wykonano rysunek, x_{BA} jest współrzędną B w układzie A. Samochód C ma współrzędną x_{CB} w układzie B i współrzędną $x_{CA} = x_{CB} + x_{BA}$ w układzie A

Równanie to należy odczytać następująco: prędkość v_{CA} ciała C rejestrowana przez obserwatora A *jest równa sumie* prędkości v_{CB} ciała C rejestrowanej przez obserwatora B i prędkości v_{BA} obserwatora B rejestrowanej przez obserwatora A. Wyraz v_{BA} jest prędkością układu B względem układu A.

Rozważamy tu jedynie układy odniesienia poruszające się względem siebie ze stałą prędkością. W naszym przykładzie oznacza to, że Barbara (układ B) jedzie ze stałą prędkością v_{BA} względem Adama (układ A). Samochód (ciało C) może natomiast zwiększać lub zmniejszać prędkość, zatrzymywać się lub zmieniać kierunek ruchu na przeciwny (tzn. może się poruszać ruchem przyspieszonym).

W celu wyznaczenia przyspieszenia ciała C, rejestrowanego przez Barbarę i Adama, różniczkujemy stronami równanie (4.41), co daje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_{CA}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_{CB}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_{BA}).$$

Prędkość v_{BA} jest stała, dlatego ostatni wyraz po prawej stronie jest równy zeru, a więc

$$a_{CA} = a_{CB}. \tag{4.42}$$

Inaczej mówiąc:



Obserwatorzy w różnych układach odniesienia (poruszających się względem siebie ze stałą prędkością) rejestrują takie samo przyspieszenie poruszającej się cząstki.

Przykład 4.07. Ruch względny w jednym wymiarze, Adam i Barbara

W sytuacji przedstawionej na rysunku 4.18 prędkość Barbary względem Adama jest stała i wynosi $v_{BA} = 52$ km/h, a samochód C porusza się w kierunku ujemnym osi x.

a) Ile wynosi prędkość v_{CB} samochodu zmierzona przez Barbarę, jeśli pomiar dokonany przez Adama wykazał prędkość stałą $v_{CA} = -78$ km/h?

PODSTAWOWE FAKTY

Z Adamem możemy związać układ odniesienia A, a z Barbarą — układ odniesienia B. Te dwa układy poruszają się względem siebie ze stałą prędkością wzdłuż jednej z osi, dlatego związek v_{CB} z v_{CA} wyraża równanie (4.41):

$$v_{CA} = v_{CB} + v_{BA}.$$

Obliczenia: Otrzymujemy więc

$$-78 \text{ km/h} = v_{CB} + 52 \text{ km/h},$$

a stąd

$$v_{CB} = -130 \text{ km/h} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Uwaga: Gdyby samochód C był połączony z samochodem Barbary liną nawiniętą na bęben, to przy oddalaniu się samochodów od siebie lina odwijałaby się z bębna z szybkością 130 km/h.

b) Samochód C hamuje aż do zatrzymania się względem Adama (a więc i ziemi) w czasie $t = 10$ s. Ile wynosi jego przyspieszenie a_{CA} względem Adama przy założeniu, że jest ono stałe?

PODSTAWOWE FAKTY

Aby obliczyć przyspieszenie samochodu *względem Adama*, musimy skorzystać z jego prędkości *względem*

Adama. Przyspieszenie to jest stałe, więc możemy posłużyć się wzorem (2.11) ($v = v_0 + at$), wiążącym przyspieszenie z prędkością początkową i końcową C.

Obliczenia: Prędkość początkowa C względem Adama wynosi $v_{CA} = -78$ km/h, a prędkość końcowa jest równa zeru. Wobec tego przyspieszenie ciała w układzie Adama wynosi

$$a_{CA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78\ \text{km/h})}{(10\ \text{s})} \frac{(1\ \text{m/s})}{(3{,}6\ \text{km/h})}$$
$$= 2{,}2\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

c) Ile wynosi przyspieszenie samochodu C względem Barbary w czasie tego hamowania?

PODSTAWOWE FAKTY

Aby obliczyć przyspieszenie samochodu *względem Barbary*, musimy skorzystać z jego prędkości *względem Barbary*. Prędkość początkową C względem Barbary wyznaczyliśmy w punkcie (a): $v_{CB} = -130$ km/h. Prędkość końcowa C względem Barbary wynosi -52 km/h (jest to prędkość zatrzymanego samochodu względem poruszającej się Barbary). Mamy zatem

$$a_{CB} = \frac{v - v_0}{t}$$
$$= \frac{(-52\ \text{km/h}) - (-130\ \text{km/h})}{(10\ \text{s})} \frac{(1\ \text{m/s})}{(3{,}6\ \text{km/h})}$$
$$= 2{,}2\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Uwaga: Ten wynik mogliśmy przewidzieć z góry — prędkość względna Adama i Barbary jest stała, więc ich pomiary muszą dać takie samo przyspieszenie samochodu.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

4.7. RUCH WZGLĘDNY W DWÓCH WYMIARACH

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

4.19 zastosować związek między położeniem, prędkością i przyspieszeniem ciała mierzonymi w dwóch układach odniesienia poruszających się względem siebie ze stałą prędkością w przestrzeni dwuwymiarowej.

Podstawowe fakty

- Gdy dwa układy odniesienia A i B poruszają się względem siebie ze stałą prędkością, wówczas prędkość ciała C mierzona przez obserwatora w układzie A jest na ogół inna niż prędkość tego ciała mierzona przez obserwatora w układzie B. Te prędkości są ze sobą związane równaniem

$$\vec{v}_{CA} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{BA},$$

gdzie $\vec{v}_{BA}$ to prędkość układu B względem układu A. Przyspieszenie ciała jest natomiast takie samo dla obydwu obserwatorów, tzn.

$$\vec{a}_{CA} = \vec{a}_{CB}.$$

Ruch względny w dwóch wymiarach

Ruch cząstki C jest znów badany przez dwóch obserwatorów znajdujących się w początkach układów odniesienia A i B, przy czym B porusza się względem A ze stałą prędkością $\vec{v}_{BA}$ (odpowiednie osie układów współrzędnych pozostają cały czas równoległe). Rysunek 4.19 ilustruje tę sytuację w pewnej chwili t. W tej chwili wektor położenia początku układu B względem początku układu A jest równy $\vec{r}_{BA}$. Wektory położenia cząstki C to $\vec{r}_{CA}$ w układzie A i $\vec{r}_{CB}$ w układzie B. Widząc, jak ustawione są względem siebie te trzy wektory położenia, możemy stwierdzić, że

$$\vec{r}_{CA} = \vec{r}_{CB} + \vec{r}_{BA}. \qquad (4.43)$$

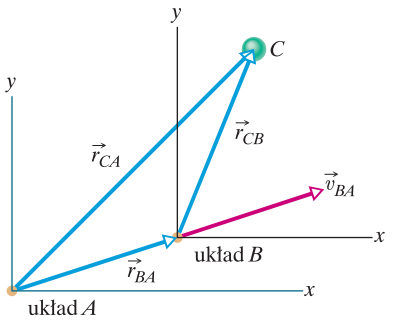
Różniczkując obie strony tego równania względem czasu, otrzymujemy związek między prędkościami $\vec{v}_{CA}$ i $\vec{v}_{CB}$ cząstki C względem każdego z obserwatorów:

$$\vec{v}_{CA} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{BA}. \qquad (4.44)$$

Następnie, różniczkując równanie (4.44) względem czasu, otrzymujemy związek między przyspieszeniami $\vec{a}_{CA}$ i $\vec{a}_{CB}$ cząstki C względem każdego z obserwatorów. Prędkość $\vec{v}_{BA}$ jest stała, więc jej pochodna względem czasu jest równa zeru. Mamy zatem

$$\vec{a}_{CA} = \vec{a}_{CB}. \qquad (4.45)$$

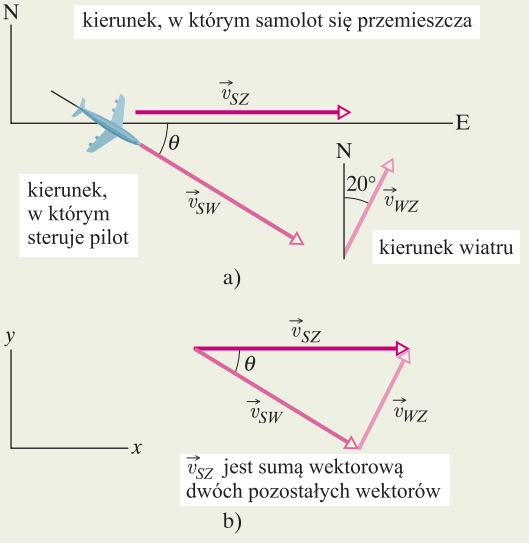
Podobnie jak dla ruchu w jednym wymiarze, otrzymaliśmy następującą zasadę: obserwatorzy w różnych układach odniesienia, poruszających się względem siebie ze stałą prędkością, rejestrują *takie samo* przyspieszenie poruszającej się cząstki.



Rys. 4.19. Układ B porusza się w dwóch wymiarach ze stałą prędkością $\vec{v}_{BA}$ względem układu A. Wektor $\vec{r}_{BA}$ jest wektorem położenia układu B względem A. Cząstka C ma wektor położenia $\vec{r}_{CA}$ w układzie A i $\vec{r}_{CB}$ w układzie B

Przykład 4.08. Ruch względny w dwóch wymiarach, samoloty

Na rysunku 4.20a pokazano samolot lecący prosto na wschód, mimo że pilot kieruje go nieco na południowy wschód, gdyż samolot jest znoszony przez wiatr wiejący w kierunku północno-wschodnim. Prędkość $\vec{v}_{SW}$ samolotu względem powietrza unoszonego przez wiatr ma wartość 215 km/h i jest skierowana pod kątem θ na południe od kierunku wschodniego. Prędkość $\vec{v}_{WZ}$ wiatru względem ziemi ma wartość 65 km/h i jest skierowana pod kątem 20° na wschód od kierunku północnego. Jaka jest wartość prędkości $\vec{v}_{SZ}$ samolotu względem ziemi i ile wynosi kąt θ?



Rys. 4.20. Samolot leci, gdy wieje wiatr

PODSTAWOWE FAKTY

Mamy tu do czynienia z sytuacją podobną do tej, której dotyczy rysunek 4.19. Poruszającą się cząstką jest samolot (S), układ A (oznaczony teraz przez Z) jest związany z ziemią, a układ B (oznaczony przez W) — z powietrzem unoszonym przez wiatr. Chcemy skonstruować diagram wektorowy, podobny do tego z rysunku 4.19, lecz dla wektorów prędkości.

Obliczenia: Sformułujemy najpierw związek między tymi trzema wektorami:

prędkość samolotu względem ziemi (SZ)
= prędkość samolotu względem powietrza (SW)
+ prędkość wiatru względem ziemi (WZ).

Ten związek, zilustrowany na rysunku 4.20b, można zapisać jako równanie wektorowe:

$$\vec{v}_{SZ} = \vec{v}_{SW} + \vec{v}_{WZ}. \qquad (4.46)$$

Mamy znaleźć długość pierwszego z tych wektorów i kierunek drugiego. W tym celu rozłóżmy wektory na składowe w układzie współrzędnych z rysunku 4.20b, a następnie rozwiążmy równania dla składowych, wyni-

kające z równania (4.46). Dla składowych y mamy

$$v_{SZ,y} = v_{SW,y} + v_{WZ,y},$$

czyli

$$0 = -(215\ \text{km/h})\sin\theta + (65\ \text{km/h})(\cos 20^\circ).$$

Rozwiązując to równanie względem θ, otrzymujemy

$$\theta = \arcsin\frac{(65\ \text{km/h})(\cos 20^\circ)}{(215\ \text{km/h})} = 16{,}5^\circ \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Podobnie, dla składowych x mamy

$$v_{SZ,x} = v_{SW,x} + v_{WZ,x}.$$

Wektor $\vec{v}_{SZ}$ jest równoległy do osi x, dlatego też jego składowa $v_{SZ,x}$ jest równa jego długości v_{SZ}. Korzystając z tego faktu oraz z tego, że $\theta = 16{,}5^\circ$, otrzymujemy:

$$v_{SZ} = (215\ \text{km/h})(\cos 16{,}5^\circ) + (65\ \text{km/h})(\sin 20^\circ) = 228\ \text{km/h} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Podsumowanie

Wektor położenia Położenie cząstki względem początku układu współrzędnych jest wyznaczone przez *wektor położenia* $\vec{r}$, który wyrażamy przy zastosowaniu wektorów jednostkowych jako

$$\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}, \tag{4.1}$$

przy czym $x\hat{\mathrm{i}}$, $y\hat{\mathrm{j}}$ i $z\hat{\mathrm{k}}$ są *wektorami składowymi* wektora $\vec{r}$ wzdłuż osi układ współrzędnych, a x, y i z — *składowymi* tego wektora (a także współrzędnymi punktu, w którym znajduje się cząstka). Wektor położenia można opisać, podając jego długość i dwa kąty określające jego kierunek lub podając jego składowe (albo wektory składowe).

Przemieszczenie Jeśli dana cząstka porusza się tak, że wektor jej położenia zmienia się z $\vec{r}_1$ na $\vec{r}_2$, to *przemieszczenie* $\Delta\vec{r}$ cząstki wynosi

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{4.2}$$

Przemieszczenie można też zapisać jako

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\mathrm{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathrm{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathrm{k}} \tag{4.3}$$

$$= \Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}}. \tag{4.4}$$

Prędkość średnia i prędkość chwilowa Jeśli w przedziale czasu Δt cząstka ulega przemieszczeniu o $\Delta\vec{r}$, to jej *prędkość średnia* w tym przedziale czasu jest równa

$$\vec{v}_{\text{śr}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{4.8}$$

Gdy czas Δt w równaniu (4.8) dąży do zera, prędkość średnia $\vec{v}_{\text{śr}}$ dąży do wartości granicznej, którą nazywamy *prędkością chwilową* (lub krótko: *prędkością*)

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.10}$$

Możemy ją również zapisać za pomocą wektorów jednostkowych jako

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}}, \tag{4.11}$$

przy czym $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, a $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$. Prędkość chwilowa $\vec{v}$ cząstki jest zawsze styczna do toru cząstki w punkcie, w którym znajduje się cząstka.

Przyspieszenie średnie i przyspieszenie chwilowe Jeśli w przedziale czasu Δt prędkość cząstki zmienia się z $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2$, to jej *przyspieszenie średnie* w tym przedziale czasu jest równe

$$\vec{a}_{\text{śr}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{4.15}$$

Gdy Δt w równaniu (4.15) dąży do zera, $\vec{a}_{\text{śr}}$ dąży w granicy do *przyspieszenia chwilowego* (lub krótko: *przyspieszenia*) $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.16}$$

Zapisując to równanie przy zastosowaniu wektorów jednostkowych, otrzymujemy

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}, \tag{4.17}$$

przy czym $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$, $a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t$, a $a_z = \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t$.

Rzut ukośny *Rzut ukośny* jest to ruch cząstki, wyrzuconej z prędkością początkową $\vec{v}_0$, w czasie którego przyspieszenie cząstki w kierunku poziomym jest równe zeru, a przyspieszenie w kierunku pionowym jest równe przyspieszeniu ziemskiemu $-g$ (kierunek dodatni osi pionowej wybieramy jako skierowany do góry). Jeśli prędkość początkową $\vec{v}_0$ wyrazimy przez jej wartość v_0 i określający jej kierunek kąt θ_0, to równania ruchu cząstki wzdłuż osi poziomej x i pionowej y są następujące:

$$x - x_0 = (v_0\cos\theta_0)t, \tag{4.21}$$

$$y - y_0 = (v_0\sin\theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \tag{4.22}$$

$$v_y = v_0\sin\theta_0 - gt, \tag{4.23}$$

$$v_y^2 = (v_0\sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \tag{4.24}$$

Tor cząstki w rzucie ukośnym jest parabolą o równaniu

$$y = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}, \tag{4.25}$$

przy czym początek układu współrzędnych wybrano tak, aby x_0 i y_0 w równaniach (4.21) i (4.22) były równe zeru. **Zasięg**

rzutu w poziomie, równy odległości w poziomie od punktu wyrzucenia ciała do punktu, w którym cząstka osiąga ponownie wysokość punktu wyjściowego, wynosi

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \tag{4.26}$$

Ruch jednostajny po okręgu *Ruchem jednostajnym po okręgu* nazywamy ruch cząstki po okręgu lub po jego łuku o promieniu r, z prędkością o stałej wartości. Przyspieszenie $\vec{a}$ w tym ruchu ma wartość

$$a = \frac{v^2}{r}. \tag{4.34}$$

Przyspieszenie $\vec{a}$ jest skierowane do środka okręgu lub jego łuku; nazywamy je *przyspieszeniem dośrodkowym*. Czas pełnego obiegu okręgu przez cząstkę wynosi

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \tag{4.35}$$

Czas T nazywamy *okresem obiegu* ruchu lub po prostu *okresem* tego ruchu.

Ruch względny Gdy dwa układy odniesienia A i B poruszają się względem siebie ze stałą prędkością, prędkość cząstki C rejestrowana przez obserwatora w układzie A różni się na ogół od jej prędkości rejestrowanej przez obserwatora w układzie B. Związek ten jest opisany wzorem

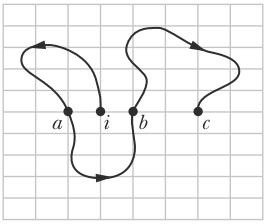
$$\vec{v}_{CA} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{BA}, \tag{4.44}$$

przy czym $\vec{v}_{BA}$ jest prędkością układu B względem układu A. Obaj obserwatorzy rejestrują takie samo przyspieszenie cząstki, tzn.

$$\vec{a}_{CA} = \vec{a}_{CB}. \tag{4.45}$$

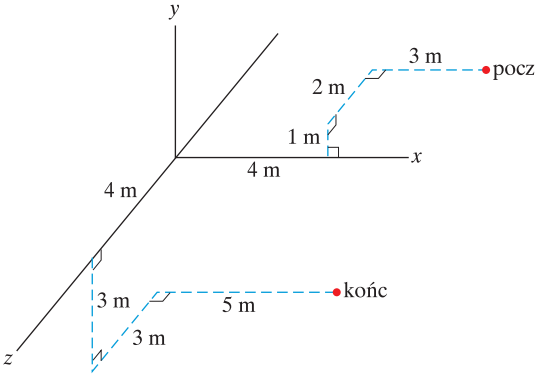
Pytania

1 Na rysunku 4.21 przedstawiono tor, po jakim poruszał się skunks w poszukiwaniu odpadów żywnościowych. Punkt początkowy oznaczono przez i, a dotarcie do kolejnych oznaczonych punktów zajmowało zwierzęciu od poprzedniego punktu taki sam czas T. Uszereguj punkty a, b i c w zależności od wartości średniej prędkości skunksa od punktu i, od największej do najmniejszej.



Rys. 4.21. Pytanie 1

2 Na rysunku 4.22 przedstawiono położenie początkowe pocz i końcowe końc pewnej cząstki. Podaj wektory położenia tej cząstki: a) początkowy $\vec{r}_{\text{pocz}}$, b) końcowy $\vec{r}_{\text{końc}}$, wyrażone za pomocą wektorów jednostkowych. c) Podaj składową x przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ cząstki.

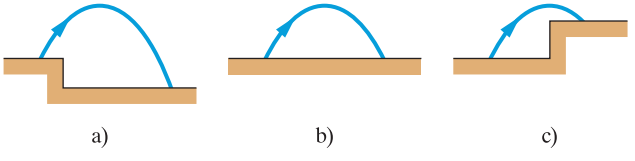


Rys. 4.22. Pytanie 2

3 W czasie I wojny światowej Niemcy ostrzeliwali Paryż z odległości 100 km za pomocą działa dalekiego zasięgu nazwanego „grubą Bertą”. Strzelając z tego działa pod kątem większym niż 45°, Niemcy stwierdzili, że zwiększając kąt wystrzału, mogą zwiększyć zasięg lotu pocisku, być może nawet dwukrotnie, w stosunku do zasięgu przy kącie 45°. Czy z tego faktu można wyciągnąć wniosek, że gęstość powietrza rośnie, czy maleje ze wzrostem wysokości?

4 Zamierzasz wystrzelić rakietę z poziomu ziemi, z prędkością początkową opisaną jednym z następujących wektorów: 1) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} + 70\hat{j}$, 2) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} + 70\hat{j}$, 3) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} - 70\hat{j}$, 4) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} - 70\hat{j}$. Układ współrzędnych wybrano tak, że oś x biegnie wzdłuż powierzchni ziemi, a oś y jest skierowana w górę. a) Uszereguj wektory prędkości od największej do najmniejszej ich wartości. b) Uszereguj te przypadki od najdłuższego do najkrótszego czasu lotu pocisku.

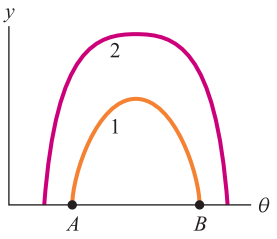
5 Na rysunku 4.23 pokazano trzy przypadki rzutu jednakowych pocisków z poziomu ziemi (czyli o jednakowych wysokościach początkowych) z prędkością początkową o jednakowych wartościach i jednakowych kierunkach. W każdym przypadku inny jest jednak poziom lądowania pocisku. Uszereguj te przypadki od największej do najmniejszej wartości prędkości końcowej pocisku.



Rys. 4.23. Pytanie 5

6 Ciastka owocowe właściwie nie nadają się do niczego poza szkoleniem użytkowników katapulty. Krzywa 1 na rysunku

4.24 przedstawia zależność wysokości ciastka w locie od kąta tworzonego przez wektory jego prędkości i przyspieszenia. a) Który z punktów A i B odpowiada lądowaniu ciastka na ziemi? b) Krzywa 2 to podobny wykres sporządzony w przypadku takiej samej wartości prędkości początkowej, lecz innego niż w pierwszym przypadku kąta wyrzutu ciastka. Czy w tym przypadku ciastko wyląduje dalej, czy bliżej punktu jego wyrzutu?

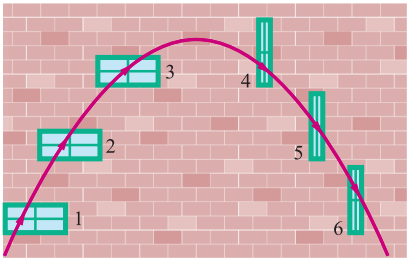


Rys. 4.24. Pytanie 6

7 Samolot, lecący poziomo ze stałą prędkością 350 km/h, nad płaskim, poziomym terenem, wypuszcza paczkę z żywnością. Wpływ oporu powietrza na ruch paczki można pominąć. Jaka jest składowa: a) pionowa, b) pozioma prędkości początkowej paczki? c) Jaka jest składowa pozioma prędkości paczki tuż przed jej upadkiem na ziemię? d) Czy czas spadku paczki byłby dłuższy, krótszy, czy taki sam jak poprzednio, gdyby prędkość samolotu wynosiła 450 km/h?

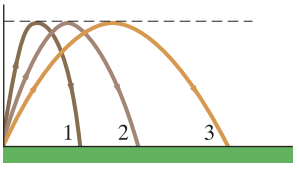
8 Na rysunku 4.25 przedstawiono tor mandarynki rzuconej ukośnie wzdłuż ściany tak, że przelatuje ona przed trzema oknami o jednakowych rozmiarach — 1, 2 i 3 — równo odległymi od siebie w pionie. Uszereguj te okna w zależności od: a) czasu przelotu mandarynki przed nimi (od najdłuższego do najkrótszego), b) wartości prędkości, z jaką przelatuje przed nimi mandarynka (od największej do najmniejszej).

Spadając na ziemię, mandarynka przelatuje przed trzema innymi oknami — 4, 5 i 6 — które są jednakowych rozmiarów i są nierówno odległe od siebie w poziomie. Uszereguj te okna w zależności od: c) czasu przelotu mandarynki przed nimi (od najdłuższego do najkrótszego), d) wartości prędkości, z jaką przelatuje przed nimi mandarynka (od największej do najmniejszej).



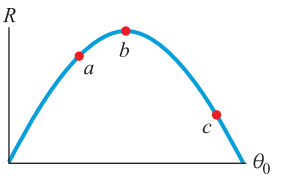
Rys. 4.25. Pytanie 8

9 Na rysunku 4.26 pokazano trzy tory piłki futbolowej, kopniętej na ziemi. Pomijając opór powietrza, uszereguj te tory w zależności od: a) czasu lotu, b) składowej pionowej prędkości początkowej, c) składowej poziomej prędkości początkowej, d) wartości prędkości początkowej, od największej do najmniejszej wartości rozważanych wielkości.



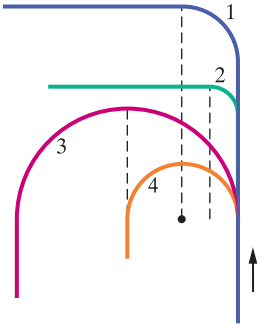
Rys. 4.26. Pytanie 9

10 Kulę wystrzelono z poziomu ziemi z prędkością początkową o pewnej wartości, lecz pod różnymi kątami. Na rysunku 4.27 przedstawiono zależność zasięgu lotu kuli od kąta wystrzału θ_0. Uszereguj trzy zaznaczone na wykresie punkty w zależności od: a) całkowitego czasu lotu kuli, b) wartości prędkości kuli w punkcie jej największego wzniesienia, od największych do najmniejszych.



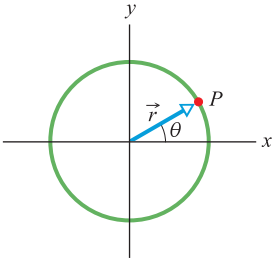
Rys. 4.27. Pytanie 10

11 Na rysunku 4.28 pokazano cztery tory (stanowiące połowę lub czwartą część okręgu), po których może pojechać pociąg poruszający się ze stałą prędkością. Uszereguj te tory w zależności od wartości przyspieszenia — od największej do najmniejszej — z jakim pociąg będzie się poruszał w trakcie pokonywania łuku.



Rys. 4.28. Pytanie 11

12 Ciało P z rysunku 4.29 porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o środku w początku układu współrzędnych xy. a) Dla jakiej wartości θ składowa pionowa położenia ciała r_y ma największą wartość bezwzględną? b) Dla jakiej wartości θ składowa pionowa prędkości ciała v_y ma największą wartość bezwzględną? c) Dla jakiej wartości θ składowa pionowa przyspieszenia ciała a_y ma największą wartość bezwzględną?



Rys. 4.29. Pytanie 12

13 a) Czy można poruszać się ruchem przyspieszonym z prędkością o stałej wartości? Czy można poruszać się po łuku z: b) przyspieszeniem równym zeru, c) przyspieszeniem o stałej wartości?

14 Jadąc samochodem, podrzucasz jajko pionowo do góry. Czy to jajko spadnie za tobą, przed tobą, czy spadnie ci do ręki, jeśli prędkość samochodu: jest a) stała, b) wzrasta, c) maleje?

15 Osoba siedząca w dole rzuca kulę śnieżną z poziomu ziemi z prędkością początkową v_0 pod kątem 45° do poziomu.

Po pewnym czasie kula ląduje na ziemi. Następnie osoba ta rzuca drugą kulę pod nieco większym kątem, ale z taką samą co poprzednio wartością prędkości początkowej. Czy a) odległość punktu spadku od punktu wyrzucenia i b) czas lotu drugiej kuli wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmian w stosunku do pierwszej?

16 Jedziesz samochodem tuż za ciężarówką z taką samą co ona prędkością. W pewnej chwili z ciężarówki wypada z tyłu na drogę skrzynia. a) Czy uderzysz w skrzynię zanim ona spadnie na ziemię, jeśli ani nie zahamujesz, ani nie skręcisz, aby uniknąć zderzenia? b) Czy w czasie spadku prędkość skrzyni w poziomie jest większa, mniejsza, czy taka sama jak ciężarówki?

17 W jakim punkcie toru pocisku (podczas rzutu ukośnego) wartość prędkości pocisku jest najmniejsza?

18 W konkurencji pchnięcia kulą wyrzut kuli następuje z poziomu nieco powyżej ramienia zawodnika. Czy aby pchnąć kulę jak najdalej, trzeba ją wyrzucić pod kątem równym 45°, mniejszym niż 45°, czy większym niż 45°?

Zadania

GO Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

•–••• Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

Podrozdział 4.1. Położenie i przemieszczenie

•1 Wektor położenia elektronu wynosi $\vec{r} = (5\text{ m})\hat{i} - (3\text{ m})\hat{j} + (2\text{ m})\hat{k}$. a) Wyznacz długość wektora $\vec{r}$. b) Narysuj ten wektor w prawoskrętnym układzie współrzędnych.

•2 Pestka arbuza znajduje się w punkcie o współrzędnych: $x = -5$ m, $y = 8$ m, $z = 0$ m. Znajdź jej wektor położenia wyrażony: a) za pomocą wektorów jednostkowych, a także przez b) jego długość i c) kąt utworzony z dodatnim kierunkiem osi x. d) Narysuj ten wektor w prawoskrętnym układzie współrzędnych. Pestka ta znalazła się potem w punkcie o współrzędnych xyz (3 m, 0 m, 0 m). Znajdź jej przemieszczenie wyrażone: e) za pomocą wektorów jednostkowych oraz przez f) jego długość i g) kąt utworzony z dodatnim kierunkiem osi x.

•3 Pozyton doznaje przemieszczenia o $\Delta\vec{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ i zatrzymuje się w punkcie o wektorze położenia $\vec{r} = 3\hat{j} - 4\hat{k}$, przy czym wszystkie dane liczbowe są wyrażone w metrach. Podaj wektor początkowego położenia pozytonu.

••4 Wskazówka minutowa zegara ściennego ma długość 10 cm, licząc od osi obrotu do końca wskazówki. Podaj wektor przemieszczenia końca wskazówki w postaci a) jego długości i b) kąta od wskazania „kwadrans po” do wskazania „wpół do” następnej godziny. Podaj wektor przemieszczenia końca wskazówki w postaci c) jego długości i d) kąta w ciągu kolejnej pół godziny. Podaj wektor przemieszczenia końca wskazówki w postaci c) jego długości i d) kąta w ciągu kolejnej godziny.

Podrozdział 4.2. Prędkość średnia i prędkość chwilowa

•5 ssm Pociąg jedzie z prędkością o stałej wartości równej 60 km/h na wschód przez 40 min, potem w kierunku 50° na wschód od kierunku północnego przez 20 min, a jeszcze potem na zachód przez 50 min. Wyznacz prędkość średnią pociągu podczas tej podróży, podając a) jej wartość bezwzględną i b) kąt.

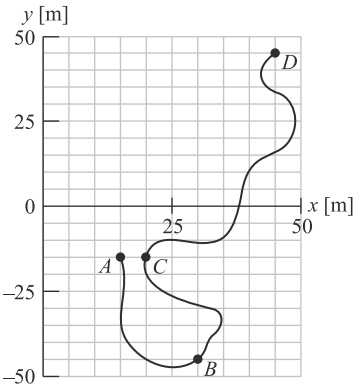
•6 Wektor położenia elektronu jest dany wyrażeniem $\vec{r} = 3t\hat{i} - 4t^2\hat{j} + 2\hat{k}$, przy czym t wyrażono w sekundach, a $\vec{r}$ — w metrach. a) Wyznacz prędkość $\vec{v}(t)$ elektronu, wyrażając ją za pomocą wektorów jednostkowych. Podaj prędkość $\vec{v}$ w chwili $t = 2$ s wyrażoną: b) za pomocą wektorów jednostkowych oraz przez c) jej długość i d) kąt określony względem dodatniego kierunku osi x.

•7 Wektor położenia jonu (w metrach) wynosi w pewnej chwili $\vec{r} = 5\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$, a 10 s później $\vec{r} = -2\hat{i} + 8\hat{j} - 2\hat{k}$. Wyznacz: prędkość średnią jonu w czasie tych 10 s, wyrażając ją za pomocą wektorów jednostkowych.

••8 Samolot przelatuje 483 km na wschód z miasta A do miasta B w ciągu 45 min, a następnie 966 km na południe z miasta B do miasta C w czasie 1,5 h. Wyznacz a) długość i b) kierunek przemieszczenia oraz c) długość i d) kierunek średniej prędkości samolotu dla całej podróży. e) Ile wynosi dla tej podróży średnia wartość prędkości (prędkość podróżna) samolotu?

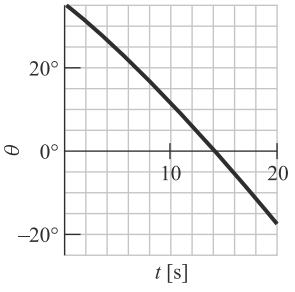
••9 Na rysunku 4.30 przedstawiono tor wiewiórki biegającej po ziemi. Punkt A odpowiada chwili $t = 0$, punkt B chwili

$t = 5$ min, punkt C chwili $t = 10$ min, a punkt D chwili $t = 15$ min. Rozważ średnie prędkości wiewiórki w ruchu z punktu A do każdego z pozostałych. Dla prędkości o najmniejszej wartości podaj a) tę wartość i b) kierunek wektora prędkości średniej. Dla prędkości o największej wartości podaj c) tę wartość i d) kierunek wektora prędkości średniej.



Rys. 4.30. Zadanie 9

•••10 Wektor położenia pewnej cząstki zmienia się z upływem czasu zgodnie z zależnością $\vec{r} = 5t\hat{i} + (et + ft^2)\hat{j}$, gdzie położenie wyrażono w metrach, czas w sekundach, a e i f są to pewne stałe. Na rysunku 4.31 przedstawiono zależność kąta θ, który wyznacza kierunek ruchu cząstki, od czasu t (kąt θ mierzymy od dodatniego kierunku osi x). Wyznacz stałe a) e i b) f wraz z jednostkami, w jakich są wyrażone.



Rys. 4.31. Zadanie 10

Podrozdział 4.3. Przyspieszenie średnie i przyspieszenie chwilowe

•11 GO Położenie cząstki $\vec{r}$ poruszającej się w płaszczyźnie xy jest dane wyrażeniem $\vec{r} = (2t^3 - 5t)\hat{i} + (6 - 7t^4)\hat{j}$, przy czym $\vec{r}$ jest wyrażone w metrach, a t w sekundach. Oblicz: a) $\vec{r}$, b) $\vec{v}$, c) $\vec{a}$ w chwili $t = 2$ s, wyrażając te wektory za pomocą wektorów jednostkowych. d) Jaki kąt tworzy styczna do toru cząstki w chwili $t = 2$ s z dodatnim kierunkiem osi x?

•12 Rowerzysta znajduje się w pewnej chwili o 40 m na wschód od masztu flagowego i jedzie na południe z prędkością o wartości 10 m/s, a 30 s później znajduje się o 40 m na północ od masztu i jedzie na wschód z prędkością o wartości 10 m/s. Wyznacz: a) wielkość i b) kierunek przemieszczenia, c) wielkość i d) kierunek prędkości średniej, e) wielkość i f) kierunek przyspieszenia średnigo rowerzysty w czasie tych 30 s.

•13 ssm Cząstka porusza się tak, że zależność jej położenia (w metrach) od czasu (w sekundach) jest następująca: $\vec{r} = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$. Podaj wyrażenia opisujące zależność od czasu: a) prędkości, b) przyspieszenia tej cząstki.

•14 Proton ma w pewnej chwili prędkość (w metrach na sekundę) $\vec{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, a 4 s później: $\vec{v} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$. Wyznacz przyspieszenie średnie $\vec{a}_{śr}$ protonu w czasie tych 4 s, wyrażone: a) za pomocą wektorów jednostkowych oraz przez b) jego moduł i c) kąt tworzony przez $\vec{a}_{śr}$ z dodatnim kierunkiem osi x.

••15 ssm ilw Cząstka startuje z punktu, będącego początkiem układu współrzędnych, z prędkością początkową $\vec{v} = (3\hat{i})$ m/s i stałym przyspieszeniem $\vec{a} = (\hat{i} - 0{,}5\hat{j})$ m/s^2. Wyznacz: a) prędkość, b) wektor położenia cząstki w chwili, gdy współrzędna x cząstki jest największa.

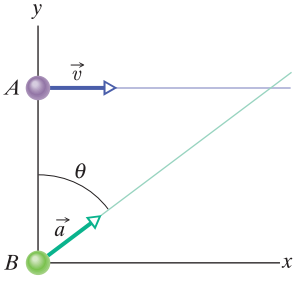
••16 GO Prędkość $\vec{v}$ cząstki poruszającej się w płaszczyźnie xy jest dana wyrażeniem $\vec{v} = (6t - 4t^2)\hat{i} + 8\hat{j}$, przy czym $\vec{v}$ wyrażone jest w metrach na sekundę, a t (> 0) — w sekundach. a) Wyznacz przyspieszenie cząstki w chwili $t = 3$ s. b) Czy w jakiejś chwili, a jeśli tak, to w której, przyspieszenie cząstki jest równe zeru? c) Czy w jakiejś chwili, a jeśli tak, to w której, prędkość cząstki jest równa zeru? d) Czy w jakiejś chwili, a jeśli tak, to w której, prędkość cząstki ma wartość 10 m/s?

••17 Ktoś pcha wózek w płaszczyźnie xy, tak że składowe jego przyspieszenia wynoszą: $a_x = 4$ m/s^2, $a_y = -2$ m/s^2. Prędkość początkowa wózka ma składowe: $v_{0x} = 8$ m/s, $v_{0y} = 12$ m/s. Oblicz prędkość wózka w chwili, gdy jego współrzędna y jest największa. Podaj tę prędkość w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

••18 Pod wpływem wiatru mały kamyk porusza się na poziomej płaszczyźnie xy ze stałym przyspieszeniem równym $\vec{a} = (5\text{ m/s}^2)\hat{i} + (7\text{ m/s}^2)\hat{j}$. W chwili $t = 0$ prędkość kamyka jest równa $(4\text{ m/s})\hat{i}$. Wyznacz a) wartość i b) kierunek prędkości kamyka w chwili, gdy jego przemieszczenie w kierunku x zmieni się o 12 m.

•••19 Przyspieszenie cząstki poruszającej się na poziomej płaszczyźnie xy wyraża się wzorem $\vec{a} = 3t\hat{i} + 4t\hat{j}$, gdzie czas podano w sekundach, a przyspieszenie w metrach na sekundę do kwadratu. W chwili $t = 0$ wektor położenia cząstki wynosi $\vec{r} = (20\text{ m})\hat{i} + (40\text{ m})\hat{j}$, a jej prędkość jest równa $\vec{v} = (5\text{ m/s})\hat{i} + (2\text{ m/s})\hat{j}$. Wyznacz a) położenie cząstki w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych oraz b) kąt tworzony przez kierunek jej ruchu z dodatnim kierunkiem osi x, w chwili $t = 4$ s.

•••20 GO Cząstka A porusza się wzdłuż prostej o równaniu $y = 30$ m ze stałą prędkością $\vec{v}$ o wartości 3 m/s, skierowaną zgodnie z dodatnim kierunkiem osi x (rys. 4.32). Cząstka B startuje z punktu będącego początkiem układu współrzędnych, z prędkością początkową równą zeru i stałym



Rys. 4.32. Zadanie 20

przyspieszeniem $\vec{a}$ o wartości 0,4 m/s^2 w chwili, gdy cząstka A przecina oś y. Jaki kąt θ musi tworzyć wektor $\vec{a}$ z dodatnim kierunkiem osi y, aby te dwie cząstki się zderzyły?

Podrozdział 4.4. Rzut ukośny

•21 Lotkę rzucono poziomo z prędkością początkową o wartości 10 m/s w kierunku punktu P na tarczy. Po 0,19 s lotu trafiła ona w punkt Q na obrzeżu tarczy, leżący poniżej punktu P. a) Jaka jest odległość punktów P i Q? b) Z jakiej odległości od tarczy została rzucona ta lotka?

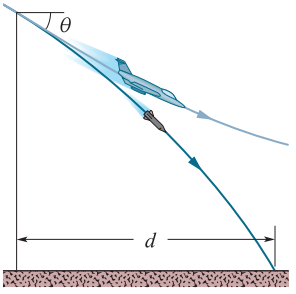
•22 Kulka stoczyła się poziomo ze stołu o wysokości 1,2 m i spadła na podłogę w punkcie odległym w poziomie od brzegu blatu o 1,52 m. a) Jak długo trwał lot kulki? b) Jaka była wartość jej prędkości w chwili, gdy spadła z blatu?

•23 Pocisk, wystrzelony poziomo z działa umieszczonego na wysokości 45 m nad poziomym terenem, wylatuje z lufy z prędkością 250 m/s. a) Jak długo będzie trwał lot pocisku? b) W jakiej odległości w poziomie od działa (punktu wystrzelenia) pocisk spadnie na ziemię? c) Ile będzie wynosiła wartość składowej pionowej prędkości pocisku w chwili jego spadku na ziemię?

•24 Podczas konkursu skoku w dal na mistrzostwach świata w lekkiej atletyce w Tokio w 1991 roku, Mike Powell oddał skok na odległość 8,95 m, bijąc o 5 cm 23-letni rekord świata Boba Beamona. Załóż, że prędkość Mike'a Powella w chwili odbicia wynosiła 9,5 m/s (czyli była niemal taka, jak prędkość sprintera) oraz że w Tokio $g = 9{,}8$ m/s^2. O ile mniejsza była długość skoku Powella od maksymalnego poziomego zasięgu rzutu cząstki wyrzuconej z taką samą prędkością, tzn. 9,5 m/s?

•25 Rekord świata w długości skoku na motocyklu, ustanowiony przez Jasona Renie, wynosi 77 m. Załóż, że skoczek opuścił platformę startową pod kątem 12° do poziomu i wylądował na tej samej wysokości nad ziemią, na której się od niej oderwał. Pomiń opór powietrza w czasie lotu i oblicz wartość prędkości początkowej skoczka.

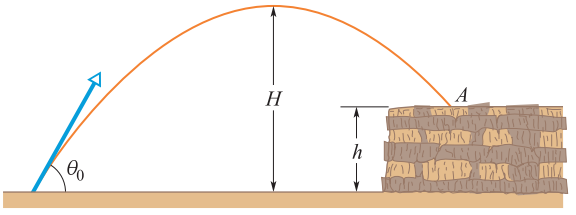
•26 Kamień został wyrzucony z katapulty w chwili $t = 0$. Jego prędkość początkowa miała wartość 20 m/s i była skierowana pod kątem 40° w górę od kierunku poziomego. Wyznacz składowe przemieszczenia cząstki od katapulty a) poziomą, b) pionową, w chwili $t = 1{,}1$ s. Oblicz także składowe przemieszczenia: c) poziomą, d) pionową, w chwili $t = 1{,}8$ s, oraz e) poziomą, f) pionową w chwili $t = 5$ s.



Rys. 4.33. Zadanie 27

•27 ilw Samolot lecący z prędkością 290 km/h nurkuje pod kątem $\theta = 30°$ do poziomu i wypuszcza pocisk w celu zmylenia radaru nieprzyjaciela (rys. 4.33). Odległość w poziomie od punktu wyrzucenia pocisku do punktu jego spadku na ziemię wynosi $d = 700$ m. a) Jak długo trwał lot pocisku? b) Na jakiej wysokości nad ziemią pocisk ten został wypuszczony?

•28 GO Jak pokazano na rysunku 4.34, kamień został wrzucony na urwisko o wysokości h, przy czym jego prędkość początkowa miała wartość 42 m/s i była skierowana pod kątem $\theta_0 = 60°$ do poziomu. Kamień upadł w punkcie A po 5,5 s od jego wyrzucenia. Wyznacz: a) wysokość urwiska h, b) wartość prędkości kamienia tuż przed dotarciem do punktu A, c) największe wzniesieniu kamienia nad ziemię H.



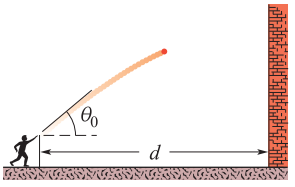
Rys. 4.34. Zadanie 28

••29 Wartość prędkości pewnego pocisku w chwili jego wystrzelenia jest pięć razy większa od wartości jego prędkości w punkcie maksymalnego wzniesienia. Oblicz kąt wzniesienia θ_0, pod jakim pocisk został wystrzelony.

••30 GO Piłkarz wykopuje piłkę z powierzchni boiska z prędkością początkową o wartości 19,5 m/s, pod kątem 45° do poziomu. Inny zawodnik, stojący w odległości 55 m od miejsca wykopu w kierunku lotu piłki, rusza w tej samej chwili na jej spotkanie. Z jaką średnią prędkością powinien on biec, aby dotrzeć do piłki tuż przed jej upadkiem na boisko?

••31 Atakując w wyskoku, siatkarz uderza piłkę nad głową i stara się trafić na połowę przeciwnika. Dobór kąta uderzenia nie jest łatwy. Załóż, że piłkę uderzono na wysokości 2,30 m nad parkietem, nadając jej prędkość początkową 20 m/s skierowaną pod kątem 18° w dół do poziomu. O ile dalej wylądowałaby piłka na boisku przeciwnika, gdyby wspomniany kąt wynosił 8°?

••32 GO Rzucasz piłkę w kierunku ściany, z prędkością początkową o wartości 25 m/s, skierowaną pod kątem $\theta_0 = 40°$ w górę od kierunku poziomego (rys. 4.35). Ściana jest odległa od punktu wyrzucenia piłki o $d = 22$ m. a) Na jakiej wysokości, liczonej od punktu wyrzucenia, piłka uderzy w ścianę? Ile będą wynosić składowe prędkości piłki, b) pozioma i c) pionowa, w chwili jej uderzenia w ścianę? d) Czy w chwili uderzenia w ścianę piłka będzie już poza najwyższym punktem swego toru?



Rys. 4.35. Zadanie 32

••33 ssm Samolot lecący lotem nurkowym pod kątem 53° do pionu wypuszcza pocisk na wysokości 730 m nad ziemią. Pocisk ten spada na ziemię po 5 s od jego wypuszczenia. a) Jaka jest wartość prędkości samolotu? b) Jaką odległość przebywa pocisk w poziomie w czasie swego lotu? Jakie są składowe prędkości pocisku: c) pozioma, d) pionowa, w chwili jego spadku na ziemię?

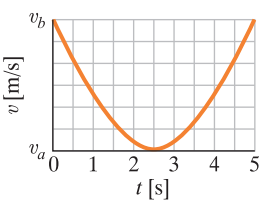
••34 Katapulta to maszyna oblężnicza przeznaczona do miotania potężnych kamieni na oblegany zamek w celu rozbicia jego murów. Nie można było jej umieścić zbyt blisko zamku, by nie znaleźć się w zasięgu strzał wystrzeliwanych przez broniących zamku łuczników. Katapultę ustawiano więc tak, aby wyrzucony z niej kamień uderzał w mur w drugiej połowie swego lotu. Załóż, że kamień wyrzucono z prędkością o wartości $v_0 = 28$ m/s pod kątem $\theta_0 = 40°$. Wyznacz wartość prędkości kamienia, jeśli uderza on w mur a) w chwili osiągnięcia największej wysokości swego parabolicznego toru, b) w chwili, gdy jego wysokość spadła już do połowy tej wartości maksymalnej. c) Ile razy szybciej leci kamień w chwili z punktu (b) niż w chwili z punktu (a)?

••35 ssm Z karabinu, wystrzeliwującego kule z prędkością 460 m/s, chcemy trafić w cel znajdujący się na tej samej wysokości co karabin i odległy od niego o 45,7 m. O ile wyżej od celu należy skierować lufę karabinu, aby się to udało?

••36 GO W czasie meczu tenisowego serwujący nadaje piłce prędkość początkową o wartości 23,6 m/s, uderzając ją poziomo na wysokości 2,37 m nad kortem. Znajduje się on wówczas w odległości 12 m od siatki o wysokości 0,9 m. a) Czy piłka przejdzie nad siatką? b) W jakiej odległości od górnego brzegu siatki będzie się ona znajdowała w chwili, gdy doleci do płaszczyzny siatki? Przy kolejnym serwie zawodnik uderza piłkę niemal tak samo, jedyna różnica polega na tym, że tym razem kieruje ją pod kątem 5° w dół od kierunku poziomego. c) Czy piłka przejdzie nad siatką? d) W jakiej odległości od górnego brzegu siatki będzie się ona znajdowała w chwili, gdy doleci do płaszczyzny siatki?

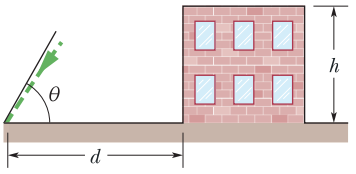
••37 ssm www Początkujący skoczek do wody odpycha się w poziomie z prędkością 2 m/s od brzegu pomostu znajdującego się 10 m nad powierzchnią wody. a) Jak daleko w poziomie od brzegu pomostu znajdzie się ten skoczek po upływie 0,8 s od oderwania się od pomostu? b) Jak wysoko nad poziomem wody w basenie będzie się wówczas znajdował? c) W jakiej odległości w poziomie od brzegu pomostu wpadnie on do wody?

••38 Piłkę golfową wybito z powierzchni ziemi. Na rysunku 4.36 przedstawiono wartość jej prędkości jako funkcję czasu, przy czym $t = 0$ oznacza chwilę uderzenia piłki. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktów $v_a = 19$ m/s i $v_b = 31$ m/s. a) Jaką odległość przebędzie ta piłka w poziomie do chwili ponownego zetknięcia się z ziemią? b) Na jaką największą wysokość nad ziemię wzniesie się ta piłka?



Rys. 4.36. Zadanie 38

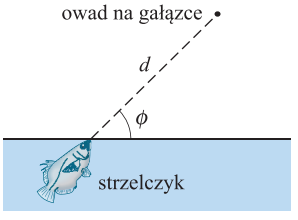
••39 Kula została wystrzelona z krawędzi dachu budynku i spadła na ziemię pod kątem 60° w odległości 25 m od budynku (patrz rys. 4.37). Lot kuli trwał 1,5 s. a) Wyznacz wysokość h, z jakiej wystrzelono kulę? (*Wskazówka*: Jednym ze sposobów rozwiązania tego zadania jest rozważenie ruchu kuli w przeciwną stronę, jak na filmie puszczonym w tył. Chwila lądowania, dla której znamy kierunek lotu kuli, staje się wtedy chwilą wystrzelenia kuli). Wyznacz b) wartość i c) kierunek (kąt tworzony z osią x) prędkości kuli w chwili jej wystrzelenia. d) Czy kulę wystrzelono nieco w górę, czy nieco w dół względem poziomu?



Rys. 4.37. Zadanie 39

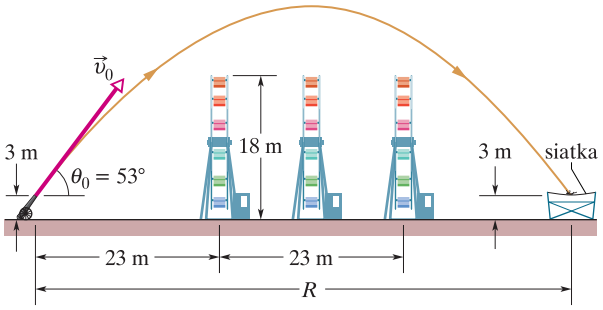
••40 Załóżmy, że wybitny miotacz kulą może ją wypchnąć w powietrze z prędkością początkową o wartości $v_0 = 15$ m/s na wysokości 2,16 m nad ziemią. Wyznacz drogę przebytą przez kulę w poziomie od punktu wyrzucenia do lądowania na ziemi, jeśli kąt θ_0, pod jakim została wyrzucona, wynosi a) 45° i b) 42°. Wynik, jaki uzyskasz, przekona cię o tym, że choć zasięg rzutu ukośnego jest największy, gdy wyrzut następuje pod kątem 45°, to w sytuacji, gdy wyrzut i lądowanie ciała odbywają się na różnych wysokościach, maksymalną drogę w poziomie można otrzymać dla innego kąta wyrzutu.

••41 GO Strzelczyk, ryba, która poluje na owady, wyrzucając w ich stronę krople wody, spostrzegł na gałązce nad wodą owada i strzela w niego wodą. Owad znajduje się w odległości d od strzelczyka, a kąt, pod jakim strzelczyk go widzi, wynosi ϕ (patrz rys. 4.38). Strzelczyk musi wyrzucić krople pod innym kątem θ_0, gdyż będą one lecieć w powietrzu nie po linii prostej, lecz po torze parabolicznym. Przyjmij, że $\phi = 36°$, a $d = 0{,}9$ m, i oblicz kąt wyrzutu kropli θ_0 potrzebny do tego, by kropla trafiła owada w punkcie największej wysokości swego lotu.



Rys. 4.38. Zadanie 41

••42 W roku 1939 czy 1940 Emanuel Zacchini, który jako pierwszy człowiek został pociskiem armatnim, ulepszył swój numer cyrkowy i przeleciał nad trzema diabelskimi młynami, lądując w sieci umieszczonej po drugiej stronie areny (rys. 4.39). Załóż, że został on wystrzelony z prędkością o wartości 26,5 m/s pod kątem 53° do poziomu. Potraktuj



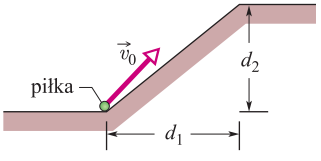
Rys. 4.39. Zadanie 42

cyrkowca jak cząstkę i oblicz: a) wysokość, na jakiej przeleciał on nad pierwszym diabelskim młynem, b) wysokość, na jakiej przeleciał on nad środkowym diabelskim młynem, zakładając, że tam był najwyższy punkt jego toru, c) w jakiej odległości od działa powinna znajdować się siatka.

••43 ilw Piłkę wybito w powietrze z powierzchni ziemi. Na wysokości 9,1 m jej prędkość (w metrach na sekundę) jest równa $\vec{v} = 7{,}6\hat{i} + 6{,}1\hat{j}$, przy czym $\hat{i}$ jest wektorem jednostkowym w poziomie, a $\hat{j}$ jest wektorem jednostkowym skierowanym do góry. a) Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się piłka? b) Jaką całkowitą odległość przebędzie ona w poziomie? Wyznacz: c) długość, d) kierunek wektora prędkości piłki tuż przed jej spadkiem na ziemię.

••44 Baseballista rzuca piłkę poziomo z prędkością 161 km/h. Zawodnik odbijający piłkę znajduje się w odległości 18,3 m od niego. Ile czasu potrzebuje piłka na przebycie: a) pierwszej, b) drugiej połowy tej odległości? O ile zmniejsza się wysokość piłki nad ziemią w czasie, gdy przebywa: c) pierwszą, d) drugą połowę odległości między zawodnikami? e) Dlaczego wartości otrzymane w punktach (c) i (d) nie są jednakowe?

••45 Jak widać na rysunku 4.40, piłkę wyrzucono z prędkością o wartości 10 m/s i pod kątem 50° do poziomu u podnóża pochyłości o długości $d_1 = 6$ m i wysokości $d_2 = 3{,}6$ m. Powyżej pochyłości mamy znów płaski teren. a) Czy piłka wyląduje na pochyłości, czy na terenie płaskim? Wyznacz przemieszczenie piłki od punktu wyrzutu do punktu jej lądowania, podając a) wartość i b) kierunek tego przemieszczenia.

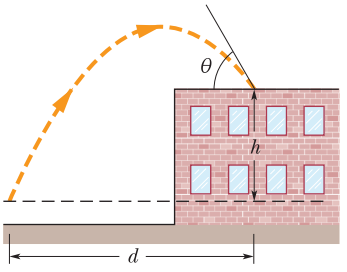


Rys. 4.40. Zadanie 45

••46 GO Przy oglądaniu meczu koszykówki mamy nieraz wrażenie, że gracze niemal „zawisają” w powietrzu, jakby przyspieszenie ziemskie „osłabło”. Złudzenie to bierze się z jednej strony stąd, że gracze potrafią gwałtownie przekładać w locie piłkę z ręki do ręki, a z drugiej strony stąd, że w górnej części wyskoku gracz przebywa w poziomie większą drogę niż w części dolnej. Przyjmij, że gracz skacze z prędkością początkową o wartości $v_0 = 7$ m/s pod kątem $\theta_0 = 35°$ i oblicz, jaką część całkowitego zasięgu rzutu przebywa gracz, gdy jest na wysokości większej od połowy wysokości maksymalnej swego lotu.

••47 ssm www Baseballista odbijający piłkę uderza ją na wysokości 1,22 m nad boiskiem i nadaje jej kierunek tworzący z poziomem kąt 45°. Zasięg w poziomie tak uderzonej piłki (odległość przebyta w poziomie do punktu leżącego *na wysokości punktu odbicia*) wynosi 107 m. a) Czy piłka przeleci nad ogrodzeniem o wysokości 7,32 m, znajdującym się w odległości 97,5 m od punktu wybicia? b) Wyznacz odległość środka piłki od górnego brzegu ogrodzenia w chwili, gdy piłka znajdzie się w takiej samej odległości od odbijającego, jak ogrodzenie.

••48 GO Jak pokazano na rysunku 4.41, kula została wystrzelona tak, by spadła na dach budynku położony o $h = 20$ m nad punktem jej wystrzelenia. Lot kuli trwał 4 s, a jej tor tuż przed upadkiem tworzył z poziomem dachu kąt $\theta = 60°$. a) Wyznacz drogę d przebytą przez kulę w poziomie (patrz wskazówka do zadania 39). Wyznacz b) wartość i c) kierunek prędkości kuli w chwili jej wystrzelenia.



Rys. 4.41. Zadanie 48

•••49 ssm Piłkarz jest w stanie nadać piłce prędkość początkową o wartości 25 m/s. Wyznacz a) najmniejszy i b) największy kąt, pod jakim powinna zostać uderzona piłka, aby strzał trafił do bramki, jeśli gracz stoi na wprost bramki, w odległości 50 m od niej, a poprzeczka bramki znajduje się na wysokości 3,44 m nad boiskiem.

•••50 GO W ciągu dwóch sekund od wystrzelenia z powierzchni ziemi pocisk przemieścił się o 40 m w poziomie i o 53 m w pionie. Wyznacz składowe prędkości początkowej pocisku: a) poziomą, b) pionową. c) W jakiej odległości w poziomie od punktu jego wystrzelenia znajdzie się pocisk w chwili, gdy osiągnie maksymalną wysokość nad ziemią?

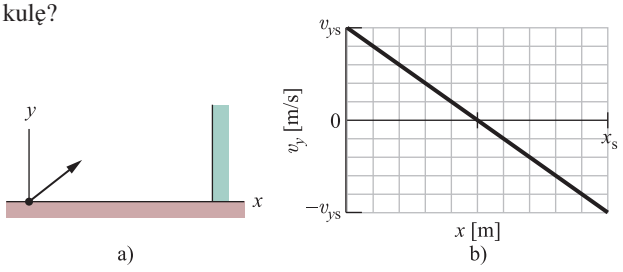
•••51 Dobry narciarz wie, że dojeżdżając do spadku terenu, warto podskoczyć. Załóżmy, że narciarz skacze z prędkością początkową o wartości 10 m/s pod kątem $\theta_0 = 11{,}3°$, przy czym przed skokiem teren jest płaski, a potem opada tak, że nachylenie spadku wynosi 9°. Na rysunku 4.42a narciarz skacze tak, aby wylądować na początku części opadającej trasy, a więc niemal na wysokości wyskoku, natomiast na rysunku 4.42b narciarz skacze na samym końcu płaskiej części trasy, a więc ląduje znacznie dalej na stoku. a) Oblicz kąt ϕ, pod jakim ląduje na stoku narciarz z rysunku 4.42a. Oblicz b) jak daleko w pionie od punktu wyskoku i c) pod jakim kątem do stoku ląduje narciarz z rysunku 4.42b. (Im większa



Rys. 4.42. Zadanie 51

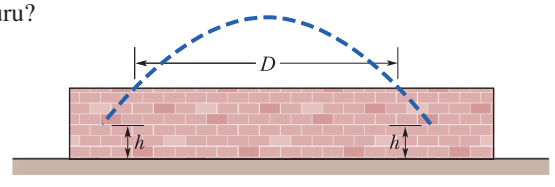
strata wysokości w locie i większy kąt ϕ, tym mniej pewne lądowanie narciarza).

•••52 GO Kula zostaje wystrzelona z poziomu ziemi w kierunku ściany odległej o x od punktu wystrzału (rys. 4.43a). Na rysunku 4.43b pokazano, jak od odległości x zależy v_y, czyli składowa y prędkości kuli w chwili uderzenia w ścianę. Jednostki na osiach są wyznaczone przez współrzędne punktów $v_{ys} = 5$ m/s i $x_s = 20$ m. Pod jakim kątem wystrzelono kulę?



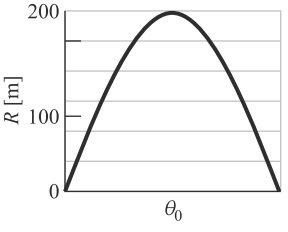
Rys. 4.43. Zadanie 52

•••53 GO Piłka baseballowa została odbita na wysokości $h = 1$ m nad ziemią, a potem złapana na tej samej wysokości. Piłka leciała wzdłuż muru, wznosząc się ponad jego poziom po 1 s od odbicia i spadając poniżej tego poziomu po dalszych 4 s. Droga przebyta przez piłkę w poziomie w czasie lotu ponad murem wyniosła $D = 50$ m (patrz rys. 4.44). a) Wyznacz drogę, jaką przebyła piłka w poziomie od chwili odbicia do chwili jej złapania. Wyznacz b) wartość i c) kierunek prędkości piłki tuż po jej odbiciu. d) Ile wynosi wysokość muru?



Rys. 4.44. Zadanie 53

•••54 GO Kulę wystrzelono z poziomu ziemi z prędkością o pewnej wartości. Na rysunku 4.45 przedstawiono zasięg rzutu R jako funkcję kąta wystrzału θ_0. Od wartości θ_0 zależy czas lotu. Maksymalny czas lotu oznaczmy przez t_{max}. Wyznacz najmniejszą wartość prędkości kuli w czasie lotu, zakładając, że kąt θ_0 dobrano tak, aby czas lotu był równy $0{,}5t_{max}$.



Rys. 4.45. Zadanie 54

•••55 ssm Piłka stacza się poziomo z prędkością 1,52 m/s na schody, których stopnie mają wysokość 20,3 cm i głębokość również 20,3 cm. Na który stopień spadnie piłka, gdy po raz pierwszy uderzy w schody?

Podrozdział 4.5. Ruch jednostajny po okręgu

•56 Satelita obiega Ziemię po orbicie kołowej na wysokości 640 km nad powierzchnią Ziemi. Okres obiegu wynosi 98 min. Wyznacz: a) wartość prędkości, b) wartość przyspieszenia dośrodkowego tego satelity.

•57 Karuzela obraca się wokół osi pionowej ze stałą prędkością kątową. Pasażer znajdujący się na obrzeżu karuzeli porusza się z prędkością liniową o stałej wartości, równej 3,66 m/s, a jego przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a}$ ma wartość 1,83 m/s^2. Wektor $\vec{r}$ wyznacza położenie pasażera względem osi obrotu karuzeli. a) Jaka jest długość wektora $\vec{r}$? Jaki jest kierunek tego wektora, gdy wektor $\vec{a}$ jest skierowany b) na wschód, c) na południe?

•58 Skrzydło małego wentylatora wykonuje 1200 obrotów na minutę, a jego koniec znajduje się w odległości 0,15 m od osi obrotu. a) Jaką drogę przebywa koniec skrzydła w czasie jednego obrotu? Jaka jest wartość jego: b) prędkości, c) przyspieszenia? d) Ile wynosi okres obrotu?

•59 ilw Diabelski młyn ma promień 15 m i wykonuje 5 obrotów na minutę wokół osi poziomej. a) Ile wynosi okres jego ruchu? Jaka jest b) długość i c) kierunek przyspieszenia dośrodkowego pasażerki, gdy jest ona na największej wysokości nad ziemią? Jaka jest d) długość i e) kierunek przyspieszenia dośrodkowego pasażerki, gdy jest ona na najmniejszej wysokości nad ziemią?

•60 Pewien wielbiciel przyspieszenia dośrodkowego porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu $r = 3$ m. W pewnej chwili jego przyspieszenie wynosi $\vec{a} = (6\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (-4\ \text{m/s}^2)\hat{j}$. Jakie są w tej chwili wielkości: a) $\vec{v} \cdot \vec{a}$ i b) $\vec{r} \times \vec{a}$?

•61 Gdy duża gwiazda staje się *supernową*, jej rdzeń może ulec tak silnej kompresji, że stanie się *gwiazdą neutronową* o promieniu ok. 20 km (czyli takim, jak rozmiar aglomeracji San Francisco). Jaka jest: a) wartość prędkości cząstek na równiku gwiazdy neutronowej, b) wartość ich przyspieszenia dośrodkowego, jeśli gwiazda wykonuje jeden obrót na minutę? c) Czy wartości otrzymane w punktach (a) i (b) zwiększą się, zmniejszą się, czy pozostaną bez zmiany, gdy gwiazda będzie obracać się szybciej?

•62 Jaka jest wartość przyspieszenia sprintera biegnącego z prędkością o wartości 10 m/s po łuku o promieniu 25 m?

••63 GO W chwili $t_1 = 2$ s przyspieszenie cząstki poruszającej się po okręgu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wynosi $(6\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (4\ \text{m/s}^2)\hat{j}$, a jej prędkość ma stałą wartość. W chwili $t_2 = 5$ s przyspieszenie tej cząstki jest równe $(4\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (-6\ \text{m/s}^2)\hat{j}$. Jaki jest promień toru cząstki przy założeniu, że $t_2 - t_1$ jest mniejsze od okresu ruchu?

••64 GO Cząstka porusza się ruchem jednostajnym po okręgu w poziomej płaszczyźnie xy. W pewnej chwili znajduje się ona w punkcie o współrzędnych (4 m, 4 m), ma prędkość $-5\hat{i}$ m/s i przyspieszenie $+12{,}5\hat{j}$ m/s^2. Wyznacz współrzędne a) x i b) y środka okręgu, po jakim porusza się cząstka.

••65 Portmonetka i portfel leżą na podłodze karuzeli na tym samym odcinku łączącym środek ze skrajem karuzeli i są odległe od osi obrotu o 2 m (portmonetka) i 3 m (portfel). Karuzela się obraca, a więc portmonetka i portfel poruszają się ruchem jednostajnym po okręgu. W pewnej chwili przyspieszenie portmonetki wynosi $(2\text{ m/s}^2)\hat{i} + (4\text{ m/s}^2)\hat{j}$. Ile wynosi w tej chwili przyspieszenie portfela, także w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych?

••66 Ciało porusza się po torze kołowym w poziomej płaszczyźnie xy z prędkością o stałej wartości. W chwili $t_1 = 4$ s jest ono w punkcie o współrzędnych (5 m, 6 m), ma prędkość $(3\text{ m/s})\hat{j}$, a jej przyspieszenie ma dodatni kierunek osi x. W chwili $t_2 = 10$ s ciało ma prędkość $(-3\text{ m/s})\hat{i}$, a jej przyspieszenie ma dodatni kierunek osi y. Wyznacz współrzędne a) x i b) y środka okręgu, po jakim porusza się cząstka, przy założeniu, że $t_2 - t_1$ jest mniejsze od okresu ruchu.

•••67 ssm www Po uwiązaniu kamienia na sznurku chłopiec zatacza nim w poziomie okrąg o promieniu 1,5 m na wysokości 2 m nad ziemią. Sznurek pęka, kamień odlatuje w bok i spada na ziemię, po przebyciu w poziomie odległości 10 m. Jaka była wartość jego przyspieszenia dośrodkowego, gdy poruszał się po okręgu?

•••68 GO Kot jedzie na karuzeli obracającej się jednostajnie. W chwili $t_1 = 2$ s jego prędkość w poziomym układzie współrzędnych xy wynosi $\vec{v}_1 = (3\text{ m/s})\hat{i} + (4\text{ m/s})\hat{j}$, a w chwili $t_2 = 5$ s jest równa $\vec{v}_2 = (-3\text{ m/s})\hat{i} + (-4\text{ m/s})\hat{j}$. Wyznacz: a) wartość bezwzględną przyspieszenia dośrodkowego kota, b) średnie przyspieszenie kota w przedziale $t_2 - t_1$ przy założeniu, że ten przedział jest mniejszy od okresu ruchu.

Podrozdział 4.6. Ruch względny w jednym wymiarze

•69 Operator na platformie furgonetki jadącej na zachód z prędkością 20 km/h filmuje geparda biegnącego w tym samym kierunku o 30 km/h szybciej niż samochód. Nagle gepard zatrzymuje się, obraca i biegnie na wschód z prędkością 45 km/h, jak to szybko obliczył wystraszony członek ekipy filmowej stojący w pobliżu toru geparda. Zmiana prędkości zajęła zwierzęciu 2 s. Wyznacz a) wartość i b) kierunek przyspieszenia geparda z punktu widzenia operatora oraz c) wartość i d) kierunek przyspieszenia geparda z punktu widzenia wystraszonego członka ekipy.

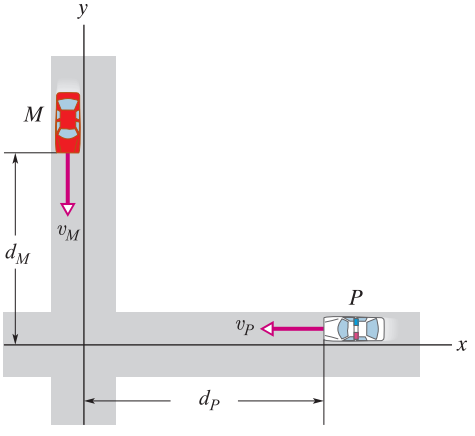
•70 Łódź płynie w górę rzeki, w dodatnim kierunku osi x, z prędkością 14 km/h w stosunku do wody. Woda płynie z prędkością 9 km/h względem brzegu. Wyznacz a) wartość i b) kierunek prędkości łodzi względem brzegu. Znajdujące się na pokładzie dziecko przechodzi z dziobu na rufę łodzi z prędkością 6 km/h w stosunku do łodzi. Wyznacz c) wartość i d) kierunek prędkości dziecka względem brzegu.

••71 Osobnik o podejrzanym wyglądzie biegnie tak szybko, jak tylko potrafi, po ruchomym chodniku, przebywając całą długość chodnika w czasie 2,5 s. W chwilę później dostrzega agenta ochrony, w związku z czym puszcza się pędem z powrotem, biegnąc teraz po chodniku przesuwającym się w przeciwną stronę niż on sam. Przebiegnięcie całej długości chodnika zajmuje mu tym razem 10 s. Wyznacz stosunek prędkości osobnika i chodnika.

Podrozdział 4.7. Ruch względny w dwóch wymiarach

•72 W rugby gracz może przekazać piłkę partnerowi pod warunkiem, że podanie nie odbywa się „do przodu” (tzn. prędkość piłki nie może mieć składowej wzdłuż boiska, skierowanej ku bramce drużyny przeciwnej). Załóżmy, że gracz biegnie wzdłuż boiska w kierunku bramki przeciwnika, z prędkością 4 m/s i rzuca piłkę z prędkością 6 m/s względem siebie. Pod jakim najmniejszym kątem w stosunku do kierunku biegu może on podać tę piłkę, aby nie popełnić przewinienia?

••73 Dwie drogi przecinają się pod kątem prostym, jak pokazano na rysunku 4.46. W pewnej chwili, dla której wykonano rysunek, samochód policyjny P jest odległy od skrzyżowania o $d_P = 800$ m i porusza się z prędkością $v_P = 80$ km/h, a pojazd M jest odległy od skrzyżowania o $d_M = 600$ m i porusza się z prędkością $v_M = 60$ km/h. a) Ile wynosi prędkość pojazdu M w stosunku do samochodu policyjnego, wyrażona za pomocą wektorów jednostkowych? b) Jaki jest kierunek prędkości, obliczonej w punkcie (a), w stosunku do linii łączącej obydwa pojazdy w tej chwili? Czy odpowiedzi na pytania (a) i (b) będą ulegać zmianie, gdy pojazdy będą się zbliżać do skrzyżowania bez zmiany swoich prędkości?



Rys. 4.46. Zadanie 73

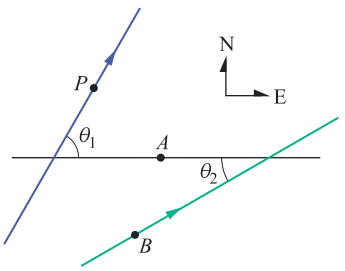
••74 Samolot leci przez 15 min w warunkach, gdy wiatr wieje z prędkością 42 km/h w kierunku południowo-wschodnim tworzącym z kierunkiem wschodnim kąt 20° i dociera w tym czasie do miasta odległego o 55 km od miejsca wylotu. Ile wynosi prędkość samolotu względem powietrza?

••75 ssm Pociąg jedzie na południe z prędkością 30 km/h (względem toru) w deszczu, którego krople znosi wiatr wiejący na południe. Nieruchomy obserwator na ziemi stwierdza, że tor każdej kropli tworzy z poziomem kąt 70°. Obserwator w pociągu widzi natomiast, że deszcz pada dokładnie pionowo. Wyznacz wartość prędkości kropli deszczu względem ziemi.

••76 Niewielki samolot osiąga prędkość przelotu równą 500 km/h. Pilot ma dolecieć do lotniska odległego o 800 km na północ od miejsca startu i orientuje się, że aby lecieć prosto na północ musi wybrać kurs 20° na wschód od kierunku północnego. Samolot przybywa do celu podróży po 2 h lotu. Wyznacz a) wartość bezwzględną i b) kierunek prędkości wiatru.

••77 ssm Śnieg pada pionowo ze stałą prędkością 8 m/s. Z punktu widzenia kierowcy samochodu jadącego po prostej, poziomej drodze z prędkością 50 km/h płatki śniegu spadają na ziemię ukośnie. Pod jakim kątem do pionu spadają według kierowcy płatki śniegu?

••78 Rysunek 4.47 przedstawia widok z góry dwóch samochodów terenowych P i B, które ścigają się ze sobą na płaskim terenie, jadąc po torach prostoliniowych, i mijają pozostającego w spoczynku strażnika granicznego A. Względem tego strażnika pojazd B jedzie ze stałą prędkością o wartości 20 m/s w kierunku danym przez kąt $\theta_2 = 30°$, a pojazd P zwiększa swoją prędkość w stałym tempie 0,4 m/s^2, jadąc w kierunku danym przez kąt $\theta_1 = 60°$. W pewnej chwili pojazd P ma prędkość 40 m/s. Ile wynosi w tej chwili: a) wartość i b) kierunek prędkości pojazdu P względem pojazdu B oraz c) wartość i d) kierunek przyspieszenia pojazdu P względem pojazdu B?



Rys. 4.47. Zadanie 78

••79 ssm ilw Dwa statki A i B wychodzą jednocześnie z portu. Statek A płynie na północ z prędkością 24 węzłów, a statek B płynie z prędkością 28 węzłów w kierunku 40° na zachód od kierunku południowego (1 węzeł jest równy 1 mili morskiej na godzinę — patrz dodatek D). Jaka jest a) wartość i b) kierunek prędkości statku A względem B? c) Po jakim czasie statki będą od siebie odległe o 160 mil morskich? d) W jakim kierunku względem A będzie się wówczas znajdował statek B?

••80 GO Woda w rzece o szerokości 200 m płynie na wschód ze stałą prędkością 2 m/s. Z południowego brzegu rzeki wypływa łódź, sterując w kierunku zachodnio-północnym pod kątem 30° do kierunku północnego i płynąc z prędkością 8 m/s względem wody. Wyznacz a) wartość i b) kierunek prędkości łodzi względem ziemi? c) Po jakim czasie łódź dotrze do drugiego brzegu rzeki?

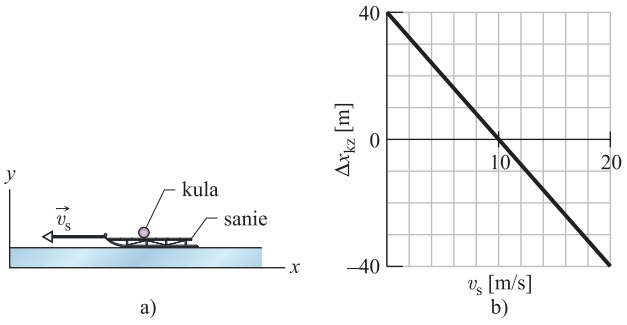
•••81 GO Statek A znajduje się 4 km na północ i 2,5 km na wschód od statku B. Statek A ma prędkość 22 km/h, skierowaną na południe, a statek B prędkość 40 km/h, skierowaną pod kątem 37° na północ od kierunku wschodniego. a) Ile wynosi prędkość A względem B? Wyraź odpowiedź za pomocą wektorów jednostkowych $\hat{i}$ i $\hat{j}$, przy czym wektor $\hat{i}$ jest skierowany na wschód. b) Podaj wyrażenie na położenie A względem B jako funkcję czasu, wyrażoną za pomocą wektorów $\hat{i}$ i $\hat{j}$, przy czym $t = 0$ oznacza chwilę opisaną wyżej. c) W jakiej chwili odległość statków będzie najmniejsza? d) Ile wynosi ta odległość?

•••82 GO W rzece o szerokości 200 m woda płynie na całej szerokości z prędkością 1,1 m/s. Rzeka płynie przez dżunglę na wschód. Podróżnik zamierza opuścić małą polankę na południowym brzegu rzeki i przeprawić się na drugi brzeg motorówką rozwijającą stałą prędkość o wartości 4 m/s względem wody. Na północnym brzegu rzeki jest również polanka. Znajduje się ona w odległości 82 m w górę rzeki, licząc od punktu przeciwległego do polanki na brzegu południowym. a) W jakim kierunku powinien skierować swoją łódź podróżnik, jeśli chce przepłynąć rzekę po linii prostej i wylądować na polance na brzegu północnym? b) Jak długo będzie trwała ta przeprawa?

Zadania dodatkowe

83 Wioślarka może na spokojnej wodzie nadać łodzi prędkość 6,4 km/h. Chce ona przeprawić się przez rzekę, w której woda płynie z prędkością 3,2 km/h, tak by dotrzeć na drugi brzeg dokładnie naprzeciw miejsca, z którego wypływa. Niech $\hat{i}$ ma kierunek prostopadły, a $\hat{j}$ równoległy do rzeki. a) Pod jakim kątem do $\hat{i}$ powinna wioślarka skierować swą łódź, aby popłynąć prostopadle do rzeki? b) Ile czasu zajmie jej przeprawa przez rzekę o szerokości 6,4 km? c) Wyobraź sobie, że ta sama wioślarka płynie 3,2 km *w dół rzeki* i z powrotem. Ile czasu jej to zajmie? d) Wyobraź sobie z kolei, że wioślarka płynie 3,2 km *w górę rzeki* i z powrotem. Ile czasu jej to zajmie? e) Pod jakim kątem do $\hat{i}$ powinna skierować łódź ta wioślarka, jeśli chce przeprawić się przez rzekę jak najszybciej? f) Ile wynosi ten minimalny czas przeprawy?

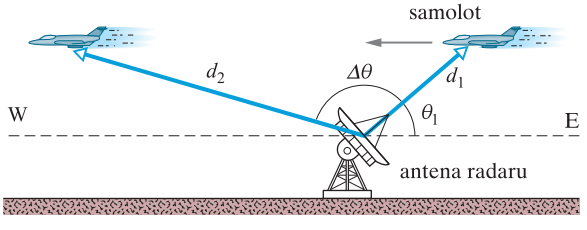
84 Jak pokazano na rysunku 4.48a, sanie jadą w ujemnym kierunku osi x z prędkością o stałej wartości v_s, gdy kula lodowa zostaje wyrzucona z sań z prędkością względem sań wynoszącą $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$. Gdy mierzono przemieszczenie kuli w poziomie względem ziemi Δx_{kz} od chwili wyrzutu do lądowania na ziemi dla różnych wartości v_s, otrzymano zależność przedstawioną na rysunku 4.48b. Załóż, że kula ląduje mniej więcej na poziomie wyrzutu i wyznacz wartości a) v_{0x} i b) v_{0y}. Można też mierzyć przemieszczenie kuli względem sań Δx_{ks}. Przyjmij, że prędkość sań nie zmienia się w chwili wyrzucenia kuli i wyznacz Δx_{ks}, gdy v_s wynosi c) 5 m/s i d) 15 m/s.



Rys. 4.48. Zadanie 84

85 Zostałeś porwany przez studentów politologii (rozwścieczonych tym, że powiedziałeś im, iż politologia to nie żadna poważna dyscyplina nauki). Wprawdzie założyli ci opaskę na oczy, ale mogłeś poznać prędkość samochodu, którym cię wieźli (po odgłosach silnika), czas jazdy (licząc w pamięci kolejne sekundy) oraz kierunek jazdy (licząc liczbę skrętów w lewo i w prawo w układzie prostopadłych do siebie ulic). Zaobserwowałeś w ten sposób, że wasza podróż przebiegała następująco: przez 2 min prosto z prędkością 50 km/h, skręt w prawo i 4 min z prędkością 20 km/h, skręt w prawo i 60 s z prędkością 20 km/h, skręt w lewo i 60 s z prędkością 50 km/h, skręt w prawo i 2 min z prędkością 20 km/h, skręt w lewo i 30 s z prędkością 50 km/h. a) W jakiej odległości od miejsca porwania się znalazłeś? b) W jakim kierunku się znajdujesz w stosunku do początkowego kierunku jazdy?

86 Posterunek radarowy wykrywa samolot nadlatujący wprost od wschodu. Po raz pierwszy zarejestrowano jego obecność w odległości $d_1 = 360$ m od anteny, w kierunku $\theta_1 = 40°$ nad horyzontem. W czasie obserwacji samolotu przez ten posterunek jego wzniesienie nad horyzontem zmieniło się o $\Delta\theta = 123°$ w płaszczyźnie pionowej wschód–zachód, a po raz ostatni zarejestrowano jego obecność w odległości $d_2 = 790$ m od anteny (patrz rys. 4.49). Wyznacz a) wartość i b) kierunek przemieszczenia samolotu podczas jego obserwacji przez posterunek.



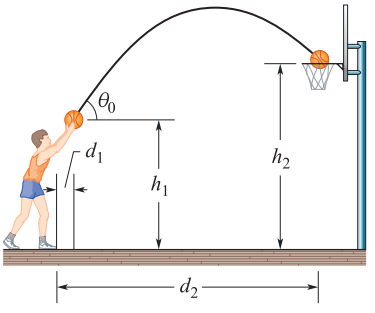
Rys. 4.49. Zadanie 86

87 Piłka baseballowa zostaje odbita tuż nad ziemią i osiąga punkt, w którym jej wysokość jest największa, po 3 s od odbicia, a po dalszych 2,5 s przelatuje tuż nad płotem odległym o 97,5 m od punktu odbicia. Boisko jest całkiem płaskie. Oblicz: a) największą wysokość, na jaką wzniosła się piłka, b) wysokość płotu, c) jak daleko od płotu piłka spadła na ziemię.

88 Na półkuli północnej podczas długich lotów na średnich szerokościach geograficznych samoloty napotykają na swej drodze prąd strumieniowy, silny prąd powietrzny skierowany na wschód, który nieraz wpływa na prędkość samolotu względem ziemi. Jeśli pilot utrzymuje pewną prędkość samolotu względem powietrza (prędkość lotu), to jego prędkość względem ziemi jest większa, gdy samolot leci w kierunku prądu, niż wtedy, gdy leci w kierunku przeciwnym. Przyjmij, że zaplanowano lot tam i z powrotem między miastami odległymi od siebie o 4000 km, przy czym najpierw lot odbywa się w kierunku takim jak prąd, a potem w kierunku przeciwnym. Komputer pokładowy sugeruje, aby wybrać prędkość lotu równą 1000 km/h, przy której różnica czasów lotu tam i z powrotem wyniesie 70 min. Jaką prędkość prądu przyjął komputer?

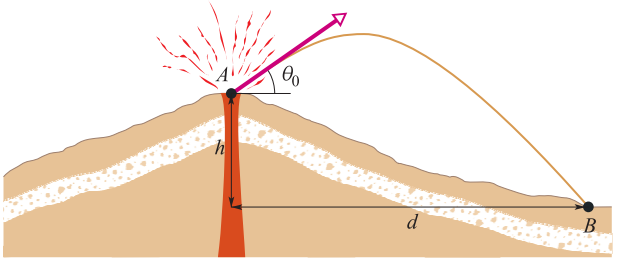
89 ssm Cząstka startuje z punktu, będącego początkiem układu współrzędnych, w chwili $t = 0$ z prędkością $(8\hat{j})$ m/s i porusza się w płaszczyźnie xy ze stałym przyspieszeniem $(4\hat{i} + 2\hat{j})$ m/s^2. Jaka jest: a) współrzędna y, b) wartość prędkości tej cząstki w chwili, gdy jej współrzędna x wynosi 29 m?

90 Koszykarz wykonuje rzut osobisty, wyrzucając piłkę pod kątem $\theta_0 = 55°$ do poziomu (jak na rys. 4.50). Odcinki zaznaczone na rysunku mają długości: $d_1 = 0{,}3$ m, $d_2 = 4{,}3$ m, $h_1 = 2{,}1$ m, $h_2 = 3$ m. Jaką prędkość początkową musi zawodnik nadać piłce, aby trafić do kosza?



Rys. 4.50. Zadanie 90

91 Podczas wybuchu wulkanu z krateru mogą być wyrzucane bloki skalne („bomby wulkaniczne"). Na rysunku 4.51 przedstawiono przekrój wulkanu Fudżi w Japonii. Wyobraź sobie, że taki blok skalny, wyrzucony z krateru A pod kątem $\theta_0 = 35°$ do poziomu, spadł na ziemię w punkcie B u podnóża wulkanu odległym od wylotu krateru o $h = 3{,}3$ km w pionie i $d = 9{,}4$ km w poziomie. a) Ile wynosiła wartość prędkości początkowej tego bloku oraz b) jak długo trwał



Rys. 4.51. Zadanie 91

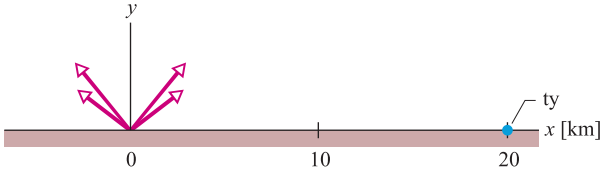
lot bloku przy założeniu, że odbywał się on bez oporu powietrza? c) Czy uwzględnienie oporu powietrza zwiększyłoby, czy zmniejszyło odpowiedź na pytanie z punktu (a)?

92 W czasie ćwiczeń na poziomej wirówce astronauta znajduje się w odległości 5 m od osi obrotu. a) Jaka jest wartość jego prędkości, jeśli przyspieszenie dośrodkowe ma wartość $7g$? b) Ile obrotów na minutę musi wykonywać wirówka, aby osiągnąć takie przyspieszenie astronauty? c) Ile wynosi wówczas okres ruchu?

93 ssm Oaza A znajduje się w odległości 90 km na zachód od oazy B. Wielbłąd wyrusza z oazy A i idąc w kierunku 37° na północ od kierunku wschodniego przebywa 75 km w czasie 50 h. Następnie idąc na południe, przebywa 65 km w czasie 35 h, po czym odpoczywa przez 5 h. Wyznacz a) wielkość i b) kierunek przemieszczenia wielbłąda od oazy A do miejsca odpoczynku. Wyznacz c) wielkość i d) kierunek prędkości średniej wielbłąda od wyjścia z oazy do końca odpoczynku. e) Wyznacz średnią wartość bezwzględną prędkości wielbłąda w tym czasie. Wielbłąd może wytrzymać bez wody przez 5 dni (120 h). Z jaką średnią prędkością musi on iść po odpoczynku, aby zdążyć na czas do oazy B? Podaj f) wielkość i d) kierunek tej prędkości średniej.

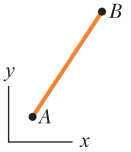
94  *Śmiercionośna ściana*. Duża, metaliczna planetoida uderza w Ziemię. W krótkim czasie tworzy się krater w skale, gdyż odłamki skalne są wyrzucane w górę i na boki. W tabeli niżej podano pięć par wartości prędkości, z jaką wyrzucany jest taki odłamek, oraz kąta jego wyrzutu (w stosunku do poziomu), wyznaczonych na podstawie modelu tworzenia się kraterów (oczywiście wyrzucane są także odłamki skalne o pośrednich wartościach prędkości i kąta). Wyobraź sobie, że znajdujesz się w punkcie $x = 20$ km, gdy planetoida uderza w ziemię w punkcie $x = 0$ w chwili $t = 0$ (rys. 4.52). a) Jakie są współrzędne x i y w chwili $t = 20$ s lecących w twoim kierunku odłamków skalnych o parametrach początkowych wyrzutu, odpowiadających przypadkom od A do E? b) Przedstaw te współrzędne na wykresie, a następnie narysuj łączącą je krzywą, aby uwzględnić odłamki o pośrednich wartościach prędkości i kąta ich wyrzucenia. Kształt tej krzywej umożliwi ci uzmysłowienie sobie, co widziałbyś, patrząc w kierunku nadlatujących odłamków skalnych.

Odłamek	Wartość prędkości [m/s]	Kąt [stopnie]
A	520	14
B	630	16
C	750	18
D	870	20
E	1000	22



Rys. 4.52. Zadanie 94

95 Na rysunku 4.53 pokazano prostoliniowy tor cząstki na płaszczyźnie xy, odpowiadający ruchowi przyspieszonemu cząstki z punktu A o współrzędnych (4 m, 6 m) do punktu B o współrzędnych (12 m, 18 m). Prędkość początkowa cząstki (w punkcie A) była równa zeru, przyspieszenie było stałe, a odcinek AB cząstka przebyła w czasie Δt_1. a) Wyznacz stosunek składowych przyspieszenia cząstki, a_y/a_x. b) Oblicz współrzędne punktu, w którym znajdzie się cząstka, gdy będzie nadal poruszała się takim samym ruchem przez kolejny czas Δt_1.



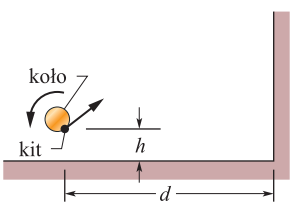
Rys. 4.53. Zadanie 95

96 Podczas meczu piłki siatkowej kobiet górny brzeg siatki znajduje się na wysokości 2,24 m nad parkietem, a boisko ma wymiary 9 m na 9 m po każdej stronie siatki. Serwując z wyskoku, zawodniczka uderza piłkę na wysokości 3 m nad parkietem i w odległości 8 m od siatki. Zakładając, że piłka jest zagrywana poziomo, wyznacz: a) minimalną prędkość początkową piłki, potrzebną do jej przejścia nad siatką, b) maksymalną wartość tej prędkości, niezbędną do tego, aby spadła ona na boisko przed linią końcową przeciwległej części boiska.

97 ssm Karabin jest wycelowany poziomo w tarczę odległą od niego o 30 m. Kula trafia w tarczę, 1,9 cm poniżej punktu, w który celowano. Wyznacz: a) czas lotu kuli, b) wartość prędkości, z jaką kula opuszcza lufę.

98 Cząstka porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o środku w początku układu współrzędnych xy w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, a okres ruchu wynosi 7 s. W pewnej chwili wektor położenia cząstki (względem początku układu) wynosi $\vec{r} = (2\text{ m})\hat{i} - (3\text{ m})\hat{j}$. Ile wynosi w tej chwili jej prędkość, także w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych?

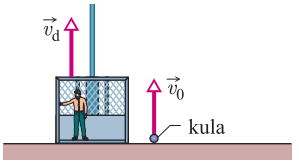
99 Jak pokazano na rysunku 4.54, kulka mokrego kitu porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu 20 cm, przyklejona do brzegu koła obracającego się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Okres ruchu wynosi 5 ms. W pewnej chwili, gdy położenie kulki na kole odpowiada godzinie 5 na tarczy zegara, kulka odrywa się od koła na wysokości $h = 1{,}2$ m nad podłogą i w odległości $d = 2{,}5$ m od ściany pomieszczenia. Na jakiej wysokości nad podłogą kulka uderzy w ścianę?



Rys. 4.54. Zadanie 99

100 Bojer ślizga się po powierzchni zamarzniętego jeziora ze stałym przyspieszeniem pochodzącym od wiatru. W pewnej chwili prędkość bojera wynosi $(6{,}3\hat{i} - 8{,}42\hat{j})$ m/s. Trzy sekundy później w wyniku zmiany kierunku wiatru prędkość chwilowa bojera wynosi zero. Ile wynosiło jego średnie przyspieszenie w ciągu tych 3 s?

101 Jak pokazano na rysunku 4.55, kula zostaje wyrzucona z poziomu ziemi pionowo w górę z prędkością początkową o wartości $v_0 = 7$ m/s i w tej samej chwili kabina dźwigu budowlanego rusza w górę również z poziomu ziemi ze stałą prędkością o wartości $v_d = 3$ m/s. Oblicz największą wysokość, na jaką wzniesie się kula względem: a) poziomu ziemi, b) podłogi kabiny. Z jaką szybkością zmienia się prędkość kuli względem: c) poziomu ziemi, d) podłogi kabiny?



Rys. 4.55. Zadanie 101

102 W polu magnetycznym elektron porusza się po okręgu z przyspieszeniem radialnym o wartości $3 \cdot 10^{14}$ m/s^2. a) Ile wynosi wartość prędkości elektronu, jeśli promień okręgu, po jakim się on porusza, jest równy 15 cm? b) Ile wynosi okres ruchu elektronu?

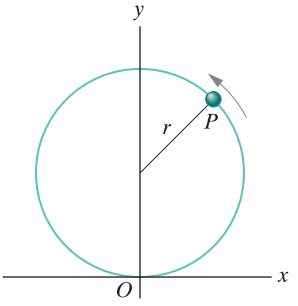
103 Balon wystartował z powierzchni ziemi i w ciągu 3,5 h przemieścił się o 21,5 km na północ i o 9,7 km na wschód, wznosząc się przy tym o 2,88 km. Wyznacz odpowiadające temu przedziałowi czasu: a) wartość średniej prędkości balonu, b) kąt, jaki tworzy wektor tej prędkości balonu z poziomem.

104 Piłka wyrzucona poziomo na wysokości 20 m nad ziemią ma w chwili uderzenia w ziemię prędkość o wartości trzy razy większej od wartości jej prędkości początkowej. Wyznacz prędkość początkową piłki.

105 Pocisk wystrzelono pod kątem 60° w górę od poziomu z prędkością początkową o wartości 30 m/s. Wyznacz a) wartość i b) kierunek prędkości pocisku po 2 s od jego wystrzelenia. c) Czy pocisk wznosi się, czy opada? Wyznacz a) wartość i b) kierunek prędkości pocisku po 5 s od jego wystrzelenia. c) Czy pocisk wznosi się, czy opada?

106 Wektor położenia protonu (w metrach) wynosi początkowo $\vec{r} = 5\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$, a w chwili późniejszej: $\vec{r} = -2\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$. a) Znajdź wektor przemieszczenia protonu. b) Do jakiej płaszczyzny jest on równoległy?

107 Cząstka P porusza się z prędkością o stałej wartości po okręgu o promieniu $r = 3$ m (rys. 4.56), wykonując pełen obieg toru w czasie 20 s. W chwili $t = 0$ cząstka przechodzi przez punkt O. Znajdź wektory położenia cząstki w chwili, gdy t równa się: a) 5 s, b) 7,5 s, c) 10 s, podając ich wartości i kąty tworzone z dodatnim kierunkiem osi x. d) Wyznacz przemieszczenie cząstki w przedziale czasu od końca piątej do końca dziesiątej sekundy ruchu. e) Oblicz średnią prędkość cząstki w tym przedziale czasu oraz prędkość cząstki: f) na początku, g) na końcu tego przedziału. Wyznacz przyspieszenie cząstki: h) na początku, i) na końcu tego przedziału czasu.



Rys. 4.56. Zadanie 107

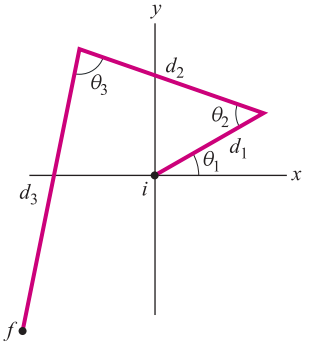
108 Francuski szybki pociąg o nazwie TGV (Train à GrandeVitesse) ma nominalną średnią wartość prędkości 216 km/h. Zakłada się, że jego pasażerowie nie powinni doznawać przyspieszenia o wartości większej niż $0{,}05g$. a) Ile wynosi najmniejszy promień toru, po jakim może jechać pociąg z podaną prędkością, aby nie przekroczyć tej granicy? b) Z jaką prędkością może jechać ten pociąg po torze o promieniu 1 km, aby przyspieszenie nie przekroczyło założonej wartości?

109 Elektron został wystrzelony poziomo z prędkością $3 \cdot 10^6$ m/s. a) O ile zmieni się jego położenie w pionie po przebyciu w poziomie drogi 1 m? b) Czy odpowiedź na powyższe pytanie zwiększy się, czy zmniejszy, jeśli zwiększymy prędkość początkową elektronu?

110 Schody ruchome o długości 15 m przewożą stojącą na nich osobę na piętro w czasie 60 s. Gdy schody są unieruchomione, osoba ta wchodzi po nich na górę w czasie 90 s. W jakim czasie dotrze na piętro ta osoba, wchodząc po schodach będących w ruchu? Czy odpowiedź zależy od długości schodów?

111 a) Jaka jest wartość przyspieszenia dośrodkowego ciała na równiku wynikająca z ruchu obrotowego Ziemi? b) Ile musiałby wynosić okres obrotu Ziemi, aby ciała na równiku doznawały przyspieszenia dośrodkowego o wartości 9,8 m/s^2?

112 Zasięg rzutu ukośnego zależy nie tylko od v_0 i θ_0, lecz i od wartości przyspieszenia ziemskiego g, która jest różna w różnych miejscach na powierzchni Ziemi. W roku 1936 Jesse Owens ustanowił rekord świata w skoku w dal, skacząc 8,09 m na Igrzyskach Olimpijskich w Berlinie (gdzie $g = 9{,}8128$ m/s^2). Jaki wynik dałby taki sam skok (o takich samych wartościach v_0 i θ_0) oddany w 1956 roku na Olimpiadzie w Melbourne (gdzie $g = 9{,}7999$ m/s^2)?



Rys. 4.57. Zadanie 113

113 Na rysunku 4.57 przedstawiono tor biegu skunksa

na płaskiej polance, oznaczając przez i punkt początkowy, a przez f punkt końcowy. Zaznaczone na rysunku kąty wynoszą: $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 50°$ i $\theta_3 = 80°$, a odległości są równe: $d_1 = 5$ m, $d_2 = 8$ m i $d_3 = 12$ m. Wyznacz a) długość i b) kierunek przemieszczenia skunksa z punktu i do punktu f.

114 Wektor położenia $\vec{r}$ cząstki poruszającej się w płaszczyźnie xy jest dany wzorem $\vec{r} = 2t\hat{i} + 2\sin[(\pi/4 \text{ rad/s})t]\hat{j}$, gdzie $\vec{r}$ wyrażono w metrach, a t w sekundach. a) Oblicz składowe x i y położenia cząstki dla $t = 0$, 1 s, 2 s, 3 s i 4 s oraz naszkicuj tor cząstki w płaszczyźnie xy w przedziale czasu $0 \leqslant t \leqslant 4$ s. b) Oblicz składowe prędkości cząstki dla $t = 1$ s, 2 s i 3 s. Wykaż, że wektor prędkości cząstki jest w każdej chwili styczny do toru cząstki i ma kierunek, w którym się ona porusza, rysując wektory prędkości na wykresie toru cząstki z punktu (a). c) Oblicz składowe przyspieszenia cząstki dla $t = 1$ s, 2 s i 3 s.

115 Elektron poruszający się poziomo z prędkością o wartości $1 \cdot 10^9$ cm/s wchodzi w obszar między dwiema poziomymi, naładowanymi elektrycznie płytami metalowymi. Ich obecność powoduje, że elektron doznaje stałego przyspieszenia, skierowanego w dół, o wartości $1 \cdot 10^{17}$ cm/s^2. Wyznacz: a) czas, potrzebny elektronowi na przebycie w tym obszarze 2 cm w poziomie, b) odległość przebytą przez niego w tym czasie w pionie. Oblicz ponadto wartości składowych prędkości elektronu: c) poziomej, d) pionowej, po przebyciu tej drogi.

116 Otwarta od góry kabina dźwigu wznosi się ze stałą prędkością 10 m/s. Znajdujący się w kabinie chłopiec wystrzeliwuje kulę pionowo w górę z wysokości 2 m nad podłogą kabiny w chwili, gdy ta podłoga jest 28 m nad ziemią. Prędkość początkowa kuli wynosi 20 m/s względem kabiny. a) Wyznacz największą wysokość nad ziemią, na jaką wzniesie się kula. b) Oblicz czas, po jakim kula spadnie na podłogę kabiny.

117 Piłkarz odbija piłkę z woleja tak, że po czasie 4,5 s upada ona w odległości 46 m od niego. Oblicz: a) wartość, b) kierunek prędkości początkowej piłki, jeśli w chwili odbicia noga piłkarza znajdowała się na wysokości 150 cm nad boiskiem.

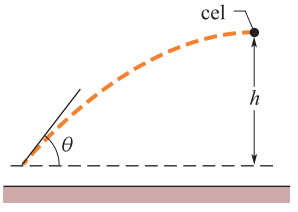
118 Na lotnisku jest ruchomy chodnik umożliwiający pasażerom szybsze przebycie długiego korytarza. Leszek nie chce jechać tym chodnikiem i przechodzi korytarz w ciągu 150 s. Karol jedzie chodnikiem, po prostu na nim stojąc, i przebywa ten sam dystans w ciągu 70 s. Marek wchodzi na chodnik, lecz następnie idzie po nim. Po jakim czasie Marek znajdzie się na końcu korytarza? Przyjmij, że idzie on z tą samą prędkością co Leszek.

119 Drewniany wagon towarowy jedzie po prostym torze z prędkością $v_1 = 85$ km/h. Snajper oddaje strzał w kierunku tego wagon. Kula wylatuje z lufy karabinu z prędkością $v_2 = 650$ m/s i przebija obie dłuższe ściany wagonu tak, że otwory po kuli w ścianach wagonu leżą dokładnie naprzeciw siebie. W jakim kierunku względem toru, po którym jechał wagon, został oddany strzał? Przyjmij, że kierunek lotu kuli nie zmienia się przy przejściu przez ścianę wagonu, lecz jej prędkość maleje o 20%. Zastanów się, dlaczego nie musisz znać szerokości wagonu.

120 Sprinter biegnie po kołowym torze z prędkością o stałej wartości 9,2 m/s i przyspieszeniem dośrodkowym o wartości 3,8 m/s^2. Wyznacz a) promień toru i b) okres ruchu po okręgu.

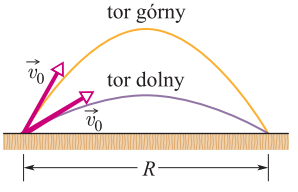
121 Przyjmij, że pojazd kosmiczny może bezpiecznie znieść ruch z przyspieszeniem nie większym niż $20g$. a) Wyznacz minimalny dopuszczalny promień skrętu tego pojazdu, gdy porusza się on z prędkością równą jednej dziesiątej prędkości światła. b) Ile czasu potrzebuje statek na wykonanie przy tej prędkości skrętu o 90°?

122 GO Masz trafić kulą, rzuconą z prędkością o wartości 12 m/s, w cel położony o $h = 5$ m wyżej niż poziom wyrzucenia kuli (rys. 4.58) i to tak, by jej prędkość w chwili dotarcia do celu była pozioma. a) Pod jakim kątem do poziomu θ musisz rzucić kulę? b) Ile wynosi odległość w poziomie od punktu wyrzucenia kuli do celu? c) Ile wynosi wartość prędkości kuli tuż przed dotarciem do celu?



Rys. 4.58. Zadanie 122

123 Pocisk ma być wystrzelony z poziomu ziemi z prędkością początkową o wartości $v_0 = 30$ m/s, tak by trafił w cel znajdujący się również na poziomie ziemi w odległości $R = 20$ m od punktu wystrzelenia pocisku (patrz rys. 4.59). Wyznacz a) mniejszy i b) większy z kątów, pod jakimi można wystrzelić pocisk, aby trafić w cel.



Rys. 4.59. Zadanie 123

124 *Zaskakujące wykresy*. W chwili $t = 0$ wyrzucono pasztecik z poziomu ziemi z prędkością początkową 16 m/s pod kątem θ_0 do poziomu. Jeśli wybierzemy początek układu współrzędnych w punkcie wyrzutu, to wektor położenia pasztecika łączy w każdej chwili lotu punkt wyrzutu z punktem, w którym pasztecik znajduje w tej chwili. Sporządź wykres długości r wektora położenia jako funkcji czasu dla a) $\theta_0 = 40°$ i b) $\theta_0 = 80°$. Odczytaj z wykresu dla $\theta_0 = 40°$: c) kiedy r jest największe, d) ile wynosi ta wartość maksymalna, jaka jest wówczas odległość pasztecika od punktu jego wyrzucenia e) w poziomie i f) w pionie. Odczytaj z wykresu dla $\theta_0 = 80°$: g) kiedy r jest największe, h) ile wynosi ta wartość maksymalna, jaka jest wówczas odległość pasztecika od punktu jego wyrzucenia i) w poziomie i j) w pionie.

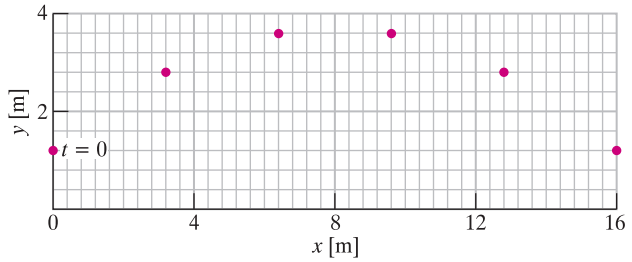
125 Działo ustawione na poziomie morza wyrzuca kulę z prędkością początkową 82 m/s pod kątem 45°. Kula wpada do wody w odległości poziomej od działa równej 686 m. O ile większa byłaby ta odległość w poziomie, gdyby działo ustawić 30 m wyżej?

126 Gdy ciało w rzucie ukośnym znajduje się na największej wysokości nad ziemią, jej prędkość ma wartość 10 m/s. a) Jaką wartość ma prędkość ciała 1 s przed dotarciem do punktu o największej wysokości? b) Jaką wartość ma prędkość ciała 1 s po dotarciu do punktu o największej wysokości? Wybierzmy układ współrzędnych tak, by miał początek w najwyższym punkcie toru ciała, a oś x miała kierunek prędkości ciała w tym punkcie. Ile wynosi w tym układzie c) współrzędna x i d) współrzędna y ciała 1 s przed dotarciem do punktu o największej wysokości? Ile wynosi w tym układzie e) współrzędna x i f) współrzędna y ciała 1 s po dotarciu do punktu o największej wysokości?

127 Wystraszony zając wbiega na duży zamarznięty staw i ślizga się po lodzie bez tarcia. Prędkość początkowa zająca ma wartość 6 m/s i jest skierowana na wschód. Gdy zając ślizga się po lodzie, doznaje pod wpływem wiatru stałego przyspieszenia o wartości 1,4 m/s^2 skierowanego na północ. Wybierz układ współrzędnych o początku w punkcie wbiegnięcia zająca na staw i osi x, której dodatni kierunek to kierunek wschodni. Podaj w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych a) prędkość i b) położenie zająca po 3 s od wbiegnięcia na staw.

128 Samolot leci prosto na wschód (względem ziemi), a wiatr wieje na południe z prędkością 20 km/h. Z jaką prędkością leci samolot (względem ziemi), jeśli pod nieobecność wiatru jego prędkość wynosiłaby 70 km/h?

129 Siatkarz odbija piłkę na wysokości 1,2 m nad parkietem. Na rysunku 4.60 przedstawiono kilka położeń piłki, odpowiadających chwilom odległym o 0,25 s, przy czym moment odbicia piłki przyjęto za $t = 0$. a) Jaka jest wartość prędkości początkowej piłki? b) Jaka jest wartość prędkości piłki w chwili jej największego wzniesienia nad parkietem? c) Ile wynosi to największe wzniesienie piłki?

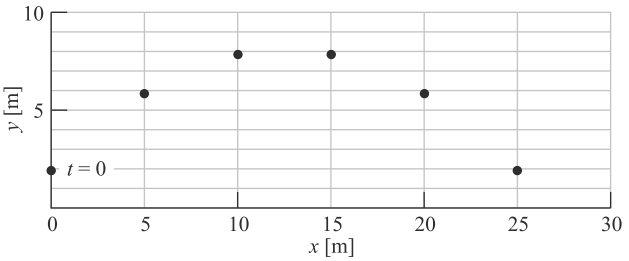


Rys. 4.60. Zadanie 129

130 Policja wykorzystuje nieraz samoloty do nadzoru przestrzegania ograniczenia prędkości na autostradach. Załóż, że jeden z nich lata pod nieobecność wiatru z prędkością 135 mil/h. Ma on lecieć prosto na północ, tak by znajdować się cały czas nad autostradą biegnącą z północy na południe. Pilot dostaje przez radio wiadomość z ziemi, że prędkość wiatru wynosi 70 mil/h, lecz przez niedopatrzenie nie zostaje poinformowany o kierunku wiatru. Pilot stwierdza, że mimo obecności wiatru jest w stanie przelecieć 135 mil wzdłuż autostrady w ciągu 1 godziny. Innymi słowy, wartość prędkości samolotu względem ziemi jest taka sama jak pod nieobecność wiatru. a) Z jakiego kierunku wieje wiatr? b) Jaki jest kurs samolotu, tzn. w jakim kierunku działa siła ciągu silników?

131 Golfista wybija piłkę ze szczytu wzniesienia pod kątem 30° do poziomu z prędkością początkową 43 m/s. Piłka upada na trawę w punkcie odległym w poziomie o 180 m od punktu jej wybicia. Przyjmij, że poza wzniesieniem trawiaste pole jest poziome. a) Oblicz wysokość wzniesienia. b) Oblicz wartość prędkości piłki w chwili jej upadku na trawę.

132 Na pewnej odległej planecie zorganizowano mityng lekkoatletyczny. Zawodnik startujący w konkurencji pchnięcia kulą wyrzucił kulę na wysokości 2 m nad boiskiem. Na rysunku 4.61 przedstawiono na wykresie kilka położeń kuli w chwilach odległych od siebie o 0,5 s, przy czym kula została wyrzucona w chwili $t = 0$. a) Wyznacz prędkość początkową kuli, zapisując ją przy użyciu wektorów jednostkowych. b) Ile wynosi wartość przyspieszenia grawitacyjnego na tej planecie? c) Po jakim czasie od chwili jej wyrzucenia kula spadnie na boisko? d) Po jakim czasie od chwili jej wyrzucenia spadłaby na boisko na Ziemi kula wyrzucona w taki sam sposób?



Rys. 4.61. Zadanie 132

133 Ze śmigłowca, lecącego wzdłuż linii prostej na wysokości 9,5 m nad poziomym polem ze stałą prędkością 6,2 m/s, wyrzucono poziomo paczkę. Prędkość początkowa paczki względem śmigłowca miała wartość 12 m/s i była skierowana przeciwnie do kierunku lotu śmigłowca. a) Wyznacz prędkość początkową paczki względem ziemi. b) Oblicz odległość w poziomie śmigłowca od paczki w chwili upadku paczki na ziemię. c) Wyznacz – w układzie odniesienia związanym z ziemią – kąt, jaki tworzy z poziomem wektor prędkości paczki tuż przed jej upadkiem na ziemię.

134 Samochód zakreśla płaski okrąg na placu, poruszając się z prędkością o stałej wartości równej 12 m/s. W pewnej chwili samochód ma przyspieszenie o wartości 3 m/s^2 skierowane na wschód. Ile wynosi w tej chwili odległość samochodu od środka okręgu i w jakim kierunku od środka znajduje się

samochód, jeśli porusza się on po okręgu: a) zgodnie z ruchem wskazówek zegara, b) przeciwnie do ruchu wskazówek zegara?

135 Rzucasz piłkę ze skraju urwiska z prędkością początkową o wartości 15 m/s skierowaną pod kątem 20° w dół od poziomu. Wyznacz jej a) przemieszczenie w poziomie, b) przemieszczenie w pionie w ciągu pierwszych 2,3 s lotu.

136 Na stadionie Fenway Park w Bostonie piłka baseballowa została odbita przez gracza na wysokości 0,762 m nad ziemią. Została jej przy tym nadana prędkość początkowa o wartości 33,53 m/s skierowana pod kątem 55° w górę od poziomu. Po 5 s od wybicia piłka przeleciała nad ścianą o wysokości 11,28 m, lecąc nad linią biegnącą od miejsca wybicia prostopadle do ściany. Wyznacz: a) odległość w poziomie od miejsca wybicia piłki do ściany, b) odległość w pionie od punktu, w którym piłka przeleciała nad ścianą, do górnego skraju ściany, c) przemieszczenie piłki w poziomie i w pionie od miejsca odbicia do punktu, w którym znalazła się 0,5 s przed przelotem nad ścianą.

137 Rozkład lotów przewiduje, że lot międzykontynentalny między miastami odległymi od siebie o 4350 km trwa o 50 minut dłużej, gdy samolot leci na zachód niż w przeciwnym kierunku. Prędkość samolotu względem powietrza (unoszonego przez prąd powietrzny) wynosi 966 km/h, a prąd powietrza jest skierowany na wschód. Jaka jest prędkość tego prądu powietrznego?

138 Wioślarka może na spokojnej wodzie nadać łodzi prędkość 6,4 km/h. a) Chce ona przeprawić się przez rzekę, w której woda płynie z prędkością 3,2 km/h, tak by dotrzeć na drugi brzeg dokładnie naprzeciw miejsca, z którego wypływa. Pod jakim kątem do brzegu powinna skierować łódź? b) Ile czasu zajmie jej przeprawa przez rzekę o szerokości 6,4 km? c) Wyobraź sobie, że ta sama wioślarka płynie 3,2 km *w dół rzeki* i z powrotem. Ile czasu jej to zajmie? d) Wyobraź sobie z kolei, że wioślarka płynie 3,2 km *w górę rzeki* i z powrotem. Ile czasu jej to zajmie? e) Pod jakim kątem do brzegu powinna skierować łódź ta wioślarka, jeśli chce przeprawić się przez rzekę jak najszybciej? Ile wynosi ten minimalny czas przeprawy?

ROZDZIAŁ 5

Siła i ruch I

5.1. PIERWSZA I DRUGA ZASADA DYNAMIKI NEWTONA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał. . .

5.01 wyjaśnić, że siła jest wielkością wektorową, a więc ma wartość bezwzględną i kierunek, można też wyrazić ją przez jej składowe;

5.02 wyznaczyć sumę wektorową dwóch lub więcej sił działających na tę samą cząstkę, aby znaleźć wypadkową tych sił;

5.03 wyjaśnić treść pierwszej i drugiej zasady dynamiki Newtona;

5.04 wyjaśnić pojęcie inercjalnego układu odniesienia;

5.05 narysować diagram sił działających na ciało, zaznaczając na nim ciało jako kropkę i rysując siły w postaci wektorów o początkach w punkcie, w którym znajduje się ciało;

5.06 zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona, tzn. zależność między wypadkową sił działających na ciało, masą tego ciała i jego przyspieszeniem pod wpływem siły wypadkowej;

5.07 wytłumaczyć, że tylko działające na ciało siły *zewnętrzne* mogą wprawić ciało w ruch przyspieszony.

Podstawowe fakty

● Prędkość ciała może ulec zmianie (czyli może być ono wprawione w ruch przyspieszony) jedynie w wyniku działania na nie jednej lub kilku sił ze strony innych ciał. Dynamika to dział mechaniki, w którym badamy, jak zależą od siebie przyspieszenia i siły.

● Siły są wielkościami wektorowymi. Ich wartości bezwzględne (moduły) mierzymy wielkością przyspieszenia, jakie te siły nadają ciału o masie jednego kilograma. Siła, która takiemu ciału nadaje przyspieszenie równe 1 m/s^2, ma moduł równy 1 N (jednemu niutonowi). Kierunkiem wektora siły jest kierunek wywoływanego przez nią przyspieszenia. Dodawanie sił odbywa się na podstawie zasad algebry wektorowej. Wypadkowa sił działających na ciało to suma wektorowa wszystkich sił, jakie na to ciało działają.

● Jeśli wypadkowa sił działających na ciało jest równa zeru, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się po linii prostej ze stałą prędkością.

● Układy odniesienia, w których spełnione są zasady dynamiki Newtona, nazywa się inercjalnymi układami odniesienia lub po prostu układami inercjalnymi. Układy odniesienia, w których zasady dynamiki Newtona nie obowiązują, nazywa się nieinercjalnymi układami odniesienia lub po prostu układami nieinercjalnymi.

● Masa ciała to wielkość charakteryzująca ciało, wiążąca przyspieszenie, jakie uzyskuje to ciało, z powodującą je siłą. Masa jest wielkością skalarną.

● Wypadkowa $\vec{F}_{\text{wyp}}$ sił działających na ciało o masie m jest związana z przyspieszeniem ciała $\vec{a}$ równaniem

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a},$$

które jest równoważne równaniom dla składowych:

$$F_{\text{wyp},x} = ma_x, \qquad F_{\text{wyp},y} = ma_y \qquad \text{oraz} \qquad F_{\text{wyp},z} = ma_z.$$

Z drugiej zasady dynamiki wynika też związek między jednostkami występujących w niej wielkości:

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot\ \text{m/s}^2.$$

● Diagram sił rysujemy, biorąc pod uwagę siły działające na *tylko jedno* ciało. Ciało rysujemy w uproszczeniu lub przedstawiamy za pomocą kropki. Nanosimy na rysunek siły zewnętrzne działające na ciało, zaznaczając też na nim układ współrzędnych wybrany tak, by ułatwić nam rozwiązanie zadania.

O fizyce

Wiemy już, że fizyka zajmuje się między innymi badaniem ruchów ciał, w tym ich przyspieszeń, czyli zmian ich prędkości. Fizyka pomaga też ustalić *przyczynę* ruchu przyspieszonego ciała. Jest nią **siła**, czyli — mówiąc poglądowo — to, co odpycha lub przyciąga ciało. Mówimy, że siła *działa* na ciało, zmieniając jego prędkość. Na przykład, gdy samochód rusza z miejsca, na jego koła działa siła ze strony podłoża, co wprawia samochód w ruch przyspieszony. Gdy podczas meczu piłki ręcznej obrońca przewraca napastnika, działa na niego siłą, powodując jego ruch przyspieszony w tył. Gdy autobus wpada na latarnię uliczną, latarnia działa na niego siłą, powodując jego zatrzymanie. Czasopisma fizyczne, techniczne, prawne i medyczne są pełne artykułów dotyczących sił i ciał, w tym również ludzi.

Uważaj! Wielu studentów mówi, że ten rozdział jest trudniejszy od poprzednich. Jedną z przyczyn takiej oceny jest pewnie konieczność stosowania równań, w których występują wektory, a nie tylko skalary, trzeba więc znać reguły działań na wektorach z rozdziału 3. Inną z przyczyn może być mnogość sytuacji, w jakich napotkamy badane ciała — będą się one poruszać po podłodze, suficie, ścianach i pochylniach. Będą podnoszone za pomocą liny przełożonej przez bloczek lub umieszczone w jadących w górę lub w dół wagonikach dźwigu. A czasem mogą być nawet dosłownie związane ze sobą.

Jednak mimo tych wszystkich komplikacji jest tylko jeden prosty związek umożliwiający rozwiązanie większości zadań — jest nim druga zasada dynamiki Newtona. Celem tego rozdziału jest wytłumaczenie ci, jak stosować ten podstawowy związek w różnych sytuacjach fizycznych. Nabycie umiejętności wymaga wielu ćwiczeń, będziesz więc musiał rozwiązać wiele zadań, nie wystarczy tylko czytanie tekstu podręcznika. Czytajmy zatem, co trzeba, a potem bierzmy się za zadania.

Mechanika klasyczna

Przedmiotem niniejszego rozdziału jest związek siły z wywołanym przez nią przyspieszeniem, podany po raz pierwszy przez Izaaka Newtona (1642–1727). Analiza tej zależności, oparta na rozważaniach Newtona, nosi nazwę *mechaniki klasycznej* (newtonowskiej). Trzy podstawowe jej prawa, które zbadamy szczegółowo, noszą nazwę zasad dynamiki Newtona.

Mechanika klasyczna nie opisuje wszystkich sytuacji spotykanych w przyrodzie. Jeśli prędkości oddziałujących ciał są bardzo duże — niewiele mniejsze od prędkości światła — to zamiast mechaniki klasycznej trzeba zastosować szczególną teorię względności Einsteina, która prawidłowo opisuje ruch z dowolną prędkością, także z prędkością bliską prędkości światła. Jeśli oddziałujące ciała są bardzo małe — ich rozmiary są rzędu rozmiarów składników budowy atomu (mogą to być na przykład elektrony w atomie), to nie należy posługiwać się mechaniką klasyczną, lecz mechaniką kwantową. Fizycy uważają dziś mechanikę klasyczną za przypadek szczególny tych dwóch ogólnych teorii. Jest to jednak bardzo ważny przypadek szczególny, dający prawidłowy opis ruchu ciał zarówno bardzo małych (niemal rozmiarów atomów), jak i bardzo dużych (na przykład galaktyk i ich skupisk).

Pierwsza zasada dynamiki Newtona

Przed sformułowaniem praw mechaniki przez Newtona uważano, że aby utrzymać ciało w ruchu o stałej prędkości, coś — jakaś „siła" musi na nie działać. W tym samym duchu sądzono, że „stanem naturalnym" ciała jest jego spoczynek. Ludziom wydawało się, że aby utrzymać ciało w ruchu ze stałą prędkością, należy je jakoś napędzać, na przykład popychać lub ciągnąć. Jeśli nie będziemy tego robić, to ciało „w sposób naturalny" w końcu się zatrzyma.

Pogląd ten wyglądał rozsądnie. Krążek wprawiony w ruch ślizgowy po drewnianej podłodze będzie zwalniał, aż w końcu się zatrzyma. Jeśli chcemy, aby poruszał się on po podłodze ze stałą prędkością, to musimy go przez cały czas pchać lub ciągnąć.

Jeśli jednak wykonamy takie samo doświadczenie na gładkiej powierzchni lodu na torze łyżwiarskim, to ruch krążka będzie trwał znacznie dłużej. Możemy sobie wyobrażać coraz bardziej śliskie powierzchnie, po których krążek będzie się ślizgał coraz dalej. W przypadku skrajnym otrzymamy bardzo długą, niezwykle śliską powierzchnię, na której krążek praktycznie nie zwalnia (bardzo dobrym laboratoryjnym przybliżeniem takiej sytuacji jest ruch krążka na poduszce powietrznej, wytworzonej na poziomym stole z wieloma otworami, przez które wydmuchiwane jest powietrze).

Z tych obserwacji możemy wyciągnąć wniosek, że jeśli na ciało nie działa żadna siła, to porusza się ono ze stałą prędkością. Otrzymujemy w ten sposób pierwszą zasadę dynamiki Newtona.

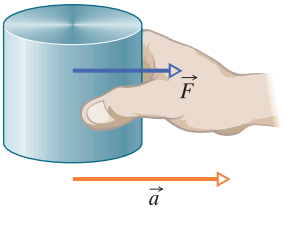
Pierwsza zasada dynamiki Newtona. Jeśli na ciało nie działa żadna siła, to nie może zmienić się jego prędkość, czyli nie może ono przyspieszyć.

Innymi słowy, jeśli ciało spoczywa, to pozostanie w spoczynku, a jeśli się porusza, to będzie się nadal poruszać z tą samą prędkością (to znaczy z prędkością *o tej samej wartości i kierunku*).

Siła

Zanim zaczniemy rozwiązywać zadania, w których występują siły, musimy poznać różne cechy sił: ich jednostki, ich naturę wektorową, reguły ich dodawania oraz warunki, w których możemy je mierzyć (tak by nie przyjąć błędnie jakiejś siły fikcyjnej za realną).

Jednostka. Jednostkę siły możemy określić za pomocą przyspieszenia, jakie nadaje ona pewnemu ciału wzorcowemu. Jako ciała wzorcowego użyjemy (a właściwie wyobrazimy sobie, że używamy) wzorca kilograma z rysunku 5.1. Temu ciału przypisano — z definicji — masę równą dokładnie 1 kg. Umieśćmy nasze ciało wzorcowe na poziomym stole bez tarcia i ciągnijmy je w prawo (rys. 5.1) tak, aby przyspieszenie ciała wynosiło 1 m/s^2. Uznamy wtedy — na mocy definicji — że siła, jaką działamy na ciało, jest równa 1 niutonowi (oznaczanemu jako N). Gdy będziemy działać na nasze ciało wzorcowe siłą 2 N, stwierdzimy, że nadajemy mu przyspieszenie 2 m/s^2. Przyspieszenie jest zatem proporcjonalne do siły. Jeśli ciało



Rys. 5.1. Siła $\vec{F}$ działająca na wzorzec kilograma nadaje mu przyspieszenie $\vec{a}$

wzorcowe o masie 1 kg uzyskuje przyspieszenie o wartości a, to działa na nie siła o wartości (w niutonach) równej liczbowo wartości jego przyspieszenia (w metrach na sekundę do kwadratu). Otrzymaliśmy w ten sposób operacyjną definicję jednostki siły, opartą na stwierdzeniu, że miarą siły jest wywołane przez nią przyspieszenie.

Wektory. Siła jest wielkością wektorową, tzn. ma zarówno wartość, jak i kierunek. Oznacza to, że gdy na ciało działają dwie lub więcej sił, ich **siłę wypadkową** otrzymujemy, dodając wektorowo poszczególne siły składowe zgodnie z regułami działań na wektorach z rozdziału 3. Jest to siła, której działanie na ciało jest takie samo, jak łączne działanie sił składowych. Właściwość ta nosi nazwę **zasady superpozycji sił**, dzięki której relacje wzajemne sił stają się rozsądne i łatwe do zrozumienia. Świat byłby bardzo dziwnie skonstruowany, gdyby w sytuacji, gdy na przykład ty i kolega ciągniecie ciało wzorcowe w tym samym kierunku siłą 1 N każdy, siła wypadkowa wynosiła — powiedzmy — 14 N, a zatem nadawała ciału przyspieszenie 14 m/s^2.

W tej książce siłę będziemy zwykle oznaczać jako $\vec{F}$, a siłę wypadkową jako $\vec{F}_{\text{wyp}}$. Podobnie jak w przypadku innych wektorów siłę, między innymi siłę wypadkową można rozłożyć na składowe wzdłuż osi układu współrzędnych. Gdy wszystkie siły działają wzdłuż jednej osi, można opuścić strzałki nad symbolami sił i używać znaku plus lub minus do oznaczenia kierunku sił wzdłuż tej osi.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona. Możemy teraz zastąpić poprzednie sformułowanie pierwszej zasady dynamiki Newtona sformułowaniem, które jest bardziej poprawne, korzystając z pojęcia *siły wypadkowej*.



Pierwsza zasada dynamiki Newtona. Jeśli *wypadkowa* sił działających na ciało jest równa zeru ($\vec{F}_{\text{wyp}} = 0$), to nie może zmienić się jego prędkość, czyli nie może ono przyspieszyć.

Na ciało może działać wiele sił, ale jeśli ich wypadkowa wynosi zero, to ciało nie doznaje przyspieszenia. Gdy zatem stwierdzimy, że jakieś ciało ma stałą prędkość, uznamy zaraz, że wypadkowa działających na nie sił jest równa zeru.

Inercjalne układy odniesienia

Pierwsza zasada dynamiki Newtona nie obowiązuje we wszystkich układach odniesienia, ale zawsze można znaleźć taki układ, w którym zasada ta (podobnie jak cała mechanika klasyczna) jest słuszna. Takie układy nazywamy **inercjalnymi układami odniesienia** lub po prostu **układami inercjalnymi**.

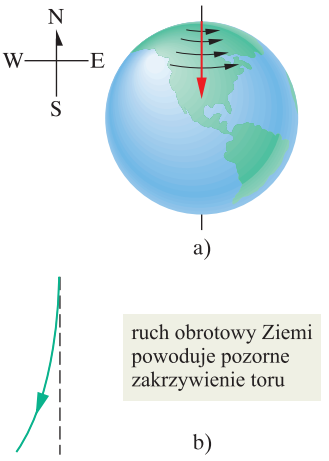


Inercjalny układ odniesienia jest to taki układ, w którym spełnione są zasady dynamiki Newtona.

Na przykład układ związany z Ziemią można uważać za inercjalny pod warunkiem, że zjawiska związane z astronomicznym ruchem Ziemi (jak jej ruch obrotowy) można pominąć.

Takie założenie jest usprawiedliwione, jeśli na przykład badamy ruch ślizgowy krążka na lodzie (bez tarcia) na *krótkiej* drodze — obserwator na Ziemi stwierdzi wówczas, że dla tego ruchu zasady mechaniki klasycznej są spełnione. Zbadajmy jednak ruch tego krążka na drodze *bardzo długiej*, powiedzmy od bieguna północnego do południowego. W układzie nieruchomym w przestrzeni kosmicznej krążek porusza się na południe po linii prostej, gdyż ruch obrotowy Ziemi powoduje tylko przemieszczanie się lodu pod krążkiem. Natomiast obserwator na Ziemi, obracający się wraz z nią, stwierdzi, że tor krążka nie jest prostoliniowy. Wynikająca z ruchu obrotowego Ziemi skierowana na wschód prędkość lodu pod krążkiem jest tym większa, im dalej na południe dociera krążek, a zatem w układzie związanym z Ziemią tor krążka wygina się w kierunku zachodnim (rys. 5.2a). To pozorne wygięcie toru krążka nie jest spowodowane istnieniem żadnej siły, jak wymagają zasady dynamiki, lecz bierze się stąd, że układ związany z Ziemią jest w tym przypadku **układem nieinercjalnym**, a zatem próba wyjaśnienia krzywizny toru krążka działaniem jakiejś siły doprowadziłaby nas do wprowadzenia siły fikcyjnej, czyli takiej, której w rzeczywistości nie ma. Z jeszcze bardziej znanym przykładem siły pozornej mamy do czynienia, gdy samochód gwałtownie przyspiesza i mamy wrażenie jakby jakaś siła wciskała nas w fotel.

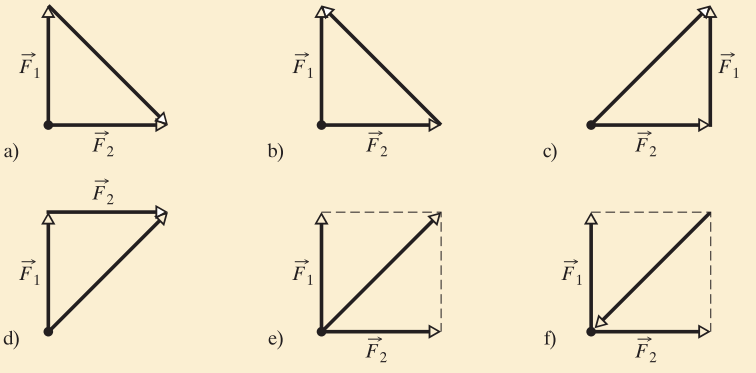
W tej książce będziemy zwykle zakładać, że układ związany z Ziemią jest inercjalny i że to w nim dokonujemy pomiarów sił i przyspieszeń. Jeśli jednak takie pomiary będą wykonywane w układzie nieinercjalnym, na przykład w pojeździe poruszającym się ruchem przyspieszonym względem Ziemi, to ich wyniki mogą być nieoczekiwane z punktu widzenia mechaniki klasycznej.



Rys. 5.2. a) Tor krążka ślizgającego się bez tarcia po lodzie z bieguna północnego na południe, widziany przez obserwatora w stałym położeniu w przestrzeni kosmicznej. Ziemia obraca się na wschód. b) Tor krążka w układzie odniesienia związanym z Ziemią

Sprawdzian 1

Na których z pokazanych niżej rysunków siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ są poprawnie dodane do siebie wektorowo, tak że trzeci wektor, pokazany na rysunku jest wektorem ich siły wypadkowej $\vec{F}_{wyp}$



Masa

Jak wiemy z codziennych obserwacji, taka sama siła nadaje różnym ciałom (na przykład piłce tenisowej i piłce lekarskiej) różne przyspieszenie. Proste wyjaśnienie tego faktu — ciała o większej masie uzyskują mniejsze przyspieszenie — jest oczywiście słuszne, lecz wolelibyśmy poznać tę zależność dokładniej. Otóż przyspieszenie ciała jest w rzeczywistości odwrotnie proporcjonalne do masy ciała (a nie na przykład do kwadratu masy).

Aby przekonać się o słuszności powyższej zależności, wyobraźmy sobie — jak nieco wcześniej — doświadczenie z ciałem wzorcowym. Przyłóżmy do tego ciała, które ma masę 1 kg, siłę o wartości 1 N. Ciało uzyska przyspieszenie o wartości 1 m/s^2. Następnie przyłóżmy taką samą siłę do innego ciała, powiedzmy ciała X, i przyjmijmy, że uzyskało ono przyspieszenie 0,25 m/s^2. Możemy wysunąć następującą hipotezę (która jest poprawna): jeśli do dwóch ciał przykładamy jednakową siłę, to

$$\frac{m_X}{m_0} = \frac{a_0}{a_X},$$

wobec czego

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1\ \text{kg}) \frac{(1\ \text{m/s}^2)}{(0{,}25\ \text{m/s}^2)} = 4\ \text{kg}.$$

Otrzymana w ten sposób definicja masy ciała X będzie oczywiście użyteczna tylko wtedy, gdy będzie słuszna także dla innych wartości siły przykładanej do ciał. Na przykład, przykładając do ciała wzorcowego siłę 8 N, otrzymamy przyspieszenie 8 m/s^2, a przykładając tę siłę do ciała X — przyspieszenie 2 m/s^2, gdyż wówczas, obliczając masę ciała X, dostaniemy

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1\ \text{kg}) \frac{(8\ \text{m/s}^2)}{(2\ \text{m/s}^2)} = 4\ \text{kg},$$

zgodnie z wynikiem pierwszego doświadczenia, co świadczy o tym, że nasza definicja masy jest zgodna z doświadczeniem, a zatem użyteczna.

Wyniki naszych pomiarów wskazują, że masa jest cechą przynależną samemu ciału, to znaczy, że każde ciało ma właściwą mu masę. Wynika z nich również, że masa jest wielkością skalarną. Niemniej jednak nadal nie daje nam spokoju pytanie: co to właściwie jest masa?

Słowo „masa" występuje w języku potocznym, podejrzewamy zatem, że powinniśmy je rozumieć intuicyjnie. Może powinniśmy je wiązać z jakąś znaną nam cechą ciała, np. rozmiarem, ciężarem czy gęstością? Odpowiedź brzmi: nie, choć te wielkości są nieraz mylone z masą. Możemy powiedzieć tylko tyle, że *masa ciała jest tą jego cechą, która wiąże siłę przyłożoną do ciała z uzyskiwanym przez nie wówczas przyspieszeniem*. Masy nie da się prościej zdefiniować. Możemy coś o niej powiedzieć tylko wtedy, gdy nadajemy ciału przyspieszenie, jak np. wtedy, gdy kopiemy piłkę tenisową lub kulę do kręgli.

Druga zasada dynamiki Newtona

Omówione dotychczas definicje, doświadczenia i obserwacje można podsumować jednym prostym stwierdzeniem.

Druga zasada dynamiki Newtona. Siła wypadkowa działająca na ciało jest równa iloczynowi masy tego ciała i jego przyspieszenia.

Można to zapisać w postaci równania:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a} \qquad \text{(druga zasada dynamiki Newtona).} \qquad (5.1)$$

Wybór ciała. Równanie to jest proste, przydatne do rozwiązania niemal wszystkich zadań z tego rozdziału, lecz korzystanie z niego wymaga rozwagi. Po pierwsze, musimy mieć pewność, do którego ciała je stosujemy. Po drugie, $\vec{F}_{\text{wyp}}$ musi być sumą wektorową *wszystkich* sił działających *na to ciało*. Siły, które występują w badanej sytuacji fizycznej, lecz działają na *inne ciała*, nie mogą wchodzić do tej sumy. Jeśli na przykład jesteś jednym z rugbistów w młynie, to siła wypadkowa działająca na ciebie jest sumą wszystkich sił, jakimi ciągną cię i pchają inni zawodnicy. Nie zawiera ona natomiast sił, jakimi ty ciągniesz lub pchasz innych, ani sił, jakimi inni działają na jeszcze innych. W każdym zadaniu dotyczącym sił musisz przede wszystkim rozsądnie wybrać ciało, dla którego zapiszesz drugą zasadę dynamiki.

Rozkład na składowe. Podobnie jak inne równania wektorowe, równanie (5.1) jest równoważne trzem równaniom dla składowych wzdłuż każdej z osi układu współrzędnych xyz:

$$F_{\text{wyp},x} = ma_x, \quad F_{\text{wyp},y} = ma_y \quad \text{oraz} \quad F_{\text{wyp},z} = ma_z. \qquad (5.2)$$

Każde z tych równań wiąże składową siły wzdłuż jednej z osi ze składową przyspieszenia wzdłuż tej samej osi. Na przykład pierwsze z nich oznacza, że suma składowych wzdłuż osi x wszystkich sił działających na ciało jest źródłem składowej przyspieszenia ciała wzdłuż osi x, lecz nie wywołuje przyspieszenia w kierunkach y i z. Patrząc na to z drugiej strony, składowa przyspieszenia a_x pochodzi jedynie od sumy składowych sił wzdłuż osi x. Można to wyrazić ogólnie:

Składowa przyspieszenia wzdłuż danej osi układu współrzędnych jest związana z sumą składowych sił *wzdłuż tej osi*, a nie ze składowymi sił wzdłuż innych osi.

Równowaga sił. Z równania (5.1) wynika, że jeśli wypadkowa sił działających na ciało jest równa zeru, to przyspieszenie ciała $\vec{a} = 0$. Jeśli ciało jest w spoczynku, to będzie spoczywać nadal; jeśli się porusza, to będzie nadal w ruchu ze stałą prędkością. W tym przypadku siły działające na ciało *równoważą się* wzajemnie, więc mówimy o *równowadze* zarówno sił, jak i ciała. Mówi się też potocznie, że siły wzajemnie *znoszą się*, lecz termin „znoszą się" może być mylący — *nie oznacza to* przecież, że siły przestają istnieć. Siły nadal działają na ciało.

Jednostki. Równanie (5.1) daje związek między jednostkami układu SI:

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2. \qquad (5.3)$$

Tabela 5.1. Jednostki używane w drugiej zasadzie dynamiki Newtona ((5.1) i (5.2))

Układ	Siła	Masa	Przyspieszenie
SI	newton (N)	kilogram (kg)	m/s^2
CGS[a]	dyna	gram (g)	cm/s^2
jedn. ang.[b]	pound (lb)	slug	ft/s^2

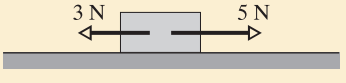
[a] 1 dyna = 1 g · cm/s^2.
[b] 1 lb = 1 slug · ft/s^2.

Diagram sił. Rozwiązując zadania związane z drugą zasadą dynamiki Newtona, sporządzamy zwykle rysunek, na którym przedstawiamy tylko to ciało, dla którego wykonujemy sumowanie działających na nie sił (tzw. **diagram sił**). Niektórzy wykładowcy lubią, aby rysować to ciało schematycznie, lecz my — dla oszczędności miejsca — będziemy zwykle przedstawiać je za pomocą kropki. Siły działające na ciało będziemy zaznaczać w postaci wektorów o początku w punkcie, w którym znajduje się ciało. Zwykle będziemy również rysować układ współrzędnych oraz wektor przyspieszenia ciała. Taki diagram ułatwia skupienie uwagi na ciele, które najbardziej nas obchodzi.

Tylko siły zewnętrzne. Zbiór dwóch lub większej liczby ciał nazywamy **układem ciał**, a siłę działającą na dowolne z nich ze strony ciał nienależących do tego układu nazywamy **siłą zewnętrzną**. Jeśli ciała są ze sobą sztywno połączone, to układ można traktować jako jedno ciało złożone, na które działa siła wypadkowa $\vec{F}_{wyp}$, będąca sumą wektorową wszystkich sił zewnętrznych (nie zawiera ona **sił wewnętrznych**, tzn. sił działających między ciałami składowymi układu). Układem ciał są na przykład lokomotywa i połączony z nią wagon. Jeśli — powiedzmy — do lokomotywy przymocowana jest lina holownicza, to siła przyłożona za jej pośrednictwem działa na cały układ lokomotywa–wagon. Podobnie jak dla pojedynczego ciała, wypadkowa siła zewnętrzna działająca na układ jest związana z jego przyspieszeniem, a związek ten to nic innego, jak druga zasada dynamiki Newtona, tzn. $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$, przy czym m jest całkowitą masą układu ciał.

Sprawdzian 2

Na rysunku obok przedstawiono dwie siły działające poziomo na klocek umieszczony na parkiecie, po którym może się on poruszać bez tarcia. Załóżmy, że na klocek działa jeszcze jedna siła pozioma $\vec{F}_3$. Jaka musi być wartość tej siły i jej kierunek, aby klocek: a) pozostawał w spoczynku, b) poruszał się w lewą stronę ze stałą prędkością o wartości 5 m/s?



Przykład 5.01. Siły w jednym i dwóch wymiarach, krążek

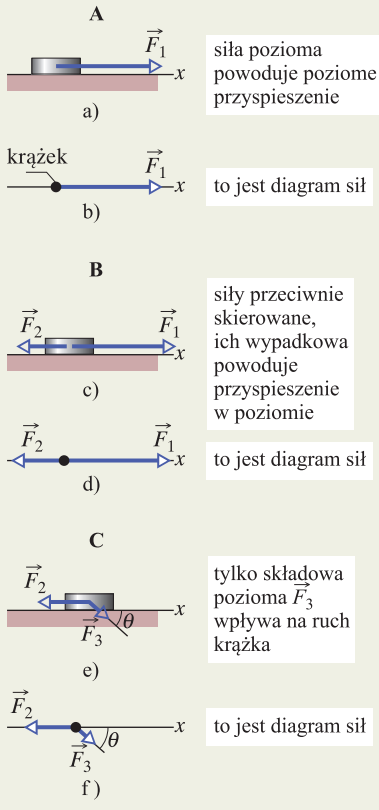
Przedstawimy zastosowanie drugiej zasady dynamiki do ruchu krążka, na który działa jedna lub dwie siły. Na rysunku 5.3 przedstawiono trzy przypadki, w których na krążek mogący się poruszać po lodzie bez tarcia wzdłuż osi x (tak że ruch zachodzi w jednym wymiarze) działa jedna lub dwie siły. Masa krążka wynosi $m = 0{,}2$ kg. Siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ skierowane są wzdłuż osi x, a ich wartości wynoszą: $F_1 = 4$ N i $F_2 = 2$ N. Siła $\vec{F}_3$ działa pod kątem $\theta = 30°$ do poziomu i ma wartość $F_3 = 1$ N. Wyznacz przyspieszenie krążka w każdym z tych trzech przypadków.

PODSTAWOWE FAKTY

Związek między przyspieszeniem $\vec{a}$ krążka i działającą na ten klocek siłą $\vec{F}_{\text{wyp}}$ jest dany przez drugą zasadę dynamiki Newtona: $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$. Jednak ruch odbywa się wzdłuż osi x, dlatego możemy zapisać ją jako równanie dla składowych x:

$$F_{\text{wyp},x} = ma_x. \tag{5.4}$$

Na rysunku 5.3 przedstawiono także diagramy sił dla trzech omawianych przypadków, oznaczając krążek za pomocą kropki.



Rys. 5.3. Siły działające wzdłuż osi x na krążek poruszający się po lodzie oraz diagramy sił dla trzech omawianych przypadków

Przypadek A: W przypadku z rysunku 5.3b na krążek działa tylko jedna siła pozioma, zatem z równania (5.4) mamy

$$F_1 = ma_x,$$

skąd po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy

$$a_x = \frac{F_1}{m} = \frac{(4\ \text{N})}{(0{,}2\ \text{kg})} = 20\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Wynik jest dodatni, co oznacza, że przyspieszenie krążka jest skierowane w dodatnim kierunku osi x.

Przypadek B: W przypadku z rysunku 5.3d na krążek działają dwie siły poziome: $\vec{F}_1$, skierowana w kierunku dodatnim osi x, i $\vec{F}_2$, skierowana w ujemnym kierunku tej osi. Z równania (5.4) otrzymujemy więc teraz

$$F_1 - F_2 = ma_x,$$

skąd po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy

$$a_x = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{(4\ \text{N}) - (2\ \text{N})}{(0{,}2\ \text{kg})} = 10\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Siła wypadkowa powoduje zatem przyspieszenie krążka skierowane w dodatnim kierunku osi x.

Przypadek C: W przypadku z rysunku 5.3f siła $\vec{F}_3$ ma kierunek inny niż przyspieszenie krążka — zgodna co do kierunku z przyspieszeniem krążka jest tylko jej składowa x, $F_{3,x}$ (siła $\vec{F}_3$ ma dwie składowe, lecz tylko jedna z nich działa w kierunku ruchu ciała). Równanie (5.4) ma w tym przypadku postać

$$F_{3,x} - F_2 = ma_x. \tag{5.5}$$

Z rysunku widać, że $F_{3,x} = F_3 \cos\theta$. Otrzymujemy zatem

$$a_x = \frac{F_{3,x} - F_2}{m} = \frac{F_3 \cos\theta - F_2}{m} = \frac{(1\ \text{N})(\cos 30^\circ) - (2\ \text{N})}{(0{,}2\ \text{kg})} = -5{,}7\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

W tym przypadku siła wypadkowa powoduje przyspieszenie krążka skierowane w ujemnym kierunku osi x.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 5.02. Siły w dwóch wymiarach, puszka z herbatnikami

W tym zadaniu wyznaczymy nieznaną siłę, znając przyspieszenie ciała. Na rysunku 5.4a przedstawiono widok (z góry) puszki z herbatnikami o masie 2 kg, poruszającej się bez tarcia po poziomej płaszczyźnie, z przyspieszeniem o wartości 3 m/s^2 i kierunku wyznaczonym przez wektor $\vec{a}$. Przyspieszenie to nadają mu trzy siły poziome, z których pokazano tylko dwie: $\vec{F}_1$ o wartości 10 N i $\vec{F}_2$ o wartości 20 N. Wyznacz trzecią z tych sił $\vec{F}_3$; wyraź ją za pomocą wektorów jednostkowych oraz przez jej długość i kierunek.

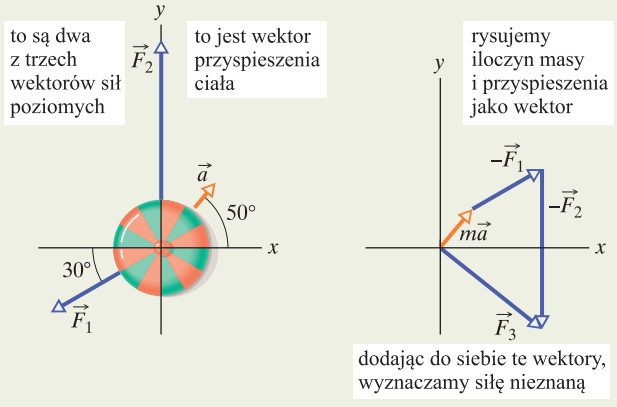
PODSTAWOWE FAKTY

Wypadkowa $\vec{F}_{wyp}$ sił działających na puszkę jest sumą trzech sił i związana jest z przyspieszeniem $\vec{a}$ puszki, zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona ($\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$). Zatem

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a}, \qquad (5.6)$$

skąd otrzymujemy

$$\vec{F}_3 = m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2. \qquad (5.7)$$



Rys. 5.4. a) Widok z góry dwóch z trzech sił działających poziomo na puszkę z herbatnikami, pod wpływem których puszka porusza się z przyspieszeniem $\vec{a}$. Nie pokazano siły $\vec{F}_3$. b) Ustawienie wektorów $m\vec{a}$, $-\vec{F}_1$ oraz $-\vec{F}_2$ umożliwiające wyznaczenie siły $\vec{F}_3$

Obliczenia: Ruch odbywa się w dwóch wymiarach, a zatem z równania (5.7) *nie można* otrzymać $\vec{F}_3$, podstawiając do niego po prostu wartości bezwzględne wielkości wektorowych. Musimy dodać do siebie wektorowo $m\vec{a}$, $-\vec{F}_1$ (wektor przeciwny do $\vec{F}_1$) i $-\vec{F}_2$ (wektor przeciwny do $\vec{F}_2$). Aby to zrobić, wyznaczymy składowe prawej strony równania (5.7), najpierw wzdłuż osi x, a następnie wzdłuż osi y. *Uwaga*: nie pomieszaj ze sobą składowych x i y.

Składowe x: Dla składowych x mamy

$$\begin{aligned} F_{3,x} &= ma_x - F_{1,x} - F_{2,x} \\ &= m(a\cos 50^\circ) - F_1\cos(-150^\circ) - F_2\cos 90^\circ. \end{aligned}$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy

$$\begin{aligned} F_{3,x} &= (2\ \text{kg})(3\ \text{m/s}^2)\cos 50^\circ - (10\ \text{N})\cos(-150^\circ) \\ &\quad - (20\ \text{N})\cos 90^\circ = 12{,}5\ \text{N}. \end{aligned}$$

Składowe y: Analogicznie, dla składowych y:

$$\begin{aligned} F_{3,y} &= ma_y - F_{1,y} - F_{2,y} \\ &= m(a\sin 50^\circ) - F_1\sin(-150^\circ) - F_2\sin 90^\circ \\ &= (2\ \text{kg})(3\ \text{m/s}^2)\sin 50^\circ \\ &\quad - (10\ \text{N})\sin(-150^\circ) - (20\ \text{N})\sin 90^\circ \\ &= -10{,}4\ \text{N}. \end{aligned}$$

Zapis wektorowy: W zapisie dokonanym za pomocą wektorów jednostkowych otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 &= F_{3,x}\hat{\mathrm{i}} + F_{3,y}\hat{\mathrm{j}} \\ &= (12{,}5\ \text{N})\hat{\mathrm{i}} - (10{,}4\ \text{N})\hat{\mathrm{j}} \\ &\approx (13\ \text{N})\hat{\mathrm{i}} - (10\ \text{N})\hat{\mathrm{j}} \qquad \text{(odpowiedź)}. \end{aligned}$$

Do wyznaczenia wartości wektora $\vec{F}_3$ i jego kierunku (w postaci kąta utworzonego z dodatnim kierunkiem osi x) możemy zastosować równanie (3.6), z którego dostajemy

$$F_3 = \sqrt{F_{3,x}^2 + F_{3,y}^2} = 16\ \text{N}$$

oraz

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{F_{3,y}}{F_{3,x}} = -40^\circ \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

5.2. KILKA WAŻNYCH SIŁ

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

5.08 określić wartość i kierunek siły grawitacyjnej działającej na ciało o danej masie znajdujące się w miejscu o danej wartości przyspieszenia ziemskiego;

5.09 wyjaśnić, że ciężar ciała to wartość bezwzględna siły potrzebnej do powstrzymania ciała od spadku swobodnego, mierzona w układzie odniesienia związanym z ziemią;

5.10 wyjaśnić, że waga pozwala wyznaczyć ciężar ciała, gdy pomiar wykonuje się w układzie inercjalnym, a w przeciwnym razie dostaje się jedynie ciężar pozorny;

5.11 określić wielkość i kierunek siły normalnej działającej na ciało przyciskane lub przyciągane do pewnej powierzchni;

5.12 wyjaśnić, że siła równoległa do powierzchni to siła tarcia występująca wtedy, gdy ciało ześlizguje się po powierzchni lub stara się to zrobić;

5.13 wyjaśnić, że naprężenie to siła działająca na oba końce liny (sznura, nici itp.), gdy lina jest naciągnięta.

Podstawowe fakty

- Siła ciężkości (grawitacji) $\vec{F}_g$ jest to siła, jaką dane ciało jest przyciągane przez inne ciało. W zagadnieniach rozpatrywanych w tym podręczniku tym drugim ciałem jest najczęściej Ziemia lub inne ciało niebieskie. Na Ziemi siła ciężkości jest skierowana pionowo w dół. Założymy też, że układ związany z Ziemią jest inercjalny, co pozwala wyrazić wartość bezwzględną $\vec{F}_g$ jako

$$F_g = mg,$$

gdzie m jest masą ciała, a g — przyspieszeniem ziemskim.

- Ciężar W ciała to wartość bezwzględna skierowanej w górę siły potrzebnej do zrównoważenia siły ciężkości ciała. Ciężar ciała jest związany z jego masą wzorem

$$W = mg.$$

- Siła normalna $\vec{F}_N$ to siła działająca na ciało ze strony powierzchni, na którą ciało naciska. Siła normalna jest zawsze prostopadła do powierzchni.

- Siła tarcia $\vec{f}$ działa na ciało, gdy ześlizguje się ono po powierzchni lub stara się to zrobić. Siła ta jest zawsze równoległa do powierzchni i skierowana przeciwnie do kierunku ruchu ślizgowego ciała. W niektórych przypadkach siła tarcia może być znikomo mała.

- Gdy lina jest napięta, na każdym jej końcu działa z jej strony siła na znajdujące się tam ciało. Siła ta działa wzdłuż liny w punkcie połączenia liny z ciałem. Gdy masa liny jest bardzo mała (w przybliżeniu równa zeru), siły na obydwu końcach liny mają taką samą wartość T, nawet jeśli lina jest przełożona przez bloczek (o którym zakładamy, że ma znikomą masę, a tarcie na jego osi jest też bardzo małe).

Kilka ważnych sił

Siła ciężkości

Siła ciężkości (grawitacji) $\vec{F}_g$ jest to siła, jaką dane ciało jest przyciągane przez inne ciało. Nie będziemy tymczasem rozważać natury tej siły, lecz zajmiemy się sytuacją, w której tym drugim ciałem jest Ziemia. Siła ciężkości $\vec{F}_g$ będzie to więc siła skierowana do środka Ziemi — czyli pionowo w dół. Założymy też, że układ związany z Ziemią jest inercjalny.

Spadek swobodny. Przyjmijmy, że ciało o masie m spada swobodnie z przyspieszeniem ziemskim o wartości g. Jeśli pominiemy opór powietrza, to jedyną siłą działającą na to ciało jest siła ciężkości $\vec{F}_g$. Związek między tą siłą, skierowaną w dół, i przyspieszeniem ciała, także skierowanym w dół, jest więc dany przez drugą zasadę dynamiki Newtona ($\vec{F} = m\vec{a}$). Wybierzmy oś y układu współrzędnych wzdłuż toru ciała, o kierunku dodatnim do góry. Dla składowych wzdłuż tej osi druga zasada dynamiki Newtona ma postać $F_{wyp,y} = ma_y$, co w naszym przypadku pozwala na zapis

$$-F_g = m(-g),$$

czyli

$$F_g = mg. \tag{5.8}$$

Jednym słowem, wartość siły ciężkości jest równa iloczynowi mg.

W spoczynku. Taka sama siła ciężkości, o takiej samej wartości działa również na to ciało, gdy nie spada ono swobodnie, lecz np. leży na stole bilardowym lub się po nim porusza (aby zniknęła siła ciężkości, musiałaby zniknąć Ziemia).

Drugą zasadę dynamiki Newtona dla siły ciężkości możemy także zapisać w postaci wektorowej:

$$\vec{F}_g = -F_g\hat{j} = -mg\hat{j} = m\vec{g}, \tag{5.9}$$

przy czym $\hat{j}$ jest wektorem jednostkowym osi y, skierowanym pionowo w górę, a $\vec{g}$ — wektorem przyspieszenia ziemskiego, skierowanym pionowo w dół.

Ciężar

Ciężarem W ciała będziemy nazywać wartość bezwzględną siły potrzebnej do zapobieżenia spadkowi ciała, mierzonej przez obserwatora na Ziemi*. Na przykład, aby utrzymać w dłoni piłkę (w bezruchu), musisz działać na nią (stojąc na Ziemi) siłą skierowaną w górę, równoważącą siłę ciężkości, jaką działa na piłkę Ziemia. Załóżmy, że wartość tej siły ciężkości wynosi 2 N. Wobec tego wartość skierowanej w górę siły, jaką działasz na piłkę, jest równa 2 N, a zatem ciężar W piłki wynosi 2 N. Mówimy także, że piłka *waży* 2 N.

Do utrzymania w bezruchu piłki o ciężarze 3 N potrzebna jest siła o większej wartości, właśnie 3 N, ponieważ w tym przypadku należy zrównoważyć siłę ciężkości o większej wartości, właśnie 3 N. Mówimy, że druga piłka jest *cięższa* od pierwszej.

Spójrzmy na to ogólnie. Rozważmy ciało, którego przyspieszenie względem Ziemi, stanowiącej — jak zakładamy — układ inercjalny, jest równe $\vec{a} = 0$. Na ciało działają dwie siły: skierowana w dół siła ciężkości $\vec{F}_g$ i równoważąca ją siła o wartości W, skierowana pionowo w górę. Zapiszmy drugą zasadę dynamiki Newtona dla składowych wzdłuż osi pionowej y, o kierunku dodatnim w górę:

$$F_{\text{wyp},y} = ma_y.$$

W naszym przypadku daje to

$$W - F_g = m(0), \tag{5.10}$$

czyli

$$W = F_g = m(0) \qquad \text{(ciężar w układzie inercjalnym związanym z Ziemią).} \tag{5.11}$$

*Autorzy wprowadzają tu niestandardową definicję ciężaru. W większości podręczników słowo „ciężar" rozumie się jako inną nazwę siły ciężkości. Jak zostanie wykazane niżej, zdefiniowany w tej książce ciężar jest równy wartości bezwzględnej siły ciężkości, więc ta odmienność definicji nie powinna prowadzić do większych nieporozumień. Czytelnik powinien jednak pamiętać, że w innych podręcznikach może spotkać termin „ciężar" zdefiniowany inaczej niż w tej książce (*przyp. tłum.*).

Z równania tego wynika (przy założeniu, że Ziemia stanowi układ inercjalny), że:

Ciężar W ciała jest równy wartości bezwzględnej siły ciężkości F_g działającej na to ciało.

Podstawiając mg za F_g, zgodnie z równaniem (5.8), otrzymujemy wzór

$$W = mg \qquad \text{(ciężar)} \qquad (5.12)$$

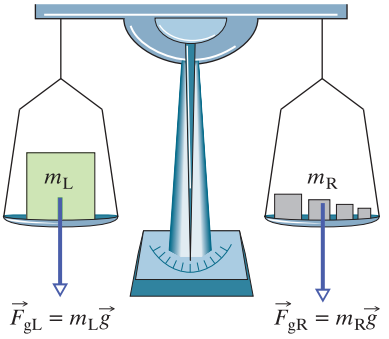
wiążący ciężar ciała z jego masą.

Waga. *Ważenie* ciała jest to wyznaczanie jego ciężaru. Można to zrobić, umieszczając ciało na jednej z szalek wagi równoramiennej (rys. 5.5) i kładąc na drugiej szalce odważniki, tzn. ciała o znanej masie, aż do uzyskania równowagi (co oznacza, że siły ciężkości działające na ciała na obydwu szalkach są sobie równe). Wynika stąd, że również masy ciał na obydwu szalkach są sobie równe, co daje masę ciała m. Znając wartość przyspieszenia ziemskiego w miejscu, w którym znajduje się waga, możemy wyznaczyć ciężar ciała z równania (5.12).

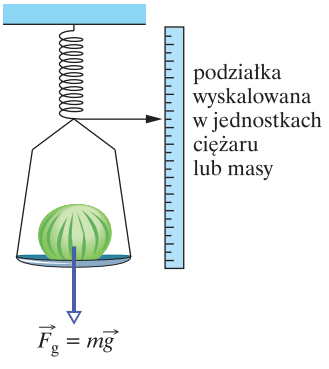
Do ważenia ciał służy również waga sprężynowa (rys. 5.6). Ciało rozciąga sprężynę, przy czym wskazówka porusza się wzdłuż podziałki wyskalowanej w jednostkach masy lub ciężaru (tak właśnie działają wagi łazienkowe). Jeśli waga jest wyskalowana w jednostkach masy, to jej wskazania są dokładne tylko wtedy, gdy wartość przyspieszenia ziemskiego g w miejscu pomiaru jest taka sama, jak w miejscu kalibracji wagi.

Pomiar ciężaru ciała musi być wykonywany wtedy, gdy ciało nie porusza się z przyspieszeniem pionowym w stosunku do Ziemi. Na przykład możesz wyznaczać swój ciężar za pomocą wagi ustawionej w łazience lub w szybko jadącym pociągu. Natomiast pomiar wykonany za pomocą tej samej wagi w windzie poruszającej się ruchem przyspieszonym da inny wynik, właśnie ze względu na przyspieszenie windy. Wynik takiego pomiaru nazywamy *ciężarem pozornym*.

Uwaga: Ciężar ciała to inna wielkość fizyczna niż jego masa. Ciężar jest to wartość siły, a jego związek z masą opisany jest wzorem (5.12). Gdy przeniesiemy ciało w miejsce, w którym wartość g jest inna, masa ciała (będąca jego cechą bezwzględną) nie ulegnie zmianie, natomiast jego ciężar się zmieni. Na przykład ciężar kuli do kręgli o masie 7,2 kg wynosi 71 N na Ziemi, lecz tylko 12 N na Księżycu. Masa tej kuli jest taka sama na Ziemi i na Księżycu, lecz na Księżycu przyspieszenie spadku swobodnego wynosi jedynie 1,6 m/s^2.



Rys. 5.5. Waga równoramienna. Gdy waga jest w równowadze, siła ciężkości $\vec{F}_{gL}$ działająca na ciało na lewej szalce (ciało ważone) jest równa sile ciężkości $\vec{F}_{gP}$, działającej na odważniki na prawej szalce. Wobec tego masa ważonego ciała m_L jest równa łącznej masie odważników m_P



Rys. 5.6. Waga sprężynowa. Wydłużenie sprężyny jest miarą *ciężaru* ciała umieszczonego na szalce. Wskazówka pokazuje wartość ciężaru ciała, jeśli podziałka jest wyskalowana w jednostkach ciężaru. Jeśli natomiast jest ona wyskalowana w jednostkach masy, to wskazanie wagi jest dokładne tylko wtedy, gdy wartość przyspieszenia ziemskiego g w miejscu pomiaru jest taka sama, jak w miejscu kalibracji wagi

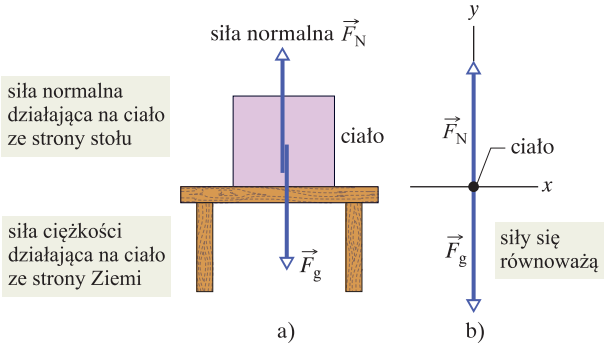
Siła normalna

Gdy stoisz na materacu, Ziemia działa na ciebie siłą ciężkości skierowaną pionowo w dół, lecz mimo to pozostajesz w spoczynku. Dzieje się tak dlatego, że materac, który ugina się pod tobą działa na ciebie siłą skierowaną ku górze. Gdy stoisz na podłodze, ta też ulega deformacji — ściśnięciu, wygięciu lub nawet lekkiemu spaczeniu — i działa na ciebie siłą skierowaną ku górze. Dotyczy to także pozornie całkiem sztywnego podłoża betono-

wego (jeśli nie jest ono osadzone bezpośrednio na gruncie, to dostatecznie liczna grupa ludzi może je nawet załamać, gdy na nim stanie).

Siłę, którą działa na ciebie materac czy podłoga, nazywamy **siłą normalną**, i oznaczamy ją zwykle przez $\vec{F}_N$. Nazwa ta pochodzi od terminu matematycznego *normalny*, co znaczy prostopadły. Siła działająca na ciebie ze strony np. podłogi, jest do tej podłogi prostopadła.

Gdy ciało naciska na powierzchnię, choćby pozornie bardzo sztywną, powierzchnia ta ulega deformacji i działa na ciało siłą normalną $\vec{F}_N$, prostopadłą do powierzchni.



Rys. 5.7. a) Na ciało leżące na blacie stołu działa siła normalna $\vec{F}_N$, prostopadła do tego blatu. b) Diagram sił działających na to ciało

Przykład takiej sytuacji przedstawiono na rysunku 5.7a. Na poziomym blacie stołu leży klocek o masie m, który naciska na blat, gdyż działa na niego siła ciężkości $\vec{F}_g$. W wyniku tego blat ulega niewielkiej deformacji i działa na klocek siłą normalną $\vec{F}_N$ skierowaną ku górze. Diagram sił działających na klocek pokazano na rysunku 5.7b. Siły $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_N$ to jedyne siły działające na klocek, obie skierowane pionowo. Drugą zasadę dynamiki Newtona możemy więc zapisać dla składowych wzdłuż osi y ($F_{wyp,y} = ma_y$). Zakładając, że ta oś jest pionowa, a jej kierunek dodatni to kierunek do góry, dostajemy

$$F_N - F_g = ma_y.$$

Na podstawie równania (5.8) możemy zamiast $\vec{F}_g$ wstawić mg, co daje

$$F_N - mg = ma_y.$$

Wartość siły normalnej wynosi zatem

$$F_N = mg + ma_y = m(g + a_y), \tag{5.13}$$

dla dowolnej wartości przyspieszenia a_y stołu i klocka w kierunku pionowym (gdy znajdują się np. w poruszającej się ruchem przyspieszonym windzie). *Uwaga*: znak g uwzględniliśmy już w tym wzorze, ale a_y może być zarówno dodatnie, jak i ujemne. Jeśli stół i klocek nie poruszają się ruchem przyspieszonym w stosunku do Ziemi, to $a_y = 0$ i z równania (5.13) otrzymujemy

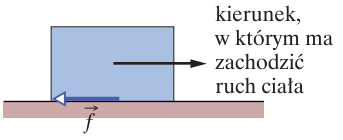
$$F_N = mg. \tag{5.14}$$

Sprawdzian 3

Czy siła normalna na rysunku 5.7 ma wartość większą, mniejszą, czy równą mg, gdy ciało i stół znajdują się w windzie, która porusza się do góry: a) z prędkością o stałej wartości, b) z prędkością, której wartość rośnie?

Tarcie

Gdy wprawiasz ciało w ruch ślizgowy na pewnej powierzchni — lub starasz się to zrobić — ruchowi temu przeciwdziała oddziaływanie między ciałem a powierzchnią (zjawisko to omówimy w następnym rozdziale). Uważa się, że opory ruchu można opisać za pomocą jednej siły $\vec{f}$, nazywanej **siłą tarcia** lub krótko **tarciem**. Siła ta jest skierowana wzdłuż powierzchni, przeciwnie do kierunku, w którym ma zachodzić ruch ciała (rys. 5.8). Dla uproszczenia sytuacji fizycznej tarcie uważa się czasem za tak małe, że można je pominąć (mówimy wtedy o ruchu *bez tarcia*).

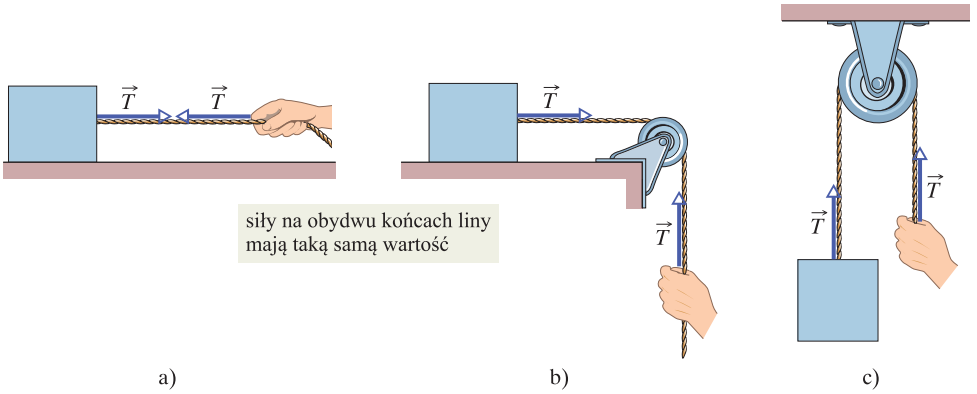


Rys. 5.8. Siła tarcia $\vec{f}$ przeciwdziała poślizgowi ciała po podłożu

Naprężenie

Gdy nić (sznur, lina lub inny podobny przedmiot) jest przymocowana do ciała i naciągnięta tak, że jest wyprostowana, działa ona na ciało siłą $\vec{T}$, skierowaną wzdłuż nici (rys. 5.9a). Siłę tę nazywamy zwykle *naprężeniem*, ponieważ nić jest sztywno napięta, tzn. naprężona. *Naprężenie nici* ma wartość T, równą wartości siły działającej na ciało. Jeśli na przykład siła działająca na ciało ma wartość $T = 50$ N, to naprężenie nici ma również wartość 50 N.

Nić uważamy często za *pozbawioną masy* (co oznacza, że jej masę można pominąć w porównaniu z masą ciała) i *nierozciągliwą*. Jest ona wtedy jedynie łącznikiem między dwoma ciałami. Działa na obydwa ciała siłami o takiej samej wartości nawet wtedy, gdy ciała i nić poruszają się ruchem przyspieszonym, a także wtedy, gdy nić jest przełożona przez krążek (rys. 5.9b i c) o masie, którą można pominąć w porównaniu z masą ciał, obracający się bez tarcia. Jeśli nić styka się z krążkiem na długości równej połowie jego obwodu, jak na rysunku 5.9c, to siła wypadkowa działająca na krążek ze strony nici ma wartość $2T$.



Rys. 5.9. a) Sztywno napięta (naprężona) nić. b) i c) Nić o znikomo małej masie działa na ciało i rękę siłą $\vec{T}$ o takiej samej wartości nawet wtedy, gdy jest przełożona przez obracający się bez tarcia krążek o znikomo małej masie

Sprawdzian 4

Ciało zawieszone na linie jak na rysunku 5.9c ma ciężar 75 N. Czy naprężenie ma wartość T równą, większą, czy mniejszą niż 75 N, gdy ciało porusza się do góry z prędkością o wartości: a) stałej, b) rosnącej, c) malejącej?

5.3. JAK STOSOWAĆ ZASADY DYNAMIKI NEWTONA?

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

5.14 wyjaśnić trzecią zasadę dynamiki Newtona i powiedzieć, co to są siły akcji i reakcji;

5.15 zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona do badania ruchu ciała w pionie, poziomie lub wzdłuż równi pochyłej, wykorzystując diagram sił działających na to ciało;

5.16 narysować diagram sił i zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona do badania ruchu układu ciał sztywno ze sobą połączonych, a także do każdego ciała z osobna.

Podstawowe fakty

- Siła wypadkowa $\vec{F}_{\text{wyp}}$ działająca na ciało o masie m jest związana z jego przyspieszeniem $\vec{a}$ wzorem

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a},$$

co można też wyrazić równaniami dla składowych:

$$F_{\text{wyp},x} = ma_x, \qquad F_{\text{wyp},y} = ma_y \qquad \text{oraz} \qquad F_{\text{wyp},z} = ma_z.$$

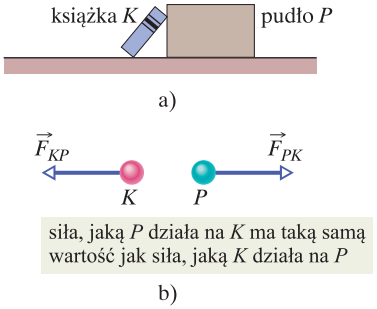
- Jeśli ciało C działa na ciało B siłą $\vec{F}_{BC}$, to ciało B działa na ciało C siłą $\vec{F}_{CB}$, równą

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}.$$

Te dwie siły mają taką samą wartość i przeciwne kierunki.

Trzecia zasada dynamiki Newtona

Gdy dwa ciała odpychają się lub przyciągają, tzn. gdy każde z nich działa na drugie siłą, mówimy, że *oddziałują* one ze sobą. Wyobraź sobie, że postawiłeś książkę K na półce tak, iż opiera się ona o pudło P (rys. 5.10a). Książka i pudło oddziałują wtedy ze sobą: istnieje siła pozioma $\vec{F}_{KP}$, jaką pudło działa na książkę oraz siła pozioma $\vec{F}_{PK}$, jaką książka działa na pudło. Te dwie siły przedstawiono na rysunku 5.10b. Trzecia zasada dynamiki Newtona mówi, że:



Rys. 5.10. a) Książka K opiera się o pudło P. b) Siła $\vec{F}_{KP}$, jaką pudło działa na książkę, ma taką samą wartość i przeciwny kierunek jak siła $\vec{F}_{PK}$, jaką książka działa na pudło

Trzecia zasada dynamiki Newtona. Gdy dwa ciała oddziałują ze sobą, siły, jakimi działają one na siebie, mają taką samą wartość bezwzględną i przeciwne kierunki.

Dla książki i pudła możemy tę zasadę zapisać jako równanie skalarne

$$F_{KP} = F_{PK} \qquad \text{(jednakowe wartości bezwzględne)}$$

lub jako równanie wektorowe

$$\vec{F}_{KP} = -\vec{F}_{PK} \qquad \text{(jednakowe wartości bezwzględne i przeciwne kierunki),} \tag{5.15}$$

w którym znak minus oznacza, że siły mają przeciwne kierunki. Siły te nazywamy **siłami akcji i reakcji** (parą akcja–reakcja). Takie dwie siły występują zawsze, gdy dwa ciała oddziałują ze sobą i to w każdych warunkach. Książka i pudło z rysunku 5.10a są nieruchome, lecz trzecia zasada dynamiki Newtona obowiązuje także wówczas, gdy ciała są w ruchu, a nawet wtedy, gdy poruszają się ruchem przyspieszonym.

Jako kolejny przykład rozważmy melona leżącego na stole, który stoi na Ziemi (rys. 5.11a) i znajdźmy związane z melonem siły akcji i reakcji. Melon oddziałuje ze stołem, a także z Ziemią (mamy więc do czynienia z trzema ciałami, których oddziaływania musimy umieć rozróżnić).

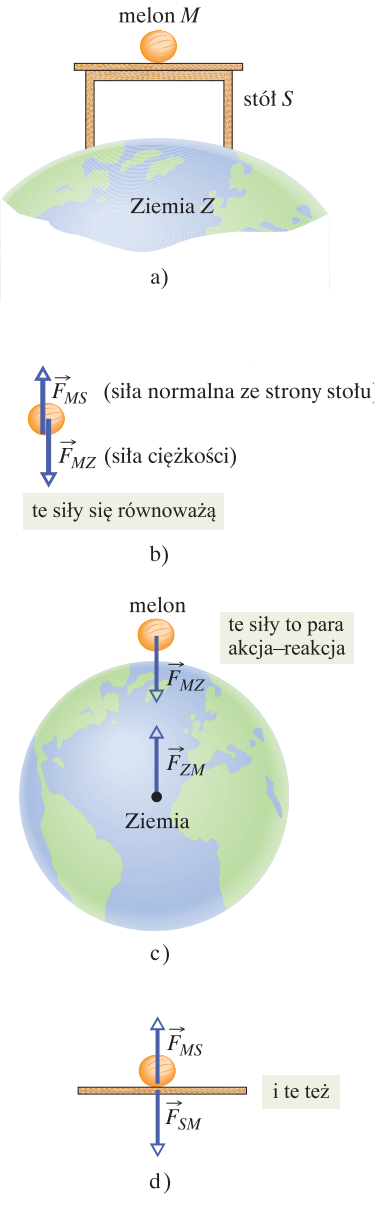
Zajmiemy się najpierw samym melonem (rys. 5.11b). Siła $\vec{F}_{MS}$ jest to siła normalna, jaką stół działa na melona, a siła $\vec{F}_{MZ}$ to siła ciężkości, jaką Ziemia działa na melona. Czy jest to para akcja–reakcja? Nie, bo są to siły działające na jedno ciało — melona — a nie na dwa ciała oddziałujące ze sobą.

Aby znaleźć parę akcja–reakcja, musimy zająć się nie melonem, lecz oddziaływaniem melona z jednym z dwóch pozostałych ciał. Rozważmy najpierw oddziaływanie melon–Ziemia (rys. 5.11c). Ziemia przyciąga melona siłą grawitacyjną $\vec{F}_{MZ}$, a melon przyciąga Ziemię siłą grawitacyjną $\vec{F}_{ZM}$. Czy jest to para akcja–reakcja? Tak, są to siły działające między dwoma oddziałującymi ze sobą ciałami, którymi każde z nich działa na drugie. Zatem na mocy trzeciej zasady dynamiki Newtona

$$\vec{F}_{MZ} = -\vec{F}_{ZM} \qquad \text{(oddziaływanie melon–Ziemia).}$$

W oddziaływaniu melon–stół stół działa na melona siłą $\vec{F}_{MS}$, a melon działa na stół siłą $\vec{F}_{SM}$ (rys. 5.11d). To także jest para akcja–reakcja i analogicznie mamy:

$$\vec{F}_{MS} = -\vec{F}_{SM} \qquad \text{(oddziaływanie melon–stół).}$$



Rys. 5.11. a) Melon leży na stole, który stoi na Ziemi. b) Siły działające *na melona*: $\vec{F}_{MS}$ i $\vec{F}_{MZ}$. c) Para akcja–reakcja: oddziaływanie melon–Ziemia. d) Para akcja–reakcja: oddziaływanie melon–stół

Sprawdzian 5

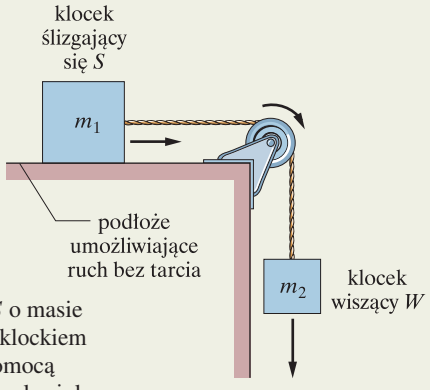
Załóżmy, że melon i stół z rysunku 5.11 znajdują się w kabinie windy, która zaczyna poruszać się do góry ruchem przyspieszonym. a) Czy wartości sił $\vec{F}_{SM}$ i $\vec{F}_{MS}$ rosną, maleją czy pozostają takie same? b) Czy te dwie siły mają nadal jednakowe wartości i przeciwne kierunki? c) Czy wartości sił $\vec{F}_{MZ}$ i $\vec{F}_{ZM}$ rosną, maleją czy pozostają takie same? d) Czy te dwie siły mają nadal jednakowe wartości i przeciwne kierunki?

Jak stosować zasady dynamiki Newtona?

Pozostała część tego rozdziału zawiera same przykłady. Powinieneś się w nie zagłębić, aby dobrze poznać metody rozwiązywania tego typu zadań. Zwłaszcza ważne jest to, aby umieć przejść od szkicu sytuacji fizycznej do diagramu sił w dobrze dobranym układzie współrzędnych, co umożliwi zastosowanie zasad dynamiki. Zaczniemy od prostego zadania, które rozwiążemy bardzo szczegółowo, korzystając ze schematu pytań i odpowiedzi.

Przykład 5.03. Klocek na stole i klocek wiszący

Na rysunku 5.12 przedstawiono klocek S (*klocek ślizgający się*) o masie $m_1 = 3{,}3$ kg. Klocek ten może poruszać się bez tarcia po poziomej powierzchni (np. po stole z poduszką powietrzną). Do klocka przywiązana jest lina, która jest następnie przełożona przez obracający się bez tarcia krążek i przywiązana do drugiego klocka W (*klocka wiszącego*) o masie $m_2 = 2{,}1$ kg. Masę liny i krążka można pominąć w stosunku do masy klocków. Klocek wiszący W opada w dół, a klocek ślizgający się porusza się ruchem przyspieszonym w prawo. Wyznacz: a) przyspieszenie klocka ślizgającego się, b) przyspieszenie klocka wiszącego, c) naprężenie liny.

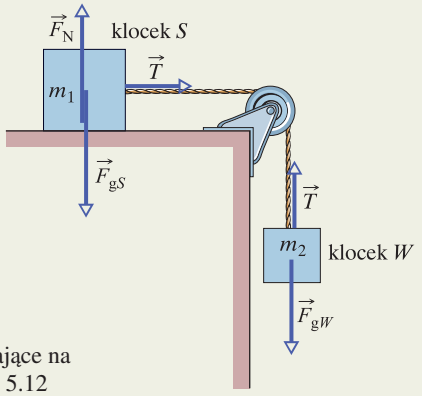


Rys. 5.12. Klocek S o masie m_1 jest połączony z klockiem W o masie m_2 za pomocą liny przełożonej przez krążek

P: *O co chodzi w tym zadaniu?*
O: Masz dwa ciała, klocek ślizgający się i klocek wiszący, *a także Ziemię*, która przyciąga obydwa te ciała (pod nieobecność Ziemi nic by się tu nie działo). Na klocki działa w sumie pięć sił przedstawionych na rysunku 5.13:

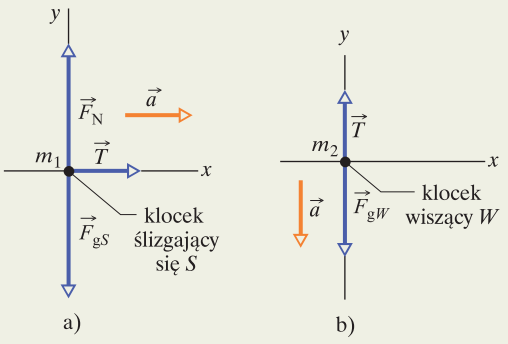
1. Lina ciągnie ślizgający się klocek w prawo siłą o wartości T.
2. Lina ciągnie do góry klocek wiszący W siłą o takiej samej wartości T. Gdyby nie było tej siły, klocek wiszący W spadałby swobodnie.
3. Ziemia przyciąga klocek ślizgający się S siłą grawitacyjną $\vec{F}_{gS}$ o wartości równej $m_1 g$.
4. Ziemia przyciąga klocek wiszący W siłą grawitacyjną $\vec{F}_{gW}$ o wartości równej $m_2 g$.
5. Stół działa na klocek ślizgający się S siłą normalną $\vec{F}_N$, skierowaną pionowo do góry.

Powinieneś zwrócić uwagę na jeszcze jeden fakt. Zakładamy, że lina się nie rozciąga, to znaczy, jeśli w pewnym czasie klocek W opada o 1 mm, to klocek S



Rys. 5.13. Siły działające na dwa klocki z rysunku 5.12

przesuwa się w tym czasie w prawo również o 1 mm. Oznacza to, że klocki poruszają się razem i mają przyspieszenie o takiej samej wartości a.
P: *Czego dotyczy to zadanie? Czy powinno mi się ono kojarzyć z jakimś konkretnym prawem fizycznym?*
O: Tak. Mamy tu do czynienia z siłami, masami i przyspieszeniami, a zatem naturalnym skojarzeniem jest druga zasada dynamiki Newtona: $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$.
P: *Jeśli mam zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona, to dla którego ciała mam ją zapisać?*
O: Zajmij się przede wszystkim dwoma ciałami, klockiem ślizgającym się i klockiem wiszącym. Choć są to *ciała o skończonych rozmiarach* (a nie punkty materialne), możemy każdy klocek traktować jako cząstkę, gdyż każda ich część porusza się dokładnie w taki sam sposób. Drugą zasadę dynamiki Newtona możemy zastosować oddzielnie do ruchu każdego klocka.
P: *A co z krążkiem?*
O: Krążek nie może być potraktowany jako cząstka, gdyż różne jego części poruszają się w różny sposób. Krążkiem zajmiemy się szczegółowo, gdy będziemy omawiać ruch obrotowy ciał. Obecnie wyłączymy krążek z rozważań, zakładając, że jego masę można pominąć w stosunku do mas klocków. Jego zadaniem jest jedynie zmiana kierunku liny.
P: *No dobrze, jak więc mam zastosować równanie $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$ do ruchu ślizgającego się klocka?*
O: Potraktuj klocek S jako cząstką o masie m_1 i narysuj *wszystkie* działające *na niego* siły, jak na rysunku 5.14a. To jest diagram sił dla tego klocka. Wybierz teraz układ współrzędnych. Rozsądnie jest wybrać oś x, równoległą do powierzchni stołu, zgodną z kierunkiem ruchu klocka.



Rys. 5.14. a) Diagram sił dla klocka S z rysunku 5.12. b) Diagram sił dla klocka wiszącego W z rysunku 5.12

P: *Dziękuję, ale ciągle nie wiem, jak mam zastosować równanie $\vec{F}_{wyp} = m_1\vec{a}$ do ruchu ślizgającego się klocka. Powiedziałeś mi tylko, jak narysować diagram sił.*
O: Masz rację. Już ci mówię. Równanie $\vec{F}_{wyp} = m_1\vec{a}$ to równanie wektorowe, które możemy rozpisać na składowe:

$$F_{wyp,x} = m_1 a_x, \quad F_{wyp,y} = m_1 a_y, \quad F_{wyp,z} = m_1 a_z, \tag{5.16}$$

przy czym $F_{wyp,x}$, $F_{wyp,y}$ i $F_{wyp,z}$ są składowymi siły wypadkowej wzdłuż osi układu współrzędnych. Napiszmy teraz te równania dla składowych w odpowiednich kierunkach. Klocek S nie ma przyspieszenia pionowego, więc równanie $F_{wyp,y} = m_1 a_y$ przybiera postać:

$$F_N - F_{gS} = 0, \qquad \text{czyli} \qquad F_N = F_{gS}. \tag{5.17}$$

Zatem w kierunku osi y wartość siły normalnej działającej na klocek S jest równa wartości siły ciężkości działającej na ten klocek.

W kierunku osi z, prostopadłej do płaszczyzny rysunku, nie działają żadne siły.

W kierunku osi x działa tylko siła T. Równanie $F_{wyp,x} = m_1 a_x$ ma więc postać

$$T = m_1 a. \tag{5.18}$$

To równanie zawiera dwie niewiadome, T i a, więc nie możemy go tymczasem rozwiązać. Zauważ jednak, że nie zajmowaliśmy się jeszcze wcale klockiem wiszącym.
P: *Zgoda. A jak mam zastosować równanie $\vec{F}_{wyp} = m_2\vec{a}$ do ruchu klocka wiszącego?*
O: Dokładnie tak samo, jak to zrobiliśmy dla klocka S. Najpierw narysujmy diagram sił dla klocka W, jak na rysunku 5.14b. Następnie rozpiszmy równanie $\vec{F}_{wyp} = m_2\vec{a}$ na składowe. Ten klocek porusza się ruchem przyspieszonym w kierunku osi y, skorzystamy więc z drugiego z równań (5.16) — $F_{wyp,y} = m_2 a_y$ — skąd otrzymujemy

$$T - F_{gW} = m_2 a_y. \tag{5.19}$$

Podstawiając $m_2 g$ zamiast F_{gW} oraz $-a$ zamiast a_y (ze znakiem minus, bo przyspieszenie klocka W jest skierowane w dół, czyli w ujemnym kierunku osi y), otrzymujemy

$$T - m_2 g = -m_2 a. \tag{5.20}$$

Zauważ teraz, że równania (5.18) i (5.20) tworzą układ równań z tymi samymi dwiema niewiadomymi T i a. Odejmując te równania od siebie stronami, eliminujemy zmienną T, a następnie rozwiązując otrzymane równanie, wyznaczamy a:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{5.21}$$

Podstawienie tego wyrażenia do wzoru (5.18) daje

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{5.22}$$

Wstawiając do powyższych równań dane liczbowe, otrzymujemy

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{(2{,}1\ \text{kg})}{(3{,}3\ \text{kg}) + (2{,}1\ \text{kg})}(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 3{,}8\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}$$

oraz

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{(3{,}3\ \text{kg})(2{,}1\ \text{kg})}{(3{,}3\ \text{kg}) + (2{,}1\ \text{kg})}(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 13\ \text{N} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

P: *A więc zadanie jest już rozwiązane, prawda?*
O: To dobre pytanie. Zadanie nie jest jednak do końca rozwiązane, póki nie sprawdzimy, czy otrzymany wynik ma sens (gdybyś rozwiązywał to zadanie za pieniądze, z pewnością chciałbyś się o tym przekonać przed oddaniem pracy, prawda?).

Spójrzmy najpierw na równanie (5.21). Wymiary są w porządku, a przyspieszenie a jest zawsze mniejsze niż g. Tak właśnie musi być, bo klocek wiszący na linie nie spada swobodnie — lina ciągnie go do góry.

Przyjrzyjmy się następnie równaniu (5.22), które możemy zapisać w postaci

$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} m_2 g. \tag{5.23}$$

Teraz lepiej widać, że wymiary obydwu stron są jednakowe, bo T i $m_2 g$ mają wymiar siły. Z równania (5.23)

widać także, że naprężenie liny jest zawsze mniejsze od siły ciężkości działającej na klocek wiszący (której wartość jest równa $m_2 g$). To rozsądny wynik, bo gdyby T było *większe* od $m_2 g$, to klocek wiszący musiałby poruszać się ruchem przyspieszonym do góry.

Warto jeszcze sprawdzić, jaki wynik otrzymujemy w przypadkach szczególnych, dla których łatwo zgadnąć prawidłową odpowiedź. Przyjmijmy na przykład, że $g = 0$, tzn. że wykonujemy doświadczenie w przestrzeni kosmicznej. Wiemy, że w tym przypadku klocki pozostałyby w spoczynku, gdyż na końce liny nie działałyby żadne siły, a więc nie byłoby naprężenia liny. Czy otrzymane przez nas wzory prowadzą do tego wniosku? Tak. Jeśli do równań (5.21) i (5.22) podstawimy $g = 0$, to otrzymamy $a = 0$ i $T = 0$. Dwa inne przypadki szczególne, które możesz zbadać, to przypadki, gdy $m_1 = 0$ oraz gdy $m_2 \to \infty$.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 5.04. Pudło na równi

Wielu studentów uważa zadania z równią pochyłą (pochylnią) za szczególnie trudne. Trudność polega pewnie na tym, że wszystko jest ukośne — po pierwsze, trzeba używać skręconego układu współrzędnych, a po drugie, wykorzystywać składowe siły ciężkości, a nie całą siłę, i wszystko to stwarza chyba kłopoty natury wizualnej. Przedstawiamy zatem typowy przykład, w którym wyjaśnimy wszystkie pochyłości i kąty (a na stronie *WileyPLUS* dostępna jest animacja towarzyszącego przykładowi rysunku z komentarzem słownym). Niezależnie od wszystkich pochyłości kluczowe jest, aby zdawać sobie sprawę z tego, że trzeba zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona dla osi, wzdłuż której zachodzi ruch.

Jak przedstawiono na rysunku 5.15a, za pomocą liny wciągamy pudło sucharów w górę równi nachylonej pod kątem $\theta = 30°$. Ruch odbywa się bez tarcia, masa pudła wynosi $m = 5$ kg, a siła, jaką lina działa na pudło, ma wartość $T = 25$ N. Wyznacz przyspieszenie pudła wzdłuż równi.

PODSTAWOWE FAKTY

Przyspieszenie w ruchu wzdłuż równi jest wyznaczone przez składowe sił o tym kierunku (a nie składowe sił w kierunku prostopadłym do równi), jak wynika z drugiej zasady dynamiki Newtona, czyli wzoru (5.1).

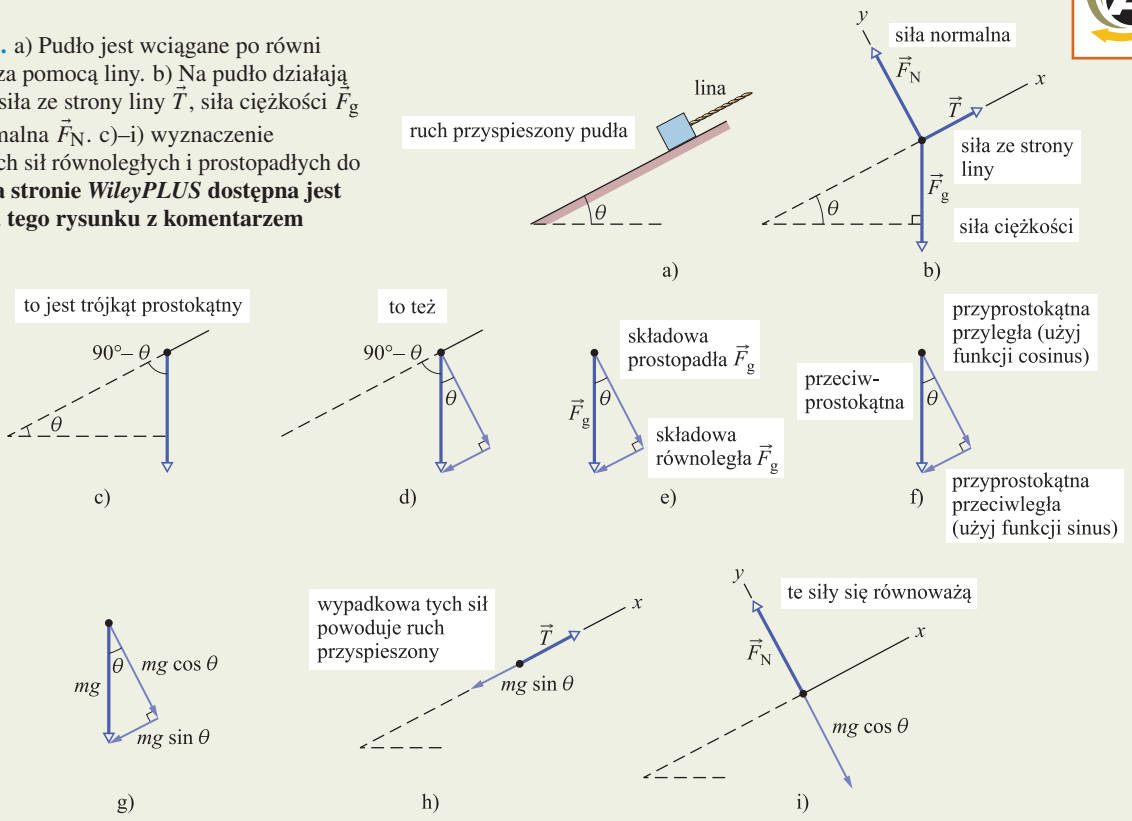
Obliczenia: Musimy zapisać drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu wzdłuż osi. Ponieważ pudło porusza się po równi, rozsądnie będzie obrać oś x skierowaną wzdłuż równi (jak na rys. 5.15b). (Oczywiście nie ma nic złego w innym wyborze układu współrzędnych, na przykład układu o osiach poziomej i pionowej, ale równania, które wówczas zapiszemy, będą bardziej skomplikowane ze względu na to, że ruch ciała nie będzie się wówczas odbywał wzdłuż osi układu współrzędnych).

Po wybraniu układu współrzędnych narysujmy diagram sił dla pudła oznaczonego na rysunku kropką (rys. 5.15b). Zaznaczamy na nim wszystkie siły, jakie działają na pudło, umieszczając początki wektorów sił w punkcie, w którym znajduje się pudło. (Rysowanie wektorów na diagramie gdzie popadnie może łatwo doprowadzić do błędów, zwłaszcza na egzaminach, pamiętaj więc o tym, aby zawsze „przyczepiać" wektory sił do ciała).

Działająca ze strony liny siła $\vec{T}$ jest skierowana w górę równi i ma wartość $T = 25$ N. Siła ciężkości $\vec{F}_g$ jest oczywiście skierowana w dół i ma wartość $mg = (5\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2) = 49$ N. Jej kierunek oznacza, że ma ona składową wzdłuż osi x, a tylko ta składowa (a nie pełna siła) ma wpływ na ruch przyspieszony pudła wzdłuż równi. Zanim zapiszemy drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu wzdłuż osi x, musimy wyznaczyć tę ważną składową.

Rysunki 5.15c–h przedstawiają kolejne kroki prowadzące do tego celu. Znając kąt nachylenia równi, rysujemy trójkąt prostokątny, którego przyprostokątnymi są składowe wektora siły w kierunku osi x i y, a przeciwprostokątną — pełny wektor siły. Z rysunku 5.15c widać, że kąt między równią a wektorem $\vec{F}_g$ jest równy $90° - \theta$ (widzisz odpowiedni trójkąt prostokątny?). Kolejne rysunki (5.15d–f) przedstawiają wektor $\vec{F}_g$ i jego składowe. Jedna z nich jest równoległa do równi (to ta, która jest nam potrzebna), druga jest prostopadła do równi.

Jak widać z rysunku 5.15d, składowa prostopadła do równi tworzy z wektorem $\vec{F}_g$ kąt θ. Składowa, której szukamy, jest przyprostokątną leżącą naprzeciw kąta θ. Długość przeciwprostokątnej wynosi mg (jest to wartość siły ciężkości). Wobec tego składowa równoległa do równi ma długość równą $mg \sin\theta$ (rys. 5.15g).



Rys. 5.15. a) Pudło jest wciągane po równi pochyłej za pomocą liny. b) Na pudło działają trzy siły: siła ze strony liny $\vec{T}$, siła ciężkości $\vec{F}_g$ i siła normalna $\vec{F}_N$. c)–i) wyznaczenie składowych sił równoległych i prostopadłych do równi. **Na stronie *WileyPLUS* dostępna jest animacja tego rysunku z komentarzem słownym**

Jest jeszcze jedna siła, o której powinniśmy pomyśleć — siła normalna $\vec{F}_N$ (rys. 5.15b). Siła ta jest prostopadła do równi, a więc nie wpływa na ruch wzdłuż równi (nie ma składowej wzdłuż równi, więc nie przyczynia się do przyspieszania pudła).

Teraz możemy już w końcu zapisać drugą zasadę dynamiki dla ruchu wzdłuż ukośnej osi x:

$$F_{\text{wyp},x} = ma_x.$$

Składowa a_x jest jedyną składową przyspieszenia (pudło nie podskakuje przecież na równi, co byłoby dość dziwne, ani nie zagłębia się w równię, co byłoby jeszcze dziwniejsze). Możemy zatem opuścić wskaźnik i pisać po prostu a, gdyż przyspieszenie pudła ma kierunek osi x. Siła $\vec{T}$ ma dodatni kierunek osi x, a składowa $mg \sin\theta$ — ujemny kierunek tej osi, wobec czego mamy

$$T - mg\sin\theta = ma. \qquad (5.24)$$

Podstawiając do tego równania wartości liczbowe danych i wyznaczając z niego a, otrzymujemy

$$a = 0{,}1\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Wynik jest dodatni, co oznacza, że pudło porusza się ruchem przyspieszonym w górę równi, czyli w dodatnim kierunku ukośnej osi x. Zmniejszając wartość siły $\vec{T}$, moglibyśmy doprowadzić do sytuacji, w której $a = 0$, a zatem pudło poruszałoby się w górę równi ze stałą prędkością. A zmniejszając wartość $\vec{T}$ jeszcze bardziej, uzyskalibyśmy ujemne przyspieszenie pudła, mimo że nadal działałaby na nie siła ze strony liny.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 5.05. Wykres źródłem informacji

W tym przykładzie musimy odczytać z wykresu pewne informacje, a nie tylko jakąś liczbę. Na rysunku 5.16a przedstawiono klocek o masie 4 kg mogący się poruszać bez tarcia po płaskim podłożu. Na klocek działają dwie siły, z których tylko jedna, $\vec{F}_1$, jest zaznaczona na rysunku. Ta siła ma stałą wartość, ale kąt θ, jaki tworzy jej wektor z dodatnim kierunkiem osi x, może ulegać zmianie. Druga siła, $\vec{F}_2$, jest skierowana poziomo i ma stałą wartość. Wykres z rysunku 5.16b pokazuje, jak zmienia się przyspieszenie poziome klocka a_x przy zmianie kąta θ w zakresie od 0° do 90°. Jaką wartość ma a_x dla $\theta = 180°$?

PODSTAWOWE FAKTY

1) Zgodnie z drugą zasadą dynamiki przyspieszenie w poziomie zależy od składowej poziomej siły wypadkowej $F_{\text{wyp},x}$. 2) Składowa pozioma siły wypadkowej jest równa sumie składowych poziomych sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

Obliczenia: Składowa pozioma siły $\vec{F}_2$ wynosi F_2, gdyż wektor tej siły jest poziomy. Składowa pozioma siły $\vec{F}_1$ jest równa $F_1 \cos\theta$. Znając te wartości oraz masę klocka $m = 4$ kg, zapisujemy drugą zasadę dynamiki ($\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$) dla ruchu wzdłuż osi x:

$$F_1 \cos\theta + F_2 = (4\text{ kg})a_x. \qquad (5.25)$$

Z tego równania wynika, że dla kąta $\theta = 90°$, $F_1 \cos\theta$ jest równe zeru i mamy $F_2 = (4\text{ kg})a_x$. Z wykresu odczytujemy, że przyspieszenie wynosi wtedy 0,5 m/s^2. Wobec tego $F_2 = 2$ N, czyli wektor $\vec{F}_2$ ma dodatni kierunek osi x.

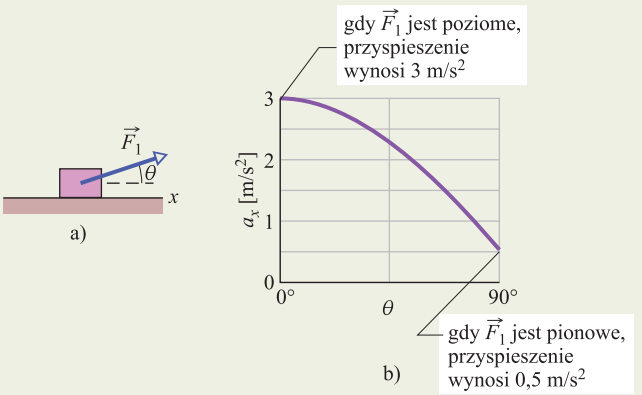
Z równania (5.25) wynika też, że dla kąta $\theta = 0°$

$$F_1 \cos 0° + 2\text{ N} = (4\text{ kg})a_x. \qquad (5.26)$$

Z wykresu odczytujemy, że przyspieszenie wynosi wtedy 3 m/s^2, wobec czego z równania (5.26) wynika, że $F_1 = 10$ N.

Podstawiając do równania (5.25) wartości $F_1 = 10$ N, $F_2 = 2$ N i $\theta = 180°$, otrzymujemy

$$a_x = -2\text{ m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$



Rys. 5.16. a) Jedna z dwóch sił działających na klocek. b) Przyspieszenie klocka a_x jako funkcja θ

Przykład 5.06. Siły w windzie

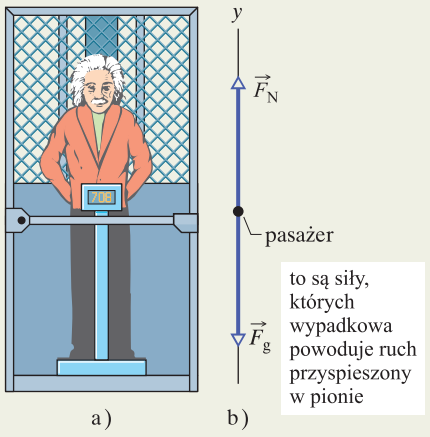
Może inni pasażerowie windy uznają cię trochę za dziwaka, zrób jednak doświadczenie polegające na zważeniu się w poruszającym się wagoniku windy. Czy ciężar wskazany przez wagę będzie większy, mniejszy, czy taki sam jak wtedy, gdy pomiar wykonujesz na podłożu nieruchomym?

Na rysunku 5.17a przedstawiono pasażera o masie $m = 72{,}2$ kg, stojącego na wadze w kabinie windy. Interesują nas wskazania wagi, gdy winda pozostaje w bezruchu oraz gdy porusza się do góry lub w dół.

a) Znajdź wyrażenie ogólne na wskazanie wagi, słuszne dla każdego rodzaju ruchu windy.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Wskazanie wagi jest równe wielkości siły normalnej $\vec{F}_N$ działającej na pasażera ze strony wagi. Z diagramu sił działających na pasażera, pokazanego na rysunku 5.17a wynika, że poza tą siłą na pasażera działa jedynie siła ciężkości $\vec{F}_g$. 2) Siły działające na pasażera można powiązać z jego przyspieszeniem $\vec{a}$ za pomocą drugiej zasady dynamiki Newtona ($\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$). Przypomnijmy jednak, że zasada ta obowiązuje jedynie w układzie inercjalnym. Kabina windy poruszającej się ruchem przyspieszonym *nie jest* układem inercjalnym. Wybierzmy wobec tego układ odniesienia związany



Rys. 5.17. a) Pasażer stoi na wadze, która wskazuje jego ciężar lub ciężar pozorny. b) Diagram sił działających na pasażera, zawierający siłę normalną $\vec{F}_N$, działającą na niego ze strony wagi, oraz siłę ciężkości $\vec{F}_g$

z ziemią — który jest układem inercjalnym — i wyrażajmy przyspieszenie pasażera w tym układzie.

Obliczenia: Obydwie siły działające na pasażera są skierowane pionowo, czyli wzdłuż osi y na rysunku 5.17b, dlatego też zastosujemy drugą zasadę dynamiki Newtona dla składowych y ($F_{wyp,y} = ma_y$), skąd mamy

$$F_N - F_g = ma,$$

czyli

$$F_N = F_g + ma. \qquad (5.27)$$

Z tego równania wynika, że wskazanie wagi równe F_N zależy od pionowego przyspieszenia a windy. Podstawiając mg zamiast F_g, otrzymujemy, że

$$F_N = m(g + a) \qquad \text{(odpowiedź)} \qquad (5.28)$$

dla dowolnej wartości przyspieszenia a (gdy przyspieszenie jest skierowane w górę, a jest dodatnie, a gdy przyspieszenie jest skierowane w dół, a jest ujemne).

b) Jakie jest wskazanie wagi, gdy winda jest nieruchoma lub porusza się do góry ze stałą prędkością 0,5 m/s?

PODSTAWOWE FAKTY

Dla dowolnej prędkości stałej (równej zeru lub nie) przyspieszenie a pasażera windy jest równe zeru.

Obliczenia: Korzystając z tego warunku i podstawiając do wzoru (5.28) wartości liczbowe danych, otrzymujemy

$$F_N = (72{,}2\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2 + 0) = 708\ \text{N}$$

(odpowiedź).

Jest to ciężar pasażera windy, równy wartości działającej na niego siły ciężkości.

c) Jakie jest wskazanie wagi, gdy winda porusza się do góry z przyspieszeniem 3,2 m/s^2 oraz gdy porusza się w dół z przyspieszeniem 3,2 m/s^2?

Obliczenia: Z równania (5.28) otrzymujemy dla $a = 3{,}2\ \text{m/s}^2$

$$F_N = (72{,}2\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2 + 3{,}2\ \text{m/s}^2) = 939\ \text{N}$$

(odpowiedź),

a dla $a = -3{,}2\ \text{m/s}^2$

$$F_N = (72{,}2\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2 - 3{,}2\ \text{m/s}^2) = 477\ \text{N}$$

(odpowiedź).

Tak więc, gdy przyspieszenie jest skierowane do góry (niezależnie od tego, czy prędkość ciała jest skierowana do góry, a jej wartość rośnie, czy też jest skierowana w dół, a jej wartość maleje), wskazanie wagi jest większe od ciężaru pasażera. Waga wskazuje wówczas ciężar pozorny pasażera, gdyż pomiar jest wykonywany w układzie nieinercjalnym. Podobnie, gdy przyspieszenie jest skierowane w dół (niezależnie od tego, czy prędkość ciała jest skierowana do góry, a jej wartość maleje, czy też jest skierowana w dół, a jej wartość rośnie), wskazanie wagi jest mniejsze od ciężaru pasażera.

d) Jaka jest wartość siły wypadkowej F_{wyp} działającej na pasażera oraz wartość jego przyspieszenia $a_{p,kab}$ w układzie odniesienia związanym z windą, gdy winda porusza się z przyspieszeniem skierowanym do góry, jak w punkcie (c)? Czy $\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}_{p,kab}$?

Obliczenia: Wartość siły ciężkości F_g, działającej na pasażera, nie zależy od ruchu ani pasażera, ani windy, a zatem, jak obliczyliśmy w punkcie (b), F_g wynosi 708 N. W punkcie (c) stwierdziliśmy, że wartość siły normalnej F_N, działającej na pasażera w czasie ruchu windy z przyspieszeniem skierowanym do góry, równa wskazaniu wagi, wynosi 939 N. Wobec tego siła wypadkowa działająca wówczas na pasażera jest równa

$$F_{wyp} = F_N - F_g = (939\ \text{N}) - (708\ \text{N}) = 231\ \text{N}$$

(odpowiedź).

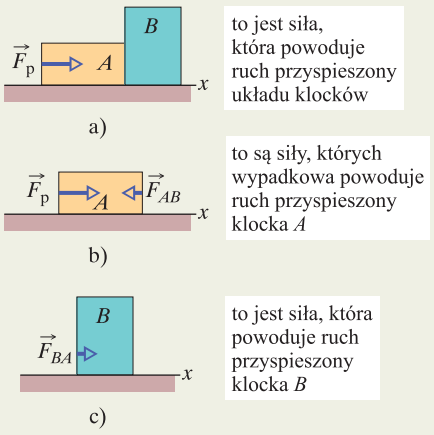
Przyspieszenie pasażera $a_{p,kab}$ w układzie odniesienia związanym z windą jest jednak równe zeru. Wobec tego w układzie nieinercjalnym, jakim jest winda poruszająca się ruchem przyspieszonym, F_{wyp} nie jest równe $m\vec{a}_{p,kab}$, a zatem druga zasada dynamiki Newtona nie jest spełniona.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 5.07. Ruch przyspieszony klocka opartego o klocek

Nieraz w zadaniach mamy dwa ciała, które poruszają się razem, bo jedno popycha drugie lub są ze sobą połączone. Poniżej masz przykład zastosowania drugiej zasady dynamiki do ruchu dwóch klocków rozpatrywanych łącznie lub osobno.

Na rysunku 5.18a przedstawiono dwa stykające się ze sobą klocki: A o masie $m_A = 4$ kg i B o masie $m_B = 6$ kg. Po przyłożeniu do klocka A stałej siły poziomej $\vec{F}_p$ o wartości 20 N klocki ślizgają się bez tarcia po podłożu wzdłuż osi x.



Rys. 5.18. a) Do klocka A, stykającego się z klockiem B, przyłożono poziomo stałą siłę $\vec{F}_p$. b) Na klocek A działają w poziomie dwie siły: siła zewnętrzna $\vec{F}_p$ oraz siła $\vec{F}_{AB}$ ze strony klocka B. c) Na klocek B działa w poziomie tylko jedna siła: siła $\vec{F}_{BA}$ ze strony klocka A

a) Ile wynosi przyspieszenie klocków?

Podamy kolejno: rozumowanie zawierające poważny błąd, rozumowanie prowadzące w ślepą uliczkę i wreszcie rozumowanie umożliwiające rozwiązanie zadania.

Rozumowanie błędne: Siła zewnętrzna $\vec{F}_p$ jest przyłożona do klocka A, dlatego też skorzystamy z drugiej zasady dynamiki Newtona, aby powiązać tę siłę z przyspieszeniem $\vec{a}$ klocka A. Ruch odbywa się wzdłuż osi x, korzystamy zatem z tej zasady dla składowych x ($F_{wyp,x} = ma_x$), co w naszym przypadku daje

$$F_p = m_A a.$$

Rozumowanie to jest jednak błędne, gdyż na klocek A działa nie tylko siła $\vec{F}_p$, lecz także siła $\vec{F}_{AB}$ ze strony klocka B (jak pokazano na rys. 5.18b).

Rozumowanie nieskuteczne: Zgodnie z powyższym, dodajmy do siły $\vec{F}_p$ siłę $\vec{F}_{AB}$. Dla składowych x dostajemy

$$F_p - F_{AB} = m_A a$$

(znak minus wynika z kierunku siły $\vec{F}_{AB}$). Równanie to jest poprawne, lecz ponieważ nie znamy F_{AB}, nie możemy z niego wyznaczyć szukanego przyspieszenia a.

Prawidłowe rozwiązanie: Ze względu na kierunek działania siły $\vec{F}_p$ obydwa klocki stanowią układ ciał sztywno ze sobą związanych. Wobec tego druga zasada dynamiki Newtona umożliwia powiązanie siły wypadkowej działającej *na ten układ* z przyspieszeniem *tego układu*. Dla składowych x otrzymujemy

$$F_p = (m_A + m_B)a.$$

Równanie to w sposób poprawny wiąże siłę $\vec{F}_p$ działającą na układ ciał z jego całkowitą masą $m_A + m_B$. Rozwiązując to równanie względem a i podstawiając wartości liczbowe danych, znajdujemy

$$a = \frac{F_p}{m_A + m_B} = \frac{(20\ \text{N})}{(4\ \text{kg}) + (6\ \text{kg})} = 2\ \text{m/s}^2$$

(odpowiedź).

Przyspieszenie układu, a zatem i każdego klocka ma więc kierunek dodatni osi x i wartość 2 m/s^2.

b) Jaką siłą $\vec{F}_{BA}$ działa klocek A na klocek B (rys. 5.18c)?

Obliczenia: Siła wypadkowa działająca na klocek B jest związana z przyspieszeniem tego klocka, a związek ten opisuje druga zasada dynamiki Newtona. Zapisując znów tę zasadę dla składowych x otrzymujemy

$$F_{BA} = m_B a,$$

co po podstawieniu wartości liczbowych danych daje

$$F_{BA} = (6\ \text{kg})(2\ \text{m/s}^2) = 12\ \text{N} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Siła $\vec{F}_{BA}$ ma zatem dodatni kierunek osi x i wartość 12 N.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Podsumowanie

Mechanika klasyczna Prędkość cząstki, jak też ciała, które możemy potraktować jak cząstkę, można zmienić (czyli nadać cząstce przyspieszenie) jedynie działając na nie **siłą** (lub siłami) ze strony innych ciał. *Mechanika klasyczna* (newtonowska) wiąże ze sobą przyspieszenia i siły.

Siła Siła jest wielkością wektorową. Jej wartość jest wyznaczona przez przyspieszenie, jakie nadaje ona ciału wzorcowemu o masie 1 kg. Siła, która nadaje ciału wzorcowemu przyspieszenie 1 m/s^2, ma z definicji wartość równą 1 N. Kierunek siły jest zgodny z kierunkiem wywołanego przez nią przyspieszenia. Siły dodajemy do siebie zgodnie z regułami algebry wektorów. Działająca na ciało **siła wypadkowa** jest sumą wektorową wszystkich sił działających na to ciało.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona Jeśli działająca na ciało siła wypadkowa jest równa zeru, to ciało pozostaje w spoczynku, o ile spoczywało w chwili początkowej lub porusza się po linii prostej z prędkością o stałej wartości, o ile w chwili początkowej znajdowało się w ruchu.

Inercjalny układ odniesienia Układy odniesienia, w których spełnione są zasady dynamiki Newtona, nazywamy *inercjalnymi układami odniesienia* lub krótko *układami inercjalnymi*. Układy odniesienia, w których zasady dynamiki Newtona nie są spełnione, nazywamy *nieinercjalnymi układami odniesienia* lub krótko *układami nieinercjalnymi*.

Masa **Masa** ciała jest cechą decydującą o tym, jakie przyspieszenie nadaje temu ciału dana siła (lub siła wypadkowa). Masa jest wielkością skalarną.

Druga zasada dynamiki Newtona Siła wypadkowa $\vec{F}_{\text{wyp}}$ działająca na ciało o masie m jest związana z przyspieszeniem $\vec{a}$ tego ciała, a związek ten jest opisany równaniem

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}, \tag{5.1}$$

które można także zapisać dla składowych w postaci

$$F_{\text{wyp},x} = ma_x, \quad F_{\text{wyp},y} = ma_y \quad \text{oraz} \quad F_{\text{wyp},z} = ma_z. \tag{5.2}$$

Wynika stąd związek między jednostkami układu SI:

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2. \tag{5.3}$$

Rozwiązując zadania dotyczące drugiej zasady dynamiki Newtona, wygodnie jest korzystać z tzw. diagramu sił, czyli rysunku sił działających na *jedno ciało*. Ciało to należy narysować schematycznie lub zaznaczyć symbolicznie kropką. Rysujemy wszystkie siły działające na to ciało, a następnie dobieramy układ współrzędnych tak, aby rozwiązanie zagadnienia miało w nim prostą postać.

Kilka ważnych sił **Siła ciężkości (grawitacji)** $\vec{F}_{\text{g}}$ jest to siła, jaką dane ciało jest przyciągane przez inne ciało. W tym podręczniku będziemy na ogół omawiać sytuacje, w których tym drugim ciałem jest Ziemia lub inne ciało niebieskie. Siła ciężkości będzie więc zwykle skierowana do środka Ziemi, czyli pionowo w dół. Zakładać też będziemy, że układ związany z Ziemią jest inercjalny. Przy tych założeniach wartość siły ciężkości wynosi

$$F_{\text{g}} = mg, \tag{5.8}$$

przy czym m jest to masa ciała, a g — to wartość przyspieszenia ziemskiego.

Ciężar W **ciała** jest to wartość siły skierowanej do góry, potrzebnej do zrównoważenia siły ciężkości ciała, pochodzącej od Ziemi (lub innego ciała niebieskiego). Jest on związany z masą ciała, a związek ten przedstawiamy za pomocą równania

$$W = mg. \tag{5.12}$$

Siła normalna $\vec{F}_{\text{N}}$ jest to siła, jaką działa na ciało podłoże, na które to ciało wywiera nacisk. Siła normalna jest zawsze prostopadła do podłoża.

Siła tarcia $\vec{f}$ jest to siła, która działa na ciało, gdy ślizga się ono po powierzchni lub gdy staramy się wprawić je w taki ruch. Siła ta jest zawsze równoległa do powierzchni, a jej kierunek jest przeciwny do kierunku ruchu ciała. Gdy tarcie można pominąć, mówimy o ruchu *bez tarcia*.

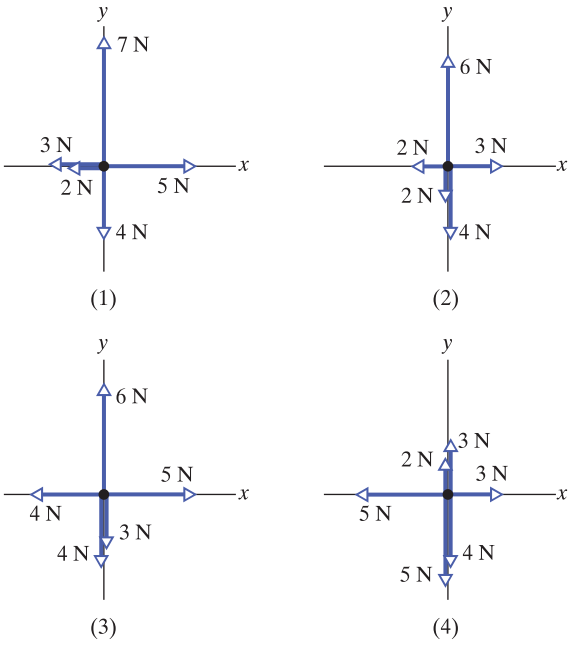
Gdy nić jest **naprężona**, działa siłą na ciała znajdujące się na obydwu jej końcach. Siła ta jest skierowana wzdłuż nici, w kierunku od ciała do nici. Gdy nić jest *pozbawiona masy* (co oznacza, że jej masę można pominąć), działa ona na ciała znajdujące się na jej końcach siłami o takich samych wartościach T nawet wtedy, gdy nić jest przełożona przez *bloczek o znikomej masie, obracający się bez tarcia*.

Trzecia zasada dynamiki Newtona Gdy ciało C działa na ciało B siłą $\vec{F}_{BC}$, ciało B działa na ciało C siłą $\vec{F}_{CB}$. Siły te są sobie równe co do wartości bezwzględnej i mają przeciwne kierunki:

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}.$$

Pytania

1 Na rysunku 5.19 pokazano diagram sił działających na przedmiot leżący na podłożu, po którym może się on poruszać bez tarcia (widok z góry) w czterech różnych przypadkach. W którym z tych przypadków przyspieszenie $\vec{a}$ przedmiotu ma różną od zera: a) składową x, b) składową y? c) W każdym z przypadków wskaż kierunek wektora $\vec{a}$, podając albo ćwiartkę układu współrzędnych, albo kierunek jednej z osi tego układu. Wykonaj obliczenia w pamięci.

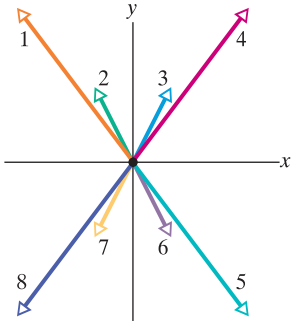


Rys. 5.19. Pytanie 1

2 Banan jest ciągnięty bez tarcia po ladzie barowej przez dwie siły poziome:

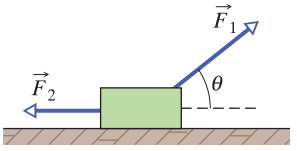
$$\vec{F}_1 = (3\text{ N})\hat{\mathrm{i}} - (4\text{ N})\hat{\mathrm{j}} \qquad \text{oraz} \qquad \vec{F}_2 = -(1\text{ N})\hat{\mathrm{i}} - (2\text{ N})\hat{\mathrm{j}}.$$

Nie używając kalkulatora, określ, które z wektorów z diagramu sił przedstawionego na rysunku 5.20 najlepiej przedstawiają siły: a) $\vec{F}_1$, b) $\vec{F}_2$. Jaka jest składowa siły wypadkowej wzdłuż: c) osi x, d) osi y? W kierunku której ćwiartki układu współrzędnych skierowany jest wektor: e) siły wypadkowej, f) przyspieszenia tego banana?



Rys. 5.20. Pytanie 2

3 Na rysunku 5.21 przedstawiono pudełko na kanapki, ślizgające się bez tarcia ze stałą prędkością po podłodze pokoju śniadaniowego oraz dwie siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ działające na to pudełko. Chcemy zmienić kąt θ utworzony z poziomem przez siłę $\vec{F}_1$, bez zmiany wartości tej siły. Czy powinniśmy jednocześnie zwiększyć, zmniejszyć czy pozostawić bez zmiany wartość

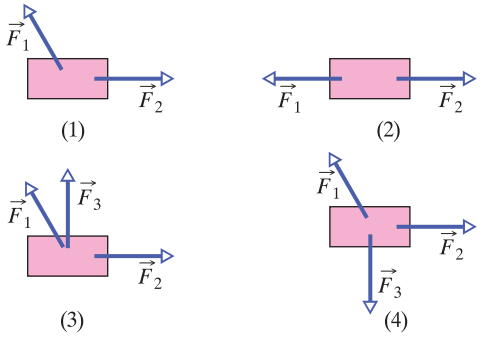


Rys. 5.21. Pytanie 3

siły $\vec{F}_2$, jeśli chcemy, aby pudełko nadal poruszało się ze stałą prędkością?

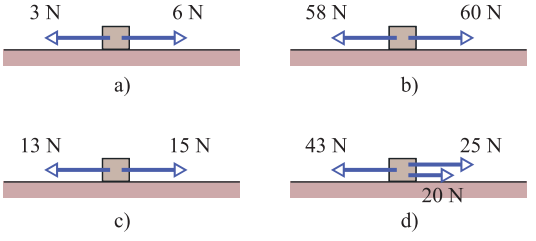
4 W chwili $t = 0$ na odłamek skalny poruszający się daleko w kosmosie w dodatnim kierunku osi x zaczyna działać siła $\vec{F}$ o stałej wartości. Która z podanych funkcji: 1) $x = 4t - 3$, 2) $x = -4t^2 + 6t - 3$, 3) $x = 4t^2 + 6t - 3$, może opisywać położenie odłamka jako funkcję czasu $x(t)$ dla $t > 0$? Dla której z tych funkcji siła $\vec{F}$ jest skierowana przeciwnie do początkowego kierunku ruchu odłamka?

5 Na rysunku 5.22 przedstawiono widok z góry klocka leżącego na podłożu, po którym może się on poruszać bez tarcia oraz siły działające na ten klocek w czterech różnych przypadkach. Długości narysowanych wektorów są proporcjonalne do wartości sił. W którym z tych przypadków klocek może: a) znajdować się w spoczynku, b) poruszać się ze stałą prędkością?



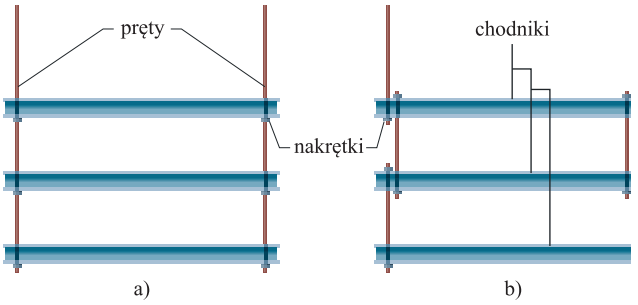
Rys. 5.22. Pytanie 5

6 Na rysunku 5.23 przedstawiono w czterech przypadkach to samo pudło, na które działają poziomo różne siły. Uszereguj te przypadki zgodnie z wartością przyspieszenia pudła, od największej do najmniejszej.



Rys. 5.23. Pytanie 6

7 17 lipca 1981 roku w nowo otwartym hotelu Hyatt Regency w Kansas City mnóstwo ludzi bawiło się, tańcząc i słuchając zespołu grającego największe przeboje lat czter-

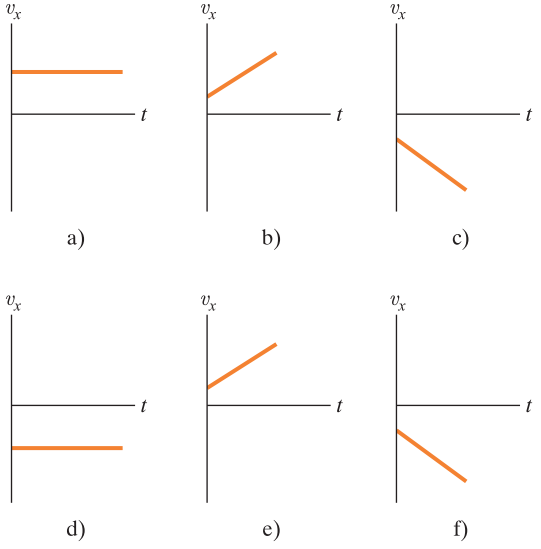


Rys. 5.24. Pytanie 7

dziestych. Wielu z nich przechadzało się po napowietrznych chodnikach zawieszonych jak mosty nad obszernym atrium. W pewnej chwili dwa z tych chodników załamały się, spadając na rozbawiony tłum w sali balowej.

Chodniki te były zawieszone jeden nad drugim na pionowych prętach i podtrzymywane za pomocą nakrętek. Pierwotnie miały być wykorzystane tylko dwa długie pręty, podtrzymujące wszystkie trzy chodniki (rys. 5.24a). Załóż, że łączna masa każdego chodnika i zgromadzonych na nim ludzi wynosi M. Jaką całkowitą masę muszą podtrzymać gwinty i dwie nakrętki pod: a) chodnikiem położonym najniżej, b) chodnikiem położonym najwyżej?

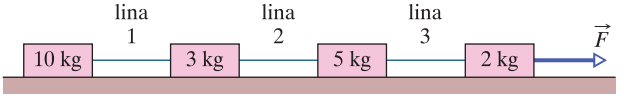
W trakcie budowy zauważono zapewne, że nie bardzo jest jak umieścić nakrętki na pręcie w innym miejscu niż na jego końcu, w związku z czym zmieniono zawieszenie chodników: wykorzystano trzy pręty, łącząc jeden chodnik z drugim (rys. 5.24b). Jaką całkowitą masę muszą podtrzymać w tym układzie gwinty i dwie nakrętki pod: a) chodnikiem położonym najniżej, b) chodnikiem położonym najwyżej? Chodniki zarwały się właśnie po zmianie sposobu ich zawieszenia — oto, do czego może prowadzić prosty błąd inżynierski.



Rys. 5.25. Pytanie 8

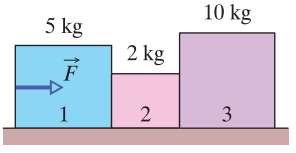
8 Na rysunku 5.25 przedstawiono trzy wykresy zależności składowej prędkości v_x od czasu oraz trzy analogiczne wykresy dla składowej v_y. Wykresy nie są wykonane w jednakowej skali. Dobierz pary wykresów $v_x(t)$ i $v_y(t)$, które najlepiej pasują do każdego z przypadków pytania 1 i rysunku 5.19.

9 Na rysunku 5.26 przedstawiono cztery klocki, połączone ze sobą linami, ciągnięte bez tarcia po podłożu siłą $\vec{F}$. Jaka całkowita masa jest przyspieszana w prawo przez: a) siłę $\vec{F}$, b) linę 3, c) linę 1? d) Uszereguj klocki według ich przyspieszenia, od największego do najmniejszego. e) Uszereguj liny według ich naprężenia, od największego do najmniejszego.



Rys. 5.26. Pytanie 9

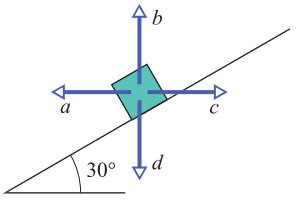
10 Na rysunku 5.27 przedstawiono trzy stykające się ze sobą klocki, pchane bez tarcia po podłodze siłą poziomą $\vec{F}$. Jaka całkowita masa jest przyspieszana w prawo przez: a) siłę $\vec{F}$, b) siłę $\vec{F}_{21}$ działającą na klocek 2 ze strony klocka 1, c) siłę $\vec{F}_{32}$ działającą na klocek 3 ze strony klocka 2? d) Uszereguj klocki według wartości ich przyspieszenia, od największej do najmniejszej. e) Uszereguj siły $\vec{F}$, $\vec{F}_{21}$ i $\vec{F}_{32}$ według ich wartości, od największej do najmniejszej.



Rys. 5.27. Pytanie 10

11 Klocek o masie m leży na podłodze. Przykładamy do niego w pionie siłę $\vec{F}$. Jak zmienia się wartość siły normalnej $\vec{F}_N$ działającej na klocek ze strony podłogi, gdy wartość F przyłożonej do klocka siły rośnie począwszy od zera, a siła jest skierowana a) w dół, b) w górę?

12 Na rysunku 5.28 pokazano cztery kierunki, poziome lub pionowe, w jakich siła o wartości F może działać na klocek umieszczony na równi pochyłej (w przypadkach a i b siła nie jest tak duża, aby oderwać klocek od równi). Uszereguj przedstawione przypadki w zależności od wartości siły normalnej działającej na klocek ze strony równi.



Rys. 5.28. Pytanie 12

Zadania

GO Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

•–••• Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

Podrozdział 5.1. Pierwsza i druga zasada dynamiki Newtona

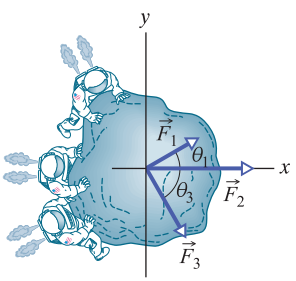
•1 Na ciało o masie 3 kg leżące na podłodze, po której może się poruszać bez tarcia, działają tylko dwie siły poziome. Jedna z nich ma wartość 9 N i jest skierowana na wschód, a druga ma wartość 8 N i działa pod kątem 62° na północ od kierunku zachodniego. Wyznacz wartość przyspieszenia tego ciała.

•2 Pniak rzeźniczy o masie 2 kg może ślizgać się bez tarcia po blacie kuchennym leżącym w płaszczyźnie xy. Na pniak działają dwie siły poziome. Jedna z nich wynosi $\vec{F}_1 = (3\text{ N})\hat{i} + (4\text{ N})\hat{j}$. Wyznacz przyspieszenie pniaka i zapisz je za pomocą wektorów jednostkowych, gdy druga siła jest równa: a) $\vec{F}_2 = (-3\text{ N})\hat{i} + (-4\text{ N})\hat{j}$, b) $\vec{F}_2 = (-3\text{ N})\hat{i} + (4\text{ N})\hat{j}$, c) $\vec{F}_2 = (3\text{ N})\hat{i} + (-4\text{ N})\hat{j}$.

•3 Ciało wzorcowe o masie 1 kg doznaje przyspieszenia o wartości 2 m/s^2, skierowanego pod kątem 20° względem dodatniego kierunku osi x. Wyznacz: a) składową x, b) składową y siły wypadkowej działającej na to ciało. c) Zapisz tę siłę wypadkową, stosując wektory jednostkowe.

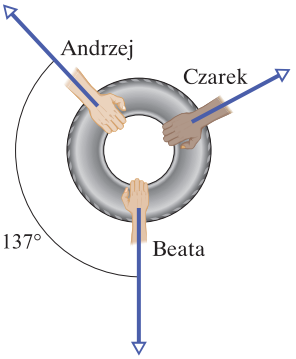
••4 Cząstka, na którą działają dwie siły, porusza się ze stałą prędkością $\vec{v} = (3\text{ m/s})\hat{i} - (4\text{ m/s})\hat{j}$. Jedna z tych sił jest równa $\vec{F}_1 = (2\text{ N})\hat{i} + (-6\text{ N})\hat{j}$. Wyznacz drugą siłę.

••5 GO Trzej astronauci zaopatrzeni w plecaki z silnikami odrzutowymi popychają planetoidę o masie 120 kg tak, aby skierować ją do luku statku, działając na nią siłami pokazanymi na rysunku 5.29, przy czym $F_1 = 32$ N, $F_2 = 55$ N, $F_3 = 41$ N, $\theta_1 = 30°$, a $\theta_3 = 60°$. Wyznacz przyspieszenie planeoidy; podaj je a) w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych oraz w postaci jego: b) wartości, c) kierunku względem dodatniego kierunku osi x.



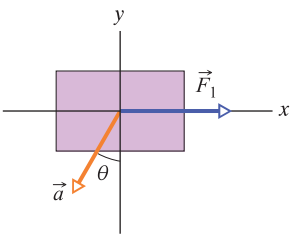
Rys. 5.29. Zadanie 5

••6 Andrzej, Beata i Czarek bawią się w „przeciąganie w dwóch wymiarach", ciągnąc w poziomie oponę samochodową w kierunkach pokazanych na rysunku 5.30 przedstawiającym widok z góry. Choć cała trójka ciągnie ją, każdy w swoją stronę, opona pozostaje nieruchoma. Andrzej ciągnie oponę siłą $\vec{F}_A$ o wartości 220 N, a Czarek — siłą $\vec{F}_C$ o wartości 170 N. Kierunek siły $\vec{F}_C$ nie jest znany. Jaka jest wartość siły $\vec{F}_B$, jaką ciągnie oponę Beata?



Rys. 5.30. Zadanie 6

••7 ssm Na pudło o masie 2 kg, którego widok z góry przedstawiono na rysunku 5.31, działają dwie siły, z których tylko jedną pokazano na rysunku. Wiedząc, że $F_1 = 20$ N, $a = 12$ m/s^2, a $\theta = 30°$, wyznacz drugą siłę; przedstaw ją: a) w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych oraz jako jej: b) wartość, c) kierunek względem dodatniego kierunku osi x.



Rys. 5.31. Zadanie 7

••8 Na ciało o masie 2 kg działają trzy siły, pod wpływem których uzyskuje ono przyspieszenie $\vec{a} = -(8\text{ m/s}^2)\hat{i} + (6\text{ m/s}^2)\hat{j}$. Dwie z tych sił wynoszą $\vec{F}_1 = (30\text{ N})\hat{i} + (16\text{ N})\hat{j}$ i $\vec{F}_2 = -(12\text{ N})\hat{i} + (8\text{ N})\hat{j}$. Wyznacz trzecią siłę.

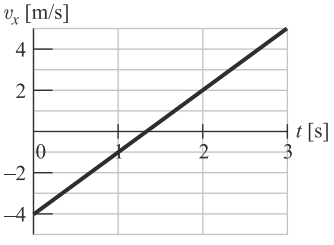
••9 Cząstka o masie 0,34 kg porusza się w płaszczyźnie xy zgodnie z równaniami $x(t) = -15 + 2t - 4t^3$ i $y(t) = 25 + 7t - 9t^2$, gdzie x i y wyrażono w metrach, a t w sekundach. Wyznacz w chwili $t = 0{,}7$ s: a) wartość i b) kąt (względem dodatniego kierunku osi x) działającej na cząstkę siły wypadkowej, c) kąt, jaki tworzy kierunek ruchu cząstki z dodatnim kierunkiem osi x.

••10 GO Cząstka o masie 0,15 kg porusza się wzdłuż osi x zgodnie z równaniem $x(t) = -13 + 2t + 4t^2 - 3t^3$, gdzie x wyrażono w metrach, a t w sekundach. Wyznacz siłę wypadkową działającą na cząstkę w chwili $t = 3{,}4$ s w zapisie za

pomocą wektorów jednostkowych.

••11 Ciało o masie 2 kg porusza się wzdłuż osi x pod wpływem działającej wzdłuż tej osi siły o zmiennej wartości. Położenie ciała zmienia się zgodnie ze wzorem $x = 3\text{ m} + (4\text{ m/s})t + ct^2 - (2\text{ m/s}^3)t^3$, gdzie x wyrażono w metrach, t w sekundach, a c jest stałą. W chwili $t = 3$ s działająca na ciało siła ma wartość 36 N i jest skierowana w ujemnym kierunku osi. Wyznacz c.

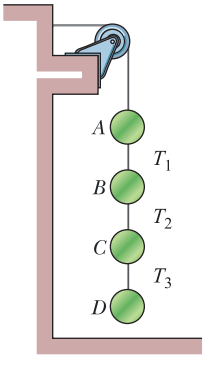
•••12 GO Krążek o masie 4 kg ślizga się bez tarcia po lodzie, na którym wyznaczono układ współrzędnych. Na krążek działają w poziomie dwie siły: siła $\vec{F}_1$, która ma kierunek dodatni osi x i wartość 7 N, oraz siła $\vec{F}_2$, której wartość wynosi 9 N. Na rysunku 5.32 przedstawiono składową v_x prędkości krążka jako funkcję czasu. Ile wynosi kąt między stałymi kierunkami sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$?



Rys. 5.32. Zadanie 12

Podrozdział 5.2. Kilka ważnych sił

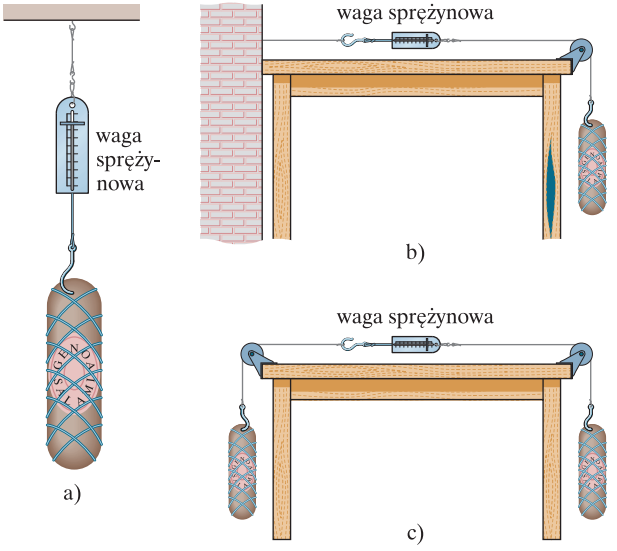
•13 Na rysunku 5.33 przedstawiono układ czterech krążków połączonych linkami. Górna linka przełożona jest przez bloczek, który może się obracać bez tarcia, i przymocowana do ściany. Linka ta działa na ścianę siłą o wartości 98 N. Napięcia pozostałych linek wynoszą: $T_1 = 58{,}8$ N, $T_2 = 49$ N i $T_3 = 9{,}8$ N. Wyznacz masy: a) krążka A, b) krążka B, c) krążka C i d) krążka D.



Rys. 5.33. Zadanie 13

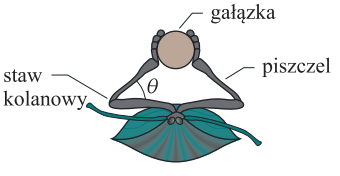
•14 Klocek, którego ciężar wynosi 3 N, spoczywa na poziomym podłożu. Za pomocą pionowej sprężyny przyłożona jest do niego siła o wartości 1 N, skierowana pionowo do góry. Wyznacz a) wartość i b) kierunek siły, jaką klocek działa na podłoże.

•15 ssm a) Salami o masie 11 kg wisi na lince połączonej z zaczepem wagi sprężynowej, która z kolei wisi na innej lince, przymocowanej do sufitu (rys. 5.34a). Jakie jest wskazanie wagi wyskalowanej w jednostkach ciężaru? (Tak waży salami właściciel sklepu). b) Na rysunku 5.34b linka łącząca salami z wagą jest przełożona przez bloczek, a drugi koniec wagi jest przymocowany do ściany za pomocą innej linki. Jakie jest teraz wskazanie wagi? (Tak waży salami student fizyki). c) Na rysunku 5.34c zamiast ściany mamy drugie salami o masie 11 kg. Układ znajduje się w spoczynku. Jakie jest wskazanie wagi w tym przypadku? (Tak waży salami właściciel sklepu, który studiował kiedyś fizykę).



Rys. 5.34. Zadanie 15

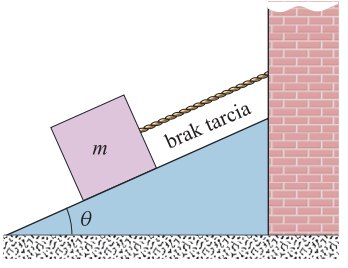
••16 Niektóre owady potrafią poruszać się wzdłuż przedmiotów w kształcie pręta (na przykład gałązek), będąc zawieszone pod nimi. Załóż, że taki owad ma masę m i jest zawieszony pod poziomą gałązką, jak pokazano na rysunku 5.35, przy czym $\theta = 40°$. Naprężenie wszystkich sześciu nóg owada jest jednakowe, a części nóg bliższe tułowia są poziome. a) Ile wynosi naprężenie każdej kości piszczelowej (w dolnej części nogi) owada? b) Wyobraź sobie, że owad nieco prostuje nogi. Czy naprężenie jego kości piszczelowych rośnie przy tym, maleje, czy też się nie zmienia?



Rys. 5.35. Zadanie 16

Podrozdział 5.3. Jak stosować zasady dynamiki Newtona?

•17 ssm www Masa klocka z rysunku 5.36 wynosi 8,5 kg, a kąt θ jest równy 30°. Wyznacz: a) naprężenie liny, b) siłę wypadkową działającą na klocek. c) Oblicz wartość przyspieszenia klocka po przecięciu liny.



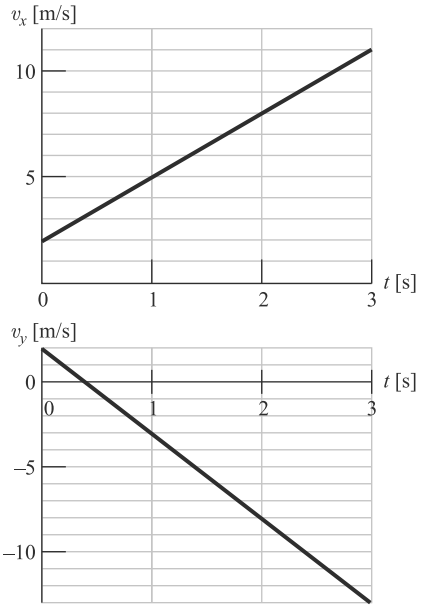
Rys. 5.36. Zadanie 17

•18 W kwietniu 1974 roku Belg John Massis zdołał ruszyć z miejsca dwa pasażerskie wagony kolejowe. Zacisnął on zęby na wędzidle, połączonym liną z wagonem, po czym pochylał się do tyłu, odpychając się nogami od podkładów. Łączny ciężar wagonów wynosił 700 kN (około 80 ton) Załóżmy, że Massis ciągnął koniec liny ze stałą siłą, większą 2,5 razy od swego ciężaru, pod kątem θ równym 30° do poziomu. Jego masa m wynosiła 80 kg, a wagony udało mu się przesunąć o 1 m. Pomiń opory ruchu i komplikacje związane z ruchem obrotowym kół i wyznacz prędkość wagonów, gdy Massis przestał je ciągnąć.

•19 ssm Sanie rakietowe poruszają się ruchem jednostajnie przyspieszonym od prędkości początkowej równej zeru do wartości 1600 km/h, co zajmuje im 1,8 s. Wyznacz wartość działającej na sanie siły wypadkowej.

•20 Samochód jadący z prędkością 53 km/h uderza we wspornik mostu. Pasażer przemieszcza się do przodu o 65 cm (względem drogi), zanim zostanie unieruchomiony przez poduszkę powietrzną. Jaka siła działa w tym czasie na górną część tułowia pasażera, której masa wynosi 41 kg? Załóż, że siła ta jest stała.

•21 Paczka firmy Federal Express, o masie 2 kg, porusza się bez tarcia po podłodze, na której narysowano układ współrzędnych x, y, pod wpływem poziomej siły $\vec{F}$. Na rysunku 5.37 przedstawiono zależność od czasu współrzędnych x i y położenia tej paczki. Wyznacz a) wartość i b) kierunek siły $\vec{F}$.

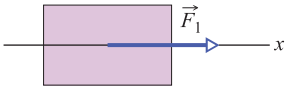


Rys. 5.37. Zadanie 21

•22 Gość wesołego miasteczka siedzi w wagoniku, który ma się poruszać w dół, czyli w ujemnym kierunku osi y, z przyspieszeniem o wartości $1{,}24g$, gdzie $g = 9{,}8$ m/s^2. Na kolanie gościa leży moneta o masie 0,567 g. Wyznacz przyspieszenie monety a) względem ziemi i b) względem gościa, gdy wagonik zostanie wprawiony w ruch. Wyraź je przez wektory jednostkowe. c) Po jakim czasie moneta dotrze do sufitu wagonika, który jest odległy od kolana gościa o 2,2 m? Ile wynosi d) faktyczna siła działająca na monetę i e) siła pozorna wyznaczona przez gościa z wartości wykonanego przez niego pomiaru przyspieszenia monety. Wyraź te siły przez wektory jednostkowe.

•23 Tarzan, którego ciężar wynosi 820 N zeskakuje z urwiska, chwytając koniec liany zwisającej z gałęzi wysokiego drzewa. Liana ma długość 20 m i tworzy początkowo z pionem kąt 22°. Wybierz układ współrzędnych o osi x biegnącej poziomo od krawędzi urwiska i osi y skierowanej pionowo do góry. W chwili, gdy Tarzan odrywa stopy od urwiska, naprężenie liany wynosi 760 N. Wyznacz odpowiadające tej chwili: a) siłę działającą na Tarzana ze strony liany, w zapisie z zastosowaniem wektorów jednostkowych, siłę wypadkową działającą na Tarzana b) w zapisie z zastosowaniem wektorów jednostkowych, a także jej c) wartość i d) kierunek względem dodatniego kierunku osi x, oraz e) wartość i f) kierunek przyspieszenia Tarzana (również w tej chwili).

•24 Na pudło o masie 2 kg, którego widok z góry pokazano na rysunku 5.38, działają w poziomie dwie siły, choć zaznaczono tylko jedną z nich (o wartości $F_1 = 20$ N). Pudło porusza się wzdłuż osi x. Wyznacz drugą siłę, działającą na pudło, gdy porusza się ono z przyspieszeniem a_x, równym: a) 10 m/s^2, b) 20 m/s^2, c) 0, d) -10 m/s^2, e) -20 m/s^2. Podaj tę siłę w zapisie z zastosowaniem wektorów jednostkowych.



Rys. 5.38. Zadanie 24

•25 *Napęd słoneczny*. „Jacht słoneczny” to pojazd kosmiczny o wielkim żaglu, popychany przez światło słoneczne. Choć ciśnienie światła jest bardzo małe z punktu widzenia naszych codziennych doświadczeń, to może być wystarczająco duże, aby statek oddalił się od Słońca — podróż taka byłaby bardzo powolna, ale nie pociągałaby za sobą żadnych kosztów. Załóż, że statek kosmiczny ma masę 900 kg, a siła ze strony światła wynosi 20 N. a) Jaka jest wartość przyspieszenia statku? Jeśli pojazd startuje ze stanu spoczynku, to: b) jak daleko od Słońca dotrze w ciągu jednego dnia, c) jak szybko będzie się poruszać po tym czasie?

•26 Naprężenie żyłki wędkarskiej, przy jakim się ona urywa, nazywamy potocznie „siłą” żyłki. Jaką minimalną „siłę” musi mieć żyłka, aby móc za jej pomocą zatrzymać łososia o ciężarze 85 N na drodze 11 m, jeśli ryba płynie początkowo z prędkością 2,8 m/s? Załóż, że opóźnienie ruchu łososia jest stałe.

•27 ssm Elektron poruszający się poziomo z prędkością $1{,}2 \cdot 10^7$ m/s wchodzi w obszar, w którym działa na niego stała siła pionowa o wartości $4{,}5 \cdot 10^{-16}$ N. Masa elektronu wynosi $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. O ile zmieni się w pionie

położenie elektronu w czasie, gdy przebędzie on w poziomie drogę 30 mm?

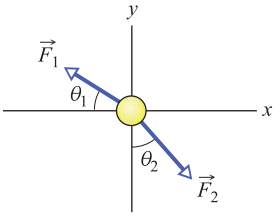
•28 Samochód, którego ciężar wynosi $1{,}3 \cdot 10^4$ N, poruszający się początkowo z prędkością 40 km/h, jest od pewnej chwili hamowany i zatrzymuje się po przebyciu drogi 15 m. Załóż, że siła hamująca pojazd była stała i wyznacz a) wartość tej siły oraz b) czas, po jakim samochód się zatrzymał. Gdyby prędkość początkowa była dwukrotnie większa, a siła hamowania samochodu się nie zmieniła, ile razy wzrosłyby: c) droga i d) czas hamowania? Wynik zadania powinien cię przekonać, jak niebezpieczna jest jazda z dużą prędkością.

•29 Strażak o ciężarze 712 N ześlizguje się po pionowym słupie z przyspieszeniem 3 m/s^2, skierowanym w dół. Wyznacz a) wartość i b) kierunek siły pionowej, działającej na strażaka ze strony słupa, oraz c) wartość i d) kierunek siły pionowej działającej na słup ze strony strażaka.

•30 Gwałtowne wiatry wokół tornada (trąby powietrznej) mogą rzucać przedmioty w kierunku drzew, ścian budynków czy słupów sygnalizacyjnych. W ramach symulacji takich zjawisk w laboratorium, wystrzelono z wiatrówki zwykłą wykałaczkę w kierunku konara dębu. Masa wykałaczki wynosiła 0,13 g, a jej prędkość w chwili dotarcia do konara była równa 220 m/s. Wykałaczka zagłębiła się w konar na 15 mm. Wyznacz wartość siły działającej na wykałaczkę zagłębiającą się w drewno, zakładając, że jej prędkość malała w stałym tempie.

••31 ssm www Klocek został pchnięty z prędkością początkową $v_0 = 3{,}5$ m/s w górę wzdłuż równi pochyłej, po której może się poruszać bez tarcia. Równia jest nachylona do poziomu pod kątem $\theta = 32°$. a) Jak daleko wzniesie się klocek wzdłuż równi? b) Ile czasu zajmie mu dotarcie do punktu największego wzniesienia? c) Jaką prędkość będzie miał klocek w momencie powrotu do podnóża równi?

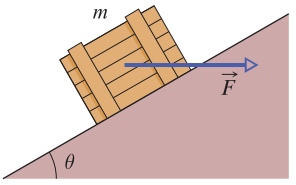
••32 Rysunek 5.39 przedstawia widok z góry połówki cytryny o masie 0,025 kg, która może się poruszać bez tarcia po stole. Działają na nią trzy poziome siły: $\vec{F}_1$ o wartości 6 N, $\vec{F}_2$ o wartości 7 N i trzecia, której nie znamy. Zaznaczone na rysunku kąty wynoszą $\theta_1 = \theta_2 = 30°$. Wyznacz (w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych) trzecią siłę, która działa na połówkę cytryny, gdy ta: a) się nie porusza, b) porusza się ze stałą prędkością $\vec{v} = (13\hat{i} - 14\hat{j})$ m/s oraz c) porusza się z prędkością, która się zmienia zgodnie ze wzorem $\vec{v} = (13t\hat{i} - 14t\hat{j})$ m/s, gdzie t to czas.



Rys. 5.39. Zadanie 32

••33 Kabina windy i jej zawartość mają łącznie masę 1600 kg. Wyznacz naprężenie liny dźwigu, gdy kabina poruszająca się pierwotnie w dół z prędkością 12 m/s zostaje zatrzymana na drodze 42 m, przy czym jej przyspieszenie jest stałe.

••34 GO Jak pokazano na rysunku 5.40, na skrzynię o masie $m = 100$ kg działa poziomo siła $\vec{F}$. Pod wpływem tej siły skrzynia porusza się bez tarcia w górę równi pochyłej o kącie nachylenia $\theta = 30°$ ze stałą prędkością. Wyznacz: a) wartość siły $\vec{F}$, b) wartość siły, jaką równia działa na skrzynię.



Rys. 5.40. Zadanie 34

••35 Prędkość ciała o masie 3 kg jest dana wzorem $\vec{v} = (8t\hat{i} + 3t^2\hat{j})$ m/s, gdzie czas t jest wyrażony w sekundach. Wyznacz kierunek (względem dodatniego kierunku osi x) a) wypadkowej sił działających na ciało i b) ruchu ciała, gdy ta wypadkowa ma wartość równą 35 N.

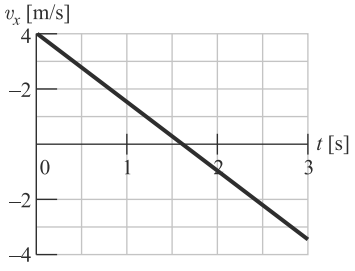
••36 Narciarz o masie 50 kg trzyma się poruszającej się wzdłuż stoku liny wyciągu i jedzie bez tarcia wzdłuż tego stoku, nachylonego do poziomu pod kątem 8°. Wyznacz wartość F_l siły, jaką lina działa na narciarza, gdy: a) wartość v prędkości narciarza jest stała i wynosi 2 m/s oraz b) wartość v wynosi akurat 2 m/s, lecz rośnie w tempie 0,1 m/s^2.

••37 Dziewczynka o masie 40 kg i sanki o masie 8,4 kg znajdują się na tafli zamarzniętego jeziora, po której mogą się poruszać bez tarcia. Dziewczynka trzyma przywiązaną do sanek linkę o długości 15 m, która ma znikomo małą masę. W pewnej chwili dziewczynka zaczyna ciągnąć linkę siłą 5,2 N. Wyznacz: a) przyspieszenie sanek, b) przyspieszenie dziewczynki. c) W jakiej odległości od swego początkowego położenia dziewczynka zetknie się z sankami?

••38 Narciarz o masie 40 kg zjeżdża bez tarcia prosto w dół stoku nachylonego pod kątem 10° do poziomu, w czasie silnego wiatru wiejącego równolegle do stoku. Wyznacz wartość i kierunek siły, jaką wiatr działa na narciarza, jeśli: a) prędkość narciarza ma stałą wartość, b) wartość prędkości narciarza zwiększa się w tempie 1 m/s^2, c) wartość prędkości narciarza zwiększa się w tempie 2 m/s^2.

••39 ilw Kula o masie $3 \cdot 10^{-4}$ kg jest zawieszona na sznurze. Na kulę działa wiatr wiejący poziomo ze stałą prędkością, w wyniku czego sznur odchyla się od pionu, tworząc z nim stały kąt 37°. Wyznacz: a) wartość siły, jaką wiatr działa na kulę, b) naprężenie sznura.

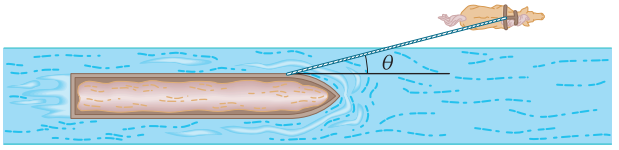
••40 GO Pudło przedatowanych daktyli o masie 5 kg porusza się bez tarcia w górę równi nachylonej pod kątem θ do poziomu. Rysunek 5.41 pokazuje, jak zmienia się z upływem czasu t składowa v_x prędkości pudła wzdłuż osi x skierowanej w górę wzdłuż równi. Wyznacz wartość siły normalnej, jaką równia działa na pudło.



Rys. 5.41. Zadanie 40

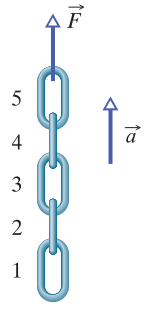
••41 Polecono ci spuścić z dachu o wysokości 6,1 m nad ziemią pudło ze starymi dachówkami o ciężarze 449 N. Masz linę, która się zerwie, jeśli jej naprężenie przekroczy 387 N, nie możesz więc po prostu zawiesić pudła na tej linie. Musisz zatem posłać pudło w dół ruchem przyspieszonym. a) Jakie musi być przyspieszenie pudła, by lina była bliska zerwania, ale jednak wytrzymała? b) Z jaką prędkością pudło uderzy w ziemię, poruszając się z takim przyspieszeniem?

••42 GO W dawnych czasach barki były ciągnięte wzdłuż kanałów przez konie w sposób przedstawiony na rysunku 5.42. Załóżmy, że koń ciągnie linę siłą o wartości 7900 N skierowaną pod kątem $\theta = 18°$ w stosunku do kierunku ruchu barki, który odbywa się prosto wzdłuż kanału. Masa barki wynosi 9500 kg, a jej przyspieszenie jest równe 0,12 m/s^2. Wyznacz: a) wartość, b) kierunek siły działającej na barkę ze strony wody.



Rys. 5.42. Zadanie 42

••43 ssm Jak pokazano na rysunku 5.43, łańcuch złożony z pięciu ogniw, każde o masie 0,1 kg, jest podnoszony pionowo ze stałym przyspieszeniem równym 2,5 m/s^2. Wyznacz wartość siły działającej: a) na ogniwo 1 ze strony ogniwa 2, b) na ogniwo 2 ze strony ogniwa 3, c) na ogniwo 3 ze strony ogniwa 4, d) na ogniwo 4 ze strony ogniwa 5. Następnie oblicz: e) siłę $\vec{F}$ działającą na górne ogniwo ze strony osoby podnoszącej łańcuch, f) siłę *wypadkową* powodującą przyspieszenie każdego ogniwa.



Rys. 5.43. Zadanie 43

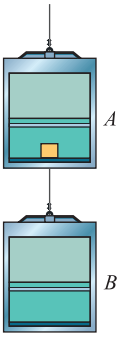
••44 Lampa wisi pionowo na linie w windzie, która jedzie w dół, a jej prędkość maleje w tempie 2,4 m/s^2. a) Ile wynosi masa lampy, jeśli naprężenie liny jest równe 89 N? b) Ile wynosi naprężenie liny, gdy winda będzie wznosić się ze skierowanym do góry przyspieszeniem o wartości 2,4 m/s^2?

••45 Winda o ciężarze 27,8 kN porusza się w górę. Oblicz naprężenie liny tej windy, gdy jej prędkość: a) rośnie w tempie 1,22 m/s^2, b) maleje w tempie 1,22 m/s^2.

••46 Wagonik windy wznosi się, gdyż ciągnie go lina. Łączna masa wagonika i pasażera wynosi 2000 kg. Gdy pasażer upuścił monetę, spadała ona z przyspieszeniem 8 m/s^2 względem wagonika. Oblicz naprężenie liny.

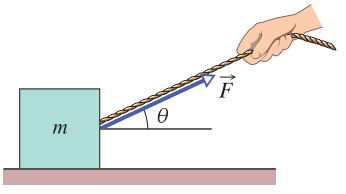
••47 GO Cyrkowa rodzina Zacchini jest słynna z numeru z człowiekiem–pociskiem, w ramach którego jeden z członków rodziny wystrzeliwany był z armaty za pomocą sprężystej taśmy lub sprężonego powietrza. W jednej z wersji pokazu Emanuel Zacchini przeleciał po wystrzale ponad trzema diabelskimi młynami i wylądował w sieci umieszczonej na poziomie wylotu z lufy armaty, przebywając w poziomie drogę 69 m. Z lufy działa o długości 5,2 m wyleciał on pod kątem 53° do poziomu areny. Przyjmij, że jego masa wynosiła 85 kg, a w lufie poruszał się ze stałym przyspieszeniem. Oblicz siłę, jaka działała na niego w lufie działa. (*Wskazówka*: potraktuj ruch w lufie jako ruch w górę równi nachylonej do poziomu pod kątem 53°). Pomiń opór powietrza.

••48 GO Jak pokazano na rysunku 5.44, dwa wagoniki windy A i B są połączone krótkim odcinkiem liny, tak że mogą być oba podnoszone lub opuszczane liną, na której wisi wagonik A. Wagonik A ma masę 1700 kg, a wagonik B — masę 1300 kg. Na podłodze wagonika A leży pudło kociemiętki o masie 12 kg. Naprężenie liny łączącej wagoniki wynosi $1{,}91 \cdot 10^4$ N. Wyznacz wartość siły normalnej, jaka działa na pudło ze strony podłogi wagonika.



Rys. 5.44. Zadanie 48

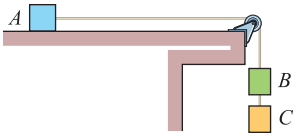
••49 Jak pokazano na rysunku 5.45, klocek o masie 5 kg jest ciągnięty bez tarcia po poziomej podłodze za pomocą liny, która działa na klocek siłą o wartości $F = 12$ N pod kątem $\theta = 25°$ w górę od kierunku poziomego. a) Jaka jest wartość przyspieszenia klocka? b) Wyobraź sobie, że powoli zwiększamy wartość siły F. Jaka jest wartość tej siły w chwili, gdy klocek zostaje całkowicie oderwany od podłogi? c) Jaka jest w tej chwili wartość przyspieszenia klocka?



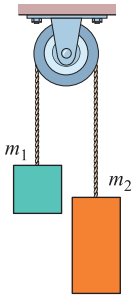
Rys. 5.45. Zadania 49 i 60

••50 GO Jak pokazano na rysunku 5.46, trzy urny wyborcze połączono linkami, z których jedną przełożono przez bloczek, który ma znikomą masą i porusza się na swej osi bez tarcia. Masy urn wynoszą: $m_A = 30$ kg, $m_B = 40$ kg i $m_C = 10$ kg. Układ zwolniono (pozwolono mu się poruszać), nie nadając

mu prędkości początkowej. Wyznacz (gdy układ już się porusza): a) naprężenie linki łączącej urny B i C, b) drogę przebytą przez urnę A w czasie 0,25 s od początku ruchu (zakładając, że urna nie dotrze w tym czasie do bloczka).



Rys. 5.46. Zadanie 50

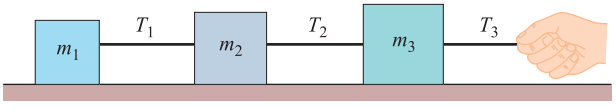


Rys. 5.47. Zadania 51 i 65

••51 GO Na rysunku 5.47 przedstawiono dwa klocki połączone linką (o znikomo małej masie) przełożoną przez bloczek (także o znikomo małej masie i bez tarcia na osi). Urządzenie nosi nazwę *maszyny Atwooda* i służy do badania ruchu przyspieszonego. Jeden klocek ma masę $m_1 = 1{,}3$ kg, a drugi — $m_2 = 2{,}8$ kg. Wyznacz a) wartość przyspieszenia klocków i b) naprężenie linki.

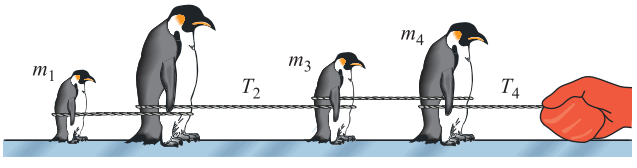
••52 Człowiek o masie 85 kg opuszcza się na ziemię z wysokości 10 m, trzymając się liny przełożonej przez obracający się bez tarcia bloczek i obciążonej na drugim końcu workiem z piaskiem o masie 65 kg. Z jaką prędkością uderzy człowiek w ziemię, jeśli w chwili początkowej się nie poruszał?

••53 Na rysunku 5.48 przedstawiono trzy klocki połączone linkami i ciągnięte w prawą stronę siłą o wartości $T_3 = 65$ N. Klocki poruszają się po stole bez tarcia, a ich masy wynoszą: $m_1 = 12$ kg, $m_2 = 24$ kg, $m_3 = 31$ kg. Wyznacz: a) przyspieszenie układu klocków oraz naprężenie linek łączących klocki b) T_1 i c) T_2.



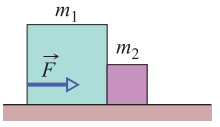
Rys. 5.48. Zadanie 53

••54 GO Na rysunku 5.49 przedstawiono cztery pingwiny, które w ramach zabawy ciągnięte są bez tarcia po lodzie przez ich opiekuna. Masy trzech pingwinów wynoszą: $m_1 = 12$ kg, $m_3 = 15$ kg i $m_4 = 20$ kg, a naprężenia dwóch odcinków liny są równe: $T_2 = 111$ N i $T_4 = 222$ N. Wyznacz masę m_2 pingwina, którego masy nie podano.



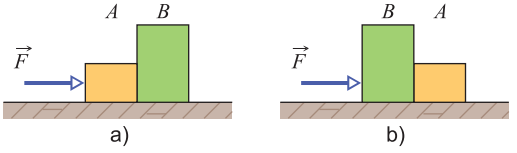
Rys. 5.49. Zadanie 54

••55 ssm ilw www Dwa stykające się ze sobą klocki leżą na stole, po którym mogą się poruszać bez tarcia. Do większego klocka przykładamy siłę poziomą, jak pokazano na rysunku 5.50. a) Wyznacz wartość siły, jaką działają na siebie klocki, jeśli $m_1 = 2{,}3$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg, a $F = 3{,}2$ N. b) Wykaż, że jeśli siłę o takiej samej wartości F, lecz przeciwnym kierunku przyłożymy do mniejszego klocka, to siła, jaką działać będą na siebie klocki będzie miała wartość 2,1 N, różną od otrzymanej w punkcie (a). c) Wyjaśnij, dlaczego te wyniki są różne.



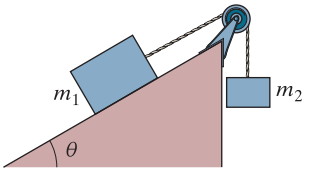
Rys. 5.50. Zadanie 55

••56 GO Jak pokazano na rysunku 5.51a, stałą siłę $\vec{F}$ przyłożono poziomo do klocka A, w związku z czym działa on na klocek B siłą o wartości 20 N skierowaną poziomo w prawo. W sytuacji z rysunku 5.51b, tę samą siłę $\vec{F}$ przyłożono do klocka B, w związku z czym klocek A działa na klocek B siłą o wartości 10 N skierowaną poziomo w lewo. Łączna masa klocków wynosi 12 kg. Wyznacz wartość a) ich przyspieszenia w sytuacji z rysunku 5.51a i b) siły $\vec{F}$.



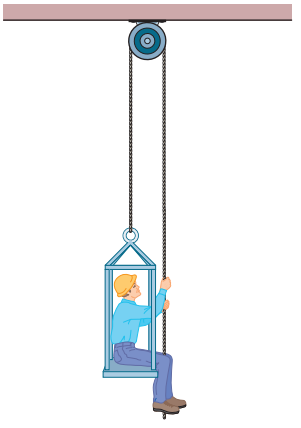
Rys. 5.51. Zadanie 56

••57 ilw Klocek o masie $m_1 = 3{,}7$ kg znajdujący się na równi pochyłej o kącie nachylenia $\theta = 30°$, po której może się poruszać bez tarcia, jest połączony liną, przełożoną przez mogący się obracać bez tarcia bloczek o znikomo małej masie, z wiszącym pionowo drugim klockiem o masie $m_2 = 2{,}3$ kg (rys. 5.52). Wyznacz: a) wartość przyspieszenia każdego klocka, b) kierunek przyspieszenia klocka wiszącego, c) naprężenie liny.



Rys. 5.52. Zadanie 57

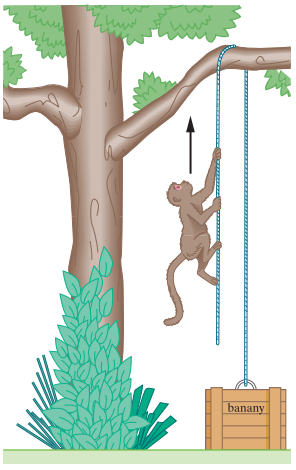
••58 Na rysunku 5.53 przedstawiono człowieka siedzącego na ławeczce bosmańskiej zawieszonej na linie, która jest przełożona przez krążek, a drugi jej koniec człowiek ten trzyma rękami. Lina i krążek mają znikomo małe masy, a krążek obraca się bez tarcia. Człowiek i ławeczka mają łączną masę 95 kg. Wyznacz wartość siły, jaką człowiek musi ciągnąć linę, aby wznosił się on: a) ze stałą prędkością, b) ze skierowa-



Rys. 5.53. Zadanie 58

nym do góry przyspieszeniem o wartości 1,3 m/s^2 (*wskazówka*: skorzystaj z diagramu sił). Załóż następnie, że drugi koniec liny opada aż do ziemi, gdzie ciągnie go inna osoba. Wyznacz wartość siły, jaką musi ciągnąć linę ta druga osoba, aby człowiek na ławeczce wznosił się: c) ze stałą prędkością, d) ze skierowanym do góry przyspieszeniem o wartości 1,3 m/s^2. Jaka jest wartość siły wywieranej na sufit ze strony krążka: e) w przypadku (a), f) w przypadku (b), g) w przypadku (c), h) w przypadku (d)?

••59 ssm Małpa o masie 10 kg wspina się po linie przerzuconej przez gałąź drzewa i przymocowanej do stojącej na ziemi skrzynki o masie 15 kg (rys. 5.54). Lina ma znikomo małą masę i może się ślizgać po gałęzi bez tarcia. a) Wyznacz minimalną wartość przyspieszenia, z jakim musi się wspinać małpa, aby skrzynka uniosła się z ziemi. Jeśli po uniesieniu skrzynki w powietrze małpa przestanie się wspinać i będzie tylko trzymać się liny, to jakie będą: b) wartość, c) kierunek przyspieszenia małpy, d) naprężenie liny?



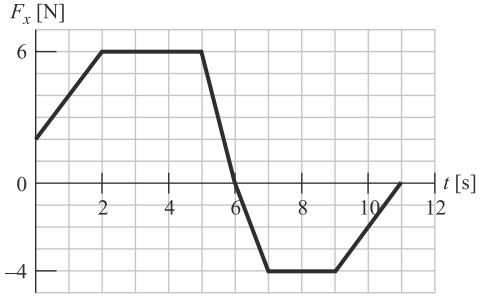
Rys. 5.54. Zadanie 59

••60 Na rysunku 5.45 przedstawiono klocek o masie 5 kg ciągnięty bez tarcia po podłodze za pomocą liny, która działa na klocek siłą o stałej wartości równej 20 N, ale kąt pod jakim ona działa zmienia się z upływem czasu zgodnie z funkcją $\theta(t)$. W jakim tempie zmienia się przyspieszenie klocka w chwili, gdy kąt $\theta = 25°$, jeśli: a) $\theta(t) = (2 \cdot 10^{-2}$ stopni/s$)t$ oraz b) $\theta(t) = -(2 \cdot 10^{-2}$ stopni/s$)t$? (*Wskazówka*: wyraź kąt w radianach).

••61 ssm ilw Balon na ogrzane powietrze o masie M opada pionowo ze skierowanym w dół przyspieszeniem o wartości a. Wyznacz masę balastu, który trzeba wyrzucić z gondoli balonu, aby nadać mu przyspieszenie o wartości a, skierowane do góry (tzn. przyspieszenie o takiej samej wartości, lecz przeciwnym kierunku niż poprzednio). Przyjmij, że skierowana do góry siła działająca na balon ze strony powietrza (siła nośna) nie zmienia się przy zmniejszeniu masy balonu.

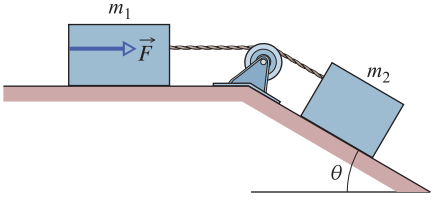
•••62 Wielu miotaczy kulą preferuje kąt wyrzutu kuli nieco mniejszy od tego, który teoretycznie daje największą odległość rzutu przy danej prędkości i wysokości wyrzutu kuli (około 42°). Jeden z powodów takiego wyboru wiąże się z prędkością, jaką miotacz może nadać kuli. Przyjmij, że gdy miotacz wypycha kulę o masie 7,26 kg, przebywa ona drogę 1,65 m pod wpływem stałej siły o wartości 380 N, a jej prędkość początkowa w tej fazie ruchu (związana ze wstępnym ruchem miotacza) wynosi 2,5 m/s. Wyznacz prędkość kuli na końcu fazy jej przyspieszania, jeśli kąt, pod którym kula jest pchana, wynosi: a) 30°, b) 42°. (*Wskazówka*: potraktuj ruch kuli jako ruch w górę równi nachylonej do poziomu pod danym kątem.) c) Ile wynosi procentowa zmiana prędkości wyrzutu kuli przy zmianie kąta wyrzutu z 30° na 42°?

•••63 GO Na rysunku 5.55 pokazano, jak zmienia się z upływem czasu t składowa F_x siły działającej na blok lodu o masie 3 kg, który może się poruszać tylko wzdłuż osi x. W chwili $t = 0$ blok porusza się w dodatnim kierunku tej osi z prędkością 3 m/s. Wyznacz a) wartość prędkości i b) kierunek ruchu bloku w chwili $t = 11$ s.



Rys. 5.55. Zadanie 63

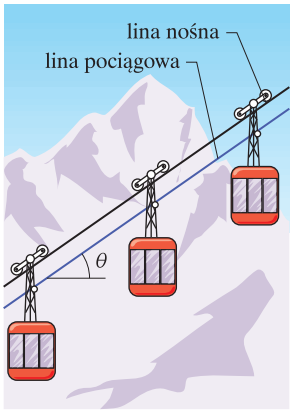
•••64 GO Na rys. 5.56 przedstawiono pudełko o masie $m_2 = 1$ kg, znajdujące się na równi pochyłej o kącie nachylenia $\theta = 30°$, po której może się poruszać bez tarcia. Połączone jest ono linką o znikomo małej masie z pudełkiem o masie $m_1 = 3$ kg, znajdującym się na powierzchni poziomej, po której może się poruszać bez tarcia. Krążek może obracać się bez tarcia i ma znikomo małą masę. a) Ile wynosi naprężenie linki, jeśli na pudełko o masie m_1 działa siła $\vec{F}$ o wartości 2,3 N? b) Wyznacz największą wartość siły $\vec{F}$, dla której linka jest jeszcze napięta.



Rys. 5.56. Zadanie 64

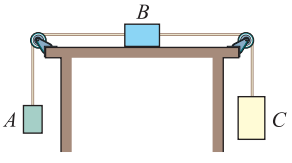
•••65 GO Na rysunku 5.47 przedstawiono *maszynę Atwooda* złożoną z dwóch pojemników połączonych linką (o znikomo małej masie) przełożoną przez bloczek (także o znikomo małej masie i bez tarcia na osi). W chwili $t = 0$ pojemnik nr 1 ma masę 1,3 kg, a pojemnik nr 2 — masę 2,8 kg, lecz pojemnik nr 1 jest dziurawy, w związku z czym jego masa maleje w tempie 0,2 kg/s. W jakim tempie zmienia się przyspieszenie pojemników w chwili: a) $t = 0$, b) $t = 3$ s? c) Kiedy to przyspieszenie przybierze wartość największą?

•••66 Na rysunku 5.57 przedstawiono fragment toru linowej kolejki górskiej. Maksymalna dopuszczalna masa każdego wagonika wraz z pasażerami wynosi 2800 kg. Wagoniki jadą po linie nośnej i są poruszane za pomocą liny pociągowej; liny są rozwieszone między słupami. Załóż, że odcinki lin między słupami są fragmentami prostych. Ile wynosi różnica naprężenia kolejnych odcinków liny pociągowej, jeśli wagoniki mają maksymalną dopuszczalną masę i poruszają się z przyspieszeniem 0,81 m/s^2 w górę stoku o nachyleniu 35°?



Rys. 5.57. Zadanie 66

•••67 Jak pokazano na rysunku 5.58, trzy klocki połączono ze sobą linkami, które przełożono przez mogące się poruszać bez tarcia bloczki. Klocek B leży na stole, po którym może się poruszać bez tarcia, a masy klocków wynoszą: $m_A = 6$ kg, $m_B = 8$ kg i $m_C = 10$ kg. Wyznacz naprężenie prawej linki, gdy klocki się poruszają.

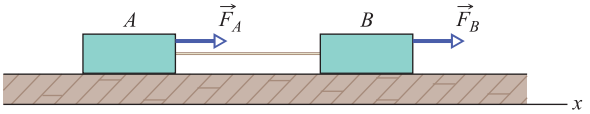


Rys. 5.58. Zadanie 67

•••68 Miotacz wyrzuca kulę o masie 7,26 kg, pchając ją na drodze 1,65 m pod kątem 34,1° do poziomu. Zwiększa przy tym prędkość kuli od 2,5 m/s (uzyskanej przy wstępnym ruchu zawodnika) do prędkości w chwili wyrzutu. Kula traci kontakt z ręką miotacza na wysokości 2,11 m nad ziemią, wyrzucona pod kątem 34,1° do poziomu. Zmierzona przez sędziów długość rzutu wynosi 15,90 m. Wyznacz wartość średniej siły, jaką działa miotacz na kulę w trakcie jej przyspieszania. *Wskazówka*: potraktuj ruch kuli w fazie jej przyspieszania jako ruch w górę równi nachylonej do poziomu pod danym kątem.

Zadania dodatkowe

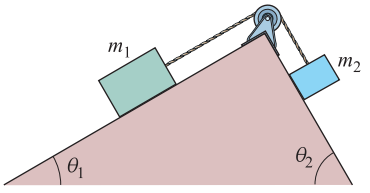
69 Jak pokazano na rysunku 5.59, klocek A o masie 4 kg i klocek B o masie 6 kg połączono struną o znikomo małej masie. Na klocek A działa siła $\vec{F}_A = (12\text{ N})\hat{i}$, a na klocek B — siła $\vec{F}_B = (24\text{ N})\hat{i}$. Wyznacz naprężenie struny.



Rys. 5.59. Zadanie 69

70 Człowiek o masie 80 kg zeskakuje na betonowe patio z okna znajdującego się o 0,5 m nad poziomem patio. Zapomina o ugięciu kolan przy lądowaniu i zatrzymuje się na drodze 2 cm. a) Wyznacz średnie przyspieszenie, z jakim się porusza przy zatrzymywaniu. b) Wyznacz wartość średniej siły, jaką działa wówczas na niego patio.

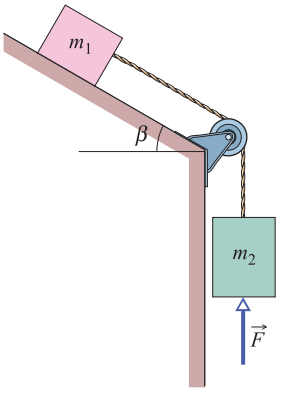
71 ssm Jak pokazano na rysunku 5.60 pudło zawierające $m_1 = 3$ kg brudnych pieniędzy, znajdujące się na równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem $\theta_1 = 30°$, i pudło zawierające $m_2 = 2$ kg wypranych pieniędzy, znajdujące się na równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem $\theta_2 = 60°$, połączono liną przełożoną przez bloczek. Pudła mogą się poruszać po równiach bez tarcia, a bloczek ma znikomo małą masę i może się obracać bez tarcia. Ile wynosi naprężenie liny?



Rys. 5.60. Zadanie 71

72 Cząstka, na którą działają trzy siły, porusza się ze stałą prędkością $\vec{v} = (2\text{ m/s})\hat{i} - (7\text{ m/s})\hat{j}$. Dwie z tych sił wynoszą $\vec{F}_1 = (2\text{ N})\hat{i} + (3\text{ N})\hat{j} + (-2\text{ N})\hat{k}$ oraz $\vec{F}_2 = (-5\text{ N})\hat{i} + (8\text{ N})\hat{j} + (-2\text{ N})\hat{k}$. Wyznacz trzecią siłę.

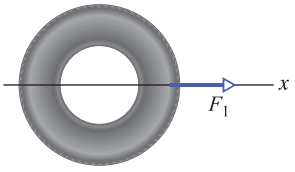
73 ssm Jak pokazano na rysunku 5.61, puszka przeciwutleniacza o masie $m_1 = 1$ kg, znajdująca się na równi pochyłej, po której może się poruszać bez tarcia, została połączona liną z puszką mielonej wołowiny o masie $m_2 = 2$ kg. Bloczek ma znikomo małą masę i może się obracać bez tarcia. Na puszkę z wołowiną działa pionowo w górę siła $\vec{F}$ o wartości $F = 6$ N, a puszka ta ma skierowane w dół przyspieszenie o wartości 5,5 m/s^2. a) Ile wynosi naprężenie liny łączącej puszki? b) Ile wynosi kąt β?



Rys. 5.61. Zadanie 73

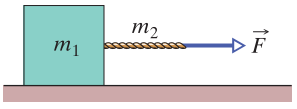
74 Na ciało działają tylko dwie siły, których wartości wynoszą 20 N i 35 N, a ich kierunki tworzą ze sobą kąt 80°. Ciało uzyskuje przyspieszenie o wartości 20 m/s^2. Jaką masę ma to ciało?

75 Na rysunku 5.62 pokazano oponę o masie 12 kg, która ma być ciągnięta za pomocą trzech lin. Jedna z przyłożonych do opony sił ($\vec{F}_1$ o wartości 50 N) jest zaznaczona na rysunku. Dobierz kierunki dwóch pozostałych sił $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ tak, aby wartość wypadkowego przyspieszenia opony była jak najmniejsza i wyznacz tę wartość, gdy: a) $F_2 = 30$ N, $F_3 = 20$ N; b) $F_2 = 30$ N, $F_3 = 10$ N; c) $F_2 = F_3 = 30$ N.



Rys. 5.62. Zadanie 75

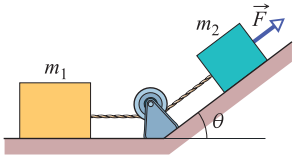
76 Klocek o masie M jest ciągnięty bez tarcia po podłodze za pomocą liny o masie m (patrz rys. 5.63). Siła $\vec{F}$ jest przyłożona poziomo do końca liny. a) Wykaż, że lina *musi* zwisać, choćby bardzo nieznacznie. Załóż, że zwis liny można pominąć i wyznacz: b) przyspieszenie klocka i liny, c) siłę, jaką lina działa na klocek oraz d) naprężenie liny w połowie jej długości.



Rys. 5.63. Zadanie 76

77 ssm Robotnik przesuwa skrzynię po podłodze hali fabrycznej, ciągnąc linę przywiązaną do skrzyni. Przykłada on do liny nachylonej pod kątem $\theta = 38°$ do poziomu siłę o wartości $F = 450$ N, a ze strony podłogi działa na skrzynię siła pozioma o wartości $f = 125$ N, skierowana przeciwnie do kierunku ruchu skrzyni. Oblicz wartość przyspieszenia skrzyni, jeśli: a) jej masa jest równa 310 kg, b) jej ciężar wynosi 310 N.

78 Pudło pocztowe firmy Federal Express, o masie $m_2 = 1$ kg, znajdujące się na równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 37°$, połączono liną z pudłem pocztowym firmy UPS, o masie $m_1 = 3$ kg, znajdującym się na powierzchni poziomej (patrz rys. 5.64). Pudła mogą się poruszać bez tarcia po powierzchniach, na których się znajdują, a bloczek ma znikomo małą masę i może się obracać bez tarcia. Siła $\vec{F}$ ma wartość $F = 12$ N. Wyznacz naprężenie liny.



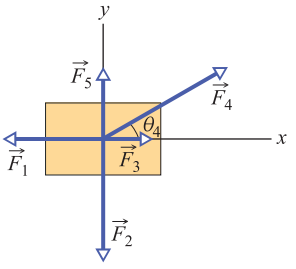
Rys. 5.64. Zadanie 78

79 Pewna cząstka ma ciężar 22 N w miejscu, gdzie $g = 9{,}8$ m/s^2. Wyznacz jej: a) ciężar, b) masę w miejscu, gdzie $g = 4{,}9$ m/s^2, oraz jej c) ciężar i d) masę w przestrzeni kosmicznej, gdzie $g = 0$.

80 Osoba o masie 80 kg wykonuje skok ze spadochronem i porusza się ze skierowanym w dół przyspieszeniem pionowym równym 2,5 m/s^2. Masa spadochronu wynosi 5 kg. a) Wyznacz skierowaną do góry siłę, jaką powietrze działa na otwarty spadochron. b) Jaką siłą skierowaną pionowo w dół działa skoczek na spadochron?

81 Statek kosmiczny startuje pionowo z Księżyca, gdzie przyspieszenie swobodnego spadku ciał wynosi $g = 1{,}6$ m/s^2. Skierowane w górę przyspieszenie statku wynosi 1 m/s^2. Ile wynosi wartość siły, jaką działa statek na pilota, którego ciężar na Ziemi jest równy 735 N?

82 Na pudło o masie $m = 4$ kg, którego widok z góry pokazano na rysunku 5.65, działa pięć sił o wartościach: $F_1 = 12$ N, $F_2 = 17$ N, $F_3 = 3$ N, $F_4 = 14$ N i $F_5 = 5$ N, a kąt $\theta_4 = 30°$. Wyznacz przyspieszenie pudła, a) podając je w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych, podając jego b) wartość i c) kąt tworzony z dodatnim kierunkiem osi x.



Rys. 5.65. Zadanie 82

83 ssm Pewna siła nadaje ciału o masie m_1 przyspieszenie 12 m/s^2, a ciału o masie m_2 — przyspieszenie 3,3 m/s^2. Jakie przyspieszenie nadałaby ta siła ciału o masie a) $m_2 - m_1$ i b) $m_2 + m_1$?

84 Ciągniesz niską lodówkę po nasmarowanej tłuszczem podłodze (bez tarcia), działając na nią stałą siłą $\vec{F}$ skierowaną poziomo (przypadek 1) albo skierowaną ku górze pod kątem θ do poziomu (przypadek 2). a) Wyznacz stosunek wartości prędkości w przypadkach 2 i 1 po czasie t od początku działania siły. b) Ile wynosi ten stosunek po przebyciu przez lodówkę drogi d?

85 Cyrkowiec o masie 52 kg ma zjechać na arenę po linie, która się urywa, gdy jej naprężenie przekroczy 425 N. a) Co się zdarzy, gdy cyrkowiec zawiśnie na tej linie bez ruchu? b) Dla jakiej wartości przyspieszenia cyrkowca lina jest na granicy zerwania?

86 Oblicz ciężar zwiadowcy kosmicznego o masie 75 kg: a) na Ziemi, b) na Marsie, gdzie przyspieszenie spadku swobodnego wynosi $g = 3{,}7$ m/s^2, c) w przestrzeni międzyplanetarnej, gdzie $g = 0$. d) Ile wynosi masa zwiadowcy w każdym z tych miejsc?

87 Ciało wisi na wadze sprężynowej zamocowanej do sufitu wagonika windy. Gdy wagonik jest nieruchomy, waga wskazuje 65 N. Jakie jest wskazanie wagi, gdy wagonik porusza się do góry: a) ze stałą prędkością o wartości 7,6 m/s, b) z prędkością, która maleje z szybkością 2,4 m/s^2, a ma akurat wartość 7,6 m/s?

88 Wyobraź sobie lądownik zbliżający się do powierzchni Kallisto, jednego z księżyców Jowisza. Jeśli silnik wytwarza siłę skierowaną do góry (ciąg) o wartości 3260 N, to pojazd obniża się ze stałą prędkością; jeśli siła ta wynosi tylko 2200 N, to pojazd spada z przyspieszeniem skierowanym w dół o wartości 0,39 m/s^2. a) Ile wynosi ciężar lądownika

w pobliżu powierzchni Kallisto? b) Ile wynosi masa pojazdu? c) Jaka jest wartość przyspieszenia swobodnego spadku w pobliżu powierzchni Kallisto?

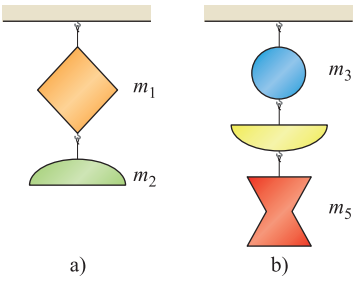
89 Silnik o masie 1400 kg jest połączony z kadłubem pasażerskiego samolotu odrzutowego za pomocą tylko trzech wkrętów (taka jest powszechna praktyka). Przyjmij, że każdy wkręt utrzymuje jedną trzecią ciężaru silnika. a) Oblicz siłę działającą na każdy z wkrętów, gdy samolot czeka na zezwolenie na start. b) W czasie lotu samolot wpada w obszar turbulencji, które nagle nadają mu przyspieszenie o wartości 2,6 m/s^2, skierowane pionowo do góry. Wyznacz siłę działającą wówczas na każdy wkręt.

90 Statek międzygwiezdny o masie $1{,}2 \cdot 10^6$ kg znajduje się w spoczynku względem pewnej gwiazdy. a) Jakie stałe przyspieszenie jest potrzebne, aby osiągnął on w ciągu 3 dni prędkość $0{,}1c$ względem tej gwiazdy (c jest prędkością światła równą $3 \cdot 10^8$ m/s)? b) Ile wynosi to przyspieszenie w jednostkach g? c) Jaka siła jest niezbędna, aby nadać statkowi to przyspieszenie? d) Ile czasu zajmie temu statkowi (licząc od początku jego ruchu) podróż na odległość 5 miesięcy świetlnych, czyli na odległość, jaką światło przebywa w ciągu 5 miesięcy, jeśli po osiągnięciu przez statek prędkości $0{,}1c$ silniki zostaną wyłączone (tzn. statek zacznie się poruszać ze stałą prędkością o tej wartości)?

91 ssm Motocyklista o masie 60 kg jedzie swym pojazdem pod górę po równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem 10°, z przyspieszeniem 3 m/s^2. a) Jaka jest wartość siły wypadkowej działającej na motocyklistę? b) Jaka jest wartość siły działającej na motocyklistę ze strony pojazdu?

92 Przy starcie rakiety o masie $1{,}3 \cdot 10^4$ kg silniki działają na rakietę siłą (siłą nośną) o wartości $2{,}6 \cdot 10^5$ N. Oblicz przyspieszenie tej rakiety podczas jej startu. Nie zapomnij o działającej na rakietę sile ciężkości.

93 ssm Na rysunku 5.66a przedstawiono prymitywny mobil zawieszony pod sufitem. Składa się on z dwóch blaszek połączonych ze sobą linkami o znikomo małej masie. Masy blaszek wynoszą $m_1 = 3{,}5$ kg i $m_2 = 4{,}5$ kg. Ile wynosi naprężenie: a) dolnej linki, b) górnej linki? Na rysunku 5.66b przedstawiono podobny mobil złożony z trzech blaszek. Masy dwóch z nich wynoszą: $m_3 = 4{,}8$ kg i $m_5 = 5{,}5$ kg. Naprężenie górnej linki jest równe 199 N. Ile wynosi naprężenie a) dolnej linki, b) środkowej linki?



Rys. 5.66. Zadanie 93

94 Borsuk o masie 12 kg wbiega dla rozrywki, z prędkością początkową 5 m/s skierowaną w dodatnim kierunku osi x, na duży zamarznięty staw, po którym ślizga się bez tarcia. Wybierz punkt, w którym borsuk wbiega na lód, jako początek układu współrzędnych. Zwierzę ślizga się po lodzie, przy czym jest popychane siłą 17 N przez wiatr wiejący w dodatnim kierunku osi y. Wyznacz: a) wektor prędkości borsuka, b) wektor położenia borsuka w zapisie za pomocą wektorów jednostkowych, po 3 s od początku jego ruchu po lodzie.

95 Załóżmy, że masy klocków z rysunku 5.12 wynoszą 2 kg i 4 kg. a) Którą z tych mas powinien mieć klocek wiszący, aby wartość przyspieszenia była jak największa? Ile wynoszą w tej sytuacji: b) wartość przyspieszenia, c) naprężenie liny?

96 Gdy jądro wychwytuje rozproszony neutron, musi go zatrzymać na drodze równej średnicy jądra. Siła, jaką działa ono wówczas na neutron, a która „skleja ze sobą" cząstki w jądrze (*oddziaływanie silne*), jest poza nim praktycznie równa zeru. Załóż, że jądro o średnicy $d = 1 \cdot 10^{-14}$ m może wychwycić neutron o początkowej wartości prędkości nie większej niż $1{,}4 \cdot 10^7$ m/s. Wyznacz wartość siły działającej na neutron, zakładając, że jest ona stała w obszarze jądra. Masa neutronu wynosi $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

97 Ciało wzorcowe o masie 1 kg porusza się ruchem przyspieszonym pod wpływem sił $\vec{F}_1 = (3\text{ N})\hat{\mathrm{i}} + (4\text{ N})\hat{\mathrm{j}}$ i $\vec{F}_2 = (-2\text{ N})\hat{\mathrm{i}} + (-6\text{ N})\hat{\mathrm{j}}$. Podaj działającą na ciało siłę wypadkową, zapisując ją: a) przy użyciu wektorów jednostkowych oraz jako b) wartość i c) kąt, jaki ona tworzy z dodatnim kierunkiem osi x. Oblicz d) wartość przyspieszenia ciała i e) kąt, jaki ono tworzy z dodatnim kierunkiem osi x.

ROZDZIAŁ 6

Siła i ruch II

6.1. TARCIE

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

6.01 odróżnić od siebie tarcie statyczne i kinetyczne;

6.02 wyznaczyć kierunek i wartość siły tarcia;

6.03 narysować diagram sił i zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona dla ciał poruszających się na płaszczyznach poziomych, pionowych i pochyłych, gdy występuje tarcie.

Podstawowe fakty

- Gdy siła $\vec{F}$ stara się wprowadzić ciało w ruch ślizgowy, na ciało działa ze strony podłoża siła tarcia. Siła tarcia jest równoległa do podłoża i skierowana tak, by przeciwdziałać ruchowi poślizgowemu. Źródłem tarcia jest wiązanie ciała z podłożem.

Jeśli ciało się nie ślizga po podłożu, to działa na nie siła tarcia statycznego $\vec{f}_s$. Jeśli ciało się ślizga, to działa na nie siła tarcia kinetycznego $\vec{f}_k$.

- Jeśli ciało się nie porusza, to siła tarcia statycznego $\vec{f}_s$ i równoległa do podłoża składowa siły $\vec{F}$ są równe sobie co do wartości i przeciwnie skierowane. Gdy składowa siły $\vec{F}$ rośnie, siła tarcia $\vec{f}_s$ też rośnie.

- Wartość siły $\vec{f}_s$ ma wartość maksymalną daną wzorem

$$f_{s,max} = \mu_s F_N,$$

gdzie μ_s jest współczynnikiem tarcia statycznego, a F_N — wartością siły normalnej. Gdy składowa siły $\vec{F}$ równoległa do podłoża przekracza $f_{s,max}$, ciało zaczyna się ślizgać po podłożu.

- Gdy ciało zaczyna się ślizgać po podłożu, wielkość siły tarcia szybko maleje do stałej wartości danej wzorem

$$f_k = \mu_k F_N,$$

gdzie μ_k jest współczynnikiem tarcia kinetycznego.

O fizyce

W tym rozdziale skupimy się na fizyce trzech znanych sił: siły tarcia, siły oporu i siły dośrodkowej. Inżynier przygotowujący samochód na wyścig Indianapolis 500 musi rozważyć wszystkie z nich. Siły tarcia działające na opony są kluczowym czynnikiem decydującym o wartości przyspieszenia przy wyjeździe z alei serwisowej i powrocie na tor (gdy pojazd wjedzie na plamę oleju, przepadnie przyspieszenie, a może i pojazd). Działająca na samochód siła oporu aerodynamicznego musi być jak najmniejsza, aby pojazd nie spalał zbyt wiele paliwa i nie musiał zbyt wcześnie wjeżdżać do alei serwisowej (nawet jeden 14-sekundowy pobyt w alei może kosztować zwycięstwo w wyścigu). Siła dośrodkowa decyduje o prędkości pokonywania zakrętów (gdy siła dośrodkowa jest zbyt mała, samochód ześlizguje się na obrzeże toru). Najpierw zajmiemy się siłami tarcia.

Tarcie

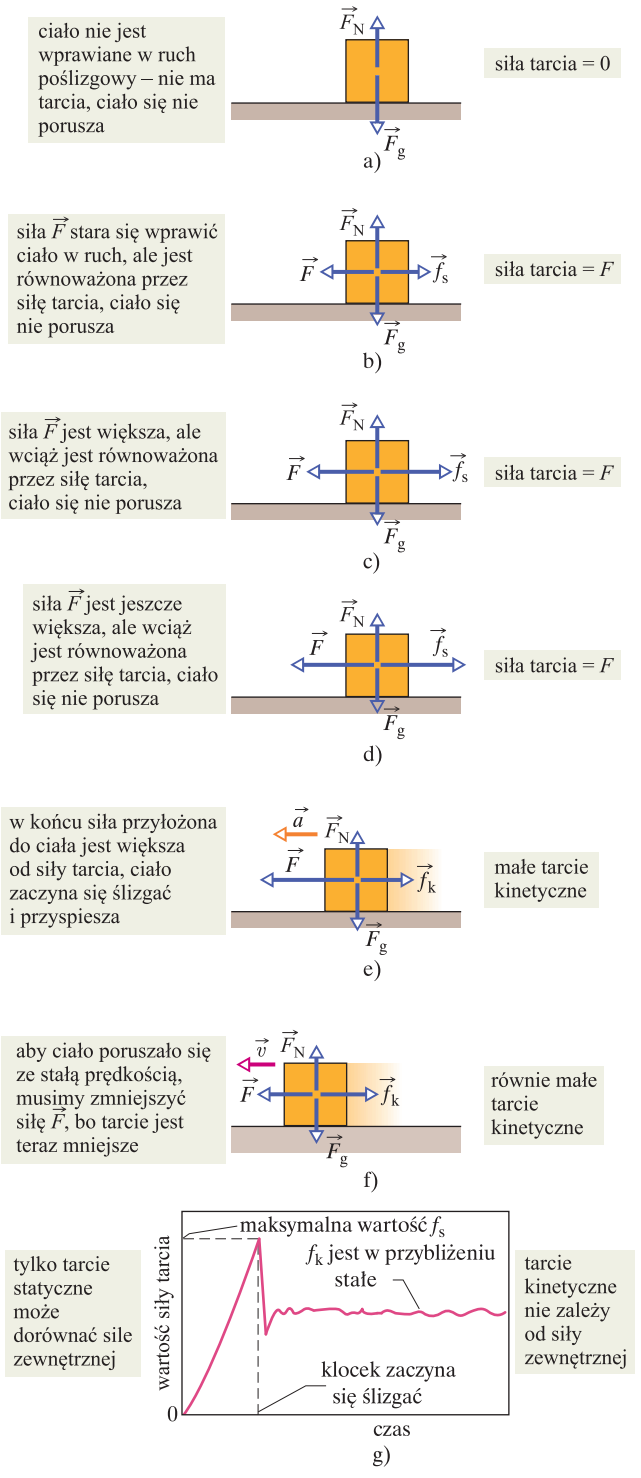
Siły tarcia są nieodłącznym elementem naszej codzienności. Gdybyśmy nie potrafili im przeciwdziałać, zatrzymałyby każde poruszające się ciało i nie pozwoliłyby obracać się żadnemu wirnikowi. Samochód zużywa aż ok. 20% paliwa na pokonanie sił tarcia w silniku i układzie przeniesienia napędu. Z drugiej jednak strony, gdyby tarcia zupełnie nie było, samochodem nigdzie byśmy nie dojechali, nie moglibyśmy chodzić, ani jeździć rowerem. Nie dałoby się utrzymać pióra w ręku, a nawet gdyby to było możliwe, to i tak nie dałoby się pisać. Gwoździe i wkręty byłyby bezużyteczne, tkaniny rozpadłyby się, a węzły by się rozwiązały.

Trzy doświadczenia. Zajmiemy się teraz siłami tarcia działającymi między suchymi powierzchniami stałymi pozostającymi względem siebie w spoczynku albo poruszającymi się z niewielką prędkością jedna względem drugiej. Rozważmy trzy proste doświadczenia myślowe.

1. Pchnij książkę, aby wprawić ją w ruch ślizgowy po stole. Zgodnie z oczekiwaniem książka będzie zwalniać i w końcu się zatrzyma. Oznacza to, że poruszała się ona z przyspieszeniem równoległym do powierzchni stołu i skierowanym przeciwnie do kierunku prędkości książki. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona na książkę musiała więc działać siła równoległa do powierzchni stołu, o kierunku przeciwnym do kierunku prędkości. To jest właśnie siła tarcia.
2. Pchaj poziomo książkę po stole tak, aby poruszała się ze stałą prędkością. Czy wywierana przez ciebie siła jest jedyną siłą działającą na książkę? Nie, bo gdyby tak było, książka poruszałaby się ruchem przyspieszonym. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że musi istnieć jeszcze inna siła, skierowana przeciwnie do tej, którą ty działasz, ale o takiej samej wartości, tak że te dwie siły się równoważą. Ta druga siła to siła tarcia, równoległa do powierzchni stołu.
3. Pchnij poziomo ciężką skrzynię. Skrzynia ani drgnie. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona na skrzynię działa jeszcze inna siła, przeciwdziałająca sile przykładanej przez ciebie. Co więcej, musi być ona skierowana przeciwnie do twojej siły i być jej równa co do wartości, tak aby te siły się równoważyły. Ta druga siła to siła tarcia. Pchnij skrzynię mocniej. Skrzynia nadal pozostaje w miejscu. Jak widać, siła tarcia może zmieniać wartość, aby równoważyć różne siły. Wreszcie pchnij skrzynię z całej siły. Skrzynia zaczyna się ślizgać. Stwierdzamy zatem, że istnieje wartość maksymalna siły tarcia, po przekroczeniu której ciało zaczyna się ślizgać.

Dwa rodzaje tarcia. To ostatnie doświadczenie przedstawiono szczegółowo na rysunku 6.1. Na rysunku 6.1a klocek spoczywa na stole, a działająca na niego siła ciężkości $\vec{F}_g$ jest równoważona przez siłę normalną $\vec{F}_N$. Rysunek 6.1b odpowiada sytuacji, w której działasz na klocek siłą $\vec{F}$, starając się popchnąć go w lewą stronę. W odpowiedzi pojawia się siła tarcia $\vec{f}_s$, skierowana w prawo, która dokładnie równoważy siłę przyłożoną przez ciebie. Siłę $\vec{f}_s$ nazywamy **siłą tarcia statycznego**. Klocek pozostaje w spoczynku.





Rys. 6.1. a) Siły działające na klocek w spoczynku. b)–d) Przyłożona do klocka siła zewnętrzna $\vec{F}$ jest równoważona przez siłę tarcia statycznego $\vec{f}_s$. Gdy F rośnie, f_s także wzrasta, aż do osiągnięcia pewnej wartości maksymalnej. e) Gdy f przekracza wartość maksymalną f_s, klocek zaczyna się ślizgać po stole, poruszając się ruchem przyspieszonym w kierunku siły $\vec{F}$. f) Jeśli klocek ma się poruszać ze stałą prędkością, to siłę F trzeba zmniejszyć w stosunku do wartości maksymalnej, która była potrzebna do wprawienia klocka w ruch. g) Wyniki doświadczenia wykonanego zgodnie ze schematem a)–f). **Na stronie *WileyPLUS* dostępna jest animacja tego rysunku z komentarzem słownym**

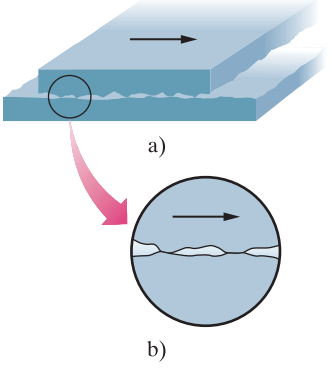
Na rysunkach 6.1c i d pokazano, że gdy zwiększasz wartość przykładanej do klocka siły, wartość siły tarcia statycznego $\vec{f}_s$ także wzrasta i klocek nadal się nie porusza. Gdy jednak siła przyłożona do klocka osiąga pewną wartość graniczną, klocek zaczyna się ślizgać po stole i porusza się ruchem przyspieszonym w lewo (rys. 6.1e). Siłę tarcia, która przeciwdziała wówczas ruchowi ciała nazywamy **siłą tarcia kinetycznego** $\vec{f}_k$.

Wartość siły tarcia kinetycznego, działającej na ciało w ruchu, jest zwykle mniejsza od maksymalnej wartości siły tarcia statycznego działającej, gdy ciało spoczywa. Jeśli zatem chcesz, aby klocek poruszał się po podłożu ze stałą prędkością, to po ruszeniu klocka z miejsca musisz zwykle zmniejszyć wartość przykładanej siły, jak na rysunku 6.1f. Na rysunku 6.1g pokazano jako przykład wyniki doświadczenia, w którym zwiększano stopniowo siłę przykładaną do klocka, aż do wprawienia go w ruch. Zauważ, że gdy klocek ruszono już z miejsca, do utrzymania go w ruchu ze stałą prędkością potrzebna była siła mniejsza od tej, przy której klocek zaczął się ślizgać.

Obraz mikroskopowy. Siła tarcia jest w istocie rzeczy sumą wektorową wielu sił działających między atomami na powierzchni jednego i drugiego ciała. Gdy dwie bardzo starannie wypolerowane i bardzo czyste powierzchnie metaliczne zetkniemy ze sobą w wysokiej próżni (aby zachować ich czystość), wówczas nie można uzyskać ich poślizgu względem siebie. Powierzchnie są bardzo gładkie, więc wiele atomów jednej i drugiej powierzchni znajduje się bardzo blisko siebie i obydwa kawałki metalu zostają ze sobą *„zespawane na zimno”*, tworząc jeden kawałek metalu. Gdy zetkniemy ze sobą w powietrzu specjalnie wypolerowane klocki wzorcowe stosowane w warsztatach mechanicznych, w bezpośredniej bliskości znajduje się mniejsza liczba atomów obydwu powierzchni, niemniej jednak klocki trzymają się bardzo mocno i do oderwania ich od siebie potrzebne jest zwykle ich obrócenie, jak np. przy odkręcaniu nakrętki. Zwykle jednak zbliżyć się do siebie może bardzo niewiele atomów dwóch powierzchni. Nawet bardzo dobrze wypolerowane powierzchnie metaliczne nie są płaskie w skali atomów. Ponadto powierzchnie przedmiotów codziennego użytku są pokryte warstwą tlenków i innych zanieczyszczeń, które utrudniają zespawanie się ze sobą na zimno tych powierzchni.

Gdy stykamy ze sobą dwie zwykłe powierzchnie, tylko najwyższe punkty powierzchni są bliskie siebie (to tak, jak gdyby Alpy Szwajcarskie obrócić do góry nogami i postawić na Alpach Austriackich). Powierzchnia rzeczywistego kontaktu *mikroskopowego* obydwu powierzchni jest znacznie mniejsza od powierzchni pozornego kontaktu *makroskopowego*, nawet i 10 000 razy. Niemniej jednak w wielu punktach styku powierzchni zachodzi ich spawanie na zimno. Właśnie to punktowe połączenie ze sobą powierzchni jest źródłem tarcia statycznego, gdy staramy się przesunąć jedną powierzchnię względem drugiej.

Jeśli przyłożona siła jest dostatecznie duża, aby przesunąć powierzchnie względem siebie, to najpierw występuje zerwanie połączeń powierzchni (gdy zaczynają się one poruszać względem siebie), a potem ciągłe tworzenie się i rozrywanie połączeń, gdy powierzchnie ślizgają się po sobie i różne punkty powierzchni stykają się ze sobą (rys. 6.2). Siła tarcia kinetycznego $\vec{f}_k$, utrudniająca ruch powierzchni względem siebie, jest sumą wektorową sił występujących w poszczególnych punktach styku.



Rys. 6.2. Mechanizm tarcia poślizgowego. a) Powierzchnia górna ślizga się po dolnej w prawą stronę. b) Powiększony widok fragmentu obydwu powierzchni, pokazujący dwa miejsca, w których nastąpiło ich zespawanie na zimno. Aby rozerwać połączenia powierzchni i utrzymać ich ruch względem siebie, potrzebna jest pewna siła

Jeśli powierzchnie zostaną ściśnięte silniej, to zespawanie na zimno nastąpi w znacznie większej liczbie punktów. Uzyskanie poślizgu powierzchni względem siebie wymagać więc będzie większej siły, tzn. wartość maksymalna siły tarcia statycznego $\vec{f}_s$ będzie większa. Gdy powierzchnie zaczną się po sobie ślizgać, chwilowe spawanie na zimno będzie także występować w większej liczbie punktów, a zatem i siła tarcia kinetycznego $\vec{f}_k$ będzie miała większą wartość.

Ruch ślizgowy jednej powierzchni po drugiej ma często charakter skokowy, ponieważ powierzchnie na przemian lepiej i gorzej stykają się ze sobą. Takim powtarzającym się skokom mogą towarzyszyć efekty akustyczne (np. piszczenie lub skrzypienie), jak przy ostrym hamowaniu samochodu na suchej jezdni, zadrapaniu tablicy szkolnej paznokciem, czy ruchu zardzewiałych zawiasów. Nie zawsze muszą to być dźwięki niemiłe — przy umiejętnym pociągnięciu smyczkiem struny skrzypiec uzyskuje się bardzo piękne dźwięki.



Właściwości tarcia

Z doświadczenia wynika, że gdy suche ciało naciska na suchą powierzchnię pod nieobecność smaru, a siła zewnętrzna $\vec{F}$ stara się nadać ciału ruch ślizgowy po powierzchni, występuje siła tarcia, która ma następujące właściwości:

Właściwość 1. Jeśli ciało się nie porusza, to siła tarcia statycznego $\vec{f}_s$ oraz składowa siły $\vec{F}$ równoległa do powierzchni się równoważą. Siły te mają jednakową wartość, a siła $\vec{f}_s$ jest skierowana przeciwnie do składowej równoległej siły $\vec{F}$.

Właściwość 2. Maksymalna wartość siły $\vec{f}_s$, którą oznaczymy $f_{s,max}$, dana jest wzorem

$$f_{s,max} = \mu_s F_N, \tag{6.1}$$

przy czym μ_s jest **współczynnikiem tarcia statycznego**, a F_N jest wartością siły normalnej działającej na ciało ze strony powierzchni. Jeśli wartość składowej siły $\vec{F}$, która jest równoległa do powierzchni, przekracza wartość $f_{s,max}$, to ciało zaczyna się ślizgać po tej powierzchni.

Właściwość 3. Jeśli ciało zaczyna się ślizgać po powierzchni, to wartość siły tarcia gwałtownie maleje do wartości f_k równej

$$f_k = \mu_k F_N, \tag{6.2}$$

przy czym μ_k jest **współczynnikiem tarcia kinetycznego**. Później, gdy ciało już się ślizga, jego ruchowi przeciwdziała siła tarcia kinetycznego $\vec{f}_k$ o wartości danej równaniem (6.2).

Wartość siły normalnej F_N, o której mowa we właściwościach 2 i 3, jest miarą nacisku ciała na powierzchnię. Jeśli nacisk ten jest większy, to — na mocy trzeciej zasady dynamiki Newtona — F_N jest większe. W punktach 1 i 2 mowa jest o jednej sile zewnętrznej $\vec{F}$, lecz zawarte w nich stwierdzenia

są słuszne także dla wypadkowej wielu sił działających na ciało. Równania (6.1) i (6.2) *nie są* równaniami wektorowymi; kierunki sił $\vec{f}_s$ i $\vec{f}_k$ są zawsze równoległe do powierzchni i przeciwne do kierunku, w którym ma się ślizgać ciało, a siła normalna $\vec{F}_N$ jest prostopadła do powierzchni.

Współczynniki μ_s i μ_k są bezwymiarowe, a ich wartości wyznaczamy doświadczalnie. Zależą one od właściwości zarówno ciała, jak i powierzchni, wobec czego, podając ich wartości, używamy zwykle słowa „między", jak w zdaniu: „wartość μ_s *między* jajkiem a patelnią pokrytą teflonem wynosi 0,04, lecz *między* butami do wspinaczki a skałą może być równa nawet 1,2". Będziemy zakładać, że wartość μ_k nie zależy od prędkości, z jaką ślizga się ciało po powierzchni.

Sprawdzian 1

Klocek leży na podłodze. a) Jaka jest wartość siły tarcia działającej na klocek ze strony podłogi? b) Jaka jest wartość tej siły po przyłożeniu do klocka siły poziomej o wartości 5 N, przy czym klocek się nie porusza? c) Wartość maksymalna siły tarcia statycznego $f_{s,max}$ wynosi 10 N. Czy klocek zostanie wprawiony w ruch siłą poziomą o wartości 8 N? d) Czy klocek z punktu (c) wprawi w ruch siła pozioma o wartości 12 N? e) Jaka jest wartość siły tarcia w przypadku (c)?

Przykład 6.01. Siła działa ukośnie na nieruchomy klocek

W tym przykładzie mamy siły działające ukośnie, co wymaga pracy na składowych, by wyznaczyć siłę tarcia. Najtrudniej zawsze wyznaczyć wszystkie składowe. Na rysunku 6.3a do klocka o masie 8 kg przyłożono siłę o wartości $F = 12$ N pod kątem $\theta = 30°$ w dół od poziomu. Współczynnik tarcia statycznego między klockiem a podłożem wynosi $\mu_s = 0{,}7$, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy $\mu_k = 0{,}4$. Czy klocek zacznie się ślizgać, czy też pozostanie nieruchomy? Ile wynosi wartość siły tarcia działającej na klocek?

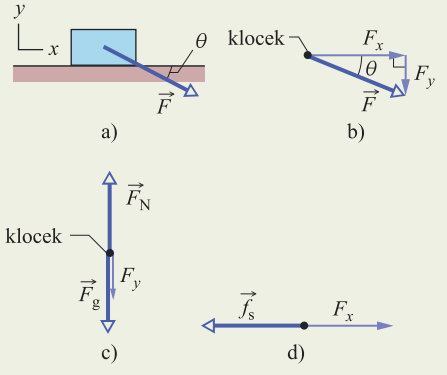
PODSTAWOWE FAKTY

1) Gdy ciało na podłożu się nie porusza, siła tarcia statycznego równoważy składową siły zewnętrznej, która usiłuje wprawić ciało w ruch poślizgowy. 2) Maksymalna wartość siły tarcia jest dana wzorem (6.1) ($f_{s,max} = \mu_s F_N$). 3) Gdy składowa siły zewnętrznej równoległa do podłoża przekracza maksymalną siłę tarcia, ciało zaczyna się ślizgać. 4) Gdy ciało się ślizga, działa siła tarcia kinetycznego dana wzorem (6.2) ($f_k = \mu_k F_N$).

Obliczenia: Aby stwierdzić, czy klocek się ślizga (i wyznaczyć działającą siłę tarcia), musimy porównać składową F_x siły przyłożonej i maksymalną wartość siły tarcia $f_{s,max}$. Z trójkąta prostokątnego, którego bokami są siła i jej składowe (rys. 6.3b), otrzymujemy

$$F_x = F\cos\theta = (12\text{ N})\cos 30° = 10{,}4\text{ N}. \qquad (6.3)$$

Z równania (6.1) wiemy, że $f_{s,max} = \mu_s F_N$, a więc aby wyznaczyć $f_{s,max}$, musimy najpierw obliczyć wartość F_N. Siła normalna działa poziomo, zastosujemy zatem drugą zasadę dynamiki ($F_{wyp,y} = ma_y$) dla pionowych



Rys. 6.3. a) Siła przyłożona do nieruchomego klocka. b) Składowe tej siły. c) Siły działające na klocek w pionie. d) Siły działające na klocek w poziomie

składowych sił działających na klocek (rys. 6.3c). Siła ciężkości ma wartość mg i działa w dół. Siła przyłożona do klocka ma składową pionową równą $F_y = F\sin\theta$. Druga zasada dynamiki ma więc postać równania

$$F_N - mg - F\sin\theta = m(0), \qquad (6.4)$$

z którego dostajemy

$$F_N = mg + F\sin\theta. \qquad (6.5)$$

Teraz możemy już skorzystać ze związku $f_{s,max} = \mu_s F_N$, co daje

$$\begin{aligned} f_{s,max} &= \mu_s(mg + F\sin\theta) \\ &= (0{,}7)((8\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2) + (12\text{ N})(\sin 30^\circ)) \\ &= 59{,}1\text{ N}. \end{aligned} \qquad (6.6)$$

Jak widzimy, wartość składowej siły zewnętrznej F_x (= 10,4 N), która usiłuje wprawić klocek w ruch ślizgowy, jest mniejsza niż $f_{s,max}$ (= 59,1 N), a zatem klocek pozostaje nieruchomy. Oznacza to, że wartość f_s *jest taka sama* jak F_x. Druga zasada dynamiki dla składowych wzdłuż osi poziomej x (rysunek 6.3d) ma zatem postać

$$F_x - f_s = m(0), \qquad (6.7)$$

skąd wynika, że

$$f_s = F_x = 10{,}4\text{ N} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

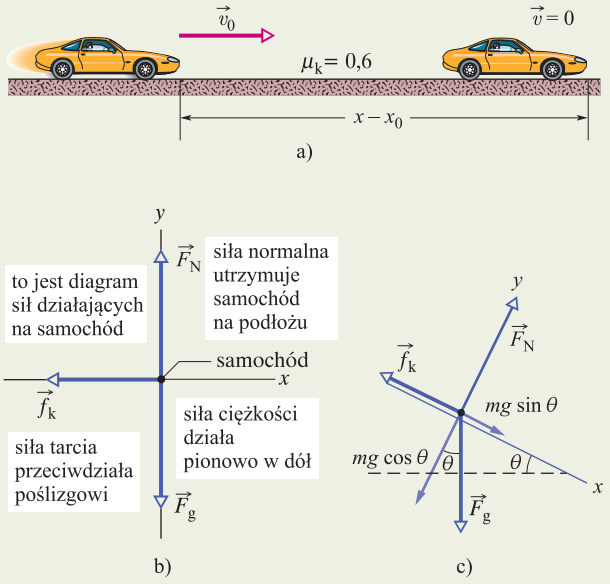
Przykład 6.02. Poślizg na oblodzonej szosie

Jedne z najśmieszniejszych filmików w internecie to te, na których kierowcy ślizgają się bezradnie na oblodzonej szosie. W tym zadaniu porównamy ze sobą długości drogi, na której zatrzymuje się samochód o prędkości początkowej 10 m/s na suchej szosie poziomej, oblodzonej szosie poziomej i (co najbardziej lubimy) na oblodzonej drodze biegnącej w dół.

a) Oblicz drogę, na jakiej zatrzyma się samochód, ślizgając się na poziomej szosie (rys. 6.4a), jeśli współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_k = 0{,}6$, co jest wartością typową dla zwykłych opon na suchej nawierzchni. Pomiń opór powietrza, załóż, że koła zostały zablokowane i opony ślizgają się po nawierzchni; wybierz oś x o kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu pojazdu.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Samochód zmniejsza swą prędkość, czyli porusza się ruchem przyspieszonym, ponieważ działa na niego siła tarcia, której kierunek jest zawsze przeciwny do kierunku ciała. Ma ona w naszym przypadku ujemny kierunek osi x. 2) Siłą tarcia jest w tym przypadku siła tarcia kinetycznego o wartości danej wzorem (6.2) ($f_k = \mu_k F_N$), gdzie F_N jest wartością siły normalnej działającej na pojazd ze strony drogi. 3) Związek siły tarcia z przyspieszeniem pojazdu wynika z drugiej zasady dynamiki ($F_{wyp,x} = ma_x$) dla ruchu wzdłuż szosy.



Rys. 6.4. a) Samochód jadący w prawo wpada w poślizg i zatrzymuje się po przebyciu drogi 290 m. Poniżej: diagram sił dla działających na ten samochód na drodze b) poziomej i c) opadającej

Obliczenia: Na rysunku 6.4b przedstawiono diagram sił działających na samochód. Siła normalna jest skierowana pionowo w górę, siła ciężkości — pionowo w dół, a siła tarcia — poziomo. W kierunku poziomym działa na pojazd tylko siła tarcia, a zatem druga zasada dynamiki dla ruchu w kierunku poziomym ($F_{wyp,x} = ma_x$) ma postać

$$-f_k = ma_x. \tag{6.8}$$

Podstawiając do tego równania $f_k = \mu_k F_N$, otrzymujemy

$$-\mu_k F_N = ma_x. \tag{6.9}$$

Jak widać z rysunku 6.4b, siła normalna i siła ciężkości się równoważą, wobec czego możemy w równaniu (6.9) zastąpić wartość siły normalnej F_N wartością siły ciężkości mg. W otrzymanym równaniu m się skróci (droga hamowania poślizgowego nie zależy od masy pojazdu — nie ma znaczenia, czy jest on lekki, czy ciężki). Rozwiązaniem równania jest

$$a_x = -\mu_k g. \tag{6.10}$$

Przyspieszenie jest stałe, możemy więc skorzystać z równań ruchu ze stałym przyspieszeniem z tabeli 2.1. Szukamy drogi hamowania $x - x_0$, najwygodniej będzie zatem skorzystać ze wzoru (2.16) ($v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$), z którego otrzymujemy

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_x}. \tag{6.11}$$

Podstawiając przyspieszenie z równania (6.10), dostajemy następnie

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{-2\mu_k g}. \tag{6.12}$$

Prędkość początkowa wynosi $v_0 = 10$ m/s, prędkość końcowa $v = 0$, a współczynnik tarcia kinetycznego $\mu_k = 0{,}6$, skąd wynika, że droga hamowania wynosi

$$x - x_0 = 8{,}5 \text{ m} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Oblicz drogę hamowania, gdy droga jest oblodzona i $\mu_k = 0{,}1$.

Obliczenia: Rozwiązanie z poprzedniego punktu jest poprawne i w tym przypadku aż do miejsca, w którym podstawiamy wartości liczbowe. Obecnie musimy do wzoru (6.12) podstawić nową wartość współczynnika μ_k, co daje

$$x - x_0 = 51 \text{ m} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Widzimy, że teraz droga hamowania jest znacznie dłuższa niż w punkcie (a), a więc szansa, że pojazd na nic nie wpadnie podczas hamowania, odpowiednio mniejsza.

c) Zajmijmy się teraz samochodem ślizgającym po oblodzonej drodze opadającej pod kątem $\theta = 5°$ (to bardzo małe nachylenie, nie ulice San Francisco czy Lizbony). Diagram sił przedstawiony na rysunku 6.4c przypomina diagram dla równi pochyłej z przykładu 5.04, z tym że oś x jest teraz skierowana *w dół równi*, bo w tym kierunku ciało się porusza. Wyznacz drogę hamowania.

Obliczenia: W stosunku do sytuacji z rysunku 6.4b mamy dwie istotne zmiany. 1) Istnieje składowa siły ciężkości wzdłuż ukośnej osi x i ta składowa działa na pojazd w dół równi. Z przykładu 5.04 i rysunku 5.15 wynika, że składowa w dół równi, co jest obecnie kierunkiem dodatnim osi x z rysunku 6.4c, wynosi $mg \sin\theta$. 2) Siła normalna (nadal prostopadła do szosy) równoważy teraz tylko jedną składową siły ciężkości, a nie całą tę siłę. Z przykładu 5.04 (patrz rys. 5.15i) wiemy, że warunek równowagi tych sił ma postać

$$F_N = mg\cos\theta.$$

Mimo tych zmian, nadal potrzebna nam druga zasada dynamiki ($F_{wyp,x} = ma_x$) dla ruchu wzdłuż osi x (teraz ukośnej). Jej wyrazem jest równanie

$$-f_k + mg\sin\theta = ma_x,$$

z którego otrzymujemy

$$-\mu_k F_N + mg\sin\theta = ma_x,$$

a następnie

$$-\mu_k mg\cos\theta + mg\sin\theta = ma_x.$$

Wyznaczając przyspieszenie, dostajemy

$$\begin{aligned} a_x &= -\mu_k g\cos\theta + g\sin\theta \\ &= -(0{,}1)(9{,}8 \text{ m/s}^2)\cos 5° + (9{,}8 \text{ m/s}^2)\sin 5° \\ &= -0{,}12 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Podstawiając ten wynik do równania (6.11), otrzymujemy drogę hamowania na szosie opadającej

$$x - x_0 = 409 \text{ m} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

To niemal pół kilometra! Na takiej oblodzonej pochyłości łatwo odróżnić ludzi, którzy potrafią rozwiązać takie zadanie (i potem wiedzą, kiedy lepiej zostać w domu), od ludzi, którzy tego nie potrafią (i kończą jako bohaterowie filmików z internetu).



Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

6.2. SIŁA OPORU I PRĘDKOŚĆ GRANICZNA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał. . .

6.04 wykorzystać związek między siłą oporu aerodynamicznego, działającą na ciało poruszające się w powietrzu, a prędkością tego ciała;

6.05 wyznaczyć prędkość graniczną ciała spadającego w powietrzu.

Podstawowe fakty

- Gdy ciało i powietrze (lub inny płyn) poruszają się względem siebie, na ciało działa siła oporu $\vec{D}$ utrudniająca ten ruch względny i skierowana w kierunku przepływu płynu względem ciała. Wartość siły $\vec{D}$ jest związana z prędkością ruchu względnego v oraz wyznaczonym doświadczalnie współczynnikiem oporu C zależnością

$$D = \tfrac{1}{2} C \rho S v^2,$$

gdzie ρ jest gęstością (czyli masą jednostki objętości) płynu, a S — polem przekroju poprzecznego ciała (tzn. polem przekroju prostopadłego do kierunku wektora prędkości $\vec{v}$).

- Gdy ciało o obłym kształcie spada w powietrzu dostatecznie długo, to w pewnej chwili wartości siły oporu aerodynamicznego D i siły ciężkości F_g stają się sobie równe. Od tej chwili ciało spada ze stałą prędkością graniczną v_t o wartości danej wzorem

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho S}}.$$

Siła oporu i prędkość graniczna

Płynem nazywamy ośrodek zdolny do przepływu, czyli gaz lub ciecz. Jeśli zachodzi ruch względny płynu i ciała (tzn. albo ciało porusza się w płynie, albo płyn opływa ciało), to na ciało działa **siła oporu** $\vec{D}$ (aerodynamicznego w gazie lub hydrodynamicznego w cieczy), utrudniająca ten ruch względny i skierowana w kierunku przepływu płynu względem ciała.

Omówimy tu jedynie przypadki, gdy płynem jest powietrze, ciało ma kształt „obły” (jak piłka baseballowa), a nie wysmukły (jak oszczep), a ruch względny jest dostatecznie szybki na to, aby przepływ był turbulentny, tzn. aby powietrze tworzyło za ciałem wiry. W tych warunkach zależność wartości siły oporu $\vec{D}$ od prędkości względnej v jest dana wzorem

$$D = \tfrac{1}{2} C \rho S v^2, \qquad (6.14)$$

przy czym C jest wyznaczonym doświadczalnie **współczynnikiem oporu aerodynamicznego**, ρ — gęstością (czyli masą jednostki objętości) powietrza, a S — **polem przekroju poprzecznego** ciała (tzn. polem przekroju prostopadłego do kierunku wektora prędkości $\vec{v}$). Współczynnik oporu C (którego wartość jest zwykle zawarta w granicach od 0,4 do 1) jest tylko w przybliżeniu stały dla danego ciała, ponieważ dla bardzo dużej zmiany v, C też może ulec zmianie. Pominiemy tu jednak tę zmienność C.

Narciarze uprawiający zjazdy dobrze wiedzą o tym, że siła oporu zależy od S i v^2. Aby osiągnąć dużą prędkość, narciarz musi — jak się tylko da — zmniejszyć D, na przykład zmniejszając S przez przybranie pozycji o kształcie podobnym do jajka (rys. 6.5).

Spadek ciał. Gdy ciało o obłym kształcie spada w powietrzu z prędkością początkową równą zeru, siła oporu $\vec{D}$ jest skierowana do góry. Jej wartość wzrasta stopniowo od zera, w miarę jak ciało nabiera prędkości. Ta



Rys. 6.5. Narciarz, przybiera pozycję o kształcie podobnym do jajka, aby jak najbardziej zmniejszyć swoje pole przekroju poprzecznego, a więc i działającą na niego siłę oporu aerodynamicznego (fot. Mitch Gunn/Shutterstock)

Tabela 6.1. Prędkości graniczne niektórych ciał w powietrzu

Ciało	Prędkość graniczna [m/s]	„Droga 95%” [m] [1]
kula (do pchnięcia kulą)	145	2500
skoczek (przed otwarciem spadochronu)	60	430
piłka baseballowa	42	210
piłka tenisowa	31	115
piłka do koszykówki	20	47
piłeczka pingpongowa	9	10
kropla deszczu (o promieniu 1,5 mm)	7	6
skoczek (po otwarciu spadochronu)	5	3

[1] Droga, po przebyciu której ciało spadające z prędkością początkową równą zeru osiąga prędkość o wartości wynoszącej 95% prędkości granicznej. Źródło: Peter J. Brancazio, *Sport Science*, Simon and Schuster, New York 1984.

skierowana do góry siła $\vec{D}$ jest przeciwna do skierowanej w dół siły ciężkości $\vec{F}_g$. Związek tych sił z przyspieszeniem ciała opisuje druga zasada dynamiki Newtona dla składowych wzdłuż pionowej osi y ($F_{\text{wyp},y} = ma_y$), tzn.:

$$D - F_g = ma, \tag{6.15}$$

gdzie m jest masą ciała. Jak pokazano na rysunku 6.6, jeśli ciało spada dostatecznie długo, to w pewnej chwili siły D i F_g się równoważą. Jak wynika z równania (6.15), oznacza to, że $a = 0$, czyli od tej chwili prędkość ciała nie wzrasta. Ciało spada dalej ze stałą prędkością noszącą nazwę **prędkości granicznej** v_t.

Aby znaleźć v_t, wstawmy $a = 0$ do równania (6.15) i podstawmy tam wyrażenie na D z równania (6.14). Otrzymamy

$$\tfrac{1}{2}C\rho S v_t^2 - F_g = 0,$$

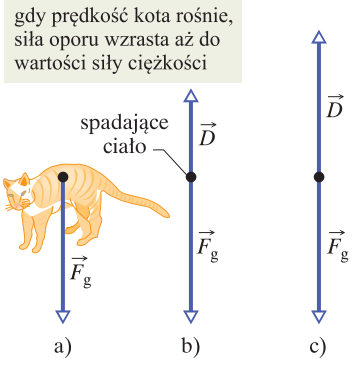
skąd

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho S}}. \tag{6.16}$$

W tabeli 6.1 podano wartości v_t dla kilku ciał.

Zgodnie z obliczeniami wykonanymi na podstawie równania (6.14)*, kot osiąga prędkość graniczną po spadku z wysokości około sześciu pięter. Dopóki to nie nastąpi, $F_g > D$ i kot porusza się ruchem przyspieszonym z przyspieszeniem skierowanym w dół, gdyż działająca na niego siła wypadkowa skierowana jest w tę stronę. Przypomnij sobie z rozdziału 2, że twoje ciało jest „przyspieszeniomierzem”, a nie szybkościomierzem. Kot jest również czuły na przyspieszenie, więc jest przestraszony, łapy ma podwinięte, łeb skulony, a grzbiet wygięty w górę. W tej pozycji S jest małe, a więc v_t duże, zatem urazy przy lądowaniu mogą być znaczne.

Gdy jednak kot osiąga prędkość graniczną, przyspieszenie zanika i kot nieco się uspokaja, przy czym rozpościera łapy i szyję poziomo oraz pro-



Rys. 6.6. Siły działające na ciało spadające w powietrzu: a) gdy ciało zaczyna spadać, b) nieco później, gdy występuje już siła oporu, c) jeszcze później, gdy siła oporu wzrosła tak, że równoważy siłę ciężkości ciała. Od tej chwili ciało spada ze stałą prędkością graniczną

*W.O. Whitney, C.J. Mehlhaff, High-Rise Syndrome in Cats, *The Journal of the American Veterinary Medical Association* (1987), **191**, 1399.



Rys. 6.7. Skoczkowie wykonujący skok z opóźnionym otwarciem spadochronu przyjmują pozycję orła w locie, aby siła oporu powietrza była jak największa (fot. Germanskydiver/Shutterstock)

stuje grzbiet (przypomina wtedy wiewiórkę w czasie skoku). Dzięki temu pole S wzrasta, a zatem zwiększa się — zgodnie z równaniem (6.14) — siła oporu D. Kot zwalnia, ponieważ teraz $D > F_g$ (siła wypadkowa jest skierowana w górę), aż do osiągnięcia nowej — mniejszej — wartości prędkości granicznej. Mniejsze v_t oznacza mniejsze prawdopodobieństwo poważnych urazów przy lądowaniu. Tuż przed końcem lotu, gdy kot widzi, że zbliża się do ziemi, wyciąga łapy w dół, aby przygotować się do lądowania.

Ludzie często wykonują skoki z dużej wysokości z opóźnionym otwarciem spadochronu, dla czystej przyjemności swobodnego spadania. W kwietniu 1987 roku, w czasie takiego skoku, skoczek Gregory Robertson zauważył, że jego towarzyszka Debbie Williams straciła przytomność, zderzając się z jeszcze innym skoczkiem i nie jest w stanie otworzyć spadochronu. Robertson znajdował się w tym momencie znacznie wyżej w powietrzu niż Williams i nie otworzył jeszcze swego spadochronu przed ostatnim, 4-kilometrowym odcinkiem lotu. Szybko ustawił się głową w dół, aby zmniejszyć S i zwiększyć swoją prędkość spadku. Osiągnął w ten sposób prędkość graniczną, szacowaną na 320 km/h, dopędził Williams, pochwycił ją, po czym przyjął pozycję orła w locie (jak na rys. 6.7), aby zwiększyć D. Otworzył najpierw jej spadochron, a potem — wypuściwszy ją — swój, zaledwie na 10 s przed lądowaniem na ziemi. Williams doznała poważnych urazów wewnętrznych na skutek niewłaściwego ustawienia ciała przy lądowaniu, ale przeżyła upadek.

Przykład 6.03. Prędkość graniczna kropli deszczu

Kropla deszczu o promieniu $R = 1{,}5$ mm spada z chmury znajdującej się na wysokości $h = 1200$ m nad ziemią. Współczynnik oporu aerodynamicznego C dla tej kropli wynosi 0,6. Zakładamy, że kropla ma kształt kuli przez cały czas lotu. Gęstość wody ρ_w jest równa 1000 kg/m^3, a gęstość powietrza ρ_p wynosi 1,2 kg/m^3.

a) Jak widać w tabeli 6.1, kropla osiąga prędkość graniczną już po kilku metrach spadku. Ile wynosi prędkość graniczna kropli?

PODSTAWOWE FAKTY

Kropla osiąga prędkość graniczną v_t, gdy siła ciężkości jest równoważona przez siłę oporu powietrza, tak że przyspieszenie kropli jest równe zeru. Aby wyznaczyć v_t, możemy skorzystać z drugiej zasady dynamiki Newtona oraz ze wzoru na siłę oporu, lecz już to przedtem zrobiliśmy, wyprowadzając wzór (6.16).

Obliczenia: Aby skorzystać ze wzoru (6.16), musimy znać pole przekroju poprzecznego S oraz wartość siły ciężkości F_g. Kropla jest kulista, więc S jest polem koła o takim samym promieniu jak kula (tzn. πR^2). Aby znaleźć F_g, weźmiemy pod uwagę trzy fakty: 1) $F_g = mg$, gdzie m jest masą kropli; 2) objętość kropli, która jest kulą, wynosi $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; 3) gęstość wody w kropli jest to masa jednostkowej objętości, czyli $\rho_w = m/V$. Mamy zatem

$$F_g = V\rho_w g = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_w g.$$

Możemy teraz podstawić do równania (6.16) powyższe wyrażenie, wyrażenie na S oraz wartości liczbowe danych. Uważaj, aby nie pomylić gęstości powietrza ρ_p z gęstością wody ρ_w. Otrzymujemy

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho_p S}} = \sqrt{\frac{8\pi R^3 \rho_w g}{3C\rho_p \pi R^2}} = \sqrt{\frac{8R\rho_w g}{3C\rho_p}}$$

$$= \sqrt{\frac{(8)(1{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{m})(1000\ \text{kg/m}^3)(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{(3)(0{,}6)(1{,}2\ \text{kg/m}^3)}}$$

$$= 7{,}4\ \text{m/s} \approx 27\ \text{km/h} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Zauważ, że wysokość chmury nie ma wpływu na wynik.

b) Ile wynosiłaby prędkość kropli tuż przed upadkiem na ziemię, gdyby nie było siły oporu powietrza?

PODSTAWOWE FAKTY

Gdyby nie było siły oporu powietrza, zmniejszającej prędkość spadku kropli, kropla spadałaby ze stałym przyspieszeniem równym przyspieszeniu ziemskiemu g. Możemy więc skorzystać z równań ruchu ze stałym przyspieszeniem z tabeli 2.1. Wiemy, że przyspieszenie jest równe g, prędkość początkowa v_0 wynosi 0, a przemieszczenie $x - x_0$ jest równe h, więc do wyznaczenia v możemy zastosować równanie (2.16), co daje

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1200\ \text{m})}$$
$$= 153\ \text{m/s} \approx 550\ \text{km/h} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

O kropli spadającej z taką prędkością Szekspir raczej nie powiedziałby, że „spływa jak łagodny deszcz z nieba na ziemię”*. Jest to bowiem prędkość bliska prędkości pocisku wystrzelonego z broni ręcznej dużego kalibru!

6.3. RUCH JEDNOSTAJNY PO OKRĘGU

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

6.06 naszkicować tor ciała w ruchu jednostajnym po okręgu oraz podać wartości bezwzględne i kierunki wektorów prędkości, przyspieszenia i działających sił w tym ruchu ciała;

6.07 wyjaśnić, że ciało może się poruszać ruchem jednostajnym po okręgu tylko wtedy, gdy wypadkowa działających na nie sił jest skierowana do środka okręgu (siła dośrodkowa);

6.08 zastosować obowiązujący w ruchu jednostajnym po okręgu związek promienia toru z prędkością i masą ciała oraz wypadkową działających na nie sił.

Podstawowe fakty

- Gdy ciało porusza się po okręgu (lub jego łuku) o promieniu R z prędkością o stałej wartości v, nazywamy jej ruch ruchem jednostajnym po okręgu. Ma ono wówczas przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a}$ o wartości równej

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

- Przyspieszenie to jest skutkiem działania na ciało wypadkowej siły dośrodkowej o wartości wynoszącej

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

gdzie m jest masą ciała. Wektory $\vec{a}$ i $\vec{F}$ są skierowane do środka krzywizny toru ciała.

Ruch jednostajny po okręgu

Jak pamiętamy z podrozdziału 4.5, ruch ciała po okręgu (lub łuku okręgu) z prędkością o stałej wartości v nazywamy ruchem jednostajnym po okręgu. Pamiętamy też, że ciało ma wówczas przyspieszenie dośrodkowe (skierowane do środka tego okręgu) o stałej wartości danej wyrażeniem

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(przyspieszenie dośrodkowe)}, \qquad (6.17)$$

przy czym R jest promieniem okręgu. Omówimy dwa przykłady ruchu jednostajnego po okręgu.

1. *Jazda samochodem po łuku.* Siedzisz pośrodku tylnej kanapy w samochodzie jadącym ze stałą prędkością po płaskiej drodze. Gdy

*Przekład Romana Brandstaettera (*Kupiec wenecki*, PIW, Warszawa 1953).

kierowca gwałtownie skręca w lewo, pokonując zakręt po kołowym łuku, zostajesz zepchnięty na prawy skraj kanapy, a potem przyciśnięty do ściany samochodu aż do końca zakrętu. Co się dzieje?

Gdy samochód jedzie po kołowym łuku, porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, tzn. doznaje przyspieszenia skierowanego do środka łuku. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona źródłem przyspieszenia jest siła, która musi być skierowana tak jak przyspieszenie, tzn. do środka łuku. Jest to **siła dośrodkowa**, której nazwa związana jest z jej kierunkiem. W naszym przypadku jest to siła tarcia, jaką droga działa na opony kół samochodu — to dzięki niej możliwe jest pokonanie zakrętu.

Jeśli poruszasz się wraz z samochodem ruchem jednostajnym po okręgu, to siła dośrodkowa działa także na ciebie. Jak jednak widać, siła tarcia działająca na ciebie ze strony kanapy nie jest dostatecznie duża, abyś poruszał się po okręgu wraz z pojazdem. Ześlizgujesz się więc po kanapie na ścianę samochodu. Dopiero ta ściana działa na ciebie siłą dośrodkową o dostatecznie dużej wartości, abyś poruszał się wraz z samochodem ruchem jednostajnym po okręgu.

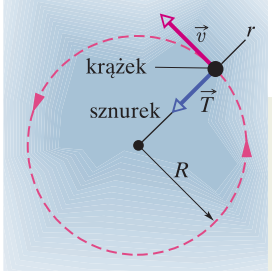
2. *Ruch na orbicie wokół Ziemi*. Tym razem jesteś pasażerem wahadłowca kosmicznego *Atlantis*. Gdy wraz z nim jesteś na orbicie okołoziemskiej, „pływasz" swobodnie w kabinie statku. Co się dzieje?

Zarówno ty, jak i wahadłowiec poruszacie się ruchem jednostajnym po okręgu, a więc macie przyspieszenie skierowane do środka okręgu. Jak poprzednio, z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że przyspieszenie to jest wynikiem działania siły dośrodkowej. Tym razem siłą dośrodkową jest siła ciężkości działająca na ciebie i wahadłowiec ze strony Ziemi, skierowana wzdłuż promienia okręgu do jego środka, tzn. w kierunku środka Ziemi.

I w samochodzie, i na pokładzie wahadłowca poruszasz się ruchem jednostajnym po okręgu, jesteś zatem pod działaniem siły dośrodkowej. Niemniej jednak czujesz się w tych dwóch sytuacjach całkiem odmiennie. W samochodzie jesteś zepchnięty na ścianę pojazdu i wyraźnie czujesz, że jesteś do niej przyciskany. Natomiast w statku orbitalnym „pływasz" swobodnie w kabinie, nie odczuwając działania żadnej siły. Skąd ta różnica?

Otóż wynika ona z różnej natury dwóch działających na ciebie sił dośrodkowych. W samochodzie siłą dośrodkową jest nacisk ściany pojazdu na tę część twego ciała, która styka się ze ścianą. Czujesz więc, że ta część twego ciała jest ściskana. Na pokładzie wahadłowca siłą dośrodkową jest siła ciężkości, jaką Ziemia działa na każdy atom twego ciała. Z tego względu żadna część twego ciała nie jest ściskana, a zatem nie masz poczucia, że działa na ciebie jakakolwiek siła (mówi się, że jesteś wówczas „w stanie nieważkości"; termin ten jest jednak mylący, gdyż przyciąganie ziemskie nadal działa na ciebie i w rzeczywistości jest tylko nieznacznie mniejsze od tego, jakie działa na ciebie na powierzchni Ziemi).

Inny przykład siły dośrodkowej przedstawiono na rysunku 6.8. Krążek hokejowy jest przywiązany do sznurka zakończonego na drugim końcu pętelką założoną na kołek i porusza się po okręgu z prędkością o stałej wartości v. W tym przypadku siłą dośrodkową jest siła działająca na krążek ze strony sznurka, skierowana wzdłuż promienia okręgu do jego środka.



Rys. 6.8. Widok z góry na krążek hokejowy o masie m poruszający się bez tarcia po powierzchni poziomej i obiegający okrąg o promieniu R z prędkością o stałej wartości v. Siłą dośrodkową jest w tym przypadku siła $\vec{T}$ działająca na krążek ze strony sznurka. Jest ona skierowana wzdłuż promienia okręgu do jego środka, tzn. wzdłuż osi r przechodzącej przez środek okręgu i punkt, w którym znajduje się krążek

Gdyby tej siły nie było, krążek nie poruszałby się po okręgu, lecz ślizgałby się po lodzie wzdłuż linii prostej.

Siła dośrodkowa nadaje ciału przyspieszenie, zmieniając kierunek prędkości ciała bez zmiany wartości tej prędkości.

Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona i równania (6.17) ($a = v^2/R$) możemy zapisać wartość siły dośrodkowej F (lub wypadkowej siły dośrodkowej) jako

$$F = m\frac{v^2}{R} \qquad \text{(wartość siły dośrodkowej).} \qquad (6.18)$$

Wartość prędkości v jest tu stała, dlatego stałe są również wartości przyspieszenia i siły.

Kierunek przyspieszenia dośrodkowego i siły dośrodkowej nie jest jednak stały; zmienia się on w sposób ciągły, tak że zawsze wskazuje na środek okręgu. Z tego względu wektory siły i przyspieszenia dośrodkowego rysujemy czasem wzdłuż osi radialnej r, która obraca się wraz z ciałem, tak że zawsze jest skierowana od środka okręgu do ciała, jak na rysunku 6.8. Kierunek dodatni tej osi prowadzi na zewnątrz okręgu, lecz wektory przyspieszenia i siły są skierowane do środka okręgu.

Sprawdzian 2

Jak wie każdy bywalec wesołych miasteczek, diabelski młyn to rodzaj karuzeli obracającej się wokół poziomej osi, która ma siedzenia umocowane na obwodzie obracającego się koła. Wyobraź sobie, że jesteś pasażerem diabelskiego młyna i poruszasz się z prędkością o stałej wartości. Podaj kierunek swego przyspieszenia $\vec{v}$ i działającej na ciebie (ze strony siedzenia, które cały czas pozostaje poziome) siły normalnej $\vec{F}_N$, gdy znajdujesz się: a) w najwyższym punkcie toru i b) w najniższym punkcie toru karuzeli. c) Jaki jest związek wartości przyspieszenia w najwyższym i najniższym punkcie toru? d) Jaki jest związek wartości siły normalnej w najwyższym i najniższym punkcie toru?

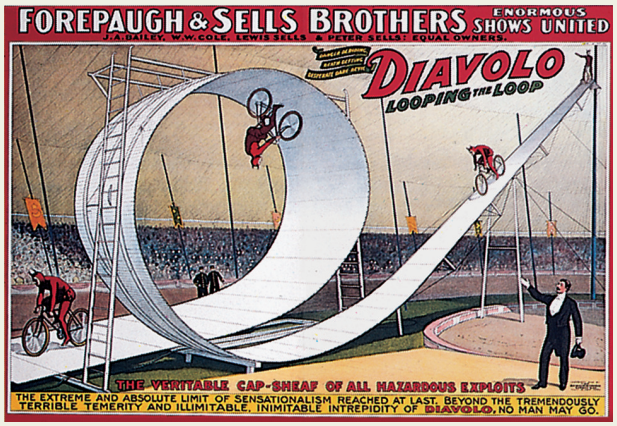
Przykład 6.04. Pionowa pętla, Diavolo

Ponieważ najczęściej jeździsz samochodem, ruch po okręgu kojarzy ci się zwykle z torem poziomym. Ruch po okręgu w pionie będzie zatem nowością. Jak w poniższym przykładzie, wydaje się on przeczyć działaniu siły ciężkości.

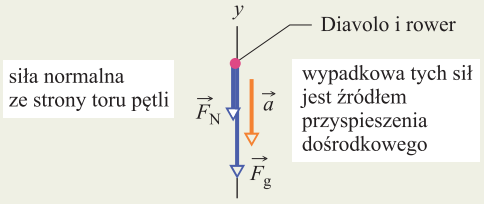
W roku 1901 Allo Diavolo zwany „Szaleńcem" wykonał po raz pierwszy numer cyrkowy, polegający na jeździe na rowerze po torze w kształcie pionowej pętli (rys. 6.9a). Ile powinna wynosić minimalna wartość prędkości śmiałka na szczycie toru, aby rower nie oderwał się od podłoża, jeśli pętla ma kształt okręgu, którego promień $R = 2{,}7$ m?

PODSTAWOWE FAKTY

Możemy założyć, że Diavolo i jego rower pokonują pętlę jako jedno ciało poruszające się ruchem jednostajnym po okręgu. W punkcie szczytowym toru ciało to ma zatem przyspieszenie $\vec{a}$ o wartości $a = v^2/R$,



a)



b)

Rys. 6.9. a) Plakat reklamowy z czasów, gdy Diavolo wykonywał swój numer (przedruk za zgodą Circus World Museum). b) Diagram sił działających na rowerzystę na wierzchołku pętli

danej równaniem (6.17), skierowane pionowo w dół w kierunku środka kołowej pętli.

Obliczenia: Diagram sił działających na to ciało na wierzchołku pętli jest przedstawiony na rysunku 6.9b. Siła ciężkości $\vec{F}_g$ jest skierowana pionowo w dół, wzdłuż osi y. Siła normalna $\vec{F}_N$ działająca na to ciało ze strony toru jest również skierowana pionowo w dół (przecież rowerzysta jest poniżej, a nie powyżej toru). Przyspieszenie dośrodkowe też jest skierowane w dół. Wobec tego z drugiej zasady dynamiki Newtona dla składowych wzdłuż osi y ($F_{\text{wyp},y} = ma_y$) otrzymujemy

$$-F_N - F_g = m(-a).$$

Stąd

$$-F_N - mg = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \qquad (6.19)$$

Ciało ma *minimalną prędkość* v, potrzebną do utrzymania kontaktu z torem, gdy *jest na granicy* utraty tego kontaktu (tzn. oderwania się od podłoża i spadku), co oznacza, że $F_N = 0$. Podstawiając tę wartość F_N do równania (6.19), wyznaczając z niego v i podstawiając wartości liczbowe danych, otrzymujemy więc

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{(9{,}8\ \text{m/s}^2)(2{,}7\ \text{m})} = 5{,}1\ \text{m/s}$$

(odpowiedź).

Uwaga: Diavolo zadbał o to, aby jego prędkość u szczytu pętli była większa niż 5,1 m/s, tak aby nie stracił kontaktu z torem i nie spadł na arenę. Zauważ, że otrzymana minimalna wartość prędkości jest niezależna od masy roweru i rowerzysty. Gdyby zatem Diavolo najadł się przed występem — dajmy na to — pierogów, to nadal musiałby osiągnąć tylko prędkość 5,1 m/s, aby nie spaść na arenę na szczycie toru.

Przykład 6.05. Samochód na płaskim łuku kołowym

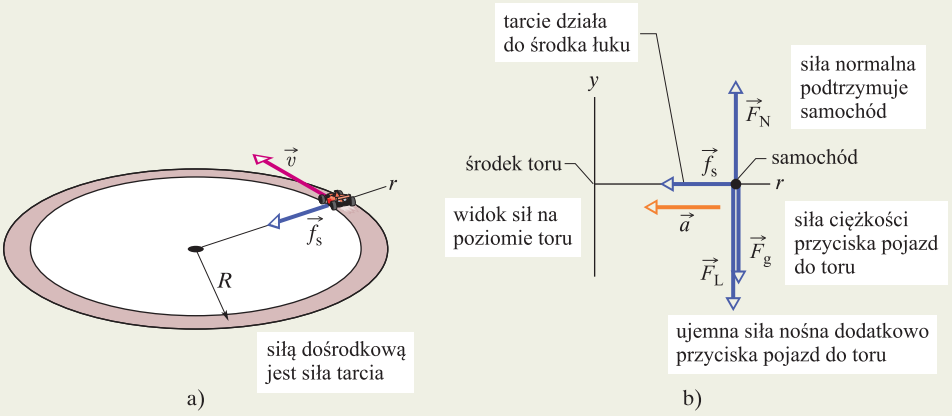
Wyścig do góry nogami. Współczesne samochody wyścigowe są projektowane tak, by opływające je powietrze przyciskało pojazd do toru, co umożliwia znacznie szybszą niż kiedyś jazdę na płaskich zakrętach torów Formuły 1 bez utraty przyczepności pojazdu z powodu zbyt małej siły tarcia. Siła dociskająca pojazd do toru nosi nazwę *ujemnej siły nośnej*. Czy może ona być tak duża, aby samochód wyścigowy jeździł do góry nogami po długim suficie, jak na trickowych zdjęciach w pierwszym filmie „Faceci w czerni”?

Na rysunku 6.10a przedstawiono samochód Formuły 1 o masie $m = 600$ kg, poruszający się po płaskim łuku kołowym o promieniu $R = 100$ m. Kształt pojazdu i skrzydła, w jakie jest wyposażony, powodują działanie na samochód pionowo w dół ujemnej siły nośnej $\vec{F}_L$. Współczynnik tarcia statycznego między oponami i torem wynosi 0,75. Załóż, że na wszystkie opony działają takie same siły.

a) Jaką wartość ma działająca na pojazd pionowo w dół siła $\vec{F}_L$, jeśli na opisanym łuku samochód jest na granicy utraty przyczepności przy prędkości o wartości 28,6 m/s?

PODSTAWOWE FAKTY

1. Samochód porusza się po łuku kołowym, a więc musi na niego działać siła dośrodkowa; musi być ona pozioma i skierowana do środka toru.
2. Jedyną działającą na samochód siłą poziomą jest siła tarcia działająca na jego opony ze strony drogi. Siłą dośrodkową jest zatem siła tarcia.



Rys. 6.10. a) Samochód wyścigowy porusza się po płaskim łuku kołowym z prędkością o stałej wartości v. Niezbędną do tego siłą dośrodkową działającą wzdłuż osi radialnej r jest siła tarcia $\vec{f}_s$. b) Diagram sił dla tego samochodu (nie w skali) w płaszczyźnie pionowej, zawierającej oś r

3. Samochód nie ślizga się, więc jest to siła tarcia *statycznego*, zaznaczona na rysunku 6.10a jako $\vec{f}_s$.
4. Jeśli samochód jest na skraju ześlizgnięcia się z toru, to wartość siły tarcia f_s jest równa wartości maksymalnej $f_{s,max} = \mu_s F_N$, przy czym F_N jest wartością siły normalnej działającej na samochód ze strony toru.

Obliczenia dla kierunku radialnego: Siła tarcia $\vec{f}_s$ jest pokazana na diagramie sił na rysunku 6.10b. Działa ona w kierunku ujemnym radialnej osi r, która biegnie zawsze od środka krzywizny i przechodzi przez poruszający się samochód. Siła tarcia jest źródłem przyspieszenia dośrodkowego o wartości v^2/R. Związek siły z przyspieszeniem otrzymujemy, zapisując drugą zasadę dynamiki dla składowych wzdłuż osi r ($F_{wyp,r} = ma_r$)

$$-f_s = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \qquad (6.20)$$

Podstawiając do tego wzoru zamiast f_s maksymalną siłę tarcia $f_{s,max} = \mu_s F_N$, dostajemy

$$\mu_s F_N = m\left(\frac{v^2}{R}\right). \qquad (6.21)$$

Obliczenia dla kierunku pionowego: Rozpatrzmy z kolei siły działające na samochód w pionie. Siła normalna $\vec{F}_N$ działa pionowo w górę, czyli w dodatnim kierunku osi y z rysunku 6.10b. Siła ciężkości $\vec{F}_g = m\vec{g}$ i ujemna siła nośna $\vec{F}_L$ działają pionowo w dół. Przyspieszenie samochodu wzdłuż osi y jest równe zeru. Tak więc druga zasada dynamiki dla składowych wzdłuż osi y ($F_{wyp,y} = ma_y$) ma postać

$$F_N - mg - F_L = 0,$$

a zatem

$$F_N = mg + F_L. \qquad (6.22)$$

Wynik łączny: Możemy skorzystać z wyników dla obydwu osi, podstawiając F_N z równania (6.22) do równania (6.21), co pozwoli nam wyznaczyć wartość F_L. Otrzymujemy w ten sposób

$$\begin{aligned} F_L &= m\left(\frac{v^2}{\mu_s R} - g\right) \\ &= (600\text{ kg})\left(\frac{(28{,}6\text{ m/s})^2}{(0{,}75)(100\text{ m})} - 9{,}8\text{ m/s}^2\right) \\ &= 663{,}7\text{ N} \approx 660\text{ N} \qquad \text{(odpowiedź)}. \end{aligned}$$

b) Wartość F_L, czyli działającej na samochód ujemnej siły nośnej, zależy od kwadratu prędkości pojazdu v^2, tak samo jak siła oporu aerodynamicznego (równanie (6.14)). Tak więc i na łuku ujemna siła nośna jest tym większa, im większa jest prędkość pojazdu, na przykład taka, jak na prostym odcinku toru. Wyznacz wartość ujemnej siły nośnej przy prędkości 90 m/s.

PODSTAWOWE FAKTY

Wartość F_L jest proporcjonalna do v^2.

Obliczenia: Stosunek ujemnej siły nośnej $F_{L,90}$ przy prędkości $v = 90$ m/s do obliczonej przez nas ujemnej siły nośnej F_L przy prędkości $v = 28{,}6$ m/s wynosi zatem

$$\frac{F_{L,90}}{F_L} = \frac{(90\text{ m/s})^2}{(28{,}6\text{ m/s})^2}.$$

Podstawiając do tego wzoru znaną wartość ujemnej siły nośnej $F_L = 663{,}7$ N, dostajemy

$$F_{L,90} = 6572\text{ N} \approx 6600\text{ N} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Wyścig do góry nogami: Jeśli chcemy ścigać się na suficie, to musimy oczywiście przezwyciężyć siłę ciężkości, która wynosi

$$F_g = mg = (600\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 5880\ \text{N}.$$

Gdyby samochód jechał po suficie, ujemna siła nośna byłaby skierowana *w górę*. Z obliczonych przez nas wartości wynika, że przy prędkości około 90 m/s ujemna siła nośna jest równa około 6600 N, czyli jest większa niż siła ciężkości, wynosząca 5880 N. Jest to jednak bardzo duża prędkość, około 324 km/h. Jazda z taką prędkością jest dostatecznie niebezpieczna nawet na prostym torze, więc zostawmy lepiej jazdę po suficie filmowcom, zwłaszcza fachowcom od efektów specjalnych.

Przykład 6.06. Samochód na pochylonym torze kołowym

Zadanie jest dość trudne do sformułowania, lecz rozwiązuje się je dosłownie w kilku linijkach. Mamy tu nie tylko ruch jednostajny po okręgu, lecz i równię. Nie będzie nam jednak potrzebny ukośny układ współrzędnych, jak przy zadaniach z równią pochyłą. Rozważymy ciało w pewnej chwili (jak na stop-klatce) i wykorzystamy osie poziomą i pionową. Jak zawsze w tym rozdziale, skorzystamy z drugiej zasady dynamiki, co wymaga jednak poprawnej identyfikacji składowych sił decydujących o ruchu ciała.

Na autostradach łuki są zawsze nachylone, aby zapobiec ześlizgiwaniu się tam pojazdów z szosy. Gdy jezdnia jest sucha, tarcie między oponami a nawierzchnią powinno uniemożliwić ześlizgiwanie się pojazdów, lecz na mokrej jezdni tarcie może być mocno osłabione i nachylenie drogi bardzo wówczas pomaga w utrzymaniu pojazdu na jezdni. Na rysunku 6.11a przedstawiono samochód o masie m jadący ze stałą prędkością $v = 20$ m/s po nachylonym łuku kołowym o promieniu $R = 190$ m. (Tym razem mamy zwykły samochód, a nie bolid wyścigowy, więc ujemna siła nośna nie występuje). Jaki kąt nachylenia jezdni θ zapewnia utrzymanie się pojazdu na drodze, jeśli siła tarcia jest znikomo mała?

PODSTAWOWE FAKTY

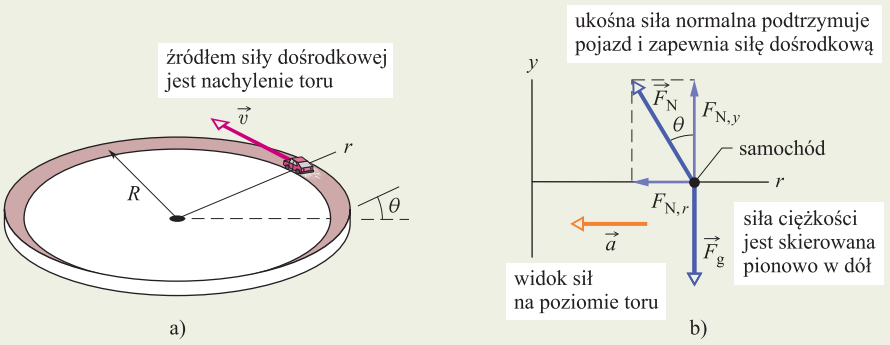
Jezdnia jest nachylona względem poziomu, aby działająca na samochód siła normalna $\vec{F}_N$ nie była pionowa, lecz nieco nachylona ku środkowi okręgu (rys. 6.11b). Siła $\vec{F}_N$ m więc teraz składową dośrodkową o wartości $F_{N,r}$, która jest skierowana do środka okręgu wzdłuż osi radialnej r. Chcemy znaleźć taki kąt nachylenia toru θ, dla którego ta składowa dośrodkowa wystarcza do utrzymania pojazdu na torze kołowym bez wykorzystywania w tym celu tarcia.

Obliczenia dla kierunku radialnego: Jak widać z rysunku 6.11b (a co zresztą powinieneś sprawdzić), siła normalna $\vec{F}_N$ tworzy z pionem kąt równy kątowi nachylenia toru θ. Wobec tego jej składowa radialna $F_{N,r}$ jest równa $F_N \sin\theta$. Druga zasada dynamiki dla składowych wzdłuż osi r ($F_{\text{wyp},r} = ma_r$) przybiera postać

$$-F_N \sin\theta = m\left(-\frac{v^2}{R}\right). \qquad (6.23)$$

Nie możemy wyznaczyć z tego równania wartości kąta θ, gdyż nie znamy ani F_N, ani m.

Obliczenia dla kierunku pionowego: Rozważmy wobec tego siły i przyspieszenia o kierunku osi y, również



Rys. 6.11. a) Samochód porusza się po pochyłym łuku kołowym z prędkością o stałej wartości v. Dla wyrazistości rysunku pochylenie toru narysowano przesadnie duże. b) Diagram sił dla tego samochodu przy założeniu, że tarcie między oponami a nawierzchnią jest znikomo małe, a ujemna siła nośna nie występuje. Składowa radialna $F_{N,r}$ siły normalnej (skierowana do środka okręgu wzdłuż osi r) zapewnia istnienie siły dośrodkowej i przyspieszenia dośrodkowego

pokazane na rysunku 6.11b. Składowa pionowa siły normalnej $F_{N,y}$ wynosi $F_N \cos\theta$, działająca na samochód siła ciężkości $\vec{F}_g$ ma wartość mg, a przyspieszenie pojazdu wzdłuż osi y jest równe zeru. Druga zasada dynamiki dla składowych wzdłuż osi y ($F_{wyp,y} = ma_y$) ma zatem postać

$$F_N \cos\theta - mg = m(0),$$

skąd dostajemy

$$F_N \cos\theta = mg. \qquad (6.24)$$

Wynik łączny: Równanie (6.24) również zawiera niewiadome F_N i m, lecz po podzieleniu przez siebie stronami równań (6.23) i (6.24) obie te niewiadome się skracają. Pamiętając, że $(\sin\theta)/(\cos\theta) = \operatorname{tg}\theta$, z otrzymanego równania dostajemy

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{v^2}{gR}$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{(20\ \text{m/s})^2}{(9{,}8\ \text{m/s}^2)(190\ \text{m})} = 12^\circ \quad \text{(odpowiedź)}.$$



Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Podsumowanie

Tarcie Gdy siła $\vec{F}$ dąży do wprawienia ciała w ruch po powierzchni, na ciało działa ze strony powierzchni **siła tarcia**. Siła tarcia jest równoległa do powierzchni i skierowana tak, aby przeciwdziałać ruchowi ciała. Jej przyczyną jest wiązanie cząsteczek ciała i powierzchni.

Jeśli ciało się nie ślizga, to występuje **siła tarcia statycznego** $\vec{f}_s$. Jeśli ciało się ślizga, to występuje **siła tarcia kinetycznego** $\vec{f}_k$.

1. Jeśli ciało się nie porusza, to siła tarcia statycznego $\vec{f}_s$ i składowa siły $\vec{F}$ równoległa do powierzchni mają jednakową wartość, a siła $\vec{f}_s$ jest skierowana przeciwnie do tej składowej siły $\vec{F}$. Gdy ta składowa rośnie, rośnie również wartość siły f_s.
2. Siła $\vec{f}_s$ ma wartość maksymalną $f_{s,max}$ daną wzorem
$$f_{s,max} = \mu_s F_N, \qquad (6.1)$$
przy czym μ_s jest **współczynnikiem tarcia statycznego**, a F_N — wartością siły normalnej. Jeśli wartość składowej siły $\vec{F}$ równoległej do powierzchni przekracza $f_{s,max}$, to ciało zaczyna się ślizgać po tej powierzchni.
3. Jeśli ciało zaczyna się ślizgać po powierzchni, to wartość siły tarcia gwałtownie maleje do wartości stałej f_k, równej
$$f_k = \mu_k F_N, \qquad (6.2)$$
przy czym μ_k jest **współczynnikiem tarcia kinetycznego**.

Siła oporu Gdy zachodzi ruch względny powietrza (lub innego płynu) i ciała, na ciało działa **siła oporu** $\vec{D}$, która przeciwdziała temu ruchowi względnemu i ma kierunek zgodny z kierunkiem przepływu płynu względem ciała. Wartość siły $\vec{D}$ jest związana z wartością prędkości względnej zależnością

$$D = \tfrac{1}{2}C\rho S v^2, \qquad (6.14)$$

przy czym C jest wyznaczonym doświadczalnie **współczynnikiem oporu**, ρ — gęstością (czyli masą jednostki objętości) płynu, a S — **polem przekroju poprzecznego** ciała (tzn. polem przekroju prostopadłego do wektora prędkości względnej $\vec{v}$).

Prędkość graniczna Gdy ciało o obłym kształcie spada w powietrzu dostatecznie długo, wartości siły oporu $\vec{D}$ i siły ciężkości $\vec{F}_g$ działających na to ciało stają się sobie równe. Ciało spada wówczas ze stałą **prędkością graniczną** o wartości v_t danej wzorem

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho S}}. \qquad (6.16)$$

Ruch jednostajny po okręgu Jeśli cząstka porusza się po okręgu lub łuku okręgu o promieniu R z prędkością o stałej wartości v, to mówimy, że porusza się ona **ruchem jednostajnym po okręgu**. Ma ona wówczas **przyspieszenie dośrodkowe** $\vec{a}$, którego wartość jest dana wzorem

$$a = \frac{v^2}{R}. \qquad (6.17)$$

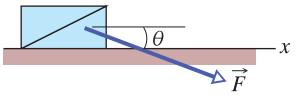
Źródłem tego przyspieszenia jest wypadkowa **siła dośrodkowa**, działająca na ciało, której wartość wynosi

$$F = \frac{mv^2}{R}, \qquad (6.18)$$

gdzie m jest masą ciała. Wektory $\vec{a}$ i $\vec{F}$ są skierowane do środka krzywizny toru ciała. Ciało porusza się ruchem jednostajnym po okręgu tylko wtedy, gdy wypadkowa działających na nie sił jest skierowana do środka tego okręgu (jest siłą dośrodkową).

Pytania

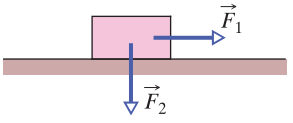
1 Klocek przedstawiony na rysunku 6.12 pozostaje nieruchomy. Czy wartości: a) F_x, b) f_s, c) F_N, d) $f_{s,max}$ rosną, maleją, czy pozostają bez zmiany, gdy zwiększa się kąt θ, jaki tworzy z poziomem siła $\vec{F}$? e) Czy w sytuacji, gdy klocek ślizga się i zwiększamy kąt θ, wartość działającej na klocek siły tarcia rośnie, maleje, czy pozostaje bez zmiany?



Rys. 6.12. Pytanie 1

2 Odpowiedz na pytanie 1, gdy siła $\vec{F}$ jest skierowana ukośnie w górę, a nie w dół.

3 Jak pokazano na rysunku 6.13, do klocka leżącego na podłodze przyłożono poziomo siłę $\vec{F}_1$ o wartości 10 N, przy czym klocek pozostał w bezruchu. Do klocka przyłożono następnie pionowo siłę $\vec{F}_2$ o wartości stopniowo rosnącej od zera. Czy przy tym dane niżej wielkości rosną, maleją, czy pozostają bez zmiany: a) wartość działającej na klocek siły tarcia f_s, b) wartość siły normalnej $\vec{F}_N$ działającej na klocek ze strony podłogi, c) wartość maksymalna działającej na klocek siły tarcia statycznego, $f_{s,max}$? d) Czy klocek zacznie się w końcu ślizgać?

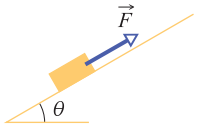


Rys. 6.13. Pytanie 3

4 W trzech kolejnych doświadczeniach do tego samego klocka, leżącego na tym samym blacie, przyłożono poziomo trzy różne siły. Ich wartości były równe: $F_1 = 12$ N, $F_2 = 8$ N i $F_3 = 4$ N. We wszystkich doświadczeniach klocek nie ruszył się z miejsca, mimo działania na niego siły. Uszereguj te siły według: a) wartości siły tarcia statycznego f_s działającej na klocek ze strony blatu, b) wartości maksymalnej siły $f_{s,max}$, od największej do najmniejszej wartości.

5 Wyobraź sobie, że przyciskasz do ściany skrzynkę na jabłka tak silnie, że skrzynka nie ześlizguje się po ścianie. Jaki jest kierunek: a) siły tarcia statycznego $\vec{f}_s$ działającej na skrzynkę ze strony ściany, b) siły normalnej $\vec{F}_N$, jaką ściana działa na skrzynkę? Czy i jak zmieniają się wartości: c) f_s, d) F_N, e) $f_{s,max}$, gdy zwiększasz siłę nacisku na skrzynkę?

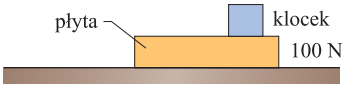
6 Klocek leżący na równi pochyłej jest nieruchomy wskutek działania na niego siły tarcia ze strony równi. Przykładamy do niego siłę $\vec{F}$ działającą wzdłuż równi w górę (patrz rys. 6.14), a jej wartość zwiększamy stopniowo, poczynając od zera. Czy i jak zmienia się kierunek i wartość siły tarcia działającej na klocek?



Rys. 6.14. Pytanie 6

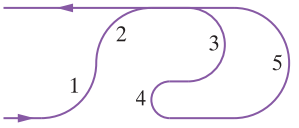
7 Rozważ ponownie pytanie 6 w przypadku, gdy siła $\vec{F}$ jest skierowana wzdłuż równi w dół. Jak poprzednio, jej wartość zwiększamy stopniowo, poczynając od zera. Czy i jak zmienia się kierunek i wartość działającej na klocek siły tarcia?

8 Na rysunku 6.15 przedstawiono płytę o masie 10 kg, która początkowo pozostaje w spoczynku na podłożu, po którym może się ślizgać bez tarcia, oraz leżący na tej płycie klocek o masie 10 kg. Następnie do płyty przykładamy poziomo siłę o wartości 100 N, aby wprawić płytę w ruch przyspieszony. Nie znamy wartości współczynnika tarcia między klockiem a płytą μ, wobec czego musimy rozważyć także możliwość, że klocek spadnie z płyty. a) Podaj możliwe wartości przyspieszenia płyty a_p (*wskazówka*: nie musisz wykonywać pisemnych obliczeń – rozważ po prostu skrajne wartości współczynnika μ). b) Podaj możliwe wartości przyspieszenia klocka a_k.



Rys. 6.15. Pytanie 8

9 Na rysunku 6.16 przedstawiono trasę przejażdżki po parku, zawierającą pięć kołowych łuków o promieniu R_0, $2R_0$ i $3R_0$. Uszereguj te łuki pod względem wartości siły dośrodkowej działającej na pojazd poruszający się z prędkością o stałej wartości, od największej do najmniejszej.



Rys. 6.16. Pytanie 9

10 W roku 1987 w czasie festynu z okazji święta Halloween, który odbywał się pod Chicago, dwaj skoczkowie z samolotu zabawiali publiczność, przerzucając do siebie dynię podczas swobodnego spadku. Zabawa była znakomita aż do chwili, gdy skoczkowie musieli już otworzyć spadochrony. Ten skoczek, który wtedy miał dynię w rękach, nie zdołał jej utrzymać po otwarciu spadochronu. Dynia przeleciała w powietrzu 0,5 km, przebiła dach domu, wpadła do kuchni, rozbiła się na podłodze i rozprysnęła po całym pomieszczeniu, całkiem niedawno gruntownie odnowionym. Rozważ to zdarzenie z punktu widzenia skoczka oraz z punktu widzenia dyni i wyjaśnij, dlaczego skoczek nie zdołał utrzymać dyni w rękach.

11 Rozważ trzy położenia pasażera jadącego na obracającym się równomiernie diabelskim młynie: 1) na górze, 2) na dole, 3) w połowie wysokości toru. Uszereguj te położenia pod względem wartości: a) przyspieszenia dośrodkowego pasażera, b) wypadkowej siły dośrodkowej działającej na pasażera, c) działającej na pasażera siły normalnej, od największych do najmniejszych.

12 W roku 1956 podczas standardowych ćwiczeń oblatywacz Tom Attridge skierował swój myśliwiec odrzutowy w lot

nurkowy pod kątem 20°, aby przetestować działka kalibru 20 mm, w jakie wyposażony był samolot. Lecąc z prędkością większą od prędkości dźwięku, wystrzelił pierwszą serię pocisków na wysokości 4000 m, po czym zaczekał aż działka się ostudzą i wystrzelił drugą serię pocisków na wysokości 2000 m. Prędkość myśliwca wynosiła wówczas 344 m/s, prędkość pocisków względem samolotu była równa 730 m/s, a samolot leciał nadal lotem nurkowym.

Niemal natychmiast osłona kabinu została rozdarta na strzępy i uszkodzony został wlot powietrza prawego silnika. Odrzutowiec utracił sterowność i spadł na ziemię w terenie zalesionym. Attridge'owi udało się wydostać z kadłuba wraku, dzięki czemu uniknął skutków wybuchu zbiornika z paliwem. Wyjaśnij, co mogło się zdarzyć tuż po wystrzeleniu drugiej serii pocisków. (Attridge to jedyny pilot, któremu udało się zestrzelić własnymi rękami swój samolot).

13 Pudełko znajduje się na pochylni nachylonej do poziomu pod kątem θ. Wartość kąta θ zwiększamy stopniowo od zera do wartości, przy której pudełko jeszcze nie ześlizguje się wzdłuż pochylni. Czy poniższe wielkości rosną przy tym, maleją czy pozostają niezmienione: a) składowa działającej na pudełko siły ciężkości skierowana wzdłuż pochylni, b) wartość siły tarcia statycznego działającej na pudełko ze strony pochylni, c) składowa działającej na pudełko siły ciężkości skierowana prostopadle do pochylni, d) wartość siły normalnej działającej na pudełko ze strony pochylni, e) wartość maksymalnej siły tarcia statycznego $f_{s,max}$, jaka może działać na nieruchome pudełko?

Zadania

GO Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

•–••• Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

Podrozdział 6.1. Tarcie

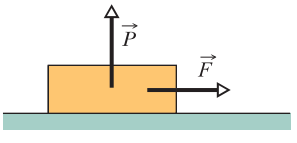
•1 Towarowy wagon kolejowy załadowano luźno skrzyniami o statycznym współczynniku tarcia względem podłogi wagonu równym 0,25. Pociąg jedzie z prędkością o wartości 48 km/h. Ma on się zatrzymać w taki sposób, aby skrzynie nie ślizgały się po podłodze. Jaka może być najkrótsza droga hamowania, jeśli pociąg będzie się poruszał podczas hamowania ruchem jednostajnie przyspieszonym?

•2 Studenci, którym z powodu zbliżających się egzaminów całkiem pomieszało się w głowie, grają na korytarzu akademika w swoistą odmianę gry shuffleboard, w której uderza się szczotką w podręcznik matematyki. Wyznacz współczynnik tarcia kinetycznego między podręcznikiem a podłogą, wiedząc że początkowo nieruchoma książka o masie 3,5 kg uzyskuje prędkość 1,6 m/s, gdy działa na nią ze strony szczotki siła pozioma o wartości 25 N na drodze 0,9 m.

•3 ssm www Na podłodze w sypialni stoi komoda, której masa — wraz z szufladami i ubraniami — wynosi 45 kg. a) Jaką minimalną siłę należy przyłożyć poziomo do tej komody, aby ruszyć ją z miejsca, jeśli współczynnik tarcia statycznego między komodą a podłogą jest równy 0,45? b) Jaka będzie wartość tej siły minimalnej, jeśli z komody wyjmie się szuflady i ubrania o łącznej masie 17 kg?

•4 Lubiące się ślizgać prosię zjeżdża po pewnej równi pochyłej o nachyleniu 35° w czasie dwukrotnie dłuższym od czasu zjazdu bez tarcia po równi o takim samym nachyleniu. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego między prosięciem a pierwszą równią?

•5 GO Klocek o masie 2,5 kg znajduje się w spoczynku na poziomej powierzchni. W pewnej chwili zostaje do niego przyłożona siła pozioma $\vec{F}$ o wartości 6 N i siła pionowa $\vec{P}$, jak pokazano na rysunku 6.17. Współczynniki tarcia między klockiem a powierzchnią wynoszą $\mu_s = 0{,}4$ i $\mu_k = 0{,}25$. Wyznacz wartość i kierunek siły tarcia działającej na klocek, jeśli wartość siły $\vec{P}$ jest równa: a) 8 N, b) 10 N, c) 12 N.



Rys. 6.17. Zadanie 5

•6 Baseballista o masie $m = 79$ kg ślizga się do drugiej bazy, przy czym jego ruch jest opóźniany przez siłę tarcia o wartości 470 N. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego μ_k między graczem a boiskiem?

•7 ssm ilw Pewna osoba pcha poziomo skrzynię o masie 55 kg, działając siłą 220 N, aby przesunąć ją po poziomej podłodze. Współczynnik tarcia kinetycznego między skrzy-

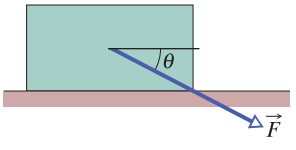
nią a podłogą wynosi 0,35. a) Jaka jest wartość siły tarcia? b) Jaka jest wartość przyspieszenia skrzyni?

•8 *Tajemnicze wędrowne kamienie*. W Dolinie Śmierci w Kalifornii, na nieuczęszczanej równinie o nazwie Racetrack Playa (co można przetłumaczyć jako Plac Wyścigowy), obserwuje się czasami wyraźne wyżłobienia w pustynnym gruncie, jak gdyby po poruszających się po nim kamieniach (rys. 6.18). Przez lata ludzie zastanawiali się nad przyczynami tych tajemniczych wędrówek kamieni. Jedna z hipotez na ten temat mówi, że kamienie popychane są po powierzchni pustyni przez silne wiatry w czasie burz, gdy ziemia jest zmiękczona przez wodę deszczową. Gdy pustynia wysycha po burzy, ślady ruchu kamieni zamieniają się w twarde wyżłobienia. Jak wynika z pomiarów, współczynnik tarcia kinetycznego między kamieniem a mokrą powierzchnią pustyni wynosi około 0,8. Jaka siła pozioma potrzebna jest do utrzymania w ruchu kamienia o masie 20 kg po tym, jak gwałtowny podmuch wiatru ruszy go z miejsca (dalszy ciąg opowieści w zadaniu 37)?



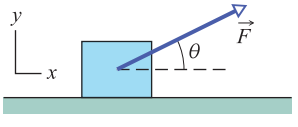
Rys. 6.18. Zadanie 8. Co wprawia w ruch te kamienie? (fot. Anatoliy Lukich/Shutterstock)

•9 GO Klocek o masie 3,5 kg jest pchany po poziomym podłożu siłą $\vec{F}$ o wartości 15 N, tworzącą z poziomem kąt $\theta = 40°$ (rys. 6.19). Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a podłożem wynosi 0,25. Wyznacz wartość: a) siły tarcia działającej na klocek ze strony podłoża, b) przyspieszenia klocka.



Rys. 6.19. Zadania 9 i 32

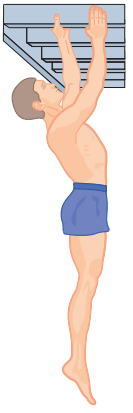
•10 Jak pokazano na rysunku 6.20, klocek o masie m jest początkowo nieruchomy na podłodze. W pewnej chwili przykładamy do niego siłę o wartości $0{,}5\,mg$ pod kątem $\theta = 20°$ w górę od poziomu. Wyznacz wartość przyspieszenia klocka w ruchu po podłodze, jeśli współczynniki tarcia wynoszą: a) $\mu_s = 0{,}6$, $\mu_k = 0{,}5$, b) $\mu_s = 0{,}4$, $\mu_k = 0{,}3$.



Rys. 6.20. Zadanie 10

•11 ssm Skrzynia o masie 68 kg jest ciągnięta po podłodze za pomocą liny przywiązanej do skrzyni i tworzącej z poziomem kąt 15°. a) Jaką minimalną siłą trzeba ciągnąć linę, aby wprawić skrzynię w ruch, jeśli współczynnik tarcia statycznego wynosi 0,5? b) Ile wynosi początkowa wartość przyspieszenia skrzyni, jeśli $\mu_k = 0{,}35$?

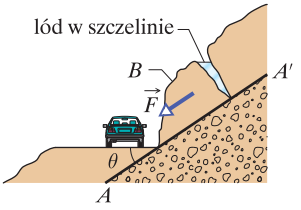
•12 Około roku 1915 Henry Sincosky z Filadelfii popisywał się tym, że potrafił zawisnąć na krokwi, trzymając belkę z obu stron, kciukiem z jednej, a pozostałymi palcami z drugiej (patrz rys. 6.21). Masa Sincosky'ego była równa 79 kg. Wyznacz najmniejszą wartość siły normalnej, jaką musiał on działać na belkę kciukiem lub pozostałymi palcami każdej ręki, zakładając, że współczynnik tarcia statycznego między jego ręką a krokwią wynosił 0,7. Pochwyciwszy belkę, Sincosky potrafił następnie podciągnąć się na niej, a także przemieszczać się wzdłuż niej, przekładając ręce. Jeśli nie imponuje ci siła chwytu Sincosky'ego, to spróbuj powtórzyć jego wyczyn.



Rys. 6.21. Zadanie 12

•13 Robotnik pcha poziomo skrzynię o masie 35 kg, działając siłą o wartości 110 N. Współczynnik tarcia statycznego między skrzynią a podłogą wynosi 0,37. a) Ile wynosi w tych warunkach maksymalna wartość siły tarcia statycznego $f_{s,max}$? b) Czy skrzynia się porusza? c) Ile wynosi siła tarcia działająca na skrzynię ze strony podłogi? d) Wyobraź sobie, że robotnik wzywa do pomocy kolegę, który ciągnie skrzynię pionowo do góry. Jaką najmniejszą siłą musi on ciągnąć skrzynię do góry, aby przykładana przez robotnika siła pozioma o wartości 110 N umożliwiła ruszenie skrzyni z miejsca? e) Jaką najmniejszą siłę musiałby przyłożyć do skrzyni drugi robotnik, aby skrzynia została wprawiona w ruch, jeśli zamiast ciągnąć skrzynię do góry ciągnąłby ją siłą poziomą?

•14 Na rysunku 6.22 pokazano przekrój drogi wyciętej w zboczu górskim. Linia ciągła AA' ilustruje granicę luźnego podłoża, po której możliwy jest poślizg bloków skalnych. Blok B znajdujący się wprost nad drogą jest oddzielony od skały nad nim głębokim pęknięciem, tak że jego ześlizgnięciu się na drogę zapobiega jedynie siła tarcia między tym blokiem a podłożem. Masa bloku wynosi $1{,}8 \cdot 10^7$ kg, kąt nachylenia podłoża skalnego θ jest równy 24°, a współczynnik tarcia statycznego między blokiem a podłożem wynosi 0,63. a) Wykaż, że blok nie ześlizgnie się wzdłuż pod-

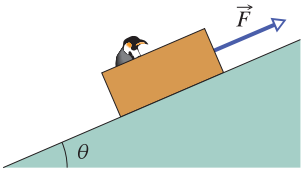


Rys. 6.22. Zadanie 14

łoża. b) Woda wpadająca do szczeliny nad blokiem zamarza w zimie, przy czym rozszerzając się, działa na blok siłą $\vec{F}$ równoległą do linii AA'. Przy jakiej minimalnej wartości siły F blok się ześlizgnie?

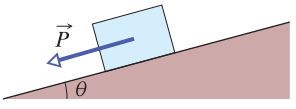
•15 Współczynnik tarcia statycznego między teflonem a jajecznicą wynosi około 0,04. Pod jakim najmniejszym kątem do poziomu trzeba ustawić pokrytą teflonem patelnię, aby jajecznica zjechała z niej na talerz?

••16 Korytko z pingwinem o łącznym ciężarze 80 N znajduje się na równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 20°$ (rys. 6.23). Współczynnik tarcia statycznego między korytkiem a równią wynosi 0,25, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0,15. a) Jaka jest wartość minimalnej siły $\vec{F}$ równoległej do równi, która powstrzyma korytko od zjechania po równi w dół? b) Jaka jest minimalna wartość siły F, dla której korytko zacznie poruszać się po równi pod górę? c) Dla jakiej wartości siły F korytko będzie się poruszać pod górę ze stałą prędkością?



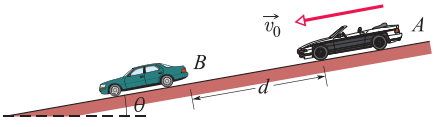
Rys. 6.23. Zadania 16 i 22

••17 Siła $\vec{P}$ równoległa do równi nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 15°$ działa na klocek o ciężarze 45 N, jak pokazano na rysunku 6.24. Współczynniki tarcia między klockiem a powierzchnią równi wynoszą $\mu_s = 0{,}5$ i $\mu_k = 0{,}34$. Wybierz oś x skierowaną w górę wzdłuż równi i załóż, że klocek początkowo znajduje się w spoczynku. Wyznacz działającą na klocek siłę tarcia, zapisując ją przy użyciu wektorów jednostkowych, gdy siła $\vec{P}$ jest równa: a) $(-5\text{ N})\hat{\mathrm{i}}$, b) $(-8\text{ N})\hat{\mathrm{i}}$ i c) $(-15\text{ N})\hat{\mathrm{i}}$.



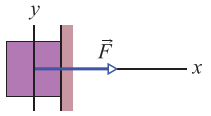
Rys. 6.24. Zadanie 17

••18 GO Masz wystąpić w sądzie jako rzeczoznawca w sprawie dotyczącej wypadku drogowego. Polegał on na tym, że samochód B zatrzymał się na czerwonym świetle na drodze opadającej, a samochód A najechał na niego od tyłu, wpadając w poślizg na pochyłości (patrz rys. 6.25). Badając sprawę, stwierdziłeś, że nachylenie drogi wynosi $\theta = 12°$, samochody były od siebie odległe o $d = 24$ m, gdy pojazd A wpadł w poślizg (samochód ten nie miał systemu ABS), a jego prędkość wynosiła wówczas $v_0 = 18$ m/s. Oblicz prędkość, z jaką samochód A wpadł na samochód B, jeśli współczynnik tarcia kinetycznego wynosi: a) 0,6 (sucha nawierzchnia), b) 0,1 (nawierzchnia pokryta mokrymi liśćmi).



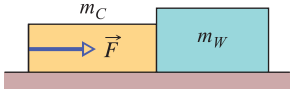
Rys. 6.25. Zadanie 18

••19 Siła pozioma $\vec{F}$ o wartości 12 N przyciska klocek o ciężarze 5 N do pionowej ściany (rys. 6.26). Współczynnik tarcia statycznego między ścianą a klockiem wynosi 0,6, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0,4. W chwili początkowej klocek się nie porusza. a) Czy klocek nadal pozostanie w spoczynku? b) Wyznacz siłę działającą na klocek ze strony ściany, zapisując ją za pomocą wektorów jednostkowych.



Rys. 6.26. Zadanie 19

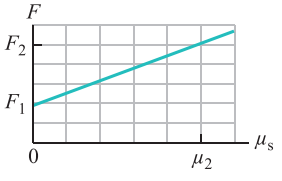
••20 GO Na rysunku 6.27 przedstawiono pudełko płatków śniadaniowych Cheerios (o masie $m_C = 1$ kg) i pudełko płatków śniadaniowych Wheaties (o masie $m_W = 3$ kg), poruszające się ruchem przyspieszonym po płaskiej powierzchni, pod wpływem siły $\vec{F}$ przyłożonej poziomo do pudełka Cheerios. Wartość siły tarcia działającej na pudełko Cheerios wynosi 2 N, a wartość siły tarcia działającej na pudełko Wheaties jest równa 4 N. Jaka jest wartość siły działającej na pudełko Wheaties ze strony pudełka Cheerios, jeśli wartość siły $\vec{F}$ wynosi 12 N?



Rys. 6.27. Zadanie 20

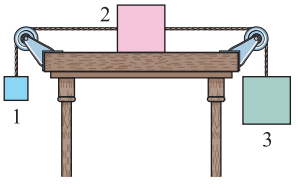
••21 Pozostające początkowo w spoczynku pudło z piaskiem ma być przeciągnięte po podłodze za pomocą liny, której naprężenie nie może przekroczyć 1100 N. Współczynnik tarcia statycznego między pudłem a podłogą wynosi 0,35. a) Ile powinien wynosić kąt między liną a poziomem, aby do pudła można było bezpiecznie wsypać możliwie największą ilość piasku? b) Ile wynosiłby wówczas ciężar pudła z piaskiem?

••22 GO Korytko z rysunku 6.23 porusza się w górę po równi pochyłej, gdyż jest na nią wciągane za pomocą liny. Działająca na nie siła przekracza tylko nieznacznie siłę minimalną potrzebną do uzyskania ruchu w górę po równi. Na rysunku 6.28 pokazano, jak zależy wartość F tej minimalnej siły od współczynnika tarcia statycznego między korytkiem a równią w zakresie od $\mu_s = 0$ do $\mu_s = \mu_2 = 0{,}5$. Wartości siły F dla tych skrajnych wartości współczynnika tarcia wynoszą $F_1 = 2$ N i $F_2 = 5$ N. Ile wynosi kąt nachylenia równi θ?



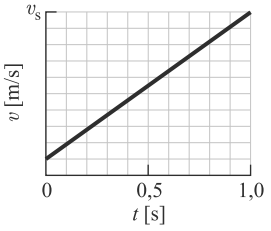
Rys. 6.28. Zadanie 22

••23 Trzy klocki z rysunku 6.29 są początkowo utrzymywane w spoczynku, a następnie zwolnione, wskutek czego poruszają się z przyspieszeniem o wartości 0,5 m/s^2. Masa klocka 1 wynosi M, a klocki 2 i 3 mają masę $2M$ każdy. Oblicz wartość siły tarcia działającej na klocek poruszający się poziomo.



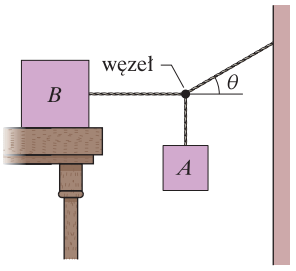
Rys. 6.29. Zadanie 23

••24 Na znajdujący się na podłodze klocek o masie 4,1 kg działa poziomo siła o stałej wartości 40 N. Na rysunku 6.30 pokazano, jak zmienia się prędkość klocka v z upływem czasu t, gdy porusza się on po podłodze wzdłuż osi x. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktu $v_s = 5$ m/s. Wyznacz współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a podłogą.



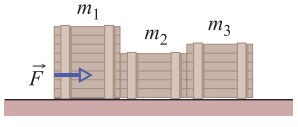
Rys. 6.30. Zadanie 24

••25 ssm ilw Klocek B z rysunku 6.31 ma ciężar 711 N. Współczynnik tarcia statycznego między klockiem a stołem wynosi 0,25, a kąt θ jest równy 30°. Linka między klockiem B a węzłem jest pozioma. Wyznacz maksymalny ciężar klocka A, dla którego układ pozostaje w spoczynku.



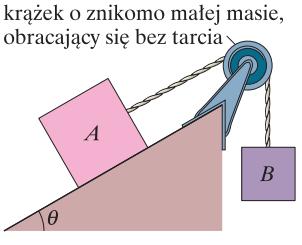
Rys. 6.31. Zadanie 25

••26 GO Na rysunku 6.32 przedstawiono trzy skrzynie, które są przesuwane po podłodze za pomocą poziomej siły $\vec{F}$ o wartości 440 N. Masy skrzyń wynoszą: $m_1 = 30$ kg, $m_2 = 10$ kg i $m_3 = 20$ kg. Współczynnik tarcia kinetycznego między podłogą a każdą ze skrzyń jest równy 0,7. a) Wyznacz wartość F_{32} siły, jaką działa skrzynia 2 na skrzynię 3. b) Wyobraź sobie, że podłogę wyfroterowano, tak że współczynnik tarcia kinetycznego się zmniejszył. Czy F_{32} jest teraz większe, mniejsze, czy takie samo jak wtedy, gdy współczynnik tarcia był równy 0,7?



Rys. 6.32. Zadanie 26

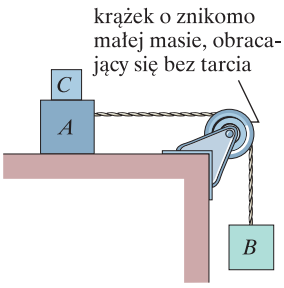
••27 GO Ciało A z rysunku 6.33 ma ciężar 102 N, a ciało B — ciężar 32 N. Współczynniki tarcia między ciałem A a równią wynoszą $\mu_s = 0{,}56$ i $\mu_k = 0{,}25$. Kąt θ jest równy 40°. Wybierz oś x skierowaną w górę wzdłuż równi. Wyznacz przyspieszenie ciała A, zapisując je za pomocą wektorów jednostkowych, jeśli: a) ciało A jest początkowo w spoczynku, b) ciało A porusza się początkowo w górę po równi, c) ciało A porusza się początkowo w dół po równi.



Rys. 6.33. Zadania 27 i 28

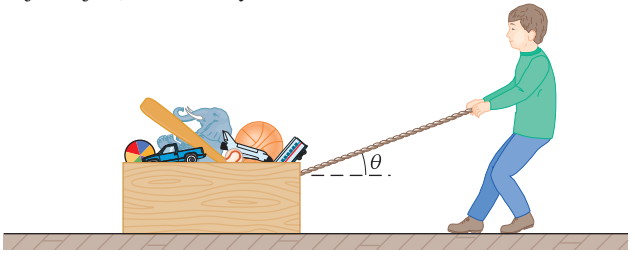
••28 Na rysunku 6.33 przedstawiono dwa klocki połączone linką przełożoną przez bloczek. Masa klocka A wynosi 10 kg, a współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem A i równią jest równy 0,2. Kąt nachylenia równi θ wynosi 30°. Klocek A ześlizguje się po równi w dół z prędkością o stałej wartości. Ile wynosi masa klocka B? Załóż, że linka ma znikomo małą masę. (Bloczek służy jedynie do zmiany kierunku linki).

••29 GO Klocki A i B z rysunku 6.34 mają ciężary odpowiednio: 44 N i 22 N. a) Wyznacz najmniejszy ciężar klocka C, dla którego klocek A nie ślizga się po stole, jeśli μ_s między klockiem A i stołem wynosi 0,2. b) Klocek C zdejmujemy nagle z klocka A. Z jakim przyspieszeniem porusza się klocek A, jeśli μ_k między klockiem A i stołem wynosi 0,15?



Rys. 6.34. Zadanie 29

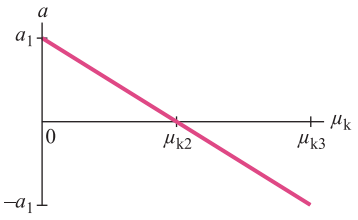
••30 Dziecko stara się przesunąć po podłodze pudło z zabawkami o łącznym ciężarze 180 N, ciągnąc je za pomocą przywiązanego do pudła sznura, jak pokazano na rysunku 6.35. Współczynnik tarcia statycznego między pudłem a podłogą wynosi 0,42. a) Ile wynosi wartość siły $\vec{F}$, jaką dziecko działa na sznur, gdy skrzynia zaczyna się ślizgać po podłodze, jeśli sznur tworzy z poziomem kąt θ równy 42°? b) Podaj wyrażenie na wartość siły $\vec{F}$, przy jakiej skrzynia zaczyna się ślizgać po podłodze, jako funkcję kąta θ. Wyznacz c) wartość kąta θ, dla której ta wartość siły $\vec{F}$ jest c) najmniejsza, oraz d) tę najmniejszą wartość siły $\vec{F}$.



Rys. 6.35. Zadanie 30

••31 ssm Dwa klocki o ciężarach 3,6 N i 7,2 N są połączone sprężyną o znikomo małej masie i ześlizgują się w dół po równi o nachyleniu 30°. Współczynnik tarcia kinetycznego między lżejszym klockiem a powierzchnią równi wynosi 0,1, a między cięższym klockiem a równią wynosi 0,2. Wyznacz: a) wartość przyspieszenia klocków, b) naprężenie sprężyny przy założeniu, że lżejszy klocek zjeżdża pierwszy.

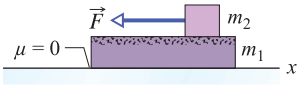
••32 GO Na klocek znajdujący się na podłodze działa stała siła pod kątem θ w dół od poziomu, jak na rysunku 6.19. Na rysunku 6.36 pokazano, jak zależy przyspieszenie klocka od współczynnika tarcia kinetycznego μ_k między klockiem a podłogą. Wyznacz wartość kąta θ, wiedząc, że $a_1 = 3$ m/s^2, $\mu_{k2} = 0{,}2$, a $\mu_{k3} = 0{,}4$.



Rys. 6.36. Zadanie 32

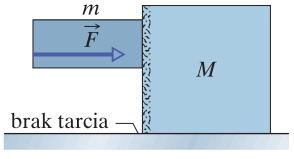
•••**33** ssm Łódź o masie 1000 kg płynęła z prędkością 90 km/h, gdy jej silnik nagle zgasł. Wartość siły tarcia $\vec{f}_k$ działającej między łodzią a wodą jest proporcjonalna do prędkości łodzi v: $f_k = 70v$, przy czym v jest wyrażone w metrach na sekundę, a f_k — w niutonach. Wyznacz czas, po jakim łódź zwolni do prędkości 45 km/h.

•••**34** GO Płyta o masie $m_1 = 40$ kg leży na podłożu, po którym może poruszać się bez tarcia, a na płycie spoczywa klocek o masie $m_2 = 10$ kg (rys. 6.37). Współczynnik tarcia statycznego między klockiem a płytą wynosi 0,6, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0,4. Jak pokazano na rysunku, klocek zaczynamy ciągnąć poziomo siłą $\vec{F}$ o wartości 100 N. Z jakim przyspieszeniem będzie się poruszać: a) klocek, b) płyta? Podaj wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.



Rys. 6.37. Zadanie 34

•••**35** ilw Dwa klocki (o masach $m = 16$ kg i $M = 88$ kg), pokazane na rysunku 6.38, nie są ze sobą połączone. Współczynnik tarcia statycznego między klockami wynosi $\mu_s = 0{,}38$, a większy klocek może poruszać się po podłożu bez tarcia. Jaka jest minimalna wartość siły poziomej $\vec{F}$ potrzebnej do tego, aby mniejszy klocek nie ześlizgnął się w dół po większym?



Rys. 6.38. Zadanie 35

Podrozdział 6.2. Siła oporu i prędkość graniczna

•**36** Prędkość graniczna skoczka (przed otwarciem spadochronu) wynosi 160 km/h, gdy przyjmuje on pozycję orła w locie, a jest równa 310 km/h, gdy spada głową w dół. Zakładając, że współczynnik oporu aerodynamicznego C nie zależy od pozycji skoczka, wyznacz stosunek pól przekroju poprzecznego S skoczka w pozycji wolnego i szybkiego lotu.

••**37** *Ciąg dalszy zadania 8.* Najpierw przeczytaj jeszcze raz, jak wiatr może przesuwać kamienie po pustynnej równinie. Następnie załóż, że wartość siły oporu aerodynamicznego działającego na kamień o masie 20 kg można wyznaczyć ze wzoru (6.14), przy czym pole pionowego przekroju kamienia wynosi 0,04 m^2, a współczynnik oporu C jest równy 0,8. Przyjmij ponadto, że gęstość powietrza wynosi 1,21 kg/m^3, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0,8. a) Ile musi wynosić prędkość wiatru przy gruncie V, w kilometrach na godzinę, umożliwiająca utrzymanie kamienia w ruchu? Przy samej ziemi wiatr jest spowalniany przez sąsiedztwo gruntu, dlatego prędkość silnych wiatrów mierzy się zwykle na wysokości 10 m nad ziemią. Przyjmij, że przy gruncie wiatr jest dwa razy wolniejszy. b) Znając odpowiedź na pytanie (a), wyznacz prędkość wiatru podawaną przez meteorologów i zastanów się, czy jest prawdopodobne, aby burzy towarzyszył wiatr o takiej prędkości (dalszy ciąg opowieści w zadaniu 65).

••**38** Pilot samolotu lecącego poziomo z prędkością 1300 km/h był zmuszony się katapultować. Załóż, że siła oporu aerodynamicznego działająca na niego oraz fotel wyrzucany może być obliczona ze wzoru (6.14). Przyjmij również, że masa fotela wyrzucanego jest taka sama jak masa pilota, a ich współczynnik oporu jest zbliżony do wartości dla skoczka przed otwarciem spadochronu. Załóż rozsądną wartość masy pilota, wybierz odpowiednie v_t z tabeli 6.1 i oszacuj: a) siłę oporu aerodynamicznego działającą na *pilota z fotelem wyrzucanym* oraz b) ich przyspieszenie w poziomie (w jednostkach g). Oba pytania odnoszą się do chwili tuż po opuszczeniu samolotu. (Wynik z punktu (a) ma konsekwencje dla konstrukcji katapulty: fotel wyrzucany musi zawierać osłonę głowy pilota przed początkowym uderzeniem wiatru).

••**39** Oblicz stosunek sił oporu, działających na odrzutowiec pasażerski, lecący z prędkością 1000 km/h na wysokości 10 km oraz na śmigłowy samolot transportowy, lecący z dwukrotnie mniejszą prędkością i na dwukrotnie mniejszej wysokości niż odrzutowiec. Na wysokości 10 km gęstość powietrza wynosi 0,38 kg/m^3, a na wysokości 5 km jest ona równa 0,67 kg/m^3. Załóż, że obydwa samoloty mają takie samo pole przekroju poprzecznego oraz takie same współczynniki oporu aerodynamicznego C.

••**40** Narciarz na stoku doznaje spowolnienia w wyniku oporu aerodynamicznego działającego na jego ciało, a także siły tarcia kinetycznego działającej na narty. Załóż, że stok ma nachylenie $\theta = 40°$, śnieg jest suchy, tak że współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_k = 0{,}04$, masa narciarza i jego sprzętu jest równa $m = 85$ kg, pole przekroju poprzecznego narciarza w pozycji kucznej wynosi $S = 1{,}3$ m^2, współczynnik oporu jest równy $C = 0{,}15$, a gęstość powietrza wynosi 1,2 kg/m^3. a) Ile wynosi prędkość graniczna narciarza? b) Wyobraź sobie, że narciarz może zmienić wartość C o małą wartość ΔC, modyfikując na przykład ułożenie rąk. Jaką spowoduje to zmianę prędkości granicznej?

Podrozdział 6.3. Ruch jednostajny po okręgu

•**41** Na nieruchomej karuzeli w wesołym miasteczku, w odległości 5,4 m od jej osi, drzemie kot. W pewnej chwili maszynista włącza silnik i rozpędza karuzelę do normalnej jej prędkości, przy której pełny obrót zajmuje urządzeniu 6 s. Ile przynajmniej musi wynosić współczynnik tarcia statycznego

między kotem a platformą karuzeli, aby kot nie ześlizgiwał się po platformie (lub był zmuszony do wpicia się w nią pazurami)?

•42 Załóż, że współczynnik tarcia statycznego między szosą a oponami samochodu wynosi 0,6, a ujemna siła nośna nie występuje. Przy jakiej wartości prędkości samochód znajdzie się na granicy poślizgu, pokonując płaski zakręt o promieniu krzywizny 30,5 m?

•43 ilw Ile wynosi najmniejszy promień krzywizny zakrętu na płaskim torze, który może pokonać rowerzystka z prędkością o wartości 29 km/h, jeśli współczynnik tarcia statycznego między oponami roweru a torem wynosi 0,32?

•44 Na olimpijskich zawodach bobslejowych zespół z Jamajki pokonał łuk o promieniu 7,6 m z prędkością o wartości 96,6 km/h. Ile wynosiło przyspieszenie bobsleja w jednostkach g?

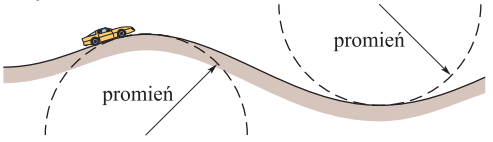
••45 ssm ilw Student o ciężarze 667 N jedzie na jednostajnie obracającym się diabelskim młynie, siedząc w pozycji wyprostowanej. W najwyższym punkcie toru wartość siły normalnej $\vec{F}_N$ działającej na studenta ze strony siedzenia wynosi 556 N. a) Czy student ma wówczas wrażenie, że jest lżejszy, czy cięższy niż zwykle? b) Jaka jest wartość siły normalnej $\vec{F}_N$ w najniższym punkcie toru? Jaka będzie wartość siły normalnej F_N w c) najwyższym i d) najniższym punkcie toru, gdy koło będzie się obracać dwa razy szybciej?

••46 W czasie pogoni za niebezpiecznym przestępcą radiowóz policyjny wjeżdża na kołowy łuk o promieniu 300 m z prędkością 80 km/h. Kierująca nim policjantka ma masę 55 kg. Wyznacz a) wartość i b) kąt (względem pionu) siły *wypadkowej*, jaka działa na policjantkę na siedzeniu kierowcy. *Wskazówka*: rozważ zarówno składowe poziome, jak i pionowe.

••47 Wielbiciel ruchu po okręgu o masie 80 kg jedzie na diabelskim młynie o promieniu 10 m z prędkością o wartości 6,1 m/s. a) Ile wynosi okres ruchu karuzeli? Jaką wartość ma siła normalna działająca na pasażera ze strony siedzenia, gdy wagonik przechodzi przez: b) najwyższy punkt swego toru i c) jego punkt najniższy?

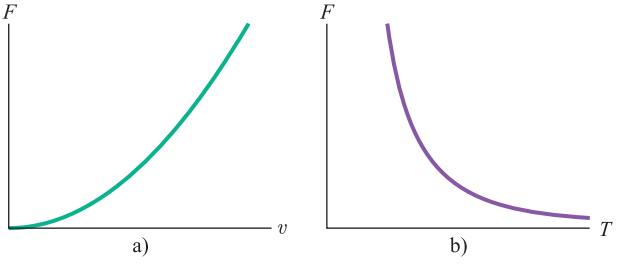
••48 Kolejka górska w wesołym miasteczku ma wraz z pasażerami masę 1200 kg, gdy wszystkie miejsca są zajęte. W pewnej chwili wagonik tej kolejki przejeżdża przez najwyższy punkt kołowego wzniesienia o promieniu 18 m. Załóżmy, że wartość jego prędkości nie ulega przy tym zmianie. Ile wynosi na szczycie wzniesienia: a) wartość F_N i b) kierunek (w górę czy w dół) siły normalnej działającej na wagonik ze strony toru, jeśli prędkość wagonika ma wartość $v = 11$ m/s? Ile wynosi c) F_N i d) kierunek siły, gdy $v = 14$ m/s?

••49 GO Samochód jedzie najpierw po kołowym wzniesieniu, a potem po kołowej dolinie (rys. 6.39) z prędkością o stałej wartości. Gdy pojazd jest na szczycie wzniesienia, siła normalna działająca ze strony siedzenia na kierowcę o masie 70 kg jest równa zeru. Wyznacz wartość siły normalnej, jaka działa na kierowcę ze strony siedzenia, gdy samochód jest na dnie doliny.



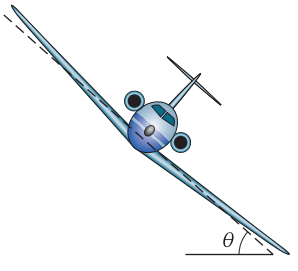
Rys. 6.39. Zadanie 49

••50 Pasażer o masie 85 kg porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu $r = 3{,}5$ m. Na rysunku 6.40a przedstawiono zależność wartości wypadkowej siły dośrodkowej F, potrzebnej do utrzymania pasażera w ruchu jednostajnym po okręgu, od wartości jego prędkości v. Ile wynosi nachylenie pokazanej krzywej, gdy $v = 8{,}3$ m/s? Na rysunku 6.40b przedstawiono zależność F od okresu ruchu T. Ile wynosi nachylenie tej krzywej, gdy $T = 2{,}5$ s?



Rys. 6.40. Zadanie 50

••51 ssm www Samolot leci po poziomym łuku kołowym z prędkością o wartości 480 km/h. Ile wynosi promień tego łuku, jeśli skrzydła samolotu są nachylone do poziomu pod kątem $\theta = 40°$ (patrz rys. 6.41)? Przyjmij, że nachylenie samolotu jest wyznaczone przez kierunek aerodynamicznej siły nośnej, działającej prostopadle do powierzchni skrzydeł.



Rys. 6.41. Zadanie 51

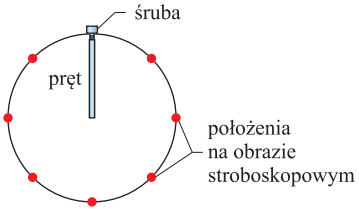
••52 Jedną z atrakcji w wesołym miasteczku jest jazda samochodem przymocowanym do końca pręta o znikomo małej masie i zataczającym okręgi w płaszczyźnie pionowej. Ciężar samochodu z pasażerami wynosi 5 kN, a promień toru jest równy 10 m. Jaka jest a) wartość i b) kierunek siły działającej na pojazd ze strony pręta w najwyższym punkcie toru, jeśli prędkość samochodu ma w tym punkcie wartość 5 m/s. Jaka

jest c) wartość i d) kierunek tej siły, gdy prędkość samochodu ma w tym punkcie wartość 12 m/s?

••53 Staroświecki tramwaj pokonuje płaski zakręt o promieniu krzywizny 9,1 m z prędkością o wartości 16 km/h. Jaki kąt z pionem tworzą luźno zwisające uchwyty dla pasażerów stojących?

••54 Projektując karuzele w wesołych miasteczkach, inżynierowie mechanicy muszą zastanawiać się nad tym, jak niewielkie zmiany różnych parametrów urządzenia wpływają na wartość siły wypadkowej, jaka działa na pasażera karuzeli. Wyobraź sobie, że pasażer o masie m jedzie na karuzeli z prędkością v po poziomym okręgu o promieniu r. Jaką zmianę ΔF wartości siły wypadkowej powoduje: a) zmiana promienia okręgu Δr przy stałej wartości v, b) zmiana prędkości Δv przy stałej wartości r i c) zmiana okresu ruchu ΔT przy stałej wartości r?

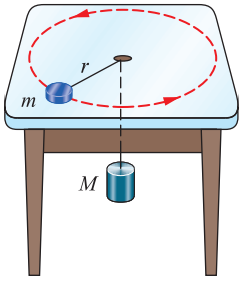
••55 W jeden koniec poziomego pręta wkręcono śrubę, po czym wprawiono pręt w ruch obrotowy w płaszczyźnie poziomej wokół osi przechodzącej przez drugi koniec pręta. Inżynier bada ruch pręta za pomocą lampy stroboskopowej, dobierając jej częstotliwość tak, by widzieć śrubę w tych samych ośmiu miejscach przy każdym obrocie pręta (jak na rys. 6.42). Długość pręta wynosi 3,5 cm, śruba ma masę 30 g, a lampa stroboskopowa daje 2000 impulsów w czasie 1 sekundy. Jaką siłą działa pręt na śrubę?



Rys. 6.42. Zadanie 55

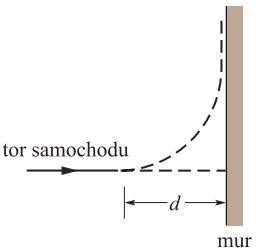
••56 Nachylenie kołowego łuku autostrady dobrano do prędkości pojazdów równej 60 km/h. Promień tego łuku wynosi 200 m. Pewnego deszczowego dnia ruch na autostradzie odbywa się z prędkością 40 km/h. Jaki musi by co najmniej współczynnik tarcia opon o nawierzchnię drogi, aby pojazdy pokonywały łuk nie ześlizgując się z jezdni? Przyjmij, że ujemna siła nośna nie występuje.

••57 Krążek o masie $m = 1{,}5$ kg, połączony z obciążnikiem o masie $M = 2{,}5$ kg nieważką linką przechodzącą przez otwór w blacie stołu, ślizga się po stole bez tarcia, zataczając okrąg o promieniu $r = 20$ cm, jak pokazano na rysunku 6.43. Jaka jest wartość prędkości krążka, skoro obciążnik pozostaje w spoczynku?



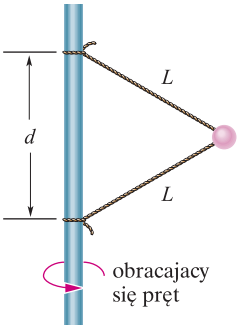
Rys. 6.43. Zadanie 57

••58 *Hamować czy skręcać*? Na rysunku 6.44 przedstawiono tor samochodu zbliżającego się do wysokiego muru (widok z góry). Załóżmy, że kierowca zaczyna hamować, gdy jego odległość od muru wynosi $d = 107$ m, a prędkość pojazdu jest równa $v_0 = 35$ m/s. Masa samochodu wynosi $m = 1400$ kg, a współczynnik tarcia statycznego jest równy $\mu_s = 0{,}5$. Przyjmijmy też, że ciężar pojazdu jest rozłożony po równo na jego cztery koła, także podczas hamowania. a) Ile wynosi wartość siły tarcia statycznego (opon o jezdnię) potrzebnej do tego, by samochód zatrzymał się tuż przy murze? b) Ile wynosi największa możliwa wartość siły tarcia $f_{s,max}$? c) Z jaką prędkością samochód uderzy w mur, jeśli współczynnik tarcia kinetycznego ślizgających się opon o jezdnię będzie równy $\mu_k = 0{,}4$? Kierowca zastanawia się, czy może łatwiej uniknąłby zderzenia z murem, nie jadąc prosto w kierunku muru, lecz skręcając i starając się znaleźć się przy murze z prędkością skierowaną wzdłuż przeszkody (jak pokazano na rysunku). d) Ile wynosi wartość siły tarcia potrzebnej do utrzymania samochodu w ruchu po okręgu r z prędkością v_0, tak by po przejechaniu jednej czwartej okręgu pojazd miał prędkość równoległą do muru? e) Czy ta siła jest mniejsza niż $f_{s,max}$, a zatem czy ruch po takim okręgu jest możliwy?



Rys. 6.44. Zadanie 58

•••59 ssm ilw Jak pokazano na rysunku 6.45, kula o masie 1,34 kg jest połączona z pionowym, obracającym się prętem za pomocą dwóch nici o znikomo małej masie i długości $L = 1{,}7$ m każda. Nici są przywiązane do pręta w punktach odległych od siebie o $d = 1{,}7$ m i napięte. Naprężenie górnej nici wynosi 35 N. Ile wynosi: a) naprężenie dolnej nici, b) wartość siły wypadkowej $\vec{F}_{wyp}$ działającej na kulę, c) wartość prędkości kuli? d) Jaki jest kierunek siły $\vec{F}_{wyp}$?

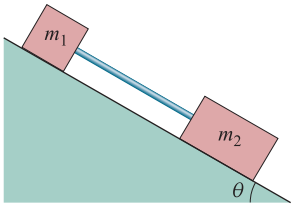


Rys. 6.45. Zadanie 59

Zadania dodatkowe

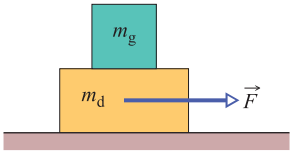
60 Jak pokazano na rysunku 6.46, po równi pochyłej ześlizguje się pudełko z małymi mrówkami (o całkowitej masie $m_1 = 1{,}65$ kg) i pudełko z dużymi mrówkami (o całkowitej masie $m_2 = 3{,}3$ kg), połączone ze sobą równoległym do powierzchni równi prętem, którego masę możemy pominąć. Kąt nachylenia równi wynosi $\theta = 30°$. Współczynnik tarcia kinetycznego między pudełkiem z małymi mrówkami a równią wynosi $\mu_1 = 0{,}226$, a między pudełkiem z dużymi mrówkami a równią — $\mu_2 = 0{,}113$. Wyznacz: a) naprężenie pręta, b) wartość wspólnego przyspieszenia obydwu pudełek. c) Jak

zmieniłyby się odpowiedzi na pytania (a) i (b), gdyby pudełko z małymi mrówkami znajdowało się na przednim końcu pręta, a pudełko z dużymi mrówkami — na tylnym?



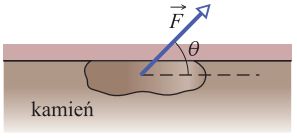
Rys. 6.46. Zadanie 60

61 ssm Klocek o masie $m_g = 4$ kg postawiono na klocku o masie $m_d = 5$ kg. Jeśli przytrzymamy dolny klocek, to do wprawienia klocka górnego w ruch ślizgowy po dolnym potrzebna jest siła o wartości przynajmniej 12 N. Wyobraź sobie, że te klocki umieszczono na poziomym stole, po którym mogą się poruszać bez tarcia, i do dolnego przyłożono poziomo siłę $\vec{F}$ (patrz rys. 6.47). a) Jaka może być co najwyżej wartość siły $\vec{F}$, jeśli klocki mają się poruszać razem? b) Jaka jest wówczas wartość przyspieszenia klocków?



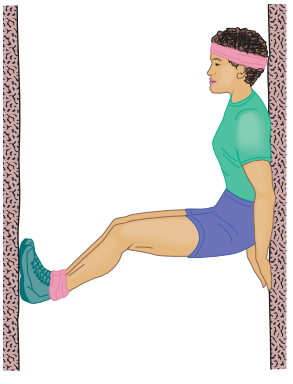
Rys. 6.47. Zadanie 61

62 Kamień o masie 5 kg jest przepychany po sklepieniu korytarza w jaskini, jak na rysunku 6.48. Współczynnik tarcia kinetycznego wynosi 0,65, a siła przyłożona do kamienia jest skierowana pod kątem $\theta = 70°$ do poziomu. Jaka musi być wartość przyłożonej siły, aby kamień poruszał się ze stałą prędkością?



Rys. 6.48. Zadanie 62

63 Na rysunku 6.49 przedstawiono alpinistkę o masie 49 kg, pokonującą „komin” między dwiema płytami skalnymi. Współczynnik tarcia statycznego między podeszwami butów alpinistki a skałą wynosi 1,2, a między jej plecami a skałą 0,8. Alpinistka zmniejszyła nacisk na skałę, tak że znalazła się na skraju ześlizgnięcia. a) Narysuj diagram sił działających na alpinistkę. b) Jaka jest wartość siły, którą alpinistka działa na skałę? c) Jaka część ciężaru alpinistki jest równoważona przez siłę tarcia działającą na jej buty?

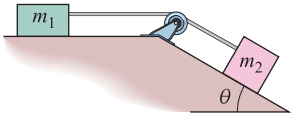

Rys. 6.49. Zadanie 63

64 Wagon szybkiej kolei jedzie po płaskim łuku o promieniu 470 m z prędkością o stałej wartości. Wartość składowej poziomej i pionowej siły, jaką wagon działa na pasażera o masie 51 kg, wynosi odpowiednio 210 N i 500 N. a) Jaka jest wartość wypadkowej *wszystkich* sił działających na pasażera? b) Ile wynosi wartość prędkości wagonu?

65 *Ciąg dalszy zadań 8 i 37.* Inne wyjaśnienie ruchu kamieni zakłada, że poruszają się one tylko wtedy, gdy w czasie burzy woda na pustynnej równinie zamarza i tworzy dużą, płaską taflę lodu. Kamienie są wówczas uwięzione w tej tafli. Gdy wiatr wieje w poprzek tafli, siła oporu aerodynamicznego działająca na taflę i kamienie przemieszcza je, przy czym kamienie żłobią ślady w podłożu. Wartość siły oporu działającej na taki poziomy „żagiel lodowy” wynosi $D_{lodu} = 4C_{lodu}\rho S_{lodu}v^2$, przy czym C_{lodu} jest współczynnikiem oporu aerodynamicznego (równym około $2 \cdot 10^{-3}$), ρ — gęstością powietrza (1,21 kg/m^3), S_{lodu} — polem powierzchni poziomej lodu, a v — prędkością wiatru wzdłuż tafli lodu.

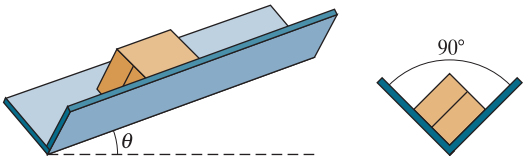
Załóż, że tafla ma rozmiar 400 m na 500 m i grubość 4 mm oraz gęstość równą 917 kg/m^3, a współczynnik tarcia kinetycznego między taflą a podłożem wynosi 0,1. Przyjmij ponadto, że w tafli uwięzionych jest 100 kamieni, takich jak w zadaniu 8. Jaka musi być prędkość wiatru: a) przy tafli, b) na wysokości 10 m, aby utrzymać taflę w ruchu? c) Czy jest prawdopodobne, aby w czasie burzy wiał wiatr o takiej prędkości?

66 GO Jak pokazano na rysunku 6.50, klocek 1 o masie $m_1 = 2$ kg i klocek 2 o masie $m_2 = 3$ kg połączono ze sobą linką o znikomo małej masie i początkowo unieruchomiono. Klocek 1 znajduje się na powierzchni poziomej i ma współczynnik tarcia kinetycznego o tę powierzchnię równy 0,25. Klocek 2 znajduje się na powierzchni nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 30°$, po której może się poruszać bez tarcia. Bloczek ma znikomo małą masę i obraca się bez tarcia. Gdy przestaniemy przytrzymywać klocki, będą się one poruszać. Jaka będzie wówczas siła naprężenia nici?



Rys. 6.50. Zadanie 66

67 Na rysunku 6.51 przedstawiono skrzynię ześlizgującą się wzdłuż nachylonej do poziomu rynny złożonej z dwóch prostopadłych do siebie ścianek. Współczynnik tarcia kinetycznego między skrzynią a rynną jest równy μ_k. Wyznacz przyspieszenie skrzyni jako funkcję μ_k, θ i g.

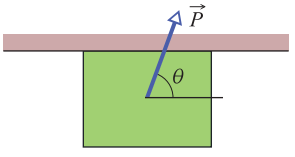


Rys. 6.51. Zadanie 67

68 *Projektowanie łuku autostrady.* Gdy samochód pokonuje zakręt zbyt szybko, może się ześlizgnąć z jezdni. Gdy szosa jest nachylona na łuku, zapobiega temu siła tarcia działająca

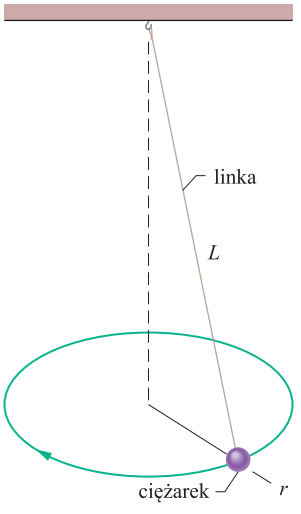
w dół pochyłości jezdni (w kierunku spływania wody z jezdni). Rozważ łuk szosy o promieniu $R = 200$ m i kącie jej nachylenia θ. Samochód (na który nie działa ujemna siła nośna) jedzie po tym łuku jak na rysunku 6.11, a współczynnik tarcia statycznego opon o nawierzchnię jest równy μ_s. a) Znajdź wyrażenie na prędkość pojazdu v_{max}, przy której jest on na granicy ześlizgnięcia się z drogi. b) Sporządź wykres v_{max} jako funkcji θ w zakresie od 0 do 50° dla $\mu_s = 0{,}6$ (szosa sucha) oraz — na tym samym wykresie — dla $\mu_s = 0{,}05$ (szosa mokra lub oblodzona). Wyznacz wartość v_{max} w kilometrach na godzinę dla nachylenia drogi pod kątem $\theta = 10°$ oraz współczynnika tarcia μ_s równego c) 0,6 i d) 0,05. Wyniki, jakie uzyskasz, powinny cię przekonać, że wypadki na autostradach zdarzają się nieraz dlatego, że kierowcy nie zdają sobie sprawy z oblodzenia drogi i starają się pokonywać zakręty z prędkością, jaka jest bezpieczna tylko w normalnych warunkach.

69 Student doprowadzony do szaleństwa perspektywą egzaminu dyplomowego pcha wzdłuż sufitu swego pokoju klocek o masie 5 kg, działając na niego siłą $\vec{P}$ o wartości 80 N pod kątem $\theta = 70°$, jak pokazano na rysunku 6.52. Oblicz wartość przyspieszenia klocka przy założeniu, że współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a sufitem wynosi 0,4.



Rys. 6.52. Zadanie 69

70 GO *Wahadło stożkowe* (patrz rys. 6.53) składa się z ciężarka o masie 0,04 kg oraz linki o długości L równej 0,9 m i znikomo małej masie. Ciężarek zatacza w poziomie okrąg o obwodzie 0,94 m, poruszając się z prędkością o stałej wartości (linka zatacza przy tym powierzchnię boczną stożka, skąd nazwa wahadła). Wyznacz a) naprężenie linki i b) okres ruchu wahadła.

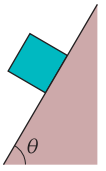


Rys. 6.53. Zadanie 70

71 Klocek stalowy o masie 8 kg jest nieruchomy na poziomym stole. Współczynnik tarcia statycznego klocka o stół wynosi 0,45. Do tego klocka przykładamy pewną siłę. Oblicz wartość tej siły, jaka jest potrzebna, by klocek zaczął się ślizgać po stole, jeśli jest ona skierowana: a) poziomo, b) pod kątem 60° w górę od poziomu i c) pod kątem 60° w dół od poziomu. Wykonaj obliczenia z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

72 Pudło konserw ześlizguje się po pochylni z poziomu ulicy do piwnicy sklepu spożywczego z przyspieszeniem 0,75 m/s^2 skierowanym wzdłuż pochylni. Pochylnia jest nachylona do poziomu pod kątem 40°. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego pudła o pochylnię?

73 Współczynnik tarcia kinetycznego klocka z rysunku 6.54 o powierzchnię nachyloną do poziomu pod kątem $\theta = 60°$ wynosi 0,2. Wyznacz a) wartość a i b) kierunek (w górę lub w dół) przyspieszenia klocka, gdy ześlizguje się on po tej powierzchni. Wyznacz c) wartość a i d) kierunek przyspieszenia, gdy klocek porusza się w górę po powierzchni.

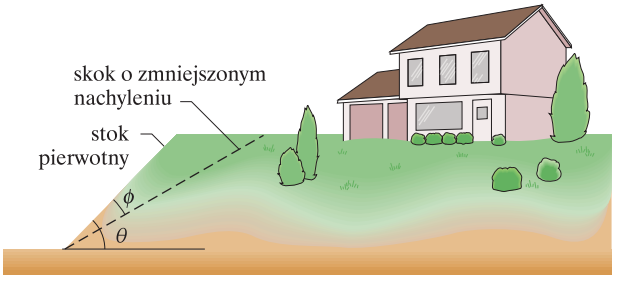


Rys. 6.54. Zadanie 73

74 Wprawiony w ruch ślizgowy po lodzie krążek hokejowy o masie 110 g zatrzymał się pod wpływem siły tarcia, działającej na niego ze strony lodu, po przebyciu 15 m. a) Jaka była wartość siły tarcia, jeśli prędkość początkowa krążka wynosiła 6 m/s? b) Ile wynosi współczynnik tarcia między krążkiem a lodem?

75 Lokomotywa ciągnie po poziomym torze pociąg o 25 wagonach, wprawiając go w ruch przyspieszony. Na każdy wagon o masie $5 \cdot 10^4$ kg działa siła tarcia $f = 250v$, gdzie v jest wartością prędkości w metrach na sekundę, a f jest wartością siły w niutonach. W chwili, gdy prędkość pociągu ma wartość 30 km/h, wartość przyspieszenia wynosi 0,2 m/s^2. a) Ile wynosi naprężenie połączenia pierwszego wagonu z lokomotywą? b) Ile wynosi największe nachylenie toru, po którym lokomotywa mogłaby ciągnąć ten pociąg pod górę z prędkością 30 km/h, gdyby naprężenie z punktu (a) było równe największej sile, jaką lokomotywa może działać na pociąg?

76 Na wzgórzu, którego stok ma nachylenie $\theta = 45°$, zbudowano dom (rys. 6.55). Analiza inżynieryjna wykazała, że nachylenie stoku należy zmniejszyć, aby górne warstwy gruntu nie ześlizgnęły się po niższych. Wyznacz najmniejszy kąt ϕ, o jaki należy zmniejszyć nachylenie stoku, aby grunt się nie obsuwał, jeśli współczynnik tarcia statycznego między warstwami gruntu wynosi 0,5.

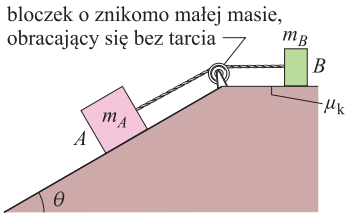


Rys. 6.55. Zadanie 76

77 Ile wynosi prędkość graniczna kuli o masie 6 kg, której promień jest równy 3 cm, a współczynnik oporu ma wartość 1,6? Gęstość powietrza, w którym spada kula, wynosi 1,2 kg/m^3.

78 Student chce wyznaczyć współczynnik tarcia statycznego i kinetycznego pudełka o deskę. W tym celu kładzie pudełko na desce i powoli podnosi jeden koniec deski. Gdy kąt nachylenia deski do poziomu osiąga 30°, pudełko zaczyna się ześlizgiwać po desce i przebywa drogę 2,5 m wzdłuż równi w czasie 4 s, poruszając się ze stałym przyspieszeniem. Ile wynosi a) współczynnik tarcia statycznego i b) współczynnik tarcia kinetycznego pudełka o deskę?

79 Na rysunku 6.56 przedstawiono dwa klocki o masach $m_A = 4$ kg i $m_B = 2$ kg. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka B o powierzchnię poziomą wynosi $\mu_k = 0{,}5$. Klocek A nie doznaje tarcia na powierzchni pochyłej, która jest nachylona do poziomu pod kątem $\theta = 30°$. Bloczek służy jedynie do zmiany kierunku linki, którą połączono klocki. Linka ma znikomo małą masę. Wyznacz: a) naprężenie linki, b) wartość przyspieszenia klocków.

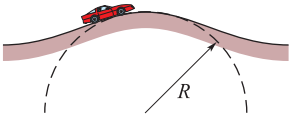


Rys. 6.56. Zadanie 79

80 Wyznacz siłę oporu aerodynamicznego działającą na pocisk o średnicy 53 cm, poruszający się z prędkością 250 m/s na małej wysokości, gdzie gęstość powietrza wynosi 1,2 kg/m^3. Przyjmij, że $C = 0{,}75$.

81 ssm Rowerzysta jedzie po kołowym torze o promieniu 25 m, z prędkością o stałej wartości 9 m/s. Łączna masa roweru i rowerzysty wynosi 85 kg. Oblicz wartość: a) siły tarcia działającej na rower ze strony drogi, b) siły *wypadkowej* działającej na rower ze strony drogi.

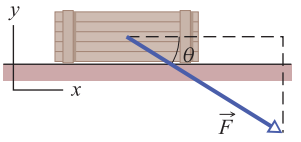
82 Kaskader ma pokonać samochodem wzgórze. W pobliżu szczytu tego wzgórza tor samochodu można uważać za łuk okręgu o promieniu 250 m (patrz rys. 6.57). Oblicz największą wartość prędkości pojazdu, przy której samochód nie oderwie się od drogi na szczycie wzgórza.



Rys. 6.57. Zadanie 82

83 Masz przepchnąć skrzynię po podłodze do miejsca jej załadunku. Ciężar skrzyni wynosi 165 N, współczynnik tarcia statycznego skrzyni o podłogę wynosi 0,51, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0,32. Przykładasz siłę do skrzyni poziomo. a) Przy jakiej wartości tej siły skrzynia zaczyna się ślizgać? b) Jaka musi być wartość twojej siły, aby skrzynia poruszała się potem ze stałą prędkością? c) Jaka będzie wartość przyspieszenia skrzyni, jeśli po wprawieniu jej w ruch będziesz nadal działał na nią siłą o wartości z punktu (a)?

84 Jak pokazano na rysunku 6.58, do skrzyni o masie m przyłożono siłę $\vec{F}$. Współczynnik tarcia statycznego skrzyni o podłogę wynosi μ_s. Kąt θ jest początkowo równy zeru, a potem jego wartość rośnie, tak że wektor siły obraca się na rysunku w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Wielkość F przyłożonej siły zmieniamy przy tym tak, by skrzynia była przez cały czas na granicy poślizgu po podłodze. Przyjmij, że $\mu_s = 0{,}7$ i a) sporządź wykres stosunku F/mg jako funkcji θ oraz b) wyznacz kąt θ_∞, dla którego ten stosunek dąży do nieskończoności. c) Czy pokrycie podłogi smarem zwiększy, zmniejszy, czy nie zmieni wartości θ_∞? d) Ile wynosi θ_∞ dla $\mu_s = 0{,}6$?



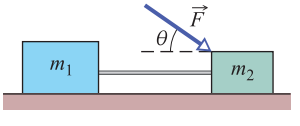
Rys. 6.58. Zadanie 84

85 Wczesnym popołudniem zaparkowano samochód na ulicy, która prowadzi w dół wzgórza pod kątem 35° do poziomu. Współczynnik tarcia statycznego opon pojazdu o nawierzchnię wynosił wtedy 0,725. Później, już po zmroku, zaczął padać śnieg z deszczem i współczynnik tarcia zmniejszył się w wyniku oblodzenia i zmiany temperatury nawierzchni drogi. Jaka procentowa zmiana współczynnika tarcia mogłaby spowodować niebezpieczeństwo, że samochód ześlizgnie się po ulicy?

86 Miotacz wkłada kamień o masie 0,25 kg do woreczka procy (o masie 0,01 kg), a następnie zaczyna obracać procę w płaszczyźnie pionowej po okręgu o promieniu 0,65 m. Linka procy ma znikomo małą masę i zrywa się, gdy jej naprężenie osiąga wartość 33 N. Załóż, że miotacz zwiększa stopniowo prędkość kamienia. a) Czy linka się zerwie, gdy kamień będzie w najniższym czy najwyższym punkcie toru? b) Jaka będzie prędkość kamienia w chwili zerwania się linki?

87 ssm Samochód o ciężarze 10,7 kN jedzie z prędkością o wartości 13,4 m/s po prostej szosie i napotyka zakręt o promieniu krzywizny równym 61 m, na którym szosa nie jest pochylona. a) Oblicz wartość siły tarcia potrzebnej do tego, by samochód mógł bezpiecznie pokonać ten zakręt. b) Czy samochód pokona bezpiecznie ten zakręt, jeśli współczynnik tarcia statycznego między oponami a nawierzchnią drogi wynosi 0,35?

88 Klocek 1 o masie $m_1 = 2$ kg i klocek 2 o masie $m_2 = 1$ kg połączono linką o znikomo małej masie (rys. 6.59). Na klocek 2 działamy siłą $\vec{F}$ o wartości 20 N skierowaną pod kątem $\theta = 35°$ do poziomu. Współczynnik tarcia kinetycznego każdego z klocków o podłoże wynosi 0,2. Ile wynosi naprężenie linki?

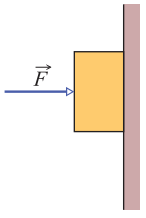


Rys. 6.59. Zadanie 88

89 ssm Szafka, której ciężar wynosi 556 N, stoi na podłodze. Współczynnik tarcia statycznego szafki o podłogę jest równy 0,68, a współczynnik tarcia kinetycznego wynosi 0,56.

W czterech kolejnych próbach ruszenia szafki z miejsca przykładano do niej siły o wartości: a) 222 N, b) 334 N, c) 445 N i d) 556 N. Dla każdej z tych prób oblicz wartość siły tarcia działającej na szafkę ze strony podłogi (szafka jest początkowo w spoczynku). e) Która z prób doprowadziła do ruszenia szafki z miejsca?

90 Klocek pokazany na rysunku 6.60 pozostaje w spoczynku względem pionowej ściany, gdyż działa na niego poziomo siła $\vec{F}$ o wartości 60 N. Ciężar klocka wynosi 22 N, współczynnik tarcia statycznego klocka o ścianę jest równy 0,55, a współczynnik tarcia kinetycznego wynosi 0,38. W sześciu kolejnych doświadczeniach równolegle do ściany przykładano do klocka drugą siłę $\vec{P}$ o wartości i kierunku: a) 34 N, w górę, b) 12 N, w górę, c) 48 N, w górę, d) 62 N, w górę, e) 10 N, w dół i f) 18 N, w dół. Wyznacz wartość siły tarcia działającej na klocek w każdym z tych przypadków. W którym z tych przypadków klocek porusza się wzdłuż ściany g) w górę, h) w dół? i) W którym z tych przypadków siła tarcia działa wzdłuż ściany w dół?



Rys. 6.60. Zadanie 90

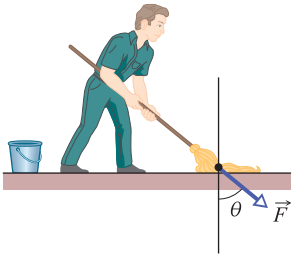
91 ssm Klocek ześlizguje się ze stałą prędkością po równi pochyłej o kącie nachylenia θ. Następnie klocek zostaje pchnięty wzdłuż równi w górę z prędkością początkową v_0. a) Jaką drogę przebędzie klocek po równi do chwili, gdy jego prędkość zmaleje do zera? b) Czy klocek ześlizgnie się wówczas wzdłuż równi? Uzasadnij odpowiedź.

92 Łuk autostrady o promieniu 150 m zbudowano, przewidując, że pojazdy będą się po nim przemieszczały z prędkością 60 km/h, a ujemna siła nośna nie będzie występować. a) Pod jakim kątem pochylono drogę na tym łuku? b) Gdyby drogi nie pochylono, to jaki co najmniej musiałby być współczynnik tarcia opon o nawierzchnię, aby pojazd o prędkości 60 km/h nie ześliznął się z drogi na tym łuku?

93 Pudło o masie 1,5 kg spoczywa początkowo na poziomej powierzchni. W chwili $t = 0$ przykładamy do niego poziomo siłę równą $\vec{F} = (1{,}8t)\hat{\mathrm{i}}$, gdzie t jest wyrażone w sekundach. Przyspieszenia pudła jest równe $\vec{a} = 0$ dla $0 \leqslant t \leqslant 2{,}8$ s oraz $\vec{a} = (1{,}2t - 2{,}4)\hat{\mathrm{i}}$ m/s^2 dla $t > 2{,}8$ s. a) Ile wynosi współczynnik tarcia statycznego między pudłem a powierzchnią podłoża? b) Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego między pudłem a tą powierzchnią?

94 Dziecko o ciężarze 140 N siedzi na szczycie zjeżdżalni na placu zabaw, która jest nachylona do poziomu pod kątem 25°. Początkowo dziecko trzyma poręcze zjeżdżalni, dzięki czemu pozostaje w spoczynku, a następnie puszcza je i zaczyna poruszać się ze stałym przyspieszeniem o wartości 0,86 m/s^2 (skierowanym – oczywiście – w dół zjeżdżalni). a) Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego między dzieckiem a zjeżdżalnią? b) Podaj największą i najmniejszą wartość współczynnika tarcia statycznego między dzieckiem a zjeżdżalnią, dla których warunki zadania mogą być spełnione.

95 Skrupulatny robotnik pcha po podłodze mopa, działając wzdłuż jego kija siłą $\vec{F}$ (rys. 6.61). Kij tworzy z pionem kąt θ, a współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego mopa o podłogę są równe μ_s i μ_k. Przyjmij, że masę kija można pominąć w porównaniu z masą samego mopa m, a) Jaka jest wartość F, gdy mop porusza się po podłodze ze stałą prędkością? b) Wykaż, że jeśli kąt θ jest mniejszy od pewnej wartości θ_0, to siła $\vec{F}$ (cały czas skierowana wzdłuż kija) nie jest w stanie ruszyć mopa z miejsca. Wyznacz tę wartość θ_0.

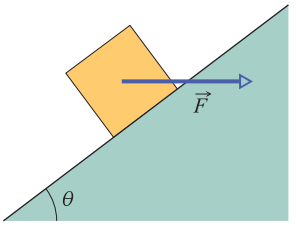


Rys. 6.61. Zadanie 95

96 Dziecko postawiło koszyk na brzegu platformy karuzeli, odległym od jej osi o 4,6 m. Karuzela wykonuje pełen obrót w czasie 30 s. a) Oblicz wartość prędkości, z jaką porusza się skraj platformy karuzeli. b) Ile musi co najmniej wynosić współczynnik tarcia statycznego między koszykiem a platformą karuzeli, aby koszyk z niej nie spadł?

97 ssm Pracownik hurtowni, któremu polecono przesunięcie skrzyni o masie 40 kg, działa na skrzynię poziomo siłą o wartości 85 N. Podłoga hurtowni jest pozioma. Skrzynia, która początkowo znajdowała się w spoczynku, ma po przebyciu drogi 1,4 m prędkość 1 m/s. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego między skrzynią a podłogą?

98 Na klocek o masie 5 kg znajdujący się na równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 37°$, działa poziomo siła $\vec{F}$ o wartości 50 N (rys. 6.62). Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a równią wynosi 0,3. Wyznacz a) wartość i b) kierunek (w górę czy w dół równi) przyspieszenia klocka, wiedząc, że jego prędkość początkowa ma wartość 4 m/s i jest skierowana wzdłuż równi w górę. c) Jak daleko wzniesie się klocek w górę wzdłuż równi? d) Co stanie się z klockiem po osiągnięciu przez niego największego wzniesienia na równi — pozostanie w spoczynku czy zsunie się po równi?



Rys. 6.62. Zadanie 98

99 Blok stalowy o masie 11 kg spoczywa na poziomym stole. Współczynnik tarcia statycznego między blokiem a stołem wynosi 0,52. a) Ile wynosi wartość siły działającej na blok poziomo, przy której blok zaczyna się ślizgać po stole? b) Ile wynosi wartość siły działającej na blok pod kątem 60° w górę od poziomu, przy której blok zaczyna się ślizgać po stole? c) Przyjmij, że na blok działa siła skierowana pod kątem 60° w dół od poziomu. Ile co najwyżej może wynosić wartość tej siły, jeśli blok ma pozostać w spoczynku?

100 Narta położona na śniegu przymarza do niego. Jeśli jednak narta ślizga się po śniegu, to w wyniku tarcia śnieg ogrzewa się i częściowo się topi, dzięki czemu zmniejsza się współczynnik tarcia kinetycznego i na nartach da się jechać. Smarowanie spodów nart utrudnia przyleganie do nich wody, co dodatkowo zmniejsza współczynnik tarcia między nartami a warstewką wody. Według informacji z prasy specjalistycznej dla pewnego nowego rodzaju nart plastikowych przyleganie wody do nart udało się tak znacznie zmniejszyć, że na łagodnym stoku alpejskim o długości 200 m udało się skrócić czas zjazdu pewnego narciarza z 61 s na nartach standardowych do 42 s na tych nartach ulepszonych. Oblicz wartość średniego przyspieszenia osoby testującej narty podczas zjazdu na nartach: a) standardowych, b) ulepszonych. Oblicz współczynnik tarcia kinetycznego podczas zjazdu na stoku o nachyleniu 3° na nartach: c) standardowych, d) ulepszonych.

101 Dziecko bawi się w pobliżu placu budowy i w pewnej chwili spada z ogrodzenia terenu budowy i ląduje na szorstkiej pochyłości terenu tworzącej kąt 35° z poziomem. Dziecko zjeżdża po pochyłości *w dół* z przyspieszeniem o wartości 0,5 m/s^2 skierowanym wzdłuż pochyłości *w górę*. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego dziecka o powierzchnię stoku?

102 Na stojący na poziomej podłodze fotel o masie 25 kg działamy siłą o wartości 100 N skierowaną pod kątem θ w górę od poziomu. Przyjmij najpierw, że $\theta = 0°$ i oblicz: a) składową poziomą F_{poz} siły, jaką działamy na fotel, b) wartość F_N siły normalnej, jaką działa podłoga na fotel. Następnie załóż, że $\theta = 30°$ i oblicz c) F_{poz}, d) F_N. Potem załóż, że $\theta = 60°$ i oblicz e) F_{poz}, f) F_N. Wreszcie przyjmij, że współczynnik tarcia statycznego między fotelem a podłogą jest równy 0,42. Czy fotel ślizga się po podłodze, czy pozostaje w miejscu, gdy kąt θ jest równy g) 0°, h) 30°, i) 60°?

103 Pewna lina może wytrzymać bez zerwania naprężenie nie większe od 40 N. Dziecko przywiązało do końca tej liny kamień o masie 0,37 kg i trzymając drugi jej koniec, zaczęło zataczać kamieniem w pionie okrąg o promieniu 0,91 m, zwiększając stopniowo wartość prędkości kamienia aż do zerwania liny. a) W którym punkcie toru kamienia lina się zerwała? b) Ile wynosiła wartość prędkości kamienia w chwili zerwania liny?

104  Czteromiejscowe sanie bobslejowe, których masa wynosi wraz z załogą 630 kg, ruszają ze startu wzdłuż prostego odcinka toru o długości 80 m, nachylonego do poziomu pod kątem 10,2°. Przyjmij, że wskutek tarcia o lód oraz oporu aerodynamicznego na bobslej działa stała siła hamująca o wartości 62 N, skierowana wzdłuż toru w górę. a) Przyjmij, że sanie mają w chwili startu prędkość 6,2 m/s, i oblicz, ile czasu zajmie im dodarcie do końca prostego odcinka toru. b) Wyobraź sobie, że w wyniku żmudnego treningu załoga zdołała zmniejszyć łączną siłę oporu (pochodzącą od tarcia i oporu powietrza) do wartości 42 N. W jakim czasie bobslej przebędzie teraz prosty odcinek toru, jeśli wystartuje z taką samą jak poprzednio prędkością? Podaj odpowiedzi z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

105 Klocek o ciężarze 40 N ześlizguje się po pochylni tworzącej z poziomem kąt 25°, przy czym przyspieszenie klocka ma wartość 0,8 m/s^2 i jest skierowane wzdłuż pochylni w górę. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a pochylnią?

ROZDZIAŁ 7

Energia kinetyczna i praca

7.1. ENERGIA KINETYCZNA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

7.01 zastosować związek energii kinetycznej z masą i prędkością ciała;

7.02 wyjaśnić, że energia kinetyczna to wielkość skalarna.

Podstawowe fakty

- Energia kinetyczna E_k jest związana z ruchem ciała: dla ciała o masie m i prędkości v (znacznie mniejszej od prędkości światła) wynosi

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(energia kinetyczna).}$$

O fizyce

Jednym z podstawowych celów fizyki jest badanie tego, o czym wszyscy dziś tyle mówią — energii. Rzecz jest istotnie bardzo ważna, bo przecież los naszej cywilizacji zależy od tego, jak skutecznie będziemy pozyskiwać i efektywnie wykorzystywać zasoby energii.

Każdy wie, że wszelki rodzaj ruchu — na przykład przelot przez Pacyfik — wymaga zużycia energii. Energia jest potrzebna do wniesienia jakiegoś materiału na najwyższe piętro biurowca, a także dostarczenia go do stacji kosmicznej na jej orbicie. Jest potrzebna również do dalekiego wybicia piłki. Wydajemy olbrzymie ilości pieniędzy na pozyskanie i wykorzystanie energii. Wiele wojen stoczono, by zdobyć dostęp do źródeł energii. Wojny kończą się na ogół dlatego, że jedna z walczących stron traci gwałtownie dalszy dostęp do niezbędnych do kontynuowania walki zasobów energii. Wszyscy znamy wiele rodzajów energii i jej wykorzystania, lecz co to w końcu jest ta *energia*?

Co to jest energia?

Termin *energia* ma w rzeczywistości tak szerokie znaczenie, że trudno jest podać jego klarowną definicję. Technicznie rzecz biorąc, jest to wielkość skalarna charakteryzująca stan (czyli warunki), w jakim znajduje się jedno lub wiele ciał. Ta definicja jest jednak tak ogólna, że nie na wiele nam się teraz przyda.

Zacznijmy zatem od nieco mniej precyzyjnej definicji, zgodnie z którą energia jest to liczba, którą przypisujemy stanowi jednego lub wielu ciał. Jeśli siła zmienia stan jednego z ciał, na przykład wprawiając je w ruch, to liczba ta się zmienia. Po przeprowadzeniu niezliczonych doświadczeń naukowcy i inżynierowie stwierdzili, że jeżeli wartość energii będziemy przypisywać stanom ciała w sposób dobrze przemyślany, to będziemy ją mogli zastosować do przewidywania wyników doświadczeń oraz — co jeszcze ważniejsze — do budowy różnych maszyn, na przykład latających. Sukces takiego podejścia wynika ze wspaniałej właściwości naszego wszechświata: energia może się zmieniać z jednego rodzaju w drugi i może przechodzić z jednego ciała do drugiego, lecz jej całkowita ilość nie ulega przy tym zmianie (energia jest *zachowana*). Nigdy nie wykryto żadnego odstępstwa od powyższej *zasady zachowania energii*.

Pieniądze. Możesz myśleć o różnych rodzajach energii jak o sumach pieniędzy zgromadzonych na różnych rachunkach bankowych. Wiemy, że można przenosić środki z jednego rachunku na drugi oraz z jednego banku do innego, także drogą elektroniczną, czyli bez fizycznego ruchu czegokolwiek. Całkowita ilość środków jest jednak niezmienna, czyli jest zachowana. W tym rozdziale zajmiemy się jednym z rodzajów energii (*energią kinetyczną*) i jednym ze sposobów jej przekazywania (*pracą*).

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna E_k jest to energia związana ze *stanem ruchu* ciała. Im szybciej ciało się porusza, tym większa jest jego energia kinetyczna. Gdy ciało pozostaje w spoczynku, jego energia kinetyczna jest równa zeru.

Energię kinetyczną ciała o masie m, poruszającego się z prędkością o wartości v, znacznie mniejszej od prędkości światła, definiujemy jako

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(energia kinetyczna).} \qquad (7.1)$$

Na przykład kaczka o masie 3 kg, przelatująca obok nas z prędkością 2 m/s, ma energię kinetyczną 6 kg $\cdot$ m^2/s^2, co oznacza, że taką właśnie liczbę przypisujemy stanowi ruchu kaczki.

Jednostką energii kinetycznej (i każdego innego rodzaju energii) w układzie SI jest **dżul** (J). Nazwa ta pochodzi od nazwiska XIX-wiecznego uczonego angielskiego Jamesa Prescotta Joule'a. Związek jednostki energii z jednostkami masy i prędkości wynika natychmiast z równania (7.1)

$$1 \text{ dżul} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2. \qquad (7.2)$$

Nasza kaczka ma zatem energię kinetyczną równą 6 J.

Przykład 7.01. Energia kinetyczna, zderzenie lokomotyw

W roku 1896 w Waco, w Teksasie, William Crush na oczach 30 tysięcy widzów ustawił dwie lokomotywy naprzeciwko siebie, na końcach toru o długości 6,4 km, uruchomił je, zablokował dźwignie przepustnicy w położeniu pełnego otwarcia i pozwolił rozpędzonym lokomotywom zderzyć się ze sobą czołowo (rys. 7.1). Odłamki pojazdów zraniły setki osób, a kilka nawet zabiły. Wyznacz łączną energię kinetyczną lokomotyw tuż przed zderzeniem, zakładając, że każda z nich miała ciężar równy $1{,}2 \cdot 10^6$ N, a przyspieszenia obydwu lokomotyw wzdłuż toru były stałe i wynosiły 0,26 m/s^2.



Rys. 7.1. Widok zniszczeń po zderzeniu dwóch lokomotyw w 1896 roku (dzięki uprzejmości Library of Congress)

PODSTAWOWE FAKTY

1) Energię kinetyczną każdej lokomotywy możemy wyznaczyć z równania (7.1), ale musimy znać jej prędkość tuż przed zderzeniem oraz jej masę. 2) Przyspieszenie każdej z lokomotyw było stałe, więc do obliczenia jej prędkości v tuż przed zderzeniem możemy zastosować wzory z tabeli 2.1.

Obliczenia: Wybieramy równanie (2.16), gdyż znamy wartości wszystkich występujących w nim zmiennych poza v. Mamy więc

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Ponieważ $v_0 = 0$, a $x - x_0 = 3{,}2 \cdot 10^3$ m (jest to połowa początkowej odległości lokomotyw), więc mamy stąd

$$v^2 = 0 + 2(0{,}26\ \text{m/s}^2)(3{,}2 \cdot 10^3\ \text{m}),$$

czyli

$$v = 40{,}8\ \text{m/s} = 147\ \text{km/h}.$$

Masę każdej z lokomotyw można wyznaczyć, dzieląc jej ciężar przez g:

$$m = \frac{(1{,}2 \cdot 10^6\ \text{N})}{(9{,}8\ \text{m/s}^2)} = 1{,}22 \cdot 10^5\ \text{kg}.$$

Teraz możemy już obliczyć z równania (7.1) łączną energię kinetyczną obydwu lokomotyw tuż przed zderzeniem. Otrzymujemy

$$E_k = 2(\tfrac{1}{2}mv^2) = (1{,}22 \cdot 10^5\ \text{kg})(40{,}8\ \text{m/s})^2 = 2 \cdot 10^8\ \text{J}$$ (odpowiedź).

Zderzenie tych lokomotyw było jak wybuch potężnej bomby.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

7.2. PRACA I ENERGIA KINETYCZNA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

7.03 zastosować związek siły (jej wartości i kierunku) z pracą wykonaną przy przemieszczeniu cząstki;

7.04 obliczyć pracę jako iloczyn skalarny wektora siły i wektora przemieszczenia, zarówno w zapisie za pomocą wartości i kąta, jak i w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych;

7.05 obliczyć pracę całkowitą, gdy na ciało działa wiele sił;

7.06 zastosować związek pracy ze zmianą energii kinetycznej.

Podstawowe fakty

- Praca W jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana na drodze działania na ciało siłą. Gdy energia jest przekazana ciału, praca jest dodatnia, a gdy energia jest ciału odebrana, praca jest ujemna.

- Praca wykonana przy przemieszczeniu ciała w wyniku działania na nie siłą $\vec{F}$ wynosi

$$W = Fd\cos\phi = \vec{F} \cdot \vec{d}$$ (praca wykonana przez siłę stałą),

gdzie $\vec{d}$ jest przemieszczeniem ciała, a ϕ kątem między wektorami $\vec{F}$ i $\vec{d}$.

- Do obliczenia pracy wykonanej przez siłę nad ciałem w czasie jego przemieszczenia potrzebna jest tylko składowa siły $\vec{F}$ w kierunku przemieszczenia ciała $\vec{d}$.
- Gdy na ciało działają dwie siły lub większa ich liczba, wówczas całkowita praca wykonana nad ciałem jest sumą prac wykonanych przez poszczególne siły, równa też pracy wykonanej przez wypadkową $\vec{F}_{\text{wyp}}$ tych sił.
- Zmiana energii kinetycznej ciała ΔE_{k} jest równa całkowitej pracy W wykonanej nad tym ciałem:

$$\Delta E_{\text{k}} = E_{\text{k końc}} - E_{\text{k pocz}} = W,$$

gdzie $E_{\text{k pocz}}$ jest energią początkową ciała, a $E_{\text{k końc}}$ — jego energią końcową, czyli po wykonaniu pracy. Związek ten można również zapisać w postaci

$$E_{\text{k końc}} = E_{\text{k pocz}} + W.$$

Praca

Gdy zwiększamy prędkość ciała, działając na nie siłą, zwiększamy jego energię kinetyczną E_{k} ($= \frac{1}{2}mv^2$). Podobnie, gdy działając na ciało siłą, zmniejszamy jego prędkość, zmniejszamy też jego energię kinetyczną. Te zmiany energii kinetycznej ciała, na które działamy siłą, rozumiemy jako przekazanie mu energii lub odebranie jej od niego. W rozważanym tu przypadku, gdy przekazanie energii odbywa się dzięki przyłożeniu do ciała siły, mówimy, że *siła wykonuje nad ciałem* **pracę** W. Ściślej pracę definiujemy następująco:

> Praca W jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana na drodze działania na ciało siłą. Gdy energia jest przekazana ciału, praca jest dodatnia, a gdy energia jest ciału odebrana, praca jest ujemna.

„Praca" jest więc równa zmianie energii; „wykonanie pracy" jest aktem przekazania energii. Praca jest wielkością skalarną, a jej jednostki są takie same, jak jednostki energii.

Termin „przekazanie" może być mylący. Nie oznacza on, że jakaś materia dopłynęła lub odpłynęła od ciała; to nie to samo, co przepływ wody. Dobrym porównaniem może być elektroniczne przekazanie pieniędzy między dwoma rachunkami bankowymi. Saldo jednego rachunku się zwiększa, a drugiego zmniejsza, lecz fizycznie nic między tymi rachunkami nie przepływa.

Zwróćmy też uwagę, że słowa „praca" nie używamy tu w sensie potocznym, gdzie *dowolny* wysiłek fizyczny lub umysłowy kojarzymy z pracą. Gdy na przykład naciskasz mocno na ścianę, męczysz się, bo musisz ciągle naprężać mięśnie, a więc w sensie potocznym pracujesz. Takiemu wysiłkowi nie towarzyszy jednak przekazanie energii do, ani od ściany, a więc w sensie powyższej definicji nie jest wykonywana żadna praca.

Dla uniknięcia nieporozumień, symbolem W będziemy w tym rozdziale zawsze oznaczać pracę, a ciężar będziemy zapisywać jako mg.

Praca i energia kinetyczna

Wzór na pracę

Aby wyprowadzić wzór na pracę, rozważmy koralik, który może ślizgać się bez tarcia po żyłce rozciągniętej wzdłuż poziomej osi x (rys. 7.2). Stała

siła $\vec{F}$, skierowana pod kątem ϕ do żyłki, powoduje ruch przyspieszony koralika wzdłuż żyłki. Związek między siłą a przyspieszeniem opisuje druga zasada dynamiki Newtona, zapisana w tym przypadku dla składowych wzdłuż osi x:

$$F_x = ma_x, \tag{7.3}$$

przy czym m jest masą koralika. Gdy koralik przemieszcza się o wektor $\vec{d}$, jego prędkość zmienia się w wyniku działania siły z v_0 na v. Siła jest stała, więc — jak wiemy — stałe jest także przyspieszenie. Możemy zatem skorzystać ze wzoru (2.16) i dla składowych wzdłuż osi x napisać

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d. \tag{7.4}$$

Wyznaczając a_x z tego równania, podstawiając wynik do wzoru (7.3) i dokonując kilku przekształceń, otrzymujemy

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = F_x d. \tag{7.5}$$

Lewa strona powyższego równania jest to różnica energii kinetycznej $E_{\text{k końc}}$ koralika po przebyciu drogi d i jego energii kinetycznej $E_{\text{k pocz}}$ na początku tej drogi. Z równania (7.5) wynika więc, że zmiana energii kinetycznej w wyniku działania siły jest równa $F_x d$. Wobec tego praca W wykonana przez tę siłę nad koralikiem (czyli energia przekazana mu w wyniku działania siły) wynosi

$$W = F_x d. \tag{7.6}$$

Jeśli znamy wartości F_x i d, to z równania tego możemy wyznaczyć pracę W wykonaną przez tę siłę nad koralikiem.



Do obliczenia pracy wykonanej przez siłę nad ciałem w czasie jego przemieszczenia potrzebna jest tylko składowa siły w kierunku przemieszczenia ciała. Składowa siły prostopadła do przemieszczenia nie wykonuje pracy.

Jak widać z rysunku 7.2, składową F_x możemy zapisać jako $F\cos\phi$, gdzie ϕ jest kątem między kierunkami wektorów przemieszczenia $\vec{d}$ i siły $\vec{F}$. Równanie (7.6) możemy zatem zapisać w bardziej ogólnej postaci jako

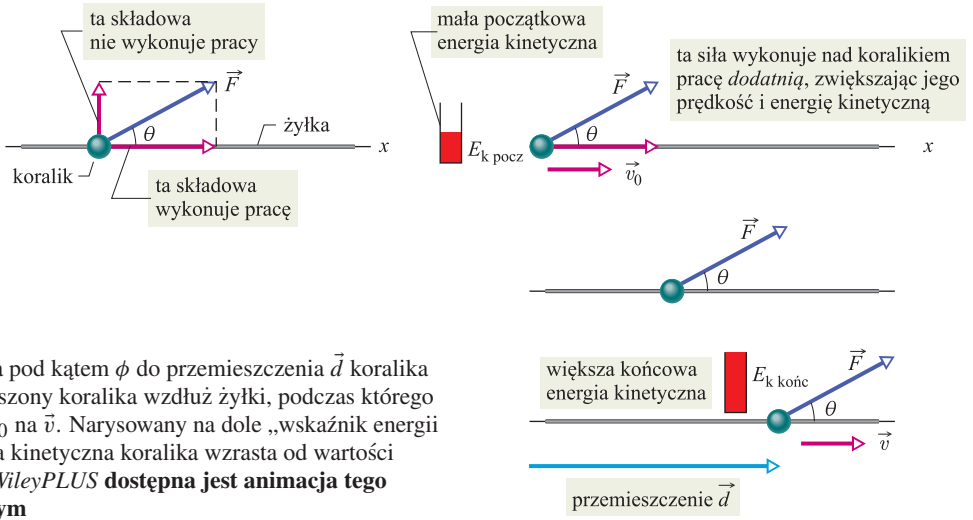
$$W = Fd\cos\phi \qquad \text{(praca wykonana przez siłę stałą).} \tag{7.7}$$

Prawa strona tego wzoru jest równa iloczynowi skalarnemu $\vec{F}\cdot\vec{d}$ (równanie (3.20)), więc możemy go również przedstawić w postaci

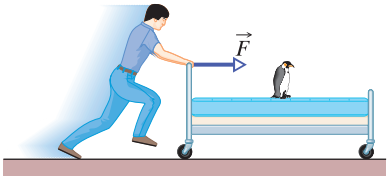
$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} \qquad \text{(praca wykonana przez siłę stałą)} \tag{7.8}$$

(być może warto, abyś w tym miejscu przypomniał sobie właściwości iloczynu skalarnego omówione w podrozdziale 3.3). Równanie (7.8) może być przydatne zwłaszcza wtedy, gdy trzeba obliczyć pracę, mając dane $\vec{F}$ i $\vec{d}$, zapisane za pomocą wektorów jednostkowych.

Uwaga. Możliwość zastosowania wzorów od (7.6) do (7.8) do obliczenia pracy wykonanej nad ciałem przez siłę podlega dwóm ograniczeniom. Po pierwsze, siła musi być *stała*, to znaczy, że w czasie ruchu ciała



Rys. 7.2. Stała siła $\vec{F}$ skierowana pod kątem ϕ do przemieszczenia $\vec{d}$ koralika po żyłce powoduje ruch przyspieszony koralika wzdłuż żyłki, podczas którego prędkość koralika zmienia się z $\vec{v}_0$ na $\vec{v}$. Narysowany na dole „wskaźnik energii kinetycznej" pokazuje, że energia kinetyczna koralika wzrasta od wartości $E_{k\ pocz}$ do $E_{k\ końc}$. **Na stronie *WileyPLUS* dostępna jest animacja tego rysunku z komentarzem słownym**



Rys. 7.3. Uczestnik wyścigu łóżek szpitalnych. Aby obliczyć pracę wykonaną nad łóżkiem i jego pasażerem przez siłę, jaką działa na nie pchający je student, możemy założyć, że łóżko wraz z pasażerem zachowują się jak cząstka

nie może ulegać zmianie ani jej wartość, ani kierunek (przypadkiem siły *zmiennej*, której wartość nie jest stała, zajmiemy się nieco później). Po drugie, ciało musi zachowywać się jak cząstka, to znaczy być *sztywne*, tak że wszystkie jego części poruszają się razem w tym samym kierunku. W tym rozdziale rozważać będziemy tylko ciała tego rodzaju. Ich przykładem może być łóżko z rysunku 7.3 wraz z jego pasażerem.

Znak pracy. Praca wykonana przez siłę nad ciałem może być dodatnia lub ujemna. Jeśli na przykład kąt ϕ w równaniu (7.7) jest mniejszy od 90°, to wartość $\cos\phi$ jest dodatnia, a więc praca jest również dodatnia. Jeśli natomiast kąt ϕ jest większy od 90° (lecz nie większy od 180°), to wartość $\cos\phi$ jest ujemna, a więc praca jest także ujemna (czy zauważyłeś, że praca jest równa zeru, gdy $\phi = 90°$?). Z tych stwierdzeń wynika prosta reguła. Aby określić znak pracy wykonanej przez siłę, należy znaleźć składową wektorową siły w kierunku przemieszczenia ciała.

Praca wykonana przez siłę jest dodatnia, gdy składowa wektorowa siły w kierunku przemieszczenia jest skierowana zgodnie z wektorem przemieszczenia, jest zaś ujemna, gdy ta składowa jest skierowana przeciwnie do wektora przemieszczenia. Praca jest równa zeru, gdy siła nie ma składowej w kierunku przemieszczenia.

Jednostki pracy. Jednostką pracy w układzie SI, tak samo jak energii kinetycznej, jest dżul. Jak widać z równań (7.6) i (7.7) jednostkę tę można również wyrazić jako iloczyn niutona i metra (N · m). Równanie (7.2) możemy zatem wzbogacić o dodatkową zależność

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^2} = 1\ \mathrm{N \cdot m}. \qquad (7.9)$$

Praca całkowita. Jeśli na ciało działają dwie siły lub większa ich liczba, to **całkowita praca** wykonana nad ciałem jest sumą prac wykonanych przez poszczególne siły. Tę łączną pracę możemy obliczyć na dwa sposoby: 1) możemy wyznaczyć prace wykonane przez poszczególne siły i dodać je; 2) możemy najpierw wyznaczyć wypadkową $\vec{F}_{\text{wyp}}$ tych sił, a następnie pracę wykonaną przez tę siłę. W drugim przypadku możemy skorzystać z równania (7.7), w którym zamiast F podstawimy F_{wyp}, a zamiast ϕ — kąt utworzony przez kierunki $\vec{F}_{\text{wyp}}$ i przemieszczenia ciała lub skorzystać z równania (7.8), w którym zamiast $\vec{F}$ podstawimy $\vec{F}_{\text{wyp}}$.

Praca jako zmiana energii kinetycznej

Równanie (7.5) wiąże zmianę energii kinetycznej koralika (z wartości początkowej $E_{\text{k pocz}} = \frac{1}{2}mv_0^2$ na końcową $E_{\text{k końc}} = \frac{1}{2}mv^2$) z pracą W wykonaną nad koralikiem ($= F_x d$). Dla ciał o właściwościach cząstek równanie to można uogólnić. Niech ΔE_{k} będzie zmianą energii kinetycznej ciała, a W — całkowitą pracą wykonaną nad tym ciałem. Mamy zatem związek

$$\Delta E_{\text{k}} = E_{\text{k końc}} - E_{\text{k pocz}} = W, \tag{7.10}$$

który oznacza, że

$$\begin{pmatrix}\text{zmiana energii}\\ \text{kinetycznej cząstki}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{całkowita praca}\\ \text{wykonana nad cząstką}\end{pmatrix}.$$

Związek ten można również zapisać w postaci

$$E_{\text{k końc}} = E_{\text{k pocz}} + W, \tag{7.11}$$

która oznacza, że

$$\begin{pmatrix}\text{energia kinetyczna}\\ \text{po wykonaniu pracy}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{energia kinetyczna}\\ \text{przed wykonaniem pracy}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{całkowita praca}\\ \text{wykonana nad cząstką}\end{pmatrix}.$$

Stwierdzenia te są słuszne zarówno dla pracy dodatniej, jak i ujemnej. Jeśli całkowita praca wykonana nad cząstką jest dodatnia, to energia kinetyczna cząstki wzrasta o wartość tej pracy. Jeśli natomiast całkowita praca wykonana nad cząstką jest ujemna, to energia kinetyczna cząstki maleje o wartość tej pracy.

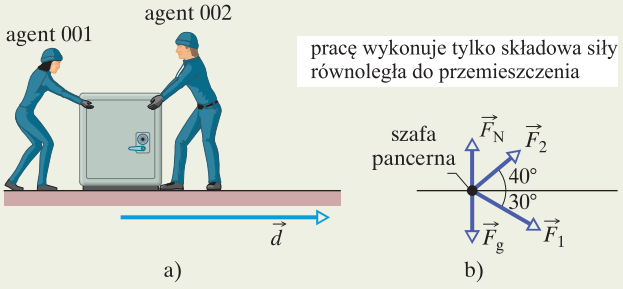
Jeśli na przykład energia kinetyczna cząstki wynosi początkowo 5 J, a w wyniku działania siły cząstka zyskuje 2 J (całkowita praca jest dodatnia), to końcowa energia kinetyczna cząstki wynosi 7 J. Jeśli natomiast w wyniku działania siły cząstka traci 2 J (całkowita praca jest ujemna), to końcowa energia kinetyczna cząstki wynosi 3 J.

Sprawdzian 1

Cząstka porusza się wzdłuż osi x. Czy energia kinetyczna cząstki wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, gdy prędkość cząstki zmieni się: a) z -3 m/s na -2 m/s, b) z -2 m/s na 2 m/s? c) Czy praca wykonana nad cząstką w każdym z tych przypadków jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru?

Przykład 7.02. Praca wykonana przez dwie siły stałe, szpiedzy przemysłowi

Na rysunku 7.4a przedstawiono dwóch szpiegów przemysłowych przesuwających szafę pancerną prosto do swej ciężarówki. Szafa ma masę 225 kg i była początkowo w spoczynku, a jej przemieszczenie $\vec{d}$ do ciężarówki ma wartość 8,5 m. Agent 001 pcha szafę siłą $\vec{F}_1$ o wartości 12 N, skierowaną pod kątem 30° w dół od poziomu, a agent 002 ciągnie ją siłą $\vec{F}_2$ o wartości 10 N, skierowaną pod kątem 40° w górę od poziomu. Szafa porusza się po podłodze bez tarcia, a wartości i kierunki sił, jakimi działają na nią obaj agenci nie zmieniają się podczas ruchu szafy.



Rys. 7.4. a) Dwaj szpiedzy przesuwają szafę pancerną, przemieszczając ją o wektor $\vec{d}$. b) Diagram sił działających na tę szafę

a) Jaką całkowitą pracę nad szafą wykonają siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ podczas jej przemieszczania o wektor $\vec{d}$?

PODSTAWOWE FAKTY

1) Całkowita praca W wykonana nad szafą przez dwie siły jest równa sumie prac wykonanych przez każdą z nich. 2) Szafę możemy potraktować jak cząstkę, a siły są stałe co do wartości i kierunku, dlatego też do obliczenia tych prac możemy zastosować wzór (7.7) ($W = Fd\cos\phi$) lub wzór (7.8) ($W = \vec{F}\cdot\vec{d}$). Wybierzmy wzór (7.7).

Obliczenia: Jak wynika z równania (7.7), praca wykonana przez siłę $\vec{F}_1$ wynosi

$$W_1 = F_1 d\cos\phi_1 = (12\text{ N})(8{,}5\text{ m})(\cos 30°) = 88{,}33\text{ J},$$

a praca wykonana przez siłę $\vec{F}_2$ jest równa

$$W_2 = F_2 d\cos\phi_2 = (10\text{ N})(8{,}5\text{ m})(\cos 40°) = 65{,}11\text{ J}.$$

Całkowita praca W wynosi zatem

$$W = W_1 + W_2 = (88{,}33\text{ J}) + (65{,}11\text{ J}) = 153{,}4\text{ J} \approx 153\text{ J}$$

(odpowiedź).

Tak więc w trakcie przemieszczania szafy pancernej o 8,5 m szpiedzy zwiększyli jej energię kinetyczną o 153 J.

b) Wyznacz pracę W_g wykonaną nad szafą podczas jej przesuwania przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$ oraz pracę W_N wykonaną przez siłę normalną $\vec{F}_N$ działającą na szafę ze strony podłogi.

PODSTAWOWE FAKTY

Obie te siły są stałe co do wartości i kierunku, więc wykonaną przez nie pracę można obliczyć ze wzoru (7.7).

Obliczenia: Wartość siły ciężkości wynosi mg, otrzymujemy więc

$$W_g = mgd\cos 90° = mgd(0) = 0 \quad \text{(odpowiedź)}$$

i podobnie

$$W_N = F_N d\cos 90° = F_N d(0) = 0 \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Takiego wyniku należało się spodziewać. Te dwie siły są prostopadłe do wektora przemieszczenia szafy, a więc wykonują one nad nią zerową pracę, czyli nie dostarczają szafie ani nie odbierają od niej żadnej energii.

c) Szafa jest początkowo w spoczynku. Jaka jest wartość jej prędkości $v_{końc}$ po przemieszczeniu jej o 8,5 m?

PODSTAWOWE FAKTY

Prędkość szafy pancernej ulega zmianie, gdyż w wyniku przekazania jej energii przez siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ zmienia się jej energia kinetyczna.

Obliczenia: Aby otrzymać związek prędkości z pracą, zastosujemy równania (7.10) i (7.1), co daje

$$W = E_{k\,końc} - E_{k\,pocz} = \tfrac{1}{2}mv_{końc}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{pocz}^2.$$

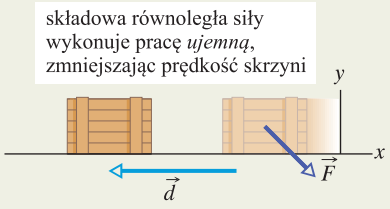
Prędkość początkowa v_{pocz} jest równa zeru, a — jak już wiemy — wykonana została praca równa 153,4 J. Wyznaczając z powyższego równania $v_{końc}$ i podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy

$$v_{końc} = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(153{,}4\text{ J})}{(225\text{ kg})}} = 1{,}17\text{ m/s}$$

(odpowiedź).

Przykład 7.03. Praca wykonana przez stałą siłę, wektory jednostkowe

Podczas burzy skrzynia ślizga się po gładkiej, pokrytej olejem nawierzchni parkingu, doznając przemieszczenia $\vec{d} = (-3\text{ m})\hat{i}$. Przez cały czas towarzyszący burzy wiatr działa na skrzynię siłą $\vec{F} = (2\text{ N})\hat{i} + (-6\text{ N})\hat{j}$. Omawianą sytuację oraz układ współrzędnych przedstawiono na rysunku 7.5.



Rys. 7.5. Stała siła $\vec{F}$ spowalnia ruch skrzyni doznającej przemieszczenia $\vec{d}$

a) Ile wynosi praca wykonana przez siłę wiatru nad skrzynią podczas jej przemieszczania?

PODSTAWOWE FAKTY

Ruch skrzyni można opisać jako ruch cząstki, a siła wiatru jest w czasie ruchu skrzyni stała co do wartości i kierunku, dlatego do obliczenia pracy możemy zastosować wzór (7.7) ($W = Fd\cos\phi$) lub wzór (7.8) ($W = \vec{F}\cdot\vec{d}$). Wybieramy wzór (7.8), gdyż wektory $\vec{F}$ i $\vec{d}$ zapisane są przy użyciu wektorów jednostkowych.

Obliczenia: Otrzymujemy

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = [(2\text{ N})\hat{i} + (-6\text{ N})\hat{j}]\cdot[(-3\text{ m})\hat{i}].$$

Jedynie następujące iloczyny skalarne wektorów jednostkowych są różne od zera: $\hat{i}\cdot\hat{i}$, $\hat{j}\cdot\hat{j}$ oraz $\hat{k}\cdot\hat{k}$ (patrz dodatek E). Wobec tego mamy

$$W = (2\text{ N})(-3\text{ m})\hat{i}\cdot\hat{i} + (-6\text{ N})(-3\text{ m})\hat{j}\cdot\hat{i}$$
$$= (-6\text{ J})(1) + 0 = -6\text{ J} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Tak więc siła wiatru wykonała nad skrzynią pracę ujemną o wartości 6 J, czyli zmniejszyła energię kinetyczną skrzyni o 6 J.

b) Ile wynosiła energia kinetyczna skrzyni po przemieszczeniu jej o $\vec{d}$, jeśli na początku ruchu była ona równa 10 J?

PODSTAWOWE FAKTY

Siła wiatru wykonała nad skrzynią pracę ujemną, a zatem zmniejszyła jej energię kinetyczną.

Obliczenia: Korzystając ze związku pracy ze zmianą energii kinetycznej w postaci wzoru (7.11), mamy:

$$E_{\text{k końc}} = E_{\text{k pocz}} + W = (10\text{ J}) + (-6\text{ J}) = 4\text{ J} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Energia kinetyczna skrzyni zmniejszyła się do wartości 4 J, a zatem ruch skrzyni został spowolniony.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

7.3. PRACA WYKONANA PRZEZ SIŁĘ CIĘŻKOŚCI

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

7.07 obliczyć pracę wykonaną przez siłę ciężkości, gdy ciało jest podnoszone lub opuszczane;

7.08 zastosować związek pracy ze zmianą energii kinetycznej, gdy ciało jest podnoszone lub opuszczane.

Podstawowe fakty

- Praca W_g wykonana przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$ nad ciałem o masie m przy jego przemieszczeniu o $\vec{d}$ wynosi

$$W_g = mgd\cos\phi,$$

gdzie ϕ jest kątem tworzonym przez wektory $\vec{F}_g$ i $\vec{d}$.

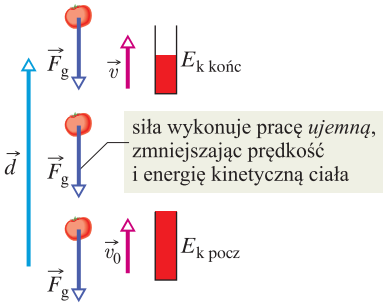
- Praca W_{zewn} wykonana przez siłę zewnętrzną nad ciałem podnoszonym lub opuszczanym jest związana z pracą W_g wykonaną przez siłę ciężkości i zmianą energii kinetycznej ciała ΔE_k równaniem

$$\Delta E_k = E_{k\text{ końc}} - E_{k\text{ pocz}} = W_{\text{zewn}} + W_g.$$

Jeśli $E_{k\text{ końc}} = E_{k\text{ pocz}}$, to powyższe równanie sprowadza się do zależności

$$W_{\text{zewn}} = -W_g,$$

co oznacza, że siła zewnętrzna dostarcza ciału tyle energii, ile siła ciężkości od niego odbiera.



Rys. 7.6. Pomidor o masie m, rzucony w górę z prędkością początkową $\vec{v}_0$, zwalnia do prędkości $\vec{v}$, doznając przemieszczenia $\vec{d}$, ponieważ działa na niego siła ciężkości $\vec{F}_g$. Wskaźnik energii kinetycznej pokazuje zmianę energii kinetycznej ciała od wartości $E_{k\,pocz}$ $(= \frac{1}{2}mv_0^2)$ do $E_{k\,końc}$ $(= \frac{1}{2}mv^2)$

Praca wykonana przez siłę ciężkości

Rozpatrzymy teraz przypadek, gdy praca jest wykonana nad ciałem przez działającą na nie siłę ciężkości. Na rysunku 7.6 przedstawiono pomidora o masie m, rzuconego w górę z prędkością początkową v_0, a więc mającego początkowo energię kinetyczną $E_{k\,pocz} = \frac{1}{2}mv_0^2$. Gdy pomidor wznosi się, jego ruch jest spowalniany przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$, tzn. jego energia kinetyczna maleje, gdyż siła ciężkości wykonuje nad nim pracę.

Załóżmy, że możemy potraktować pomidora jako cząstkę i do wyznaczenia pracy wykonanej podczas przemieszczenia $\vec{d}$ skorzystajmy z równania (7.7) $(W = Fd\cos\phi)$. Zamiast wartości siły F podstawiamy wartość siły $\vec{F}_g$, tzn. mg. Zatem praca W_g wykonana przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$ wynosi

$$W_g = mgd\cos\phi \qquad \text{(praca wykonana przez siłę ciężkości).} \qquad (7.12)$$

Gdy ciało się wznosi, siła $\vec{F}_g$ jest skierowana przeciwnie do przemieszczenia $\vec{d}$ ciała, co widać na rysunku 7.6. Zatem w tym przypadku $\phi = 180°$, czyli

$$W_g = mgd\cos 180° = mgd(-1) = -mgd. \qquad (7.13)$$

Znak minus oznacza, że podczas wznoszenia się ciała działająca na nie siła ciężkości zmniejsza jego energię kinetyczną o mgd. Jest to zgodne z obserwacją, gdyż w czasie ruchu w górę ciało zwalnia.

Po wzniesieniu się na największą wysokość ciało zaczyna spadać. Kąt między kierunkami $\vec{F}_g$ i $\vec{d}$ jest wówczas równy zeru. Zatem

$$W_g = mgd\cos 0° = mgd(+1) = +mgd. \qquad (7.14)$$

Znak plus oznacza, że teraz siła ciężkości zwiększa energię kinetyczną ciała o mgd. Jest to zgodne z obserwacją, gdyż podczas spadku ciało przyspiesza.

Praca wykonana przy podnoszeniu i opuszczaniu ciała

Załóżmy teraz, że podnosimy ciało, przykładając do niego pionowo siłę $\vec{F}$. Podczas przemieszczania ciała w górę siła zewnętrzna wykonuje nad ciałem pracę dodatnią W_{zewn}, a siła ciężkości wykonuje nad nim pracę ujemną W_g. Siła zewnętrzna zwiększa zatem energię kinetyczną ciała, a siła ciężkości ją zmniejsza. Zgodnie z równaniem (7.10) zmiana energii kinetycznej ciała znajdującego się pod działaniem tych dwóch sił wynosi

$$\Delta E_k = E_{k\,końc} - E_{k\,pocz} = W_{zewn} + W_g, \qquad (7.15)$$

przy czym $E_{k\,końc}$ jest energią kinetyczną na końcu przemieszczenia ciała, a $E_{k\,pocz}$ — energią kinetyczną na początku. Równanie to jest słuszne także w przypadku opuszczania ciała, z tym, że wtedy siła ciężkości *zwiększa* energię kinetyczną ciała, a siła zewnętrzna ją *zmniejsza*.

Często spotykany przypadek szczególny to sytuacja, w której ciało spoczywa przed i po jego podniesieniu — na przykład gdy podnosisz książkę z podłogi na półkę. Wtedy zarówno $E_{k\,końc}$, jak i $E_{k\,pocz}$ wynoszą zero i równanie (7.15) upraszcza się do postaci

$$W_{zewn} + W_g = 0,$$

czyli

$$W_{\text{zewn}} = -W_{\text{g}}. \tag{7.16}$$

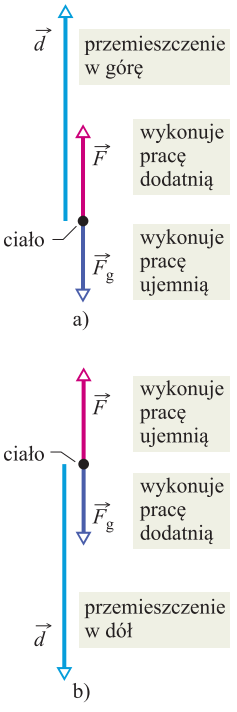
Zauważ, że taki sam wynik otrzymalibyśmy, zakładając, iż wartości $E_{\text{k końc}}$ i $E_{\text{k pocz}}$ są różne od zera, lecz nadal równe sobie. W obydwu przypadkach praca wykonana przez siłę zewnętrzną jest przeciwna do pracy wykonanej przez siłę ciężkości. Innymi słowy, siła zewnętrzna dostarcza ciału tyle energii, ile siła ciężkości od niego odbiera. Korzystając ze wzoru (7.12), możemy zapisać równanie (7.16) w postaci

$$W_{\text{zewn}} = -mgd\cos\phi$$

$$\text{(praca przy podniesieniu i opuszczeniu; } E_{\text{k końc}} = E_{\text{k pocz}}\text{)}, \tag{7.17}$$

przy czym ϕ jest kątem między wektorami $\vec{F}_{\text{g}}$ i $\vec{d}$. Jeśli przemieszczenie ciała jest skierowane pionowo w górę (rys. 7.7a), to $\phi = 180°$ i praca wykonana przez siłę zewnętrzną wynosi mgd. Jeśli natomiast przemieszczenie ciała jest skierowane pionowo w dół (rys. 7.7b), to $\phi = 0°$ i praca wykonana przez siłę zewnętrzną jest równa $-mgd$.

Równania (7.16) i (7.17) opisują każdy przypadek podnoszenia lub opuszczania ciała, w którym ciało spoczywa przed i po zmianie wysokości. Nie występuje w nich wartość stosowanej siły. Na przykład, gdy podnosisz kubek nad głowę, siła przykładana przez ciebie do kubka znacznie się zmienia w czasie jego ruchu w górę. Niemniej jednak, kubek pozostaje w spoczynku na początku i na końcu ruchu, zatem wykonana przez ciebie praca jest dana wzorami (7.16) i (7.17), przy czym w ostatnim z nich mg jest ciężarem podnoszonego ciała, a d — wysokością, na jaką zostało ono podniesione.



Rys. 7.7. a) Podnosimy ciało, działając siłą zewnętrzną $\vec{F}$. Przemieszczenie $\vec{d}$ ciała tworzy z działającą na ciało siłą ciężkości $\vec{F}_{\text{g}}$ kąt $\phi = 180°$. Siła zewnętrzna wykonuje nad ciałem pracę dodatnią. b) Opuszczamy ciało, działając siłą zewnętrzną $\vec{F}$. Przemieszczenie $\vec{d}$ ciała tworzy z siłą ciężkości $\vec{F}_{\text{g}}$ kąt $\phi = 0°$. Siła zewnętrzna wykonuje nad ciałem pracę ujemną

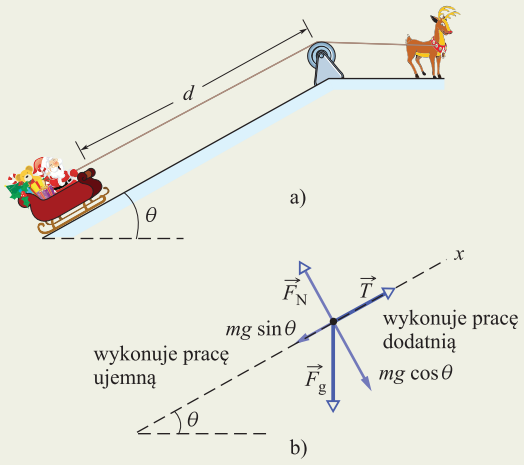
Przykład 7.04. Praca przy wciąganiu sań na zaśnieżone wzgórze

To zadanie dotyczy ruchu po równi pochyłej, lecz i początkowo, i na końcu rozważanego przedziału czasu ciało jest nieruchome, a zatem — co ważne — całkowita zmiana jego energii kinetycznej jest równa zeru. Spójrzmy na rysunek 7.8a. Sanie (które mogą ci się wydać znajome) o masie 200 kg (wraz z ich zawartością) są wciągane za pomocą liny po równi nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 30°$ na drodze $d = 20$ m. Zaśnieżony stok jest tak śliski, że można uznać, iż ruch zachodzi bez tarcia. Jaka praca zostaje wykonana przez każdą z sił działających na sanie?

PODSTAWOWE FAKTY

1) Podczas ruchu sań działające na nie siły są stałe co do wartości i kierunku, więc pracę możemy dla każdej z nich obliczyć ze wzoru (7.7) ($W = Fd\cos\phi$), w którym ϕ jest kątem między wektorami siły i przemieszczenia. Taki sam wynik otrzymamy, stosując wzór (7.8) ($W = \vec{F}\cdot\vec{d}$), w którym występuje iloczyn skalarny wektorów siły i przemieszczenia. 2) Całkowitą pracę wykonaną przez wszystkie siły możemy powiązać ze zmianą energii kinetycznej ciała (lub jej niezmiennością, jak w tym zadaniu), korzystając z równości pracy i zmiany energii kinetycznej ($\Delta E_{\text{k}} = W$), czyli równania (7.10).

Obliczenia: Pierwszą rzeczą, jaką prawie zawsze należy zrobić, gdy zadanie dotyczy sił, jest narysowanie diagramu sił, który ułatwi nam właściwy ogląd sytuacji. Na rysunku 7.8b mamy diagram sił działających na sanie, zawierający siłę ciężkości $\vec{F}_{\text{g}}$, siłę $\vec{T}$, jaką działa



Rys. 7.8. a) Sanie są wciągane bez tarcia po zaśnieżonym stoku. b) Diagram sił działających na sanie

na sanie lina i siłę normalną $\vec{F}_N$, jaką działa na sanie stok.

Praca W_N wykonana przez siłę normalną. Zacznijmy od tego, co najłatwiejsze. Siła normalna jest prostopadła do stoku, a więc i do przemieszczenia sań. Siła ta nie wpływa zatem na ruch sań i nie wykonuje pracy. Skorzystanie z równania (7.7) daje

$$W_N = F_N d \cos 90^\circ = 0 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Praca W_g wykonana przez siłę ciężkości. Pracę wykonaną przez siłę ciężkości można wyznaczyć na dwa sposoby (zdecyduj sam, który z nich bardziej do ciebie przemawia). Z wcześniejszych rozważań nad równią pochyłą (patrz przykład 5.04 i rysunek 5.15) wiemy, że składowa siły ciężkości skierowana wzdłuż równi ma wartość $mg \sin\theta$ i kierunek w dół równi. Wartość tej składowej wynosi zatem

$$\begin{aligned} F_{gx} &= mg \sin\theta = (200\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)\sin 30^\circ \\ &= 980\text{ N}. \end{aligned}$$

Kąt ϕ między przemieszczeniem sań a tą składową siły jest równy 180°. Z równania (7.7) dostajemy więc

$$\begin{aligned} W_g &= F_{gx} d \cos 180^\circ \\ &= (980\text{ N})(20\text{ m})(-1) \\ &= -1{,}96 \cdot 10^4\text{ J} \qquad \text{(odpowiedź)}. \end{aligned}$$

Ujemna wartość otrzymanej pracy oznacza, że siła ciężkości odbiera energię od sań.

Drugi, równoważny powyższemu, sposób otrzymania tego wyniku, polega na wykorzystaniu całego wektora siły ciężkości $\vec{F}_g$, a nie jej składowej. Kąt między wektorami $\vec{F}_g$ i $\vec{d}$ wynosi 30° (nachylenie stoku) plus 90°, czyli 120°, wobec czego z równania (7.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} W_g &= F_g d \cos 120^\circ = mgd \cos 120^\circ \\ &= (200\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(20\text{ m})\cos 120^\circ \\ &= -1{,}96 \cdot 10^4\text{ J} \qquad \text{(odpowiedź)}. \end{aligned}$$

Praca W_T wykonana przez siłę $\vec{T}$. Tu znów mamy dwa sposoby obliczenia pracy. Szybszy z nich to wykorzystanie równania (7.10) ($\Delta E_k = W$), w którym całkowita praca W to suma przyczynków od wszystkich sił, czyli $W_N + W_g + W_T$, a zmiana energii kinetycznej ΔE_k jest równa zeru (bo początkowa i końcowa wartość energii kinetycznej jest taka sama, równa zeru). Wobec tego z równania (7.10) dostajemy

$$0 = W_N + W_g + W_T = 0 - 1{,}96 \cdot 10^4\text{ J} + W_T,$$

a zatem

$$W_T = 1{,}96 \cdot 10^4\text{ J} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Innym sposobem wyznaczenia tej pracy jest wykorzystanie drugiej zasady dynamiki dla ruchu wzdłuż osi x, co pozwala wyznaczyć wartość T siły $\vec{T}$. Zakładając, że przyspieszenie sań wzdłuż równi jest równe zeru (poza małymi przedziałami czasu, w których sanie ruszają i się zatrzymują), dostajemy

$$F_{wyp,x} = ma_x,$$

czyli

$$T - mg \sin 30^\circ = m(0),$$

wobec czego

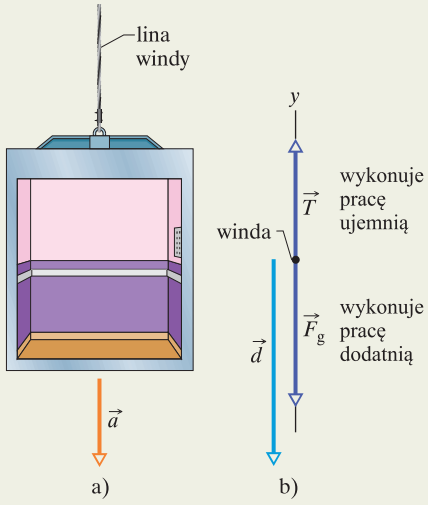
$$T = mg \sin 30^\circ.$$

Taka jest wartość siły. Ponieważ i wektor siły, i wektor przemieszczenia są skierowane wzdłuż równi w górę, kąt między nimi jest równy zeru. Wobec tego z równania (7.7) wyznaczamy pracę wykonaną przez siłę działającą na sanie ze strony liny:

$$\begin{aligned} W_T &= Td \cos 0^\circ = (mg \sin 30^\circ) d \cos 0^\circ \\ &= (200\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(\sin 30^\circ)(20\text{ m})\cos 0^\circ \\ &= 1{,}96 \cdot 10^4\text{ J} \qquad \text{(odpowiedź)}. \end{aligned}$$

Przykład 7.05. Praca przy ruchu przyspieszonym windy

Winda o masie $m = 500$ kg jedzie w dół z prędkością $v_{\text{pocz}} = 4$ m/s, gdy nagle podtrzymująca ją lina zaczyna ześlizgiwać się z bębna, w wyniku czego winda zaczyna spadać ze stałym przyspieszeniem $\vec{a} = \vec{g}/5$ (rys. 7.9a).



Rys. 7.9. Winda jadąca w dół z prędkością v_{pocz} zaczyna nagle przyspieszać. a) Poruszając się ze stałym przyspieszeniem $\vec{a} = \vec{g}/5$ doznaje ona przemieszczenia $\vec{d}$. b) Wektor przemieszczenia windy oraz diagram działających na nią sił

a) Jaka praca W_g została wykonana nad windą przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$ podczas spadku windy na drodze $d = 12$ m?

PODSTAWOWE FAKTY

Możemy potraktować windę jako cząstkę i do obliczenia pracy W_g zastosować równanie (7.12) ($W_g = mgd\cos\phi$).

Obliczenia: Jak pokazano na rysunku 7.9b, kąt między kierunkami siły $\vec{F}_g$ i przemieszczenia $\vec{d}$ windy wynosi 0°. Wobec tego

$$W_g = mgd\cos 0^\circ = (500\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(12\text{ m})(1)$$
$$= 5{,}88\cdot 10^4\text{ J} \approx 59\text{ kJ} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Ile wynosi praca W_T wykonana nad windą podczas jej spadku na drodze 12 m przez siłę $\vec{T}$, jaką lina windy ciągnie windę w górę?

PODSTAWOWE FAKTY

Pracę W_T wyznaczymy ze wzoru (7.7) ($W = Fd\cos\phi$), korzystając najpierw z drugiej zasady dynamiki Newtona, zapisanej dla składowych wzdłuż osi y z rysunku 7.9b ($F_{\text{wyp},y} = ma_y$).

Obliczenia: Dostajemy

$$T - F_g = ma. \qquad (7.18)$$

Wyznaczając z tego równania T, podstawiając mg zamiast F_g i wstawiając wynik do równania (7.7), otrzymujemy

$$W_T = Td\cos\phi = m(a+g)d\cos\phi. \qquad (7.19)$$

Następnie zamiast a podstawiamy $-g/5$ (przyspieszenie jest skierowane w dół), a zamiast ϕ — kąt między kierunkami sił $\vec{T}$ i $m\vec{g}$, czyli 180°. Daje to

$$W_T = m\left(-\frac{g}{5} + g\right)d\cos\phi = \frac{4}{5}mgd\cos\phi$$
$$= \frac{4}{5}(500\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(12\text{ m})\cos 180^\circ$$
$$= -4{,}7\cdot 10^4\text{ J} = -47\text{ kJ} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Uwaga: Zauważ, że wartość W_T nie jest po prostu przeciwna do wartości W_g. Jest tak dlatego, że winda spada ruchem przyspieszonym, a zatem zmienia się jej prędkość, czyli jej energia kinetyczna też ulega zmianie. Równanie (7.16) odnoszące się do przypadku, gdy wartość energii kinetycznej na początku i na końcu ruchu jest taka sama, *nie ma* więc tutaj zastosowania.

c) Ile wynosi całkowita praca W wykonana nad windą podczas jej spadku?

Obliczenia: Praca całkowita jest sumą prac wykonanych przez wszystkie siły działające na windę, czyli:

$$W = W_g + W_T = (5{,}88\cdot 10^4\text{ J}) - (4{,}7\cdot 10^4\text{ J})$$
$$= 1{,}18\cdot 10^4\text{ J} \approx 12\text{ kJ} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

d) Ile wynosi energia kinetyczna windy pod koniec jej spadku z wysokości 12 m?

PODSTAWOWE FAKTY

Energia kinetyczna windy zmienia się *dlatego*, że sumarycznie nad windą wykonywana jest praca, co wynika z równania (7.11) ($E_{\text{k końc}} = E_{\text{k pocz}} + W$).

Obliczenia: Energia kinetyczna windy na początku spadku wynosi — na podstawie równania (7.1) — $E_{\text{k pocz}} = \frac{1}{2}mv_{\text{pocz}}^2$. Równanie (7.11) daje zatem

$$\begin{aligned} E_{\text{k końc}} &= E_{\text{k pocz}} + W = \tfrac{1}{2}mv_{\text{pocz}}^2 + W \\ &= \tfrac{1}{2}(500\text{ kg})(4\text{ m/s})^2 + (1{,}18 \cdot 10^4\text{ J}) \\ &= 1{,}58 \cdot 10^4\text{ J} \approx 16\text{ kJ} \qquad \text{(odpowiedź).} \end{aligned}$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

7.4. PRACA WYKONANA PRZEZ SIŁĘ SPRĘŻYSTOŚCI

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

7.09 zastosować prawo Hooke'a, czyli związek siły sprężystości z wydłużeniem lub skróceniem sprężyny i jej stałą siłową;

7.10 wyjaśnić, że siła sprężystości to siła zmienna;

7.11 wyznaczyć pracę wykonaną nad ciałem przez siłę sprężystości, obliczając całkę z siły od początkowego do końcowego położenia ciała;

7.12 wyznaczyć pracę, wykonując całkowanie graficzne na wykresie siły jako funkcji położenia ciała;

7.13 zastosować związek pracy ze zmianą energii kinetycznej w przypadku, gdy ruch ciała zachodzi pod wpływem siły sprężystości.

Podstawowe fakty

- Siła sprężystości jest dana zależnością

$$\vec{F}_{\text{s}} = -k\vec{d} \qquad \text{(prawo Hooke'a),}$$

gdzie $\vec{d}$ jest przemieszczeniem swobodnego końca sprężyny, od jego położenia dla sprężyny nieodkształconej (tzn. ani nierozciągniętej, ani nieściśniętej), a k jej stałą sprężystości (stałą siłową), czyli miarą sztywności sprężyny. Jeśli oś x jest równoległa do długości sprężyny, a jej początkiem ($x = 0$) jest położenie swobodnego końca sprężyny nieodkształconej, to prawo Hooke'a przybiera postać

$$F_x = -kx \qquad \text{(prawo Hooke'a).}$$

- Siła sprężystości jest zatem siłą zmienną — jej wartość i kierunek zależą od położenia swobodnego końca sprężyny.
- Praca W_{s} wykonana przez siłę sprężystości nad ciałem przymocowanym do swobodnego końca sprężyny przy zmianie położenia ciała od x_{pocz} do $x_{\text{końc}}$ wynosi

$$W_{\text{s}} = \tfrac{1}{2}kx_{\text{pocz}}^2 - \tfrac{1}{2}kx_{\text{końc}}^2.$$

Jeśli $x_{\text{pocz}} = 0$, a $x_{\text{końc}} = x$, to powyższe równanie przybiera postać

$$W_{\text{s}} = -\tfrac{1}{2}kx^2.$$

Praca wykonana przez siłę sprężystości

Obecnie zajmiemy się pracą wykonaną nad ciałem o właściwościach cząstki, przez pewną szczególną *siłę zmienną*, mianowicie przez **siłę sprężystości**, jaką działa na ciało sprężyna. Wiele sił występujących w przyrodzie można opisać matematycznie tak samo, jak siłę sprężystości. Wobec tego analiza tej jednej siły umożliwi nam zrozumienie właściwości wielu innych.

Siła sprężystości

Na rysunku 7.10a przedstawiono sprężynę w *stanie nieodkształconym*, co oznacza, że nie jest ona ani ściśnięta, ani rozciągnięta. Jeden jej koniec jest

zamocowany, a do drugiego, swobodnego końca, przymocowane jest ciało o właściwościach cząstki, powiedzmy klocek. Jeśli rozciągniemy sprężynę, pociągając klocek w prawo, jak na rysunku 7.10b, to sprężyna będzie działać na klocek siłą skierowaną w lewo (ponieważ siła sprężystości dąży do przywrócenia stanu nieodkształconego sprężyny, nazywa się ją czasem *siłą zwrotną*). Jeśli ściśniemy sprężynę, pchając klocek w lewo, jak na rysunku 7.10c, to sprężyna będzie działać na klocek siłą skierowaną w prawo.

Dla wielu sprężyn można z dobrym przybliżeniem przyjąć, że siła $\vec{F}_s$, jaką działa sprężyna, jest proporcjonalna do przemieszczenia $\vec{d}$ swobodnego końca sprężyny od jego położenia dla sprężyny nieodkształconej. *Siła sprężystości* jest zatem dana zależnością

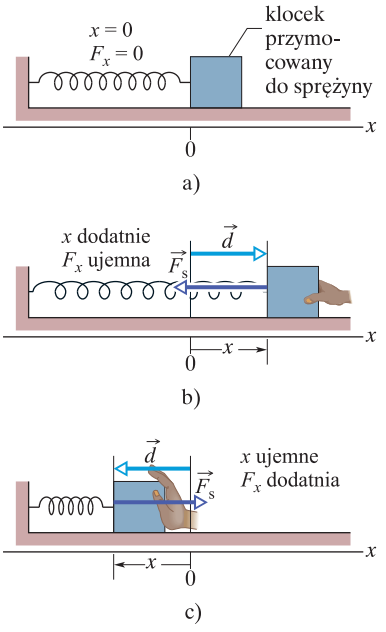
$$\vec{F}_s = -k\vec{d} \qquad \text{(prawo Hooke'a)}, \qquad (7.20)$$

znaną jako **prawo Hooke'a**, biorące swoją nazwę od nazwiska Roberta Hooke'a, uczonego angielskiego z końca XVII wieku. Znak minus w równaniu (7.20) wskazuje na to, że siła sprężystości jest zawsze skierowana przeciwnie do przemieszczenia swobodnego końca sprężyny. Stała k, nazywana **stałą sprężystości** (lub **stałą siłową**), jest miarą sztywności sprężyny. Im większa jest wartość k, tym sprężyna jest sztywniejsza, tzn. tym większą działa siłą przy takim samym przemieszczeniu jej końca. Jednostką stałej sprężystości k w układzie SI jest niuton na metr.

Na rysunku 7.10 wybrano oś x równoległą do długości sprężyny, a za jej początek ($x = 0$) przyjęto położenie swobodnego końca sprężyny nieodkształconej. W takiej standardowej sytuacji równanie (7.20) przybiera postać

$$F_x = -kx \qquad \text{(prawo Hooke'a)}. \qquad (7.21)$$

Jeśli współrzędna x jest dodatnia (tzn. sprężyna jest rozciągnięta wzdłuż osi x w prawo), to F jest ujemna (tzn. siła sprężystości działa w lewo). Jeśli natomiast współrzędna x jest ujemna (tzn. sprężyna jest ściśnięta w lewo), to F jest dodatnia (tzn. siła sprężystości działa w prawo). Zauważ, że siła sprężystości jest *siłą zmienną*, gdyż jej wielkość i kierunek zależą od położenia x swobodnego końca sprężyny; F_x powinniśmy właściwie zapisać jako $F(x)$. Zwróć także uwagę na to, że prawo Hooke'a daje zależność *liniową* F_x od x.



Rys. 7.10. a) Sprężyna nieodkształcona. Jako początek osi x wybieramy położenie tego końca sprężyny, do którego przymocowany jest klocek. b) Przemieszczamy klocek o $\vec{d}$, przy czym sprężyna zostaje rozciągnięta o x (dodatnie). Zwróć uwagę na siłę zwrotną $\vec{F}_s$, jaką sprężyna działa na klocek. c) Sprężyna zostaje ściśnięta o x (ujemne). Zwróć i tu uwagę na siłę zwrotną

Praca wykonana przez siłę sprężystości

Aby znaleźć wyrażenie na pracę wykonaną przez siłę sprężystości podczas ruchu klocka z rysunku 7.10a, poczynimy dwa założenia upraszczające, dotyczące sprężyny. 1) Założymy, że sprężyna ma znikomo małą masę w stosunku do masy klocka. 2) Przyjmiemy, że jest to *sprężyna doskonała*, to znaczy prawo Hooke'a jest dla niej spełnione dokładnie. Założymy ponadto, że klocek porusza się po podłożu bez tarcia, a także, że może on być traktowany jak cząstka.

Pchnijmy gwałtownie klocek w prawo, aby wprawić go w ruch i usuńmy działającą na niego siłę zewnętrzną. Gdy klocek porusza się w prawo, siła sprężystości $\vec{F}_x$ wykonuje nad nim pracę i zmniejsza jego energię kinetyczną, a więc spowalnia jego ruch. Do obliczenia tej pracy *nie możemy*

jednak zastosować równania (7.7) ($W = Fd\cos\phi$), ponieważ jest ono spełnione tylko dla siły stałej, a siła sprężystości jest siłą zmienną — jej wartość się zmienia, gdy klocek rozciąga sprężynę.

Aby pokonać tę trudność, postąpimy następująco: 1) Podzielimy przemieszczenie klocka na wiele małych odcinków, tak małych, że na każdym z nich zmianę F można pominąć. 2) Na każdym małym odcinku siła jest (w przybliżeniu) stała, dlatego na każdym z nich *możemy* obliczyć pracę ze wzoru (7.7). 3) Dodając do siebie prace wykonane na każdym z tych odcinków, wyznaczymy pracę całkowitą. Taki jest plan, ale nie mamy przecież ochoty spędzić kilku dni na dodawaniu wielu małych prac, zwłaszcza że wynik byłby i tak przybliżony. Podzielmy zatem przemieszczenie na odcinki *infinitezymalne* („nieskończenie małe") tak, by niedokładność wyznaczenia każdej małej pracy dążyła do zera, i na koniec dodajmy do siebie te prace nie ręcznie, lecz korzystając z całkowania. Wykorzystanie rachunku całkowego pozwoli nam obliczyć w kilka minut to, co inaczej zajęłoby nam kilka dni.

Oznaczmy położenie początkowe klocka przez x_{pocz}, a jego położenie końcowe przez $x_{\text{końc}}$. Podzielmy odcinek między tymi położeniami na wiele małych odcinków, każdy o długości Δx. Oznaczmy te odcinki, licząc od x_{pocz}, jako odcinek 1, 2 itd. Gdy klocek przebywa taki mały odcinek, siła sprężystości jest prawie stała, gdyż odcinek jest tak krótki, że x prawie się nie zmienia. Możemy więc przyjąć w przybliżeniu, że wartość siły jest stała na takim małym odcinku. Oznaczmy te wartości jako F_{x1} na odcinku 1, F_{x2} na odcinku 2 itd.

Na każdym małym odcinku siła jest stała, dlatego na każdym z nich *możemy* obliczyć pracę ze wzoru (7.7). W naszym przypadku $\phi = 180°$, a zatem $\cos\phi = -1$. Tak więc praca wykonana na odcinku 1 jest równa $-F_{x1}\Delta x$, na odcinku 2 — $-F_{x2}\Delta x$ itd. Całkowita praca W_{s} wykonana przez sprężynę na odcinku od x_{pocz} do $x_{\text{końc}}$ jest sumą tych prac:

$$W_{\text{s}} = \sum(-F_{xj}\Delta x), \tag{7.22}$$

przy czym wskaźnik j numeruje małe odcinki. W granicy, przy Δx dążącym do zera, równanie (7.22) przechodzi w

$$W_{\text{s}} = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} (-F_x)\mathrm{d}x. \tag{7.23}$$

Podstawiając do tego równania wyrażenie na wartość siły F_x ze wzoru (7.21), czyli kx, otrzymujemy

$$W_{\text{s}} = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} (-kx)\mathrm{d}x = -k\int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} x\,\mathrm{d}x = (-\tfrac{1}{2}k)\left[x^2\right]_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}}$$
$$= (-\tfrac{1}{2}k)(x_{\text{końc}}^2 - x_{\text{pocz}}^2). \tag{7.24}$$

Po wykonaniu mnożenia dostajemy

$$W_{\text{s}} = \tfrac{1}{2}kx_{\text{pocz}}^2 - \tfrac{1}{2}kx_{\text{końc}}^2 \qquad \text{(praca wykonana przez siłę sprężystości).} \tag{7.25}$$

Praca W_s wykonana przez siłę sprężystości może być dodatnia lub ujemna, w zależności od tego, czy przy ruchu klocka z x_{pocz} do $x_{końc}$ energia zostaje *sumarycznie* przekazana klockowi, czy też od niego odebrana. *Uwaga*: położenie końcowe $x_{końc}$ występuje w *drugim* wyrazie po prawej stronie równania (7.25). Wniosek z tego jest następujący:



Praca W_s jest dodatnia, gdy położenie końcowe klocka jest bliższe końca sprężyny nieodkształconej ($x = 0$) niż jego położenie początkowe. Gdy położenie końcowe klocka jest dalsze punktu $x = 0$, wtedy jest ona ujemna. Praca ta jest równa zeru, gdy położenia końcowe i początkowe klocka są jednakowo odległe od punktu $x = 0$.

Jeśli $x_{pocz} = 0$, a położenie końcowe oznaczymy przez x, to równanie (7.25) przybiera postać

$$W_s = -\tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(praca wykonana przez siłę sprężystości).} \tag{7.26}$$

Praca wykonana przez siłę zewnętrzną

Załóżmy obecnie, że przemieszczamy klocek wzdłuż osi x, działając na niego przez cały czas siłą $\vec{F}_{zewn}$. Podczas ruchu klocka siła ta wykonuje nad klockiem pracę W_{zewn}, a siła sprężystości — pracę W_s. Zgodnie z równaniem (7.10) zmiana energii kinetycznej klocka pochodząca od tych dwóch prac wynosi

$$\Delta E_k = E_{k\,końc} - E_{k\,pocz} = W_{zewn} + W_s, \tag{7.27}$$

przy czym $E_{k\,końc}$ jest energią kinetyczną na końcu przemieszczenia klocka, a $E_{k\,pocz}$ — na jego początku. Jeśli na początku i na końcu przemieszczenia zarówno $E_{k\,końc}$, jak i $E_{k\,pocz}$ są równe zeru, to równanie (7.27) upraszcza się do postaci

$$W_{zewn} = -W_s. \tag{7.28}$$



Jeśli klocek przymocowany do sprężyny jest w spoczynku na początku i na końcu przemieszczenia, to praca wykonana nad klockiem podczas jego ruchu przez siłę zewnętrzną jest przeciwna do pracy wykonanej nad nim przez siłę sprężystości.

Uwaga: Jeśli klocek nie spoczywa na początku lub na końcu przemieszczenia, to stwierdzenie powyższe *nie jest* prawdziwe.



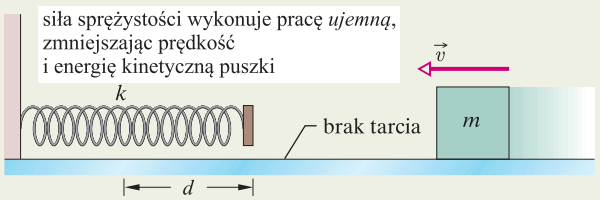
Sprawdzian 2

W trzech przypadkach położenia początkowe i końcowe klocka z rysunku 7.10 wzdłuż osi x, wynoszą: a) -3 cm i 2 cm, b) 2 cm i 3 cm, c) -2 cm i 2 cm. Czy w poszczególnych przypadkach praca wykonana nad klockiem przez siłę sprężystości jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru?

Przykład 7.06. Praca siły sprężystości jako zmiana energii kinetycznej

Gdy pracę nad ciałem wykonuje siła sprężystości, *nie możemy* wyznaczyć pracy jako iloczynu siły i przemieszczenia, bo nie ma jednej wartości siły — wartość siły się zmienia. Możemy jednak podzielić przemieszczenie na nieskończenie wiele małych odcinków, na każdym z których siła jest w przybliżeniu stała. Obliczenie sumy tych wielu małych prac to całkowanie. W tym zadaniu skorzystamy z tego, że znamy wynik całkowania (równanie (7.24)).

Na rysunku 7.11 przedstawiono puszkę kminku o masie 0,4 kg, ślizgającą się bez tarcia po poziomej ladzie z prędkością $v = 0{,}5$ m/s. W pewnej chwili wpada ona na swobodny koniec sprężyny o stałej sprężystości $k = 750$ N/m, w wyniku czego sprężyna jest ściskana. O jaki odcinek d będzie skrócona sprężyna w chwili, gdy puszka zwolni do prędkości równej zeru?



Rys. 7.11. Puszka porusza się w kierunku sprężyny

PODSTAWOWE FAKTY

1) Praca W_s wykonana nad puszką przez siłę sprężystości jest związana z szukaną odległością d równaniem (7.26) ($W_s = -\frac{1}{2}kx^2$), w którym zamiast x trzeba podstawić d. 2) Z drugiej strony, praca W_s jest związana z energią kinetyczną puszki równaniem (7.10) ($E_{k\,końc} - E_{k\,pocz} = W$). 3) Energia kinetyczna puszki jest równa początkowo $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, a w chwili, gdy puszka ma prędkość równą zeru, wynosi ona zero.

Obliczenia: Łącząc ze sobą dwa pierwsze stwierdzenia, otrzymujemy dla puszki związek zmiany energii kinetycznej z pracą:

$$E_{k\,końc} - E_{k\,pocz} = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Korzystając z trzeciego podstawowego faktu, zapisujemy powyższe równanie w postaci

$$0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Upraszczając to równanie, wyznaczając z niego d i podstawiając wartości liczbowe danych, otrzymujemy ostatecznie

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (0{,}5\text{ m/s})\sqrt{\frac{(0{,}4\text{ kg})}{(750\text{ N/m})}}$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^{-2}\text{ m} = 1{,}2\text{ cm} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

7.5. PRACA WYKONANA PRZEZ DOWOLNĄ SIŁĘ ZMIENNĄ

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

7.14 obliczyć pracę wykonaną nad ciałem, gdy znasz siłę jako funkcję położenia, całkując tę funkcję w granicach od położenia początkowego do końcowego, w jednym wymiarze lub większej ich liczbie;

7.15 obliczyć pracę metodą całkowania graficznego od początkowego do końcowego położenia ciała, gdy znasz siłę jako funkcję położenia;

7.16 otrzymać wykres siły jako funkcji położenia z wykresu przyspieszenia jako funkcji położenia;

7.17 zastosować związek pracy ze zmianą energii kinetycznej w przypadku, gdy ruch ciała zachodzi pod wpływem siły zmiennej.

Podstawowe fakty

- Gdy działająca na cząstkę siła $\vec{F}$ zależy od położenia tej cząstki, praca wykonana nad cząstką przy zmianie jej położenia z początkowego r_{pocz} o współrzędnych $(x_{\text{pocz}}, y_{\text{pocz}}, z_{\text{pocz}})$ na końcowe $r_{\text{końc}}$ o współrzędnych $(x_{\text{końc}}, y_{\text{końc}}, z_{\text{końc}})$ musi być obliczona przez całkowanie siły. Przy założeniu, że składowa F_x może zależeć od x, ale nie od y ani z, składowa F_y może zależeć od y, ale nie od x ani z, a składowa F_z może zależeć od z, ale nie od x ani y, praca wyraża się jako

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F_x \mathrm{d}x + \int_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}} F_y \mathrm{d}y + \int_{z_{\text{pocz}}}^{z_{\text{końc}}} F_z \mathrm{d}z.$$

- Gdy siła $\vec{F}$ ma tylko składową x, równanie to sprowadza się do wzoru

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F(x)\mathrm{d}x.$$

Praca wykonana przez dowolną siłę zmienną

Analiza w jednym wymiarze

Powróćmy do sytuacji z rysunku 7.2, lecz rozważmy teraz siłę skierowaną wzdłuż osi x, której wartość zmienia się wraz ze zmianą położenia x. Zatem w trakcie ruchu koralika (cząstki), przy przechodzeniu od punktu do punktu zmienia się wartość siły wykonującej pracę. Zmienia się jednak tylko wartość, a nie kierunek tej siły. Wartość siły w każdym punkcie jest stała w czasie.

Na rysunku 7.12a przedstawiono wykres $F(x)$ dla takiej *jednowymiarowej siły zmiennej*. Chcemy znaleźć wyrażenie na pracę wykonaną przez tę siłę w czasie ruchu cząstki z punktu początkowego x_{pocz} do punktu końcowego $x_{\text{końc}}$. *Nie możemy* jednak skorzystać ze wzoru (7.7) ($W = Fd\cos\phi$), gdyż jest on słuszny tylko dla stałej siły $\vec{F}$. Zastosujemy więc znów rachunek całkowy. Podzielmy obszar pod krzywą z rysunku 7.12a na wiele wąskich pasków o szerokości Δx (rys. 7.12b). Wybierzmy wartość Δx tak małą, żeby z dobrym przybliżeniem można było przyjąć, że siła $F(x)$ jest w tym przedziale stała. Wartość średnią $F(x)$ w j-ym takim przedziale oznaczmy przez $F_{j,\text{śr}}$. Jest ona równa wysokości j-ego paska na rysunku 7.12b.

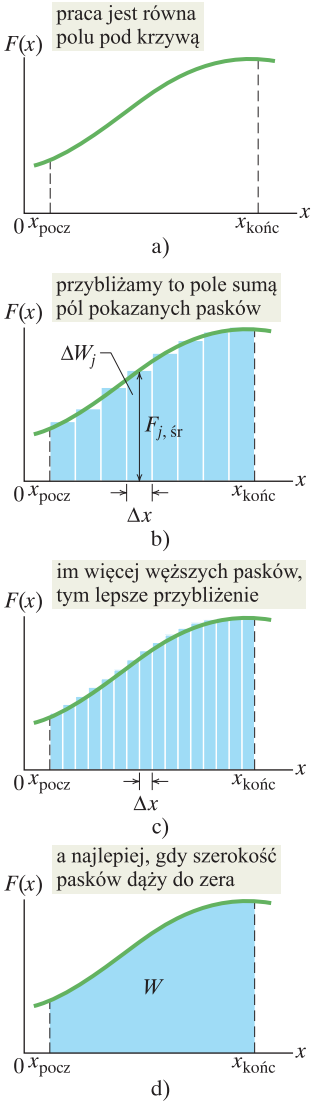
Wartość $F_{j,\text{śr}}$ uważamy za stałą, dlatego praca ΔW_j wykonana przez siłę w j-ym przedziale (przyczynek do pracy całkowitej pochodzący od tego przedziału) jest dana w przybliżeniu wzorem (7.7) i jest równa

$$\Delta W_j = F_{j,\text{śr}} \Delta x. \tag{7.29}$$

Wartość ΔW_j jest równa polu j-ego zacieniowanego prostokąta na rysunku 7.12b.

Aby obliczyć przybliżoną wartość całkowitej pracy W wykonanej przez siłę nad cząstką podczas jej ruchu z x_{pocz} do $x_{\text{końc}}$, dodajemy pola powierzchni wszystkich pasków z rysunku 7.12b między x_{pocz} a $x_{\text{końc}}$. Daje to

$$W = \sum \Delta W_j = \sum F_{j,\text{śr}} \Delta x. \tag{7.30}$$



Rys. 7.12. a) Wykres siły jednowymiarowej $\vec{F}(x)$ jako funkcji położenia x cząstki, na którą działa ta siła. Cząstka porusza się z punktu x_{pocz} do punktu $x_{\text{końc}}$. b) Wykres jak na rysunku a, lecz z obszarem pod krzywą podzielonym na wąskie paski. c) Wykres, jak na rysunku b, lecz z podziałem obszaru pod krzywą na jeszcze węższe paski. d) Przypadek graniczny. Praca wykonana przez siłę jest dana równaniem (7.32) i jest równa polu powierzchni zacieniowanego obszaru pod krzywą między punktami x_{pocz} i $x_{\text{końc}}$

Równanie (7.30) jest przybliżone, gdyż „schodki" tworzone przez górne boki prostokątnych pasków z rysunku 7.12b są jedynie przybliżeniem rzeczywistej krzywej $F(x)$.

Przybliżenie to jest tym lepsze, im mniejsza jest szerokość pasków Δx, a więc im pasków jest więcej (rysunek 7.12c). W granicy, dla szerokości pasków dążącej do zera, a zatem dla liczby pasków dążącej do nieskończoności otrzymujemy wynik ścisły

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum F_{j,\text{śr}} \Delta x. \tag{7.31}$$

Granica po prawej stronie tego równania jest niczym innym, jak całką oznaczoną funkcji $F(x)$ w granicach od x_{pocz} do $x_{\text{końc}}$. Równanie (7.31) możemy zatem zapisać w postaci

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(praca wykonana przez siłę zmienną).} \tag{7.32}$$

Jeśli znamy funkcję $F(x)$, to możemy podstawić ją do równania (7.32), wybrać właściwe granice całkowania, obliczyć całkę i znaleźć w ten sposób wartość pracy (wartości najczęściej spotykanych całek podane są w dodatku E). W obrazie geometrycznym praca jest równa polu powierzchni obszaru między krzywą $F(x)$ a osią x w zakresie od x_{pocz} do $x_{\text{końc}}$ (czyli obszaru zacieniowanego na rys. 7.12d).

Analiza w trzech wymiarach

Rozważmy obecnie cząstkę, na którą działa siła trójwymiarowa

$$\vec{F} = F_x\hat{\mathrm{i}} + F_y\hat{\mathrm{j}} + F_z\hat{\mathrm{k}}, \tag{7.33}$$

przy czym składowe F_x, F_y i F_z mogą zależeć od położenia cząstki, tzn. mogą być funkcjami tego położenia. Poczynimy jednak trzy założenia upraszczające: F_x może zależeć od x, ale nie od y ani z; F_y może zależeć od y, ale nie od x ani z; F_z może zależeć od z, ale nie od x ani y. Wyobraź sobie teraz, że cząstka doznaje niewielkiego przemieszczenia

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{d}y\hat{\mathrm{j}} + \mathrm{d}z\hat{\mathrm{k}}. \tag{7.34}$$

Praca $\mathrm{d}W$ wykonana przez siłę $\vec{F}$ nad cząstką podczas jej przemieszczenia o $\mathrm{d}\vec{r}$ wynosi zgodnie z równaniem (7.8)

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z. \tag{7.35}$$

Praca W wykonana przez siłę $\vec{F}$ podczas ruchu cząstki z punktu początkowego r_{pocz} o współrzędnych $(x_{\text{pocz}}, y_{\text{pocz}}, z_{\text{pocz}})$ do punktu końcowego $r_{\text{końc}}$ o współrzędnych $(x_{\text{końc}}, y_{\text{końc}}, z_{\text{końc}})$ jest zatem równa

$$W = \int_{r_{\text{pocz}}}^{r_{\text{końc}}} \mathrm{d}W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F_x\mathrm{d}x + \int_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}} F_y\mathrm{d}y + \int_{z_{\text{pocz}}}^{z_{\text{końc}}} F_z\mathrm{d}z. \tag{7.36}$$

Gdy siła $\vec{F}$ ma tylko składową x, wyrazy z y i z w równaniu (7.36) są równe zeru i równanie to sprowadza się do równania (7.32).

Praca jako zmiana energii kinetycznej: siła zmienna

Równanie (7.32) daje pracę wykonaną nad cząstką przez siłę zmienną w przypadku jednowymiarowym. Sprawdźmy, czy praca wyznaczona z równania (7.32) jest istotnie równa zmianie energii kinetycznej cząstki, jak być powinno.

Rozważmy cząstkę o masie m, poruszającą się wzdłuż osi x. Niech na tę cząstkę działa siła wypadkowa $F(x)$, skierowana wzdłuż tej osi. Praca wykonana przez tę siłę nad cząstką przemieszczającą się z punktu początkowego x_{pocz} do punktu końcowego $x_{\text{końc}}$ jest dana równaniem (7.32) jako

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F(x)\mathrm{d}x = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} ma\mathrm{d}x, \tag{7.37}$$

przy czym skorzystaliśmy z drugiej zasady dynamiki, aby zamiast $F(x)$ podstawić ma. Wielkość $ma\mathrm{d}x$ występującą w równaniu (7.37) możemy zapisać w następujący sposób:

$$ma\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x. \tag{7.38}$$

Korzystając z właściwości różniczek i pochodnych, wykonujemy przekształcenia:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v, \tag{7.39}$$

które umożliwiają zapisanie równania (7.38) w postaci

$$ma\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v\mathrm{d}x = mv\mathrm{d}v. \tag{7.40}$$

Podstawienie tego wyrażenia do równania (7.37) daje

$$W = \int_{v_{\text{pocz}}}^{v_{\text{końc}}} mv\mathrm{d}v = m\int_{v_{\text{pocz}}}^{v_{\text{końc}}} v\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}mv_{\text{końc}}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{\text{pocz}}^2. \tag{7.41}$$

Zauważ, że zamiana zmiennych z x na v pociąga za sobą konieczność zmiany granic całkowania na odpowiednie wartości nowej zmiennej. Zauważ też, że masę m mogliśmy wyciągnąć przed znak całki, gdyż jest ona stała.

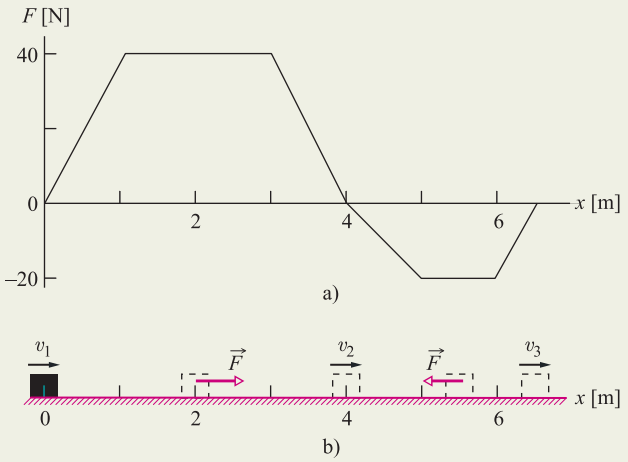
W wyrażeniach po prawej stronie równania (7.41) rozpoznajemy wyrażenia na energię kinetyczną, co umożliwia zapisanie tego równania w postaci

$$W = E_{\text{k końc}} - E_{\text{k pocz}} = \Delta E_{\text{k}},$$

przedstawiającej równość pracy i zmiany energii kinetycznej.

Przykład 7.07. Obliczenie pracy przez całkowanie graficzne

Na rysunku 7.13b przedstawiono klocek o masie 8 kg ślizgający się bez tarcia po podłodze od punktu $x_1 = 0$ do punktu $x_3 = 6{,}5$ m. Na klocek działa siła, której wartość i kierunek zmienia się ze zmianą położenia klocka zgodnie z wykresem z rysunku 7.13a. Na przykład od $x = 0$ do $x = 1$ m siła jest dodatnia (ma dodatni kierunek osi x), a jej wartość rośnie od 0 do 40 N, natomiast od $x = 4$ m do $x = 5$ m siła jest ujemna, a jej wartość rośnie od 0 do 20 N (zwróć uwagę na to, że ta ostatnia wartość jest zaznaczona na rysunku jako -20 N). Energia kinetyczna klocka w punkcie x_1 wynosi $E_{k1} = 280$ J. Ile wynosi prędkość klocka w punktach: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ m i $x_3 = 6{,}5$ m?



Rys. 7.13. a) Wykres wartości i kierunku siły, która działa na klocek, jako funkcji jego położenia. b) Położenie klocka w wybranych chwilach

PODSTAWOWE FAKTY

1) W każdym punkcie prędkość klocka jest związana z jego energią kinetyczną wzorem (7.1) ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$). 2) Energia kinetyczna $E_{k\,końc}$ w chwili końcowej jest związana z energią kinetyczną w chwili początkowej $E_{k\,pocz}$ i pracą W wykonaną nad ciałem równaniem (7.10) ($E_{k\,końc} - E_{k\,pocz} = W$). 3) Pracę W wykonaną przez siłę zmienną $F(x)$ możemy obliczyć, całkując siłę jako funkcję położenia. Równanie (7.32) mówi, że

$$W = \int_{x_{pocz}}^{x_{końc}} F(x)\,dx.$$

Nie mamy funkcji $F(x)$ w postaci wyrażenia, aby wykonać całkowanie, ale mamy wykres $F(x)$, który umożliwi nam obliczenie całki jako sumy pól pod krzywą. Gdy funkcja jest dodatnia (wykres nad osią), pole (a więc i pracę) uważa się za dodatnie, a gdy funkcja jest ujemna (krzywa pod osią), pole i praca są ujemne.

Obliczenia: Obliczenie prędkości w punkcie $x = 0$ jest łatwe, bo znamy energię kinetyczną klocka w tym punkcie. Wzór na energię kinetyczną daje

$$E_{k1} = \tfrac{1}{2}mv_1^2,$$

skąd dostajemy

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_{k1}}{m}} = \sqrt{\frac{2(280\text{ J})}{8\text{ kg}}} = 8{,}37\text{ m/s} \approx 8{,}4\text{ m/s}$$

(odpowiedź).

Między punktami $x = 0$ i $x = 4$ m krzywa na rysunku 7.13a leży nad osią x, a zatem w tym zakresie nad klockiem wykonana jest praca dodatnia. Pole pod krzywą możemy podzielić na trójkąt z lewej strony, prostokąt w środku i trójkąt z prawej strony. Ich łączne pole wynosi

$$\tfrac{1}{2}(40\text{ N})(1\text{ m}) + (40\text{ N})(2\text{ m}) + \tfrac{1}{2}(40\text{ N})(1\text{ m}) = 120\text{ N}\cdot\text{m} = 120\text{ J}.$$

Oznacza to, że między punktami $x = 0$ i $x = 4$ m siła wykonuje pracę nad klockiem, zwiększając jego energię kinetyczną i wartość prędkości. Tak więc, gdy klocek dociera do punktu $x = 4$ m, jego energia kinetyczna wynosi

$$E_{k2} = E_{k1} + W = 280\text{ J} + 120\text{ J} = 400\text{ J}.$$

Stosując znów definicję energii kinetycznej, otrzymujemy:

$$E_{k2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2,$$

a stąd

$$v_2 = \sqrt{\frac{2E_{k2}}{m}} = \sqrt{\frac{2(400\text{ J})}{8\text{ kg}}} = 10\text{ m/s} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Jest to prędkość klocka o największej wartości, gdyż od $x = 4$ m do $x = 6{,}5$ m siła jest ujemna, czyli przeciwna do ruchu klocka, a więc wykonuje nad nim ujemną pracę, to znaczy zmniejsza jego energię kinetyczną i wartość prędkości. W tym zakresie pole obszaru zawartego między krzywą a osią x wynosi

$$\tfrac{1}{2}(20\text{ N})(1\text{ m}) + (20\text{ N})(1\text{ m}) + \tfrac{1}{2}(20\text{ N})(0{,}5\text{ m}) = 35\text{ N}\cdot\text{m} = 35\text{ J}.$$

Oznacza to, że siła wykonuje w tym zakresie nad klockiem pracę ujemną, równą −35 J. W punkcie $x = 4$ m klocek miał energię kinetyczną $E_{k2} = 400$ J, a zatem w punkcie $x = 6{,}5$ m jego energia kinetyczna wynosi

$$E_{k3} = E_{k2} + W = 400\ \text{J} - 35\ \text{J} = 365\ \text{J}.$$

Stosując jeszcze raz definicję energii kinetycznej, otrzymujemy

$$E_{k3} = \tfrac{1}{2}mv_3^2,$$

a stąd

$$v_3 = \sqrt{\frac{2E_{k3}}{m}} = \sqrt{\frac{2(365\ \text{J})}{8\ \text{kg}}} = 9{,}55\ \text{m/s} \approx 9{,}6\ \text{m/s}$$

(odpowiedź).

Klocek nadal porusza się w dodatnim kierunku osi x z prędkością nieco większą niż początkową.

Przykład 7.08.
Praca, całkowanie w dwóch wymiarach

Gdy siła, jaka działa na ciało, zależy od położenia tego ciała, pracy wykonanej nad ciałem *nie możemy* obliczyć jako iloczynu siły i przemieszczenia. Jest tak dlatego, że nie ma jednej wartości siły — wartość siły się zmienia. Musimy więc obliczać prace dla bardzo małych przemieszczeń i potem je do siebie dodać. Rozumujemy tak: siła trochę się zmienia na każdym z tych małych przemieszczeń, ale jeśli są one bardzo małe, to zakładając stałość siły na tych odcinkach, dostajemy dość dobre przybliżenie. Rzecz jasna wynik takich obliczeń nie jest całkiem ścisły, ale przechodząc do przemieszczeń infinitezymalnych, dostajemy nieskończenie mały błąd obliczeń, czyli wynik ścisły. Jednak ręczne dodawanie do siebie nieskończenie wielu małych przyczynków do pracy całkowitej zajęłoby nam bardzo długi czas, z pewnością dłuższy niż semestr. Dlatego też korzystamy z całkowania, dzięki czemu sumowanie zajmuje nam tylko kilka minut (czyli znacznie mniej niż semestr).

Na cząstkę działa siła: $\vec{F} = (3x^2\ \text{N})\hat{\imath} + (4\ \text{N})\hat{\jmath}$, gdzie x jest wyrażone w metrach, w wyniku czego zmienia się jedynie energia kinetyczna cząstki. Jaką pracę wykonuje ta siła nad cząstką, gdy cząstka przemieszcza się z punktu o współrzędnych (2 m, 3 m) do punktu o współrzędnych (3 m, 0 m)? Czy wartość prędkości cząstki rośnie przy tym, maleje, czy pozostaje bez zmiany?

PODSTAWOWE FAKTY

Siła występująca w zadaniu jest zmienna, gdyż jej składowa x zależy od wartości x. Do wyznaczenia pracy nie możemy zatem zastosować wzorów (7.7) i (7.8). Musimy więc skorzystać z równania (7.36) i scałkować siłę.

Obliczenia: Zapisujemy pracę przy użyciu całek względem obu zmiennych (x i y):

$$W = \int_2^3 3x^2\,dx + \int_3^0 4\,dy = 3\int_2^3 x^2\,dx + 4\int_3^0 dy$$
$$= 3\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_2^3 + 4\left[y\right]_3^0$$
$$= [3^3 - 2^3] + 4[0 - 3] = 7\ \text{J} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Otrzymana praca jest dodatnia, co oznacza, że w wyniku działania siły $\vec{F}$ cząstka zyskała energię. Wobec tego wzrosła energia kinetyczna cząstki, a ponieważ $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, wzrosła też wartość jej prędkości. Gdyby siła okazała się ujemna, energia kinetyczna i wartość prędkości ciała by się zmniejszyły.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

7.6. MOC

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

7.18 zastosować związek średniej mocy z pracą wykonaną przez siłę i przedziałem czasu, w jakim to zaszło;

7.19 wyznaczyć moc chwilową, znając pracę jako funkcję czasu;

7.20 obliczyć moc chwilową jako iloczyn skalarny wektora siły i wektora prędkości ciała, zarówno w zapisie za pomocą wartości i kąta, jak i w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

Podstawowe fakty

- Moc to *szybkość*, z jaką siła wykonuje pracę.
- Jeśli w czasie Δt wykonana została praca W, to moc średnia jest równa ilorazowi pracy i przedziału czasu:

$$P_{\text{śr}} = \frac{W}{\Delta t}.$$

- Moc chwilowa jest chwilową szybkością wykonywania pracy:

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

- Jeśli siła $\vec{F}$ działa pod kątem ϕ do kierunku ruchu ciała, czyli kierunku wektora jej prędkości chwilowej $\vec{v}$, to moc chwilowa może być obliczona ze wzoru

$$P = Fv\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{v}.$$

Moc

Szybkość, z jaką siła wykonuje pracę, czyli pracę wykonywaną w jednostce czasu nazywamy **mocą**. Jeśli siła wykonuje pracę W w przedziale czasu Δt, to **moc średnia** w tym przedziale czasu wynosi

$$P_{\text{śr}} = \frac{W}{\Delta t} \qquad \text{(moc średnia).} \tag{7.42}$$

Moc chwilowa P jest to szybkość wykonywania pracy w danej chwili. Można ją zapisać jako

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad \text{(moc chwilowa).} \tag{7.43}$$

Załóżmy, że znamy pracę $W(t)$ wykonywaną przez pewną siłę jako funkcję czasu. Jeśli chcemy wyznaczyć moc chwilową P w chwili — powiedzmy — $t = 3$ s w czasie działania tej siły, to najpierw znajdujemy pochodną funkcji $W(t)$ względem czasu, a następnie obliczamy jej wartość dla $t = 3$ s.

Jednostką mocy w układzie SI jest dżul na sekundę. Jednostka ta jest tak często używana, że nadano jej własną nazwę **wat** (W), od nazwiska Jamesa Watta, którego wynalazki przyczyniły się do zwiększenia szybkości, z jaką mogą wykonywać pracę silniki parowe. Czasem używa się także jednostki o nazwie koń mechaniczny (KM). Oto związki między tymi jednostkami:

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s} \tag{7.44}$$

oraz

$$1\ \text{KM} = 746\ \text{W}. \tag{7.45}$$

Jak widać z równania (7.42), pracę można wyrazić jako iloczyn mocy i czasu, jak w często spotykanej jednostce o nazwie kilowatogodzina (kWh). Jest ona równa:

$$1\ \text{kWh} = (10^3\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 3{,}6\cdot 10^6\ \text{J} = 3{,}6\ \text{MJ}. \tag{7.46}$$

Kilowatogodziny są najczęściej stosowane jako jednostki handlowe energii elektrycznej (występują one na rachunkach z elektrowni), dlatego też kojarzy się je, tak jak i waty, z jednostkami elektrycznymi. Mogą one być również stosowane przy innych rodzajach mocy, czy pracy i energii. Jeśli zatem na przykład podnosisz książkę z podłogi i kładziesz ją na półce, to wykonaną przy tym pracę możesz wyrazić jako $4\cdot 10^{-6}$ kWh (a może nawet wygodniej jako 4 mWh).

Szybkość, z jaką siła wykonuje pracę nad cząstką (lub ciałem o właściwościach cząstki), możemy również wyrazić przez tę siłę i prędkość cząstki. Dla cząstki poruszającej się po linii prostej (powiedzmy wzdłuż osi x), na którą działa stała siła $\vec{F}$ skierowana pod pewnym kątem ϕ do tej linii z równania (7.43), mamy

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cos\phi\, dx}{dt} = F\cos\phi\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

czyli

$$P = Fv\cos\phi. \qquad (7.47)$$

Zapisując prawą stronę równania (7.47) jako iloczyn skalarny $\vec{F}\cdot\vec{v}$, możemy tę zależność przedstawić w postaci

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad \text{(moc chwilowa)}. \qquad (7.48)$$

Na przykład ciężarówka z rysunku 7.14 działa siłą $\vec{F}$ na ciężką przyczepę, mającą w pewnej chwili prędkość $\vec{v}$. Moc chwilowa jest to szybkość, z jaką siła $\vec{F}$ wykonuje pracę nad przyczepą w tej właśnie chwili; jest ona dana wzorami (7.47) i (7.48). Mówienie o tej mocy jako o „mocy ciężarówki" jest zwykle do przyjęcia, lecz należy pamiętać, co to znaczy: moc jest to szybkość, z jaką wykonuje pracę siła zewnętrzna.



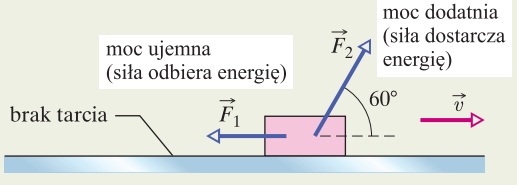
Rys. 7.14. Moc jest szybkością, z jaką siła działająca na przyczepę ze strony ciężarówki wykonuje pracę nad przyczepą (stieberszabolcs/Shutterstock)

Sprawdzian 3

Klocek porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, ponieważ jest przywiązany do linki, której drugi koniec jest umocowany w pewnym punkcie. Czy moc związana z siłą działającą na klocek ze strony linki jest dodatnia ujemna, czy równa zeru?

Przykład 7.09. Moc, siła i prędkość

W tym zadaniu obliczymy moc chwilową, to znaczy szybkość, z jaką praca jest wykonywana w pewnej chwili (a nie uśrednioną w pewnym przedziale czasu).



Rys. 7.15. Na pudełko ślizgające się bez tarcia po podłodze w prawo działają dwie siły: $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Prędkość pudełka wynosi $\vec{v}$

Na rysunku 7.15 przedstawiono pudełko, na które działają dwie stałe siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, przy czym pudełko ślizga się bez tarcia po podłodze w prawo. Siła $\vec{F}_1$ jest skierowana poziomo i ma wartość 2 N; siła $\vec{F}_2$ o wartości 4 N skierowana jest w górę, pod kątem 60° do podłogi. Prędkość pudełka ma w pewnej chwili wartość $v = 3$ m/s. Ile wynosi w tej chwili moc pochodząca od każdej z sił oraz moc całkowita? Czy moc całkowita zmienia się w tej chwili?

PODSTAWOWE FAKTY

Mamy wyznaczyć moc chwilową, a nie moc średnią w pewnym przedziale czasu. Znamy prędkość cząstki (a nie wykonaną nad nią pracę).

Obliczenia: Możemy dla każdej siły skorzystać z równania (7.47). Siła $\vec{F}_1$ tworzy z prędkością $\vec{v}$ kąt $\phi_1 = 180°$, wobec czego:

$$P_1 = F_1 v\cos\phi_1 = (2\text{ N})(3\text{ m/s})\cos 180° = -6\text{ W}$$

(odpowiedź).

Wynik ten (moc ujemna) oznacza, że siła $\vec{F}_1$ *odbiera* energię od pudełka z szybkością 6 J/s.

Siła $\vec{F}_2$ tworzy z prędkością $\vec{v}$ kąt $\phi_2 = 60°$, zatem

$$P_2 = F_2 v \cos\phi_2 = (4\text{ N})(3\text{ m/s})\cos 60° = 6\text{ W}$$

(odpowiedź).

Ten wynik (moc dodatnia) oznacza, że siła $\vec{F}_2$ *dostarcza* energię pudełku z szybkością 6 J/s.

Całkowita moc jest sumą mocy pochodzących od poszczególnych sił:

$$P_{\text{całk}} = P_1 + P_2 = (-6\text{ W}) + (6\text{ W}) = 0$$

(odpowiedź),

co oznacza, że sumarycznie żadna energia nie jest ani dostarczana pudełku, ani odbierana od niego. Energia kinetyczna pudełka ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$) nie ulega zatem zmianie, a więc nie zmienia się także prędkość pudełka. Jak widać z równania (7.48), jeśli siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, a także prędkość $\vec{v}$ pozostają stałe, to stałe są moce P_1 i P_2, a zatem i moc całkowita $P_{\text{całk}}$.



Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Podsumowanie

Energia kinetyczna **Energia kinetyczna** E_k, związana z ruchem cząstki o masie m i wartości prędkości v, przy czym v jest znacznie mniejsze od prędkości światła, wynosi

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(energia kinetyczna).} \qquad (7.1)$$

Praca **Praca** W jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana za pomocą działania na ciało siłą. Gdy energia jest przekazana ciału, praca jest dodatnia, a gdy energia jest odebrana ciału, praca jest ujemna.

Praca wykonana przez siłę stałą Praca wykonana nad cząstką przez siłę stałą $\vec{F}$, podczas gdy cząstka doznaje przemieszczenia $\vec{d}$, jest równa

$$W = Fd\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{d} \qquad \text{(praca wykonana przez siłę stałą),} \qquad (7.7, 7.8)$$

przy czym ϕ jest stałym kątem między kierunkami wektorów $\vec{F}$ i $\vec{d}$. Pracę nad ciałem wykonuje jedynie składowa siły $\vec{F}$ skierowana wzdłuż kierunku przemieszczenia $\vec{d}$. Gdy na ciało działa więcej niż jedna siła, **całkowita praca** wykonana nad ciałem jest sumą prac wykonanych przez poszczególne siły. Jest ona także równa pracy wykonanej nad ciałem przez wypadkową $\vec{F}_{\text{wyp}}$ tych sił.

Praca a energia kinetyczna Zmiana energii kinetycznej ΔE_k ciała jest związana z całkowitą pracą wykonaną nad tym ciałem następującą zależnością:

$$\Delta E_k = E_{k\,\text{końc}} - E_{k\,\text{pocz}} = W, \qquad (7.10)$$

przy czym $E_{k\,\text{pocz}}$ jest początkową energią kinetyczną ciała, a $E_{k\,\text{końc}}$ — energią kinetyczną ciała po wykonaniu nad nim pracy. Równanie (7.10) można również zapisać w postaci

$$E_{k\,\text{końc}} = E_{k\,\text{pocz}} + W. \qquad (7.11)$$

Praca wykonana przez siłę ciężkości Praca W_g wykonana nad ciałem o masie m przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$ w czasie, gdy cząstka doznaje przemieszczenia $\vec{d}$, wynosi

$$W_g = mgd\cos\phi, \qquad (7.12)$$

przy czym ϕ jest kątem między $\vec{F}_g$ i $\vec{d}$.

Praca wykonana przy podnoszeniu i opuszczaniu ciała Praca W_{zewn} wykonana przez siłę zewnętrzną przy podnoszeniu lub opuszczaniu ciała o właściwościach cząstki jest związana z pracą W_g wykonaną przez siłę ciężkości oraz zmianą energii kinetycznej ΔE_k ciała zależnością

$$\Delta E_k = E_{k\,\text{końc}} - E_{k\,\text{pocz}} = W_{\text{zewn}} + W_g. \qquad (7.15)$$

Jeśli energia kinetyczna ciała na początku jego przemieszczenia jest równa energii kinetycznej na końcu przemieszczenia ($E_{k\,\text{końc}} = E_{k\,\text{pocz}}$), to równanie (7.15) upraszcza się do postaci

$$W_{\text{zewn}} = -W_g, \qquad (7.16)$$

z której widać, że energia dostarczana wówczas ciału przez siłę zewnętrzną jest równa energii odbieranej od ciała przez siłę ciężkości.

Siła sprężystości Siła $\vec{F}_s$ wywierana przez sprężynę wynosi

$$\vec{F}_s = -k\vec{d} \qquad \text{(prawo Hooke'a),} \qquad (7.20)$$

przy czym $\vec{d}$ jest przemieszczeniem swobodnego końca sprężyny, od jego położenia dla sprężyny nieodkształconej (to znaczy takiej, która nie jest ani ściśnięta, ani rozciągnięta), a k — **stałą sprężystości** (będącą miarą sztywności sprężyny). Jeśli wybierzemy oś x równoległą do długości sprężyny, a jako jej początek przyjmiemy położenie swobodnego końca sprężyny nieodkształconej, to równanie (7.20) przybiera postać

$$F_x = -kx \qquad \text{(prawo Hooke'a).} \qquad (7.21)$$

Siła sprężystości jest zatem siłą zmienną, gdyż zależy od położenia swobodnego końca sprężyny.

Praca wykonana przez siłę sprężystości Praca W_s wykonana przez siłę sprężystości nad ciałem przymocowanym do swobodnego końca sprężyny, przy przemieszczeniu ciała z położenia początkowego x_{pocz} do położenia końcowego $x_{\text{końc}}$, wynosi

$$W_s = \frac{1}{2}kx_{\text{pocz}}^2 - \frac{1}{2}kx_{\text{końc}}^2. \qquad (7.25)$$

Jeśli $x_{\text{pocz}} = 0$, a $x_{\text{końc}} = x$, to równanie (7.25) przybiera postać

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2. \qquad (7.26)$$

Praca wykonana przez siłę zmienną Gdy siła $\vec{F}$ działająca na ciało o właściwościach cząstki zależy od położenia ciała, praca wykonana przez tę siłę nad ciałem w czasie jego ruchu z punktu początkowego r_{pocz} o współrzędnych $(x_{\text{pocz}}, y_{\text{pocz}}, z_{\text{pocz}})$ do punktu końcowego $r_{\text{końc}}$ o współrzędnych $(x_{\text{końc}}, y_{\text{końc}}, z_{\text{końc}})$ musi być wyznaczona przez całkowanie siły. Jeśli założymy, że składowa F_x może zależeć od x, ale nie od y ani z, składowa F_y może zależeć od y, ale nie od x ani z, a składowa F_z może zależeć od z, ale nie od x ani y, to praca jest równa

$$W = \int_{r_{\text{pocz}}}^{r_{\text{końc}}} \mathrm{d}W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F_x \mathrm{d}x + \int_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}} F_y \mathrm{d}y + \int_{z_{\text{pocz}}}^{z_{\text{końc}}} F_z \mathrm{d}z. \quad (7.36)$$

Gdy siła $\vec{F}$ ma tylko składową x, równanie (7.36) sprowadza się do

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F(x)\mathrm{d}x. \quad (7.32)$$

Moc **Moc** związana z działaniem siły, jest to *szybkość*, z jaką siła wykonuje pracę nad ciałem. Jeśli siła wykonuje pracę W w przedziale czasu Δt, to *moc średnia* w tym przedziale czasu jest równa

$$P_{\text{śr}} = \frac{W}{\Delta t}. \quad (7.42)$$

Moc chwilowa jest to szybkość wykonywania pracy w danej chwili:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \quad (7.43)$$

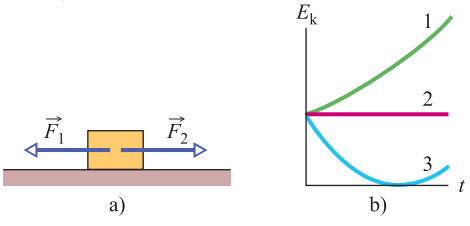
Jeśli siła $\vec{F}$ tworzy kąt ϕ z kierunkiem ruchu ciała, czyli kierunkiem jej prędkości chwilowej $\vec{v}$, to moc chwilowa wynosi

$$P = Fv\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{v}. \quad (7.47, 7.48)$$

Pytania

1 Uszereguj dane niżej prędkości w zależności od energii kinetycznej ciała, poruszającego się z tą prędkością, od największej do najmniejszej: a) $\vec{v} = 4\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{j}}$, b) $\vec{v} = -4\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{j}}$, c) $\vec{v} = -3\hat{\mathrm{i}} + 4\hat{\mathrm{j}}$, d) $\vec{v} = 3\hat{\mathrm{i}} - 4\hat{\mathrm{j}}$, e) $\vec{v} = 5\hat{\mathrm{i}}$, f) $v = 5$ m/s, skierowana pod kątem 30° do poziomu.

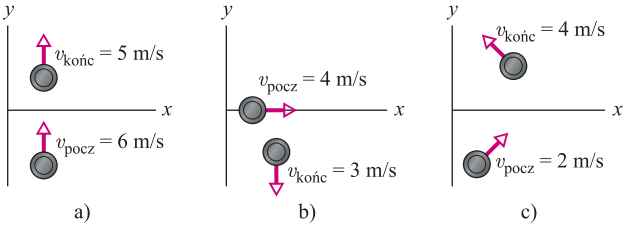
2 Na rysunku 7.16a pokazano klocek, na który działają poziomo dwie siły. Klocek ślizga się po podłodze w prawo bez tarcia. Na rysunku 7.16b przedstawiono trzy krzywe obrazujące zależność energii kinetycznej E_k od czasu t. Która z tych krzywych najlepiej opisuje przypadek: a) $F_1 = F_2$, b) $F_1 > F_2$, c) $F_1 < F_2$?



Rys. 7.16. Pytanie 2

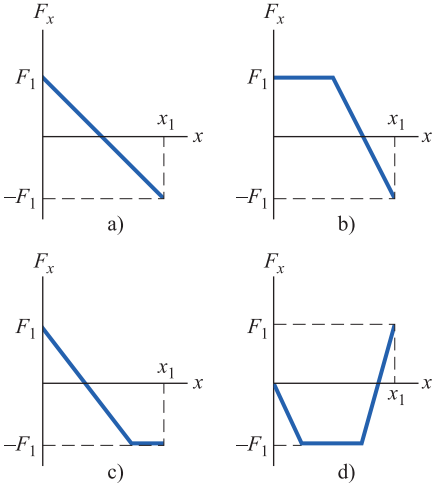
3 Cząstka, na którą działa stała siła $\vec{F}$ doznaje prostoliniowego przemieszczenia $\vec{d}$. Czy praca wykonana przez tę siłę nad cząstką jest dodatnia, czy ujemna, jeśli: a) kąt między $\vec{F}$ i $\vec{d}$ wynosi 30°, b) ten kąt wynosi 100°, c) $\vec{F} = 2\hat{\mathrm{i}} - 3\hat{\mathrm{j}}$, $\vec{d} = -4\hat{\mathrm{i}}$?

4 Aby zmienić prędkość krążka hokejowego ślizgającego się bez tarcia po lodzie, działamy na niego przez krótki czas siłą o kierunku poziomym. Na rysunku 7.17, przedstawiającym widok krążka z góry, zaznaczono kierunki wektorów prędkości początkowej $\vec{v}_{\text{pocz}}$ i końcowej $\vec{v}_{\text{końc}}$ krążka oraz podano ich wartości dla trzech przypadków. Uszereguj te przypadki w zależności od pracy wykonanej nad krążkiem, od największej (dodatniej) do najmniejszej (ujemnej).



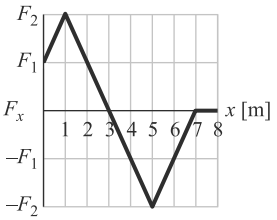
Rys. 7.17. Pytanie 4

5 Na rysunku 7.18 przedstawiono wykresy zależności składowej F_x siły działającej na cząstkę poruszającą się wzdłuż osi x od położenia x tej cząstki. Uszereguj te wykresy według pracy wykonanej przez siłę nad cząstką od $x = 0$ do x_1, od największej (dodatniej) do najmniejszej (ujemnej).



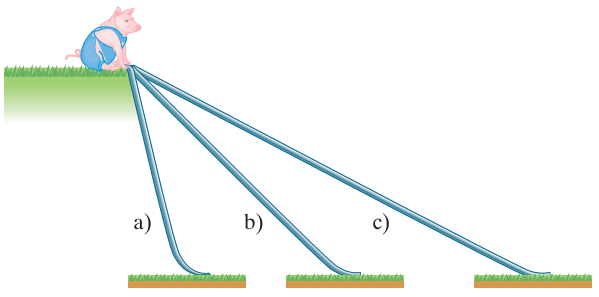
Rys. 7.18. Pytanie 5

6 Na rysunku 7.19 pokazano, jak składowa F_x działającej na cząstkę siły zależy od współrzędnej x. Jakie jest położenie cząstki, spoczywającej początkowo w punkcie $x = 0$, gdy: a) ma ona największą energię kinetyczną, b) jej prędkość ma największą wartość, c) jej prędkość jest równa zeru? d) Jaki jest kierunek ruchu cząstki w punkcie $x = 6$ m?



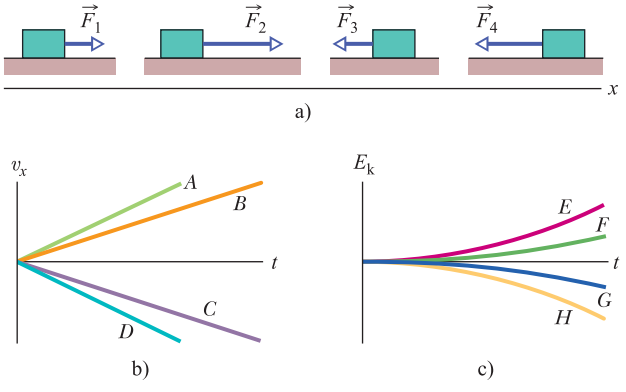
Rys. 7.19. Pytanie 6

7 Na rysunku 7.20 przedstawiono natłuszczone prosię, które może zjechać bez tarcia na dolny poziom po jednej z trzech zjeżdżalni. Uszereguj te zjeżdżalnie według pracy, jaką wykona siła ciężkości nad prosięciem w czasie jego zjazdu, od największej do najmniejszej wartości.



Rys. 7.20. Pytanie 7

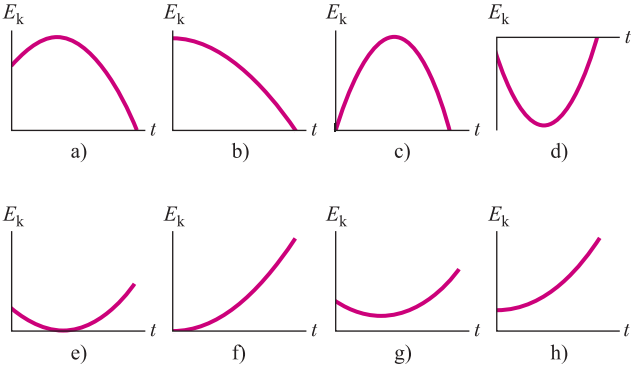
8 Na rysunku 7.21a pokazano cztery przypadki, w których na ten sam klocek, pozostający początkowo w spoczynku, działają poziomo różne siły. Wartości tych sił spełniają zależność $F_2 = F_4 = 2F_1 = 2F_3$. Na rysunku 7.21b przedstawiono cztery krzywe obrazujące zależność od czasu składowej poziomej v_x prędkości klocka, a na rysunku 7.21c — cztery krzywe obrazujące zależność od czasu energii kinetycznej E_k tego klocka. a) Które krzywe z rysunku 7.21b najlepiej opisują poszczególne przypadki z rysunku 7.21a? b) Które krzywe z rysunku 7.21c najlepiej opisują poszczególne przypadki z rysunku 7.21a?



Rys. 7.21. Pytanie 8

9 Sprężyna A jest sztywniejsza od sprężyny B, tzn. $k_A > k_B$. Sprężyny te ściskamy: a) o taki sam odcinek, b) taką samą siłą zewnętrzną. Siła sprężystości której ze sprężyn może wykonać większą pracę w każdym z tych przypadków?

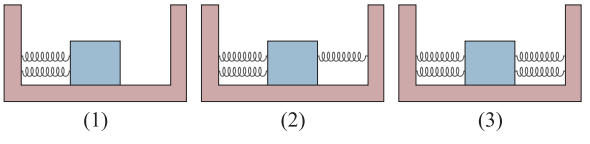
10 Kulkę gliny wyrzucono lub upuszczono na szczycie urwiska. Który z wykresów z rysunku 7.22 może przedstawiać zależność energii kinetycznej kulki od czasu podczas jej lotu?



Rys. 7.22. Pytanie 10

11 Rozważ trzy przypadki, w których na poruszającą się cząstkę działa tylko jedna siła. W pewnej chwili prędkości cząstki i działające na nią siły są równe w poszczególnych przypadkach: 1) $\vec{v} = (-4\hat{i})$ m/s, $\vec{F} = (6\hat{i} - 20\hat{j})$ N, 2) $\vec{v} = (2\hat{i} - 3\hat{j})$ m/s, $\vec{F} = (-2\hat{j} + 7\hat{k})$ N, 3) $\vec{v} = (-3\hat{i} + \hat{j})$ m/s, $\vec{F} = (2\hat{i} + 6\hat{j})$ N. Uszereguj te przypadki w zależności od szybkości wymiany energii, począwszy od największej szybkości przekazywania energii cząstce, a kończąc na największej energii odbieranej od cząstki.

12 Na rysunku 7.23 przedstawiono trzy przypadki, w których klocek jest połączony ze ściankami korytka kilkoma jednakowymi sprężynami, które są w stanie nieodkształconym, gdy klocek jest jednakowo odległy od obu ścianek. Uszereguj te przypadki w zależności od wartości działającej na klocek siły wypadkowej — od największej do najmniejszej — gdy klocek przemieścimy o d a) w prawo, b) w lewo. Uszereguj je następnie w zależności od pracy wykonanej przez sprężyny nad klockiem — od największej do najmniejszej — gdy klocek przemieścimy o d c) w prawo, d) w lewo.



Rys. 7.23. Pytanie 12

Zadania

GO Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

•–••• Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

Podrozdział 7.1. Energia kinetyczna

•1 ssm Proton (o masie $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg) porusza się w akceleratorze po linii prostej, z przyspieszeniem $3{,}6 \cdot 10^{15}$ m/s^2. W chwili początkowej ma on prędkość $2{,}4 \cdot 10^7$ m/s. Oblicz: a) prędkość, b) wzrost energii kinetycznej protonu po przebyciu przez niego drogi 3,5 cm.

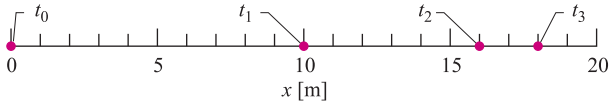
•2 Rakieta Saturn V i pojazd kosmiczny Apollo, który jest przez nią wynoszony w przestrzeń, mają łączną masę $2{,}9 \cdot 10^5$ kg. Ile wynosi ich energia kinetyczna po osiągnięciu prędkości o wartości 11,2 km/s?

•3 10 sierpnia 1972 roku duży meteoroid „odbił" się od atmosfery nad zachodnimi Stanami Zjednoczonymi i Kanadą, bardzo podobnie do kamienia odbijającego się od powierzchni wody, gdy „puszczamy kaczki". Towarzysząca temu kula ognista była tak jasna, że było ją widać w dzień. Masa meteoroidu wynosiła około $4 \cdot 10^6$ kg, a jego prędkość — około 15 km/s. Gdyby wszedł on w atmosferę pionowo, uderzyłby w powierzchnię Ziemi z mniej więcej taką samą prędkością. a) Oblicz stratę energii kinetycznej meteoroidu (w dżulach) przy pionowym uderzeniu w powierzchnię Ziemi. b) Wyraź tę energię jako wielokrotność energii wydzielonej przy eksplozji 1 megatony materiału wybuchowego TNT, równej $4{,}2 \cdot 10^{15}$ J. c) Energia wydzielona przy wybuchu bomby atomowej nad Hiroszimą była równoważna energii wybuchu 13 kiloton TNT. Ilu takim bombom byłby równoważny spadek tego meteoroidu na Ziemię?

•4 Wskutek wybuchu na powierzchni ziemi powstaje krater o średnicy proporcjonalnej do energii wybuchu podniesionej do potęgi 1/3. Wybuch 1 megatony TNT (trotylu) pozostawia po sobie krater o średnicy 1 km. Na dnie Jeziora Huron w stanie Michigan znaleziono krater o średnicy 50 km, będący zapewne pozostałością po uderzeniu w ziemię jakiegoś meteoroidu. Wyznacz energię kinetyczną związaną z tym zderzeniem, wyrażając ją w: a) megatonach TNT (wybuch 1 megatony daje energię $4{,}2 \cdot 10^{15}$ J), b) równoważnikach bomby atomowej zrzuconej na Hiroszimę (o energii odpowiadającej 13 kilotonom TNT). Odpowiedzi powinny ci wyjaśnić, dlaczego zderzenia z meteoroidami lub kometami mogły znacznie zmienić klimat na Ziemi i doprowadzić do wyginięcia dinozaurów i innych form życia.

••5 Ojciec goniący syna ma energię kinetyczną dwa razy mniejszą niż syn, który ma masę dwukrotnie mniejszą niż ojciec. Ojciec zwiększa prędkość o 1 m/s, po czym ma taką samą energię kinetyczną jak syn. Wyznacz pierwotną prędkość: a) ojca, b) syna.

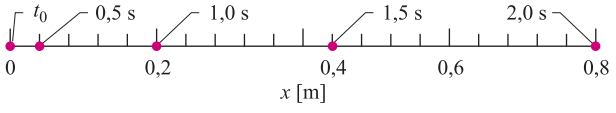
••6 Koralik o masie $1{,}8 \cdot 10^{-2}$ kg porusza się po żyłce w dodatnim kierunku osi x. Od chwili $t = 0$, w której koralik znajdował się w punkcie $x = 0$ i miał prędkość 12 m/s, działa na niego stała siła. Na rysunku 7.24 pokazano położenia koralika w chwilach: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$, s i $t_3 = 3$ s. W chwili $t = 3$ s prędkość koralika jest równa zeru. Jaką energię kinetyczną będzie miał koralik w chwili $t = 10$ s?



Rys. 7.24. Zadanie 6

Podrozdział 7.2. Praca i energia kinetyczna

•7 Ciało o masie 8 kg pozostaje w spoczynku na poziomym torze, po którym może się poruszać bez tarcia na poduszce powietrznej. W pewnej chwili do ciała zostaje przyłożona poziomo siła $\vec{F}$ działająca w dodatnim kierunku osi x. Na rysunku 7.25 przedstawiono kilka położeń ciała podczas jego ruchu w prawo. Siłę $\vec{F}$ przyłożono do ciała w chwili $t = 0$, a na rysunku pokazano położenia ciała co 0,5 s. Jaką pracę wykonała nad ciałem siła $\vec{F}$ w czasie od $t = 0$ do $t = 2$ s?



Rys. 7.25. Zadanie 7

•8 Blok kry lodowej doznaje przemieszczenia $\vec{d} = (15\text{ m})\hat{i} - (12\text{ m})\hat{j}$ wzdłuż prostego nabrzeża, popychany przez prąd wody, która działa na niego siłą $\vec{F} = (210\text{ N})\hat{i} - (150\text{ N})\hat{j}$. Jaką pracę wykonuje ta siła nad blokiem podczas tego przemieszczenia?

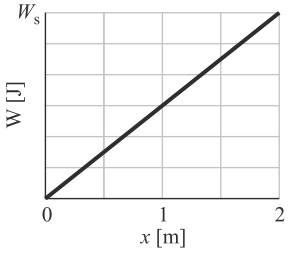
•9 Jedyna siła działająca na poruszający się w płaszczyźnie xy pojemnik o masie 2 kg ma wartość 5 N. W chwili początkowej pojemnik ma prędkość o wartości 4 m/s, skierowaną

w dodatnim kierunku osi x, a w pewnej chwili późniejszej jego prędkość ma wartość 6 m/s i jest skierowana w dodatnim kierunku osi y. Jaką pracę wykonała nad pojemnikiem przyłożona do niego siła między tymi dwiema chwilami?

•10 Moneta, na którą działa stała siła, ślizga się bez tarcia na płaszczyźnie, na której wyznaczono układ współrzędnych xy. Działająca na nią siła ma wartość 2 N i jest skierowana względem dodatniego kierunku osi x pod kątem 100° (mierzonym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Jaką pracę wykona ta siła przy przemieszczeniu monety z początku układu współrzędnych do punktu o współrzędnych x, y wynoszących (3 m, 4 m)?

••11 Siła o wartości 12 N i stałym kierunku wykonuje pracę nad cząstką podczas przemieszczenia tej cząstki o $\vec{d} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k})$ m. Wyznacz kąt między siłą a przemieszczeniem, jeśli zmiana energii kinetycznej cząstki wyniosła przy tym: a) +30 J, b) −30 J.

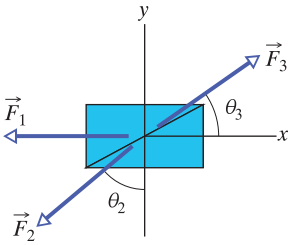
••12 Pracownicy warsztatu samochodowego grają po godzinach w odmianę gry shuffleboard dostępnym na miejscu sprzętem. Pudło śrub i nakrętek popycha się po tłustej podłodze (po której zatem ślizga się ono bez tarcia) za pomocą szczotki na kiju. Na rysunku 7.26 przedstawiono zależność pracy W wykonanej nad pudłem przez stałą, poziomą siłę, jaka działała na pudło ze stromy szczotki, od położenia pudła x. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktu $W_s = 6$ J. a) Jaka jest wartość siły działającej na pudło? b) Jaką energię kinetyczną ma pudło po przebyciu drogi 2 m, jeśli jego początkowa energia kinetyczna wynosiła 3 J, a ruch pudła zachodził w dodatnim kierunku osi x?



Rys. 7.26. Zadanie 12

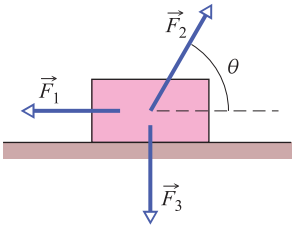
••13 Sanki, których masa wraz z saneczkarzem jest równa 85 kg, zjeżdżają z toru zjazdowego na poziomy odcinek końcowy toru z prędkością 37 m/s, po czym — aby się zatrzymać — są hamowane ze stałym przyspieszeniem 2 m/s^2. a) Jaka jest wartość siły F hamującej sanki? b) Jaką drogę d przebędą sanki do zatrzymania? c) Jaką pracę W wykona nad nimi siła hamująca? Wyznacz: d) F, e) d, f) W dla przyspieszenia hamującego o wartości 4 m/s^2.

••14 GO Na rysunku 7.27 przedstawiono widok z góry kontenera, na który działają trzy siły poziome. Wartości tych sił wynoszą: $F_1 = 3$ N, $F_2 = 4$ N, $F_3 = 10$ N, a kąty $\theta_2 = 50°$ i $\theta_3 = 35°$. Kontener był początkowo w spoczynku, a teraz porusza się po podłożu bez tarcia. Wyznacz całkowitą pracę wykonaną nad kontenerem przez te trzy siły w czasie, w którym oddali się on od położenia początkowego o 4 m.



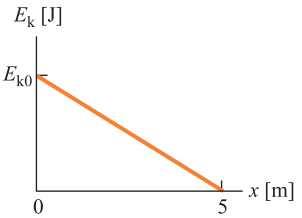
Rys. 7.27. Zadanie 14

••15 GO Na rysunku 7.28 przedstawiono trzy siły przyłożone do kufra poruszającego się po podłodze bez tarcia. Wartości tych sił wynoszą: $F_1 = 5$ N, $F_2 = 9$ N, $F_3 = 3$ N, a zaznaczony na rysunku kąt jest równy $\theta = 60°$. a) Wyznacz całkowitą pracę wykonaną przez te trzy siły nad kufrem w czasie jego przemieszczania w lewo o 3 m. b) Czy energia kinetyczna kufra wzrasta przy tym, czy maleje?



Rys. 7.28. Zadanie 15

••16 GO Ciało o masie 8 kg porusza się w dodatnim kierunku osi x. Gdy przechodzi przez punkt $x = 0$, zaczyna na nie działać stała siła skierowana wzdłuż tej osi. Na rysunku 7.29 przedstawiono zależność energii kinetycznej ciała E_k od jego położenia x w zakresie od $x = 0$ do $x = 5$ m, przy czym $E_{k0} = 30$ J. Załóż, że siła nadal będzie działać na ciało i wyznacz jego prędkość v w chwili, w której jego położenie będzie wynosiło $x = -3$ m.



Rys. 7.29. Zadanie 16

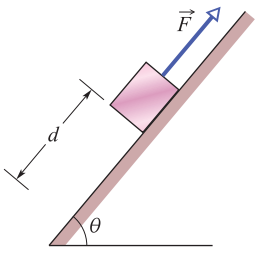
Podrozdział 7.3. Praca wykonana przez siłę ciężkości

•17 ssm www Śmigłowiec wyławia z oceanu astronautkę o masie 72 kg, wciągając ją za pomocą liny na wysokość 15 m. Astronautka porusza się przy tym z przyspieszeniem $g/10$. Jaką pracę wykona nad astronautką: a) siła przyłożona ze śmigłowca, b) działająca na nią siła ciężkości? Jaka będzie w chwili dotarcia astronautki do śmigłowca jej: c) energia kinetyczna, d) prędkość?

•18 a) W roku 1975 dach welodromu w Montrealu, o ciężarze 360 kN podniesiono o 10 cm, aby poprawić jego ustawienie. Jaką pracę wykonały nad dachem siły, którymi go podniesiono? b) W roku 1960 niejaka pani Rogers z Tampa na Florydzie uniosła podobno jeden koniec samochodu, który przygniótł jej syna, gdy złamał się podnośnik. Jaką pracę wykonała nad samochodem przyłożona przez nią siła, jeśli istotnie udało się jej podnieść ciężar około 4000 N ($\frac{1}{4}$ ciężaru samochodu) o 5 cm?

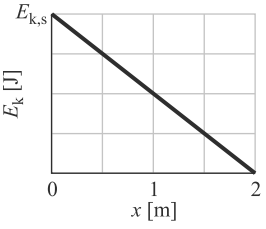
••19 GO Jak pokazano na rysunku 7.30, prostopadłościenna bryła lodu ześlizguje się bez tarcia po równi nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 50°$, a pracownik chłodni działa na nią za pomocą liny skierowaną w górę wzdłuż równi siłą $\vec{F}$ o wartości 50 N. Gdy bryła ześlizguje się o $d = 0{,}5$ m, jej

energia kinetyczna wzrasta o 80 J. Jaki byłby przyrost energii kinetycznej bryły na tej samej drodze, gdyby lina nie była przymocowana do bryły?



Rys. 7.30. Zadanie 19

••20 Klocek pchnięto w górę wzdłuż równi, po której porusza się on bez tarcia. Oś x jest skierowana wzdłuż równi w górę. Na rysunku 7.31 przedstawiono zależność energii kinetycznej klocka od jego położenia x. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktu $E_{k,s} = 40$ J. Wyznacz działającą na klocek siłę normalną, jeśli jego prędkość początkowa miała wartość 4 m/s.

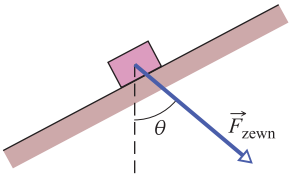


Rys. 7.31. Zadanie 20

••21 ssm Klocek o masie m znajdujący się początkowo w spoczynku, jest opuszczany pionowo na linie ze stałym, skierowanym w dół przyspieszeniem o wartości $g/4$. Przeanalizuj chwilę, w której klocek oddali się od punktu wyjściowego na odległość d i oblicz odpowiadające tej chwili: a) pracę wykonaną nad klockiem przez siłę działającą na niego ze strony liny, b) pracę wykonaną nad klockiem przez siłę ciężkości, c) energię kinetyczną klocka, d) prędkość klocka.

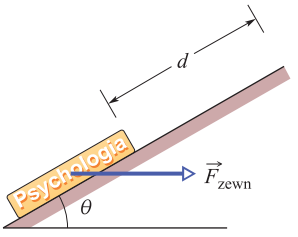
••22 Zespół ratownictwa jaskiniowego wydobywa z jaskini przez pionowy szyb rannego speleologa, za pomocą liny nawijanej na bęben przy użyciu silnika. Operacja składa się z trzech faz, w czasie których ranny przebywa drogę 10 m podczas każdej z faz: a) najpierw nieruchomy speleolog zostaje przyspieszony do prędkości 5 m/s; b) potem wznosi się on ze stałą prędkością 5 m/s; c) na koniec jego ruch zostaje spowolniony, aż do prędkości równej zeru. Jaką pracę wykonuje nad rannym o masie 80 kg podnosząca go siła w każdej z tych faz?

••23 Na rysunku 7.32 przedstawiono pudełko z butami o masie 3 kg, do którego przyłożono siłę $\vec{F}_{zewn}$ o wartości 82 N i kierunku tworzącym z pionem kąt $\phi = 53°$, w wyniku czego pudełko porusza się bez tarcia wzdłuż równi w górę ze stałą prędkością. Jaką pracę wykona nad pudełkiem siła $\vec{F}_{zewn}$, gdy pudełko przemieści się w pionie o $h = 0{,}15$ m?



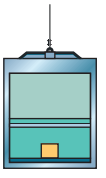
Rys. 7.32. Zadanie 23

••24 GO Jak pokazano na rysunku 7.33, do podręcznika psychologii o masie 3 kg przyłożono poziomo siłę $\vec{F}_{zewn}$ o wartości 20 N. Podręcznik przebył wzdłuż równi w górę drogę $d = 0{,}5$ m, ślizgając się po równi bez tarcia. Równia jest nachylona do poziomu pod kątem $\theta = 30°$. a) Wyznacz całkowitą pracę wykonaną nad podręcznikiem przez siłę $\vec{F}_{zewn}$, siłę ciężkości i siłę normalną. b) Wyznacz prędkość podręcznika po przebyciu drogi d, jeśli jego początkowa energia kinetyczna była równa zeru.



Rys. 7.33. Zadanie 24

•••25 GO Na rysunku 7.34 pokazano kostkę sera o masie 0,25 kg leżącą na podłodze wagonika windy o masie 900 kg. Wagonik podciągamy w górę przy użyciu liny najpierw o $d_1 = 2{,}4$ m, a potem o $d_2 = 10{,}5$ m. a) Jaką pracę wykonuje nad wagonikiem siła działająca na niego ze strony liny podczas przemieszczenia o d_1, jeśli siła normalna działająca na kostkę sera ma stałą wartość $F_N = 3$ N? b) Jaka jest wartość siły F_N, gdy przy przemieszczeniu o d_2 praca wykonana nad wagonikiem przez stałą siłę działającą na niego ze strony liny wynosi 92,61 kJ?



Rys. 7.34. Zadanie 25

Podrozdział 7.4. Praca wykonana przez siłę sprężystości

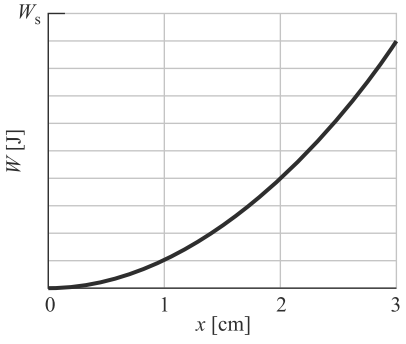
•26 W sytuacji z rysunku 7.10 utrzymanie klocka w spoczynku w punkcie $x = -2$ cm wymaga przyłożenia do niego siły o wartości 80 N. Wyobraźmy sobie, że później powoli przemieścimy klocek tak, że przyłożona przez nas siła wykona pracę +4 J nad układem klocek–sprężyna, do czym klocek znów będzie w spoczynku. Jakie będzie wówczas jego położenie? *Wskazówka*: Zadanie ma dwa rozwiązania.

•27 Klocek i sprężyna są ze sobą połączone jak na rysunku 7.10. Jeśli przemieścimy klocek do punktu $x = +4$ cm, to do utrzymania go w tym punkcie będzie potrzebna siła o wartości 360 N. Przemieszczamy klocek do punktu $x = 11$ cm i puszczamy go swobodnie. Jaką pracę wykona sprężyna nad klockiem przy przemieszczeniu go z punktu $x_{pocz} = +5$ cm do punktu: a) $x = +3$ cm, b) $x = -3$ cm, c) $x = -5$ cm i d) $x = -9$ cm?

•28 W semestrze letnim studenci MIT, mieszkający w sąsiednich akademikach kampusu wschodniego, toczą ze sobą walkę, używając wielkich wyrzutni, wykonanych z gumowych rur chirurgicznych przymocowanych do ramy okiennej. W dołączonym do rurki uchwycie umieszcza się balon wypełniony zabarwioną wodą, po czym rurkę rozciąga się na całą długość pokoju. Jaką pracę wykonuje siła działająca ze strony rurki na balon, od jej pełnego rozciągnięcia do powrotu do położenia, gdy jest ona nieodkształcona? Załóż, że przy rozcią-

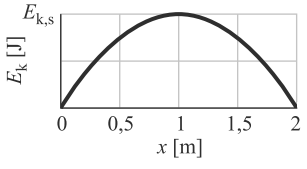
ganiu rurki spełnione jest prawo Hooke'a oraz że stała sprężystości rurki wynosi 100 N/m, a długość pokoju jest równa 5 m.

••29 W układzie z rysunku 7.10 przemieszczamy klocek z punktu $x = 0$ do punktu $x = +3$ cm, gdzie pozostaje nieruchomy. Na rysunku 7.35 przedstawiono zależność wykonanej przez nas pracy od położenia klocka. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktu $W_s = 1$ J. Następnie przemieszczamy klocek do punktu $x = +5$ cm i puszczamy bez prędkości początkowej. Jaką pracę wykona sprężyna nad klockiem przy przemieszczeniu go z punktu $x_{pocz} = +5$ cm do punktu: a) $x = +4$ cm, b) $x = -2$ cm, c) $x = -5$ cm?



Rys. 7.35. Zadanie 29

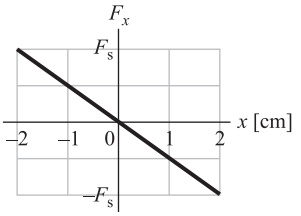
••30 Jak pokazano na rysunku 7.10a, klocek o masie m leży na poziomej powierzchni, po której może się poruszać bez tarcia, i jest połączony z jednym końcem poziomej sprężyny o stałej sprężystości k. Drugi koniec sprężyny jest unieruchomiony. Początkowo klocek znajduje się w punkcie $x = 0$ i jest nieruchomy, a sprężyna jest nieodkształcona. Następnie do klocka zostaje przyłożona poziomo siła $\vec{F}$ o stałej wartości, skierowana w dodatnim kierunku osi x. Na rysunku 7.36 przedstawiono wykres energii kinetycznej klocka jako funkcji jego położenia x. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktu $E_{k,s} = 4$ J. a) Ile wynosi wartość siły $\vec{F}$? b) Ile wynosi stała sprężystości sprężyny k?



Rys. 7.36. Zadanie 30

••31 ssm www Jedyna siła działająca na ciało o masie 2 kg poruszające się w dodatnim kierunku osi x ma składową x równą $F_x = -6x$ N, gdzie x jest wyrażone w metrach. Prędkość ciała w punkcie $x = 3$ m wynosi 8 m/s. a) Jaka jest prędkość ciała w punkcie $x = 4$ m? b) Ile wynosi dodatnie położenie x, w którym ciało ma prędkość 5 m/s?

••32 Na rysunku 7.37 przedstawiono zależność siły sprężystości F_x od położenia klocka x w układzie klocek–sprężyna z rysunku 7.10. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktu $F_s = 160$ N. Puszczamy klocek swobodnie w punkcie $x = 12$ cm. Jaką pracę wykona sprężyna nad klockiem przy przemieszczeniu go z punktu $x_{pocz} = +8$ cm do punktu: a) $x = +5$ cm, b) $x = -5$ cm, c) $x = -8$ cm i d) $x = -10$ cm?

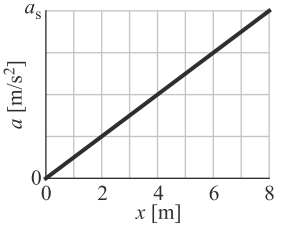


Rys. 7.37. Zadanie 32

•••33 GO W układzie z rysunku 7.10a klocek leży na płaszczyźnie poziomej, po której może się poruszać bez tarcia, a sprężyna ma stałą siłową równą 50 N/m. Sprężyna jest początkowo w stanie nieodkształconym, a klocek spoczywa w punkcie $x = 0$. Następnie przykładamy do klocka siłę o wartości 3 N i dodatnim kierunku osi x. Sprężyna zostaje rozciągnięta, a klocek się zatrzymuje. Ile wynosi w chwili zatrzymania się klocka: a) jego położenie, b) praca wykonana nad klockiem przez siłę, którą do niego przyłożyliśmy, c) praca wykonana nad klockiem przez siłę sprężystości? Ile wynosi podczas przemieszczenia klocka: d) jego położenie, w którym ma największą energię kinetyczną, e) ta największa energia kinetyczna?

Podrozdział 7.5. Praca wykonana przez dowolną siłę zmienną

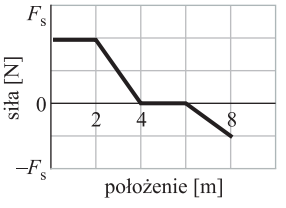
•34 Cegła o masie 10 kg porusza się wzdłuż osi x. Na rysunku 7.38 przedstawiono jej przyspieszenie a jako funkcję położenia. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktu $a_s = 20$ m/s^2. Wyznacz całkowitą pracę wykonaną nad cegłą w czasie jej ruchu od $x = 0$ do $x = 8$ m przez siłę, która nadaje jej przyspieszenie.



Rys. 7.38. Zadanie 34

•35 ssm www Na cząstkę działa siła skierowana wzdłuż osi x, dana wyrażeniem $F = F_0(x/x_0 - 1)$. Wyznacz pracę wykonaną przez tę siłę w czasie przemieszczania cząstki z punktu o współrzędnej $x = 0$ do punktu o współrzędnej $x = 2x_0$: a) sporządzając wykres $F(x)$ i wyznaczając pracę z tego wykresu, b) całkując $F(x)$.

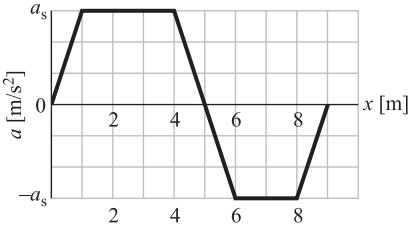
•36 Klocek o masie 5 kg porusza się bez tarcia po poziomej powierzchni. Ruch jest prostoliniowy i odbywa się pod wpływem siły, której zależność od położenia przedstawiono na rysunku 7.39. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne



Rys. 7.39. Zadanie 36

punktu $F_s = 10$ N. Jaką pracę wykonuje ta siła nad klockiem w czasie jego ruchu z punktu $x = 0$ do punktu $x = 8$ m?

••37 GO Na rysunku 7.40 przedstawiono zależność przyspieszenia cząstki o masie 2 kg od jej położenia x, gdy porusza się ona pod wpływem siły $\vec{F}$ wzdłuż osi x od $x = 0$ do $x = 9$ m. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktu $a_s = 6$ m/s^2. W chwili początkowej cząstka pozostawała w spoczynku. Wyznacz pracę wykonaną nad cząstką przez siłę $\vec{F}$ do chwili, gdy znajdzie się ona w punkcie: a) $x = 4$ m, b) $x = 7$ m i c) $x = 9$ m. Wyznacz wartość i kierunek ruchu cząstki w punkcie: d) $x = 4$ m, e) $x = 7$ m i f) $x = 9$ m.



Rys. 7.40. Zadanie 37

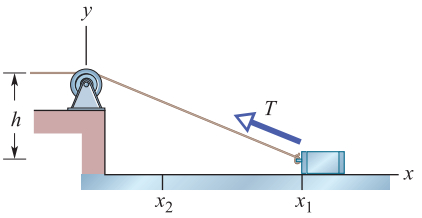
••38 Klocek o masie 1,5 kg spoczywa początkowo na poziomej powierzchni, po której może się poruszać bez tarcia. W pewnej chwili zostaje do niego przyłożona poziomo siła skierowana w dodatnim kierunku osi x. Siła ta jest dana wzorem $\vec{F}(x) = (2{,}5 - x^2)\hat{i}$ N, przy czym x jest wyrażone w metrach, a $x = 0$ oznacza położenie początkowe klocka. a) Jaką energię kinetyczną ma klocek w chwili, gdy mija punkt $x = 2$ m? b) Ile wynosi maksymalna energia kinetyczna klocka w czasie ruchu od $x = 0$ do $x = 2$ m?

••39 GO Na cząstkę poruszającą się wzdłuż osi x działa siła $\vec{F} = (cx - 3x^2)\hat{i}$, gdzie siłę wyrażono w niutonach, położenie w metrach, a c jest stałą. W punkcie $x = 0$ energia kinetyczna cząstki jest równa 20 J, a w punkcie $x = 3$ m wynosi ona 11 J. Wyznacz c.

••40 Puszka sardynek została przemieszczona wzdłuż osi x z punktu $x = 0{,}25$ m do punktu $x = 1{,}25$ m w wyniku działania siły o wartości $F = \exp(-4x^2)$, gdzie x wyrażono w metrach, a F w niutonach (exp to inny sposób zapisu funkcji wykładniczej $\exp(a) \equiv e^a$). Ile wynosi praca wykonana przez tę siłę nad puszką?

••41 Na cząstkę o masie 3 kg i położeniu danym wzorem $x = 3t - 4t^2 + t^3$, gdzie x wyrażono w metrach, a t w sekundach, działa jedna siła. Wyznacz pracę wykonaną przez tę siłę od $t = 0$ do $t = 4$ s.

•••42 GO Jak pokazano na rysunku 7.41, do kosza, który może się ślizgać bez tarcia po torze mającym kierunek osi x, przywiązano sznur. Lewy koniec sznura przełożono przez bloczek o znikomo małej masie, obracający się bez tarcia. Sznur przechodzi przez bloczek o $h = 1{,}2$ m wyżej niż jest przywiązany do kosza. Kosz został przesunięty z punktu $x_1 = 3$ m do punktu $x_2 = 1$ m, a naprężenie sznura było przy tym stałe, równe 25 N. Wyznacz zmianę energii kinetycznej kosza podczas jego przemieszczenia.



Rys. 7.41. Zadanie 42

Podrozdział 7.6. Moc

•43 ssm Na ciało o masie 15 kg, znajdujące się początkowo w spoczynku, działa siła o wartości 5 N. Wyznacz pracę wykonaną przez tę siłę w czasie: a) pierwszej, b) drugiej, c) trzeciej sekundy ruchu ciała, d) moc chwilową, pochodzącą od tej siły, pod koniec trzeciej sekundy ruchu.

•44 Narciarz jest wciągany bez tarcia przez linę wyciągu w górę stoku, tworzącego z poziomem kąt 12°. Lina porusza się równolegle do stoku ze stałą prędkością o wartości 1 m/s. Praca wykonana przez siłę naciągu liny nad narciarzem w czasie przeniesienia go o 8 m wzdłuż stoku w górę wynosi 900 J. a) Jaką pracę wykonałaby ta siła nad narciarzem na tej samej drodze, gdyby stała prędkość miała wartość 2 m/s? Ile wynosi szybkość wykonywania pracy nad narciarzem przez tę siłę, gdy lina porusza się z prędkością o wartości: b) 1 m/s, c) 2 m/s?

•45 ssm www Siła zewnętrzna o wartości 122 N skierowana ukośnie w górę pod kątem 37° do poziomu ciągnie po poziomej podłodze kloc o masie 100 kg ze stałą prędkością o wartości 5 m/s. Jaką pracę wykonuje ta siła nad klocem w jednostce czasu?

•46 Winda ma wraz z ładunkiem masę $3 \cdot 10^3$ kg. Jadąc do góry, pokonuje odległość 210 m w czasie 23 s, przy czym porusza się z prędkością o stałej wartości. Jaką pracę nad windą wykonuje średnio w jednostce czasu siła działająca na nią ze strony liny?

••47 Pewna maszyna przemieszcza paczkę o masie 4 kg z punktu początkowego $\vec{r}_{pocz} = (0{,}5\text{ m})\hat{i} + (0{,}75\text{ m})\hat{j} + (0{,}2\text{ m})\hat{k}$ do punktu końcowego $\vec{r}_{końc} = (7{,}5\text{ m})\hat{i} + (12\text{ m})\hat{j} + (7{,}2\text{ m})\hat{k}$ w czasie $t = 12$ s, działając na paczkę stałą siłą $\vec{F} = (2\text{ N})\hat{i} + (4\text{ N})\hat{j} + (6\text{ N})\hat{k}$. Wyznacz: a) pracę wykonaną nad tą paczką przez maszynę, b) średnią moc maszyny, odnoszące się do tego przemieszczenia paczki.

••48 Czerpak o masie 0,3 kg, ślizgający się bez tarcia po poziomej powierzchni, jest przymocowany do jednego końca poziomej sprężyny (o $k = 500$ N/m), której drugi koniec jest unieruchomiony. W chwili przejścia przez położenie równo-

wagi (tzn. przez punkt, w którym siła sprężystości jest równa zeru) czerpak ma energię kinetyczną równą 10 J. Wyznacz szybkość, z jaką sprężyna wykonuje pracę nad czerpakiem, gdy: a) przechodzi on przez położenie równowagi, b) sprężyna jest ściśnięta o 0,1 m, a czerpak oddala się od położenia równowagi.

••49 ssm Powolna winda towarowa, której kabina ma z pełnym obciążeniem masę 1200 kg, ma wznieść ładunek na wysokość 54 m w czasie 3 min, licząc od startu ze stanu spoczynku na dole do zatrzymania na górze. Masa przeciwwagi dźwigu wynosi jedynie 950 kg, tak że ruch kabiny w górę musi być wspomagany przez silnik. Jaka musi być średnia moc związana z siłą, jaką działa silnik na kabinę za pośrednictwem liny?

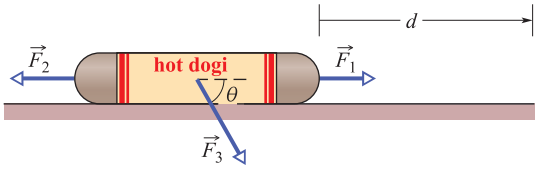
••50 a) W pewnej chwili ciało ma prędkość $\vec{v} = -(2\ \text{m/s})\hat{i} + (4\ \text{m/s})\hat{k}$, a działa na nie siła $\vec{F} = (4\ \text{N})\hat{i} - (2\ \text{N})\hat{j} + (9\ \text{N})\hat{k}$. Ile wynosi w tej chwili szybkość, z jaką siła wykonuje pracę nad ciałem? b) W pewnej innej chwili prędkość ciała ma tylko składową y. Ile wynosi w tej chwili prędkość ciała, jeśli siła nie uległa zmianie, a moc chwilowa jest równa -12 W?

••51 Na ciało o masie 2 kg działa siła $\vec{F} = (3\ \text{N})\hat{i} + (7\ \text{N})\hat{j} + (7\ \text{N})\hat{k}$, co prowadzi do przemieszczenia ciała z punktu początkowego $\vec{r}_{\text{pocz}} = (3\ \text{m})\hat{i} - (2\ \text{m})\hat{j} + (5\ \text{m})\hat{k}$ do punktu końcowego $\vec{r}_{\text{końc}} = -(5\ \text{m})\hat{i} + (4\ \text{m})\hat{j} + (7\ \text{m})\hat{k}$ w czasie 4 s. Wyznacz: a) pracę wykonaną nad tym ciałem przez siłę $\vec{F}$, b) średnią moc związaną z siłą $\vec{F}$, odnoszące się do tego przemieszczenia ciała, oraz c) kąt między wektorami $\vec{r}_{\text{pocz}}$ i $\vec{r}_{\text{końc}}$.

•••52 Samochód do pewnego rodzaju wyścigów rusza z miejsca i, poruszając się ruchem przyspieszonym, przebywa ustalony odcinek toru w czasie T, przy czym jego silnik pracuje ze stałą mocą P. Załóżmy, że ekipie technicznej uda się zwiększyć moc silnika o niewielką wartość ΔP. Jaką to da zmianę czasu T?

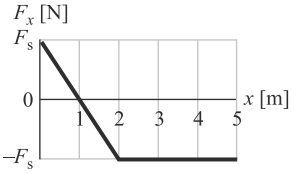
Zadania dodatkowe

53 Jak pokazano na rysunku 7.42, paczka z hot dogami ślizga się bez tarcia po podłodze w prawo i przebywa drogę $d = 20$ cm, gdy działają na nią trzy siły. Dwie z nich działają poziomo i mają wartości $F_1 = 5$ N oraz $F_2 = 1$ N, natomiast trzecia ma wartość $F_3 = 4$ N i działa pod kątem $\theta = 60°$ w dół od poziomu. Wyznacz (odnoszące się do przemieszczenia o d): a) pracę *całkowitą* wykonaną nad paczką przez trzy przyłożone siły, siłę ciężkości i siłę normalną, b) końcową prędkość paczki, wiedząc, że ma ona masę 2 kg, a jej początkowa energia kinetyczna była równa zeru.



Rys. 7.42. Zadanie 53

54 GO Jedyna siła działająca na ciało o masie 2 kg, w czasie jego ruchu wzdłuż osi x, zmienia się zgodnie z wykresem przedstawionym na rysunku 7.43. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktu $F_s = 4$ N. Prędkość ciała w punkcie $x = 0$ wynosi 4 m/s. a) Ile wynosi energia kinetyczna ciała w punkcie $x = 3$ m? b) Dla jakiej wartości x ciało będzie miało energię kinetyczną równą 8 J? c) Ile wynosi największa wartość energii kinetycznej ciała w trakcie jego ruchu od $x = 0$ do $x = 5$ m?

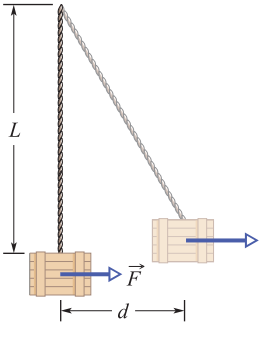


Rys. 7.43. Zadanie 54

55 ssm Koń ciągnie powóz z prędkością 10 km/h, działając na niego siłą o wartości 180 N, skierowaną pod kątem 30° w górę od poziomu. a) Jaką pracę wykonuje ta siła w czasie 10 min? b) Ile wynosi średnia moc (w koniach mechanicznych) związana z działaniem tej siły?

56 Ciało o masie 2 kg, znajdujące się początkowo w spoczynku, zostaje wprawione w ruch jednostajnie przyspieszony w poziomie i osiąga prędkość o wartości 10 m/s w czasie 3 s. a) Jaką pracę nad ciałem wykonuje w ciągu tych 3 s siła nadająca mu przyspieszenie? Ile wynosi związana z działaniem tej siły moc chwilowa: b) na końcu tego przedziału czasu, c) w połowie tego przedziału czasu?

57 Skrzynię o masie 230 kg zawieszono na linie o długości $L = 12$ m. Pchając skrzynię poziomo siłą $\vec{F}$ o zmiennej wartości, przesunąłeś ją w poziomie o $d = 4$ m (jak na rys. 7.44). a) Ile wynosi wartość siły $\vec{F}$, gdy skrzynia znajduje się w położeniu końcowym? Ile wynosi b) całkowita praca wykonana nad skrzynią, c) praca wykonana nad nią przez siłę ciężkości, d) praca wykonana nad nią przez naprężenie liny? e) Na podstawie odpowiedzi na pytania (b), (c) i (d) oblicz pracę wykonaną nad skrzynią przez siłę $\vec{F}$, jaką ty na nią działałeś, zakładając, że skrzynia pozostawała w spoczynku przed i po jej przemieszczeniu. f) Dlaczego praca wykonana nad skrzynią przez siłę $\vec{F}$ nie jest równa iloczynowi przemieszczenia skrzyni w poziomie i odpowiedzi na pytanie (a)?

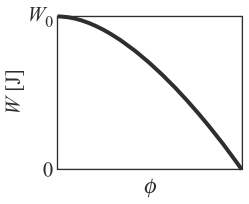


Rys. 7.44. Zadanie 57

58 Robotnik przykłada siłę o wartości 210 N skierowaną ku górze, pod kątem 20° do poziomu, aby pociągnąć po poziomej podłodze skrzynię o masie 50 kg, mogącą poruszać się po tej podłodze bez tarcia. Jaką pracę wykona nad skrzynią w czasie jej przemieszczenia o 3 m: a) siła przyłożona przez robotnika,

b) działająca na skrzynię siła ciężkości, c) działająca na skrzynię ze strony podłogi siła normalna? d) Jaka będzie całkowita praca wykonana na tej drodze nad skrzynią?

59 Do koralika przyłożono siłę $\vec{F}$, której wartość jest ustalona, lecz kąt tworzony przez kierunek tej siły i kierunek przemieszczenia koralika można zmieniać. Na rysunku 7.45 przedstawiono zależność pracy wykonanej przez siłę $\vec{F}$ nad koralikiem dla pewnego zakresu wartości ϕ, przy czym $W_0 = 25$ J. Droga przebyta przez koralik na prostej żyłce wynosi 5 cm. Ile wynosi praca wykonana przy tym przez siłę $\vec{F}$, gdy a) $\phi = 64°$ i b) $\phi = 147°$?

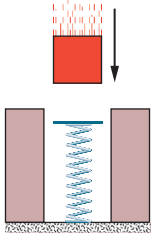


Rys. 7.45. Zadanie 59

60 Dziecko ześlizguje się bez tarcia wzdłuż zjeżdżalni na placu zabaw, a ponieważ jest trochę wystraszone, matka przytrzymuje je nieco, działając na nie siłą o wartości 100 N skierowaną wzdłuż zjeżdżalni w górę. Po przebyciu wzdłuż zjeżdżalni drogi 1,8 m dziecko ma energię kinetyczną o 30 J większą niż na początku. a) Ile wynosi praca wykonana przy tym nad dzieckiem przez siłę ciężkości? b) O ile wzrosłaby na tej samej drodze energia kinetyczna dziecka, gdyby matka go nie przytrzymywała?

61 Jaką pracę wykonuje siła $\vec{F} = (2x\ \text{N})\hat{\text{i}} + (3\ \text{N})\hat{\text{j}}$, gdzie x jest wyrażone w metrach, przemieszczając cząstkę z punktu o wektorze położenia $\vec{r}_{\text{pocz}} = (2\ \text{m})\hat{\text{i}} + (3\ \text{m})\hat{\text{j}}$ do punktu $\vec{r}_{\text{końc}} = -(4\ \text{m})\hat{\text{i}} - (3\ \text{m})\hat{\text{j}}$?

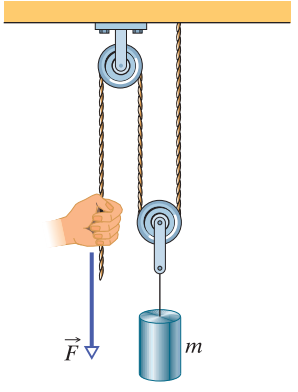
62 Klocek o masie 250 g spada na nieodkształconą sprężynę pionową o stałej sprężystości $k = 2{,}5$ N/m (rys. 7.46). Po zetknięciu ze sprężyną klocek ściska ją o 12 cm, do osiągnięcia przez niego prędkości równej zeru. Jaka praca zostaje wykonana nad klockiem w czasie ściskania sprężyny przez: a) działającą na niego siłę ciężkości, b) siłę sprężystości sprężyny? c) Ile wynosiła prędkość klocka w chwili jego dotarcia do sprężyny (pomiń tarcie)? d) Ile wynosiłoby maksymalne ściśnięcie sprężyny, gdyby prędkość klocka w chwili dotarcia do sprężyny była dwukrotnie większa?


Rys. 7.46. Zadanie 62

63 ssm Robotnik pcha skrzynię w górę po pochylni nachylonej do poziomu pod kątem 25°. Masa skrzyni wynosi 25 kg, robotnik działa na nią równolegle do pochylni siłą o wartości 209 N, a skrzynia ślizga się po pochylni bez tarcia. W pewnym przedziale czasu położenie skrzyni na pochylni zmienia się o 1,5 m. Wyznacz (odnoszącą się do tego przedziału czasu) pracę wykonaną nad skrzynią przez: a) robotnika, b) siłę ciężkości i c) siłę normalną oraz d) całkowitą pracę wykonaną nad skrzynią.

64 Do przenoszenia pudeł z jednego miejsca magazynu na drugie używa się pasa transmisyjnego, poruszającego się ze stałą prędkością o wartości 0,5 m/s. W pewnej części magazynu pas porusza się przez 2 m w górę, pod kątem 10° do poziomu, potem przez 2 m poziomo i na koniec przez 2 m w dół pod kątem 10° do poziomu. Załóż, że pudło o masie 2 kg nie ślizga się po tym pasie. Ile wynosi szybkość, z jaką pas transmisyjny wykonuje pracę nad pudłem, gdy pudło porusza się: a) w górę pod kątem 10° do poziomu, b) poziomo, c) w dół, pod kątem 10° do poziomu?

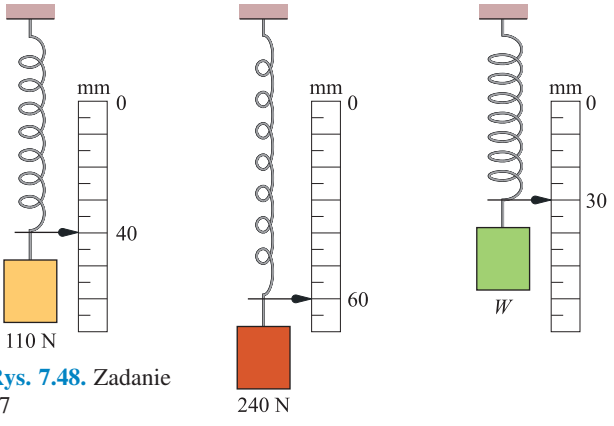
65 Jak pokazano na rysunku 7.47, lina jest przełożona przez dwa krążki obracające się bez tarcia, których masy można pominąć. Na jednym krążku wisi pojemnik o masie $m = 20$ kg, a na swobodny koniec liny działasz siłą $\vec{F}$. a) Jaka musi być wartość siły $\vec{F}$, aby pojemnik wznosił się ze stałą prędkością? b) O ile musisz przesunąć swobodny koniec liny, aby podnieść pojemnik o 2 cm? c) Jaka praca zostanie wykonana nad pojemnikiem podczas jego przemieszczania przez: d) siłę przyłożoną przez ciebie (za pośrednictwem liny), e) działającą na pojemnik siłę ciężkości? *Wskazówka*: gdy lina jest przełożona przez krążek, jak na rysunku, działa ona na krążek siłą wypadkową dwa razy większą od naprężenia liny.



Rys. 7.47. Zadanie 65

66 Samochód o masie 1200 kg jedzie na autostradzie z prędkością 120 km/h. Ile wynosi jego energia kinetyczna dla obserwatora stojącego przy autostradzie?

67 ssm Sprężyna jest zaopatrzona we wskazówkę i skalę z podziałką milimetrową. Na sprężynie zawieszono kolejno trzy paczki, jak pokazano na rysunku 7.48. a) Jakie położe-



Rys. 7.48. Zadanie 67

nie zajmuje wskazówka, gdy na sprężynie nie jest zawieszone żadne ciało? b) Ile wynosi ciężar W trzeciej paczki?

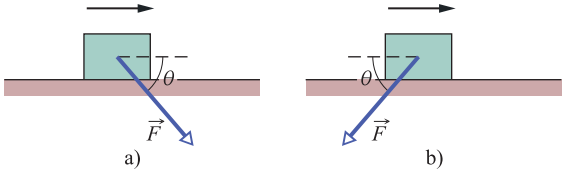
68 Bojer pozostaje w spoczynku na powierzchni zamarzniętego jeziora, po której może się poruszać bez tarcia. W pewnej chwili zrywa się wiatr, który działa na bojer siłą o stałej wartości 200 N, skierowaną na wschód. Ze względu na kąt, pod jakim ustawiony jest żagiel, bojer ślizga się po linii prostej w kierunku tworzącym kąt 20° (ku północy) z kierunkiem wschodnim. Ile wynosi energia kinetyczna bojera po przebyciu przez niego w tym kierunku drogi 8 m?

69 Wyciąg narciarski umożliwia wjazd 100 osób o średnim ciężarze 660 N na wzniesienie o wysokości 150 m w ciągu 60 s. Lina wyciągu porusza się ze stałą prędkością. Jaką średnią moc musi mieć silnik wyciągu?

70 Na cząstkę doznającą przemieszczenia $\vec{d} = (3\text{ m})\hat{i} - (2\text{ m})\hat{j}$ działa siła $\vec{F} = (4\text{ N})\hat{i} + c\hat{j}$ (a także inne siły). Wyznacz c, wiedząc, że praca wykonana nad cząstką przez siłę $\vec{F}$ wynosi: a) 0, b) 17 J i c) −18 J.

71 Na ciało o masie 2 kg poruszające się w płaszczyźnie xy działa stała siła o wartości 10 N i kierunku tworzącym z dodatnim kierunkiem osi x kąt 150° (licząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Jaką pracę wykona ta siła nad ciałem, gdy przemieści się ono z początku układu współrzędnych do punktu o wektorze położenia $(2\text{ m})\hat{i} - (4\text{ m})\hat{j}$?

72 Do klocka o masie 4 kg przemieszczającego się bez tarcia po podłodze o 1 m w prawo przyłożono siłę o wartości 2 N pod kątem θ w dół od poziomu (patrz rys. 7.49a). Znajdź wyrażenie na prędkość klocka $v_{\text{końc}}$ na końcu wspomnianego przemieszczenia, jeśli jego prędkość początkowa wynosiła a) 0 i b) 1 m/s w prawo. Na rysunku 7.49b przedstawiono podobny przypadek, z tym że teraz siła o wartości 2 N działa w lewo w dół. c) Znajdź wyrażenie na prędkość klocka $v_{\text{końc}}$ na końcu wspomnianego przemieszczenia, jeśli jego prędkość początkowa wynosiła 1 m/s w prawo. d) Sporządź wykresy zależności $v_{\text{końc}}$ od θ w zakresie kątów od 0 do 90° w przypadkach z punktów (a), (b) i (c). Wyjaśnij postać tych wykresów.



Rys. 7.49. Zadanie 72

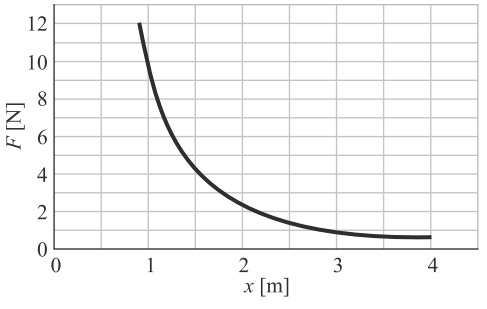
73 Na ciało poruszające się wzdłuż osi x działa w dodatnim kierunku tej osi siła $\vec{F}$. Wartość tej siły jest dana wzorem $F = 10e^{-x/2}$ N, gdzie x wyrażono w metrach. Wyznacz pracę wykonaną przez tę siłę nad ciałem przy jego przemieszczeniu z punktu $x = 0$ do punktu $x = 2$ m: a) sporządzając wykres funkcji $F(x)$ i szacując pole pod otrzymaną krzywą, b) całkując tę funkcję analitycznie.

74 Na cząstkę doznającą przemieszczenia $\vec{d} = (8\text{ m})\hat{i} + c\hat{j}$ działa siła $\vec{F} = (2\text{ N})\hat{i} - (4\text{ N})\hat{j}$ (a także inne siły). Wyznacz c, wiedząc, że praca wykonana nad cząstką przez siłę $\vec{F}$ jest: a) równa zeru, b) dodatnia i c) ujemna.

75 ssm Jaka moc jest potrzebna, aby wagonik dźwigu o masie 4500 kg z ładunkiem o masie 1800 kg wznosić ze stałą prędkością 3,8 m/s?

76 Bryła lodu o masie 45 kg ześlizguje się bez tarcia po pochylni o długości 1,5 m i wysokości 0,91 m. Robotnik napiera na nią równolegle do pochylni w górę, w wyniku czego bryła zjeżdża po równi ze stałą prędkością. a) Oblicz wartość siły, jaką działa na bryłę robotnik. Wyznacz pracę wykonaną nad bryłą przez: b) robotnika, c) siłę ciężkości, d) siłę normalną oraz e) wypadkową sił działających na bryłę.

77 Cząstka porusza się wzdłuż osi x, a w dodatnim kierunku tej osi działa na nią siła. Na rysunku 7.50 przedstawiono zależność wartości tej siły od położenia cząstki x. Zależność ta ma postać $F = a/x^2$, gdzie $a = 9\text{ N}\cdot\text{m}^2$. Wyznacz pracę wykonaną przez tę siłę nad cząstką, gdy cząstka przemieszcza się z punktu $x = 1$ m do punktu $x = 3$ m a) szacując pracę na podstawie wykresu siły i b) całkując funkcję analitycznie.

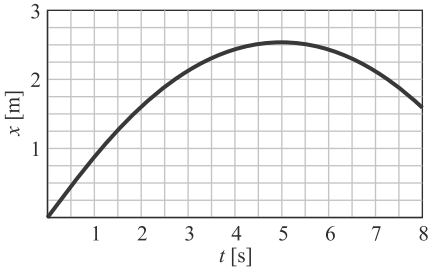


Rys. 7.50. Zadanie 77

78 Pudełko płyt CD ślizga się po podłodze w dodatnim kierunku osi x, gdy działa na nie siła $\vec{F}$. Siła ta jest skierowana wzdłuż osi x, a jej wartość jest równa $F = 9x - 3x^2$, gdzie x wyrażono w metrach, a F w niutonach. Pudełko rusza z miejsca w punkcie $x = 0$ i porusza się aż do punktu, w którym jej prędkość znów się stanie równa zeru. a) Sporządź wykres pracy wykonanej nad pudełkiem przez siłę $\vec{F}$ jako funkcji x. b) Wyznacz położenie odpowiadające maksimum tej pracy oraz c) tę maksymalną wartość pracy. d) Wyznacz położenie odpowiadające pracy równej zeru i e) położenie, w którym prędkość pudełka jest znów równa zeru.

79 ssm Pudełko z kanapkami na drugie śniadanie o masie 2 kg zostało wprawione w ruch poślizgowy bez tarcia w dodatnim kierunku osi x na poziomej płaszczyźnie. W chwili $t = 0$ zerwał się wiatr o stałej sile, wiejący w ujemnym kierunku

osi x i popychający w tym kierunku pudełko. Na rysunku 7.51 przedstawiono położenie pudełka x jako funkcję czasu t w tej fazie ruchu pudełka. Oszacuj na podstawie tego wykresu energię kinetyczną pudełka w chwili a) $t = 1$ s i b) $t = 5$ s. c) Wyznacz pracę wykonaną nad pudełkiem przez wiatr od $t = 1$ s do $t = 5$ s.



Rys. 7.51. Zadanie 59

80 Pudełko na chleb porusza się wzdłuż osi x od punktu $x = 0{,}15$ m do punktu $x = 1{,}2$ m pod wpływem siły, której wartość jest dana wzorem $F = \exp(-2x^2)$, gdzie x wyrażono w metrach, a F w niutonach (exp to inne oznaczenie funkcji wykładniczej). Wyznacz pracę wykonaną nad pudełkiem przez tę siłę.

81 W układzie klocek–sprężyna z rysunku 7.10 klocek ma masę 4 kg, a stała siłowa sprężyny wynosi 500 N/m. Klocek zostaje zwolniony w punkcie $x_{\text{pocz}} = 0{,}3$ m. Oblicz: a) prędkość klocka w punkcie $x = 0$, b) pracę wykonaną przez sprężynę nad klockiem do chwili, gdy klocek znajdzie się w punkcie $x = 0$, c) moc chwilową sprężyny w chwili zwolnienia klocka, tzn. gdy jest on w punkcie x_{pocz}, d) moc chwilową, gdy klocek jest w punkcie $x = 0$, e) położenie klocka odpowiadające największej mocy.

82 Klocek o masie 4 kg jest wciągany bez tarcia po równi siłą o wartości 50 N działającą równolegle do równi. Klocek był początkowo nieruchomy. Siła normalna działająca na klocek ze strony równi ma wartość 13,41 N. Wyznacz prędkość klocka po przebyciu przez niego wzdłuż równi drogi równej 3 m.

83 Do swobodnego końca sprężyny o stałej siłowej 18 N/m przymocowano klatkę. Wyznacz pracę wykonaną przez sprężynę nad klatką: a) przy rozciągnięciu sprężyny o 7,6 mm od jej długości w stanie nieodkształconym, b) przy rozciągnięciu sprężyny o dalsze 7,6 mm.

84 Siła $\vec{F} = (2\hat{i} + 9\hat{j} + 5{,}3\hat{k})$ N działa na ciało o masie 2,9 kg, gdy przemieszcza się ono z punktu początkowego $\vec{r}_1 = (2{,}7\hat{i} - 2{,}9\hat{j} + 5{,}5\hat{k})$ m do punktu końcowego $\vec{r}_2 = (-4{,}1\hat{i} + 3{,}3\hat{j} + 5{,}4\hat{k})$ m. Wyznacz: a) pracę wykonaną przez siłę nad ciałem w podanym przedziale czasu, b) średnią moc, z jaką wykonywana była ta praca w podanym przedziale czasu, c) kąt między wektorami $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$.

85 W chwili $t = 0$ na cząstkę o masie 2 kg, mającą w tej chwili prędkość 4 m/s, zaczyna działać siła $\vec{F} = (-5\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k})$ N. Oblicz prędkość cząstki w chwili, gdy przemieści się ona względem położenia początkowego o wektor $\vec{d} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k})$ m.

ROZDZIAŁ 8

Energia potencjalna i zachowanie energii

8.1. ENERGIA POTENCJALNA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

8.01 odróżnić siłę zachowawczą od niezachowawczej;

8.02 wyjaśnić, że gdy cząstka przemieszcza się między dwoma punktami, praca wykonana nad nią przez siłę zachowawczą nie zależy od toru, po jakim cząstka się porusza;

8.03 wyznaczyć grawitacyjną energię potencjalną ciała (mówiąc ściślej — układu ciało–Ziemia);

8.04 wyznaczyć energię potencjalną sprężystości układu klocek–sprężyna.

Podstawowe fakty

• Siłę nazywamy zachowawczą, jeśli całkowita praca wykonana przez nią nad ciałem przebywającym drogę zamkniętą (czyli o tym samym położeniu początkowym i końcowym) jest równa zeru. Innymi słowy, siła jest zachowawcza, jeśli praca wykonana przez nią nad cząstką poruszającą się między dwoma punktami nie zależy od tego, po jakim torze się ona poruszała. Siła ciężkości i siła sprężystości to siły zachowawcze, a siła tarcia kinetycznego to siła niezachowawcza.

• Energia potencjalna to energia związana z konfiguracją układu, na który działa siła zachowawcza. Gdy siła zachowawcza wykonuje nad jednym z ciał układu pracę W, zmiana energii potencjalnej układu ΔE_p jest równa

$$\Delta E_p = -W.$$

Jeśli ciało porusza się z punktu x_{pocz} do punktu $x_{końc}$, to zmiana energii potencjalnej układu jest równa

$$\Delta E_p = -\int_{x_{pocz}}^{x_{końc}} F(x)\,dx.$$

• Energię potencjalną układu złożonego z Ziemi i niezbyt od niej odległego ciała nazywamy grawitacyjną energią potencjalną. Gdy wysokość ciała nad Ziemią zmienia się z y_{pocz} na $y_{końc}$, zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu ciało–Ziemia jest równa

$$\Delta E_p = mg(y_{końc} - y_{pocz}) = mg\Delta y.$$

• Jeśli punkt y_{pocz} wybierzemy za punkt odniesienia i przyjmiemy, że odpowiadająca temu punktowi grawitacyjna energia potencjalna układu wynosi $E_{p\,pocz} = 0$, to grawitacyjna energia potencjalna układu, gdy ciało znajduje się w punkcie o wysokości y, jest dana wzorem

$$E_p(y) = mgy.$$

• Energia potencjalna sprężystości to energia związana ze stopniem ściśnięcia lub rozciągnięcia ciała sprężystego. Sprężyna, której swobodny koniec przemieszczono o x, jest źródłem siły sprężystości $F = -kx$, a związana z tym energia potencjalna sprężystości wynosi

$$E_p(x) = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

• Punktem odniesienia jest w przypadku sprężyny położenie jej swobodnego końca, gdy sprężyna jest nieodkształcona. Przyjmujemy, że w tej konfiguracji $x = 0$ i $E_p = 0$.

O fizyce

Jednym z zadań fizyki jest badanie różnych rodzajów energii, szczególnie tych o największym znaczeniu dla losów świata. **Energia potencjalna** jest dość ogólną nazwą pewnych rodzajów energii. Technicznie rzecz biorąc,

jest to energia związana z konfiguracją układu ciał (wzajemnym ich położeniem), które oddziałują ze sobą (tzn. działają między nimi siły).

Ta dość formalna definicja dotyczy czegoś, co już dawno dobrze znasz. Przykład pewnie wyjaśni ci sprawę lepiej niż sucha definicja. Na rysunku 8.1 widzisz skoczka na bungee po oderwaniu się od platformy startowej. Układem ciał jest w tym przypadku Ziemia i skoczek. Siła, jaka między nimi działa, to siła ciężkości. Konfiguracja układu się zmienia (maleje odległość skoczka od Ziemi, co jest oczywiście dla niego całą frajdą tej zabawy). Aby uwzględnić, że skoczek zmienia położenie, przy czym rośnie jego energia kinetyczna, wprowadzimy pojęcie **grawitacyjnej energii potencjalnej** E_p. Jest to energia związana z odległością wzajemną ciał, które przyciągają się siłą ciężkości (czyli siłą grawitacyjną), w naszym przypadku skoczka i Ziemi.



Rys. 8.1. Energia kinetyczna skoczka na bungee rośnie podczas jego spadku swobodnego, a pod koniec lotu lina się rozciąga i zwalnia lot skoczka (Vitalii Nesterchuk/Shutterstock)

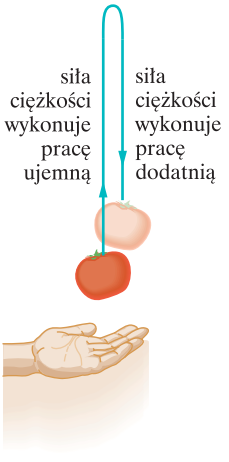
Pod koniec skoku lina się prostuje, a następnie zaczyna się rozciągać. W układzie stanowionym przez skoczka i linę działa siła sprężystości powstająca przy rozciąganiu liny. Gdy lina się rozciąga, zmienia się konfiguracja układu skoczek–lina. Spadek energii kinetycznej skoczka w końcowej fazie lotu i wzrost długości liny uwzględnimy, wprowadzając pojęcie **energii potencjalnej sprężystości** E_p. Jest to energia związana ze stopniem ściśnięcia lub rozciągnięcia ciała sprężystego, w naszym przypadku liny bungee.

Fizyka mówi, jak obliczyć energię potencjalną układu, którą można zmagazynować w układzie lub wykorzystać. Na przykład przed każdym skokiem na bungee ktoś (najczęściej inżynier mechanik) musi wybrać linę odpowiednią dla skoczka przygotowującego się do skoku, wyznaczając spodziewaną dla danej osoby grawitacyjną energię potencjalną i energię potencjalną sprężystości. Przecież chodzi o to, by skok był nie tylko podniecający, lecz również bezpieczny.

Praca i energia potencjalna

W rozdziale 7 analizowaliśmy związek pracy ze zmianą energii kinetycznej. Teraz omówimy związek pracy ze zmianą energii potencjalnej.

Rzućmy do góry pomidor (rys. 8.2). Wiemy już, że gdy pomidor wznosi się, praca W_g wykonana nad nim przez siłę ciężkości jest ujemna, ponieważ w wyniku działania tej siły energia kinetyczna pomidora *maleje*. Możemy teraz dopowiedzieć rzecz do końca, stwierdzając, że siła ciężkości zamienia tę energię w grawitacyjną energię potencjalną układu pomidor–Ziemia.

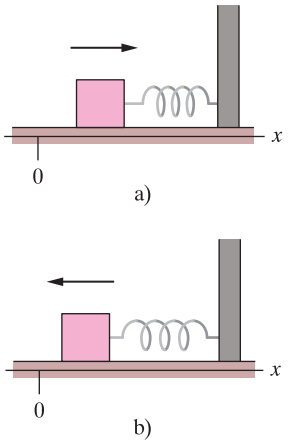


Rys. 8.2. Rzucamy pomidor w górę. Gdy wznosi się on, siła ciężkości wykonuje nad nim pracę ujemną, zmniejszając jego energię kinetyczną. Gdy pomidor spada, siła ciężkości wykonuje nad nim pracę dodatnią, przy czym jego energia kinetyczna rośnie

Pomidor zwalnia aż do prędkości równej zeru, po czym zaczyna spadać pod wpływem siły ciężkości. W czasie jego spadku energia jest przekazywana w przeciwnym kierunku. Praca W_g wykonana nad nim przez siłę ciężkości jest teraz dodatnia — w wyniku działania tej siły grawitacyjna energia potencjalna układu pomidor–Ziemia zamienia się w energię kinetyczną pomidora.

Zmianę grawitacyjnej energii potencjalnej ΔE_p definiujemy — zarówno dla wznoszenia, jak i dla spadku ciała — jako pracę wykonaną nad ciałem przez siłę ciężkości, wziętą z przeciwnym znakiem. Oznaczając pracę — jak zwykle — symbolem W, zapisujemy to stwierdzenie w postaci

$$\Delta E_p = -W. \tag{8.1}$$



Rys. 8.3. Klocek przymocowany do sprężyny pozostający początkowo w spoczynku w punkcie $x = 0$ zostaje wprawiony w ruch w prawą stronę. a) Gdy klocek porusza się w prawo (co zaznaczono za pomocą strzałki), siła sprężystości wykonuje nad nim pracę ujemną. b) Gdy później klocek porusza się w kierunku punktu $x = 0$, siła sprężystości wykonuje nad nim pracę dodatnią

Równanie to stosuje się także do układu klocek–sprężyna z rysunku 8.3. Gdy uderzymy gwałtownie klocek, aby wprawić go w ruch w prawą stronę, siła sprężystości działa w lewo, a zatem wykonuje nad klockiem pracę ujemną, co prowadzi do zamiany energii kinetycznej klocka w energię potencjalną sprężystości układu klocek–sprężyna. Klocek zwalnia aż do zatrzymania się, po czym zaczyna poruszać się w lewo, ponieważ siła sprężystości nadal działa w lewo. Kierunek zamiany energii zmienia się wtedy na przeciwny — energia potencjalna układu klocek–sprężyna zamienia się w energię kinetyczną klocka.

Siły zachowawcze i niezachowawcze

Wypiszmy najważniejsze cechy dwóch sytuacji fizycznych, które właśnie zostały przez nas omówione.

1. *Układ ciał* składa się z dwóch lub więcej ciał.
2. *Siła* działa między ciałem o właściwościach cząstki (pomidor lub klocek) a resztą układu.
3. Gdy zmienia się konfiguracja układu, siła wykonuje *pracę* nad ciałem (oznaczmy ją przez W_1), przy czym energia kinetyczna E_k ciała zamienia się na inną postać energii układu.
4. Gdy zmiana konfiguracji układu zachodzi w drugą stronę, zamiana energii przebiega w przeciwnym kierunku, a siła wykonuje pracę W_2.

W sytuacji, gdy zawsze spełniony jest związek $W_1 = -W_2$, energia kinetyczna zamieniana jest na energię potencjalną, a siłę nazywamy **siłą zachowawczą**. Jak już zapewne się domyślasz, siła ciężkości i siła sprężystości są siłami zachowawczymi (gdyby tak nie było, nie moglibyśmy mówić o grawitacyjnej energii potencjalnej i energii potencjalnej sprężystości, jak to robiliśmy przed chwilą).

Siłę, która nie jest zachowawcza, nazywamy **siłą niezachowawczą**. Siła tarcia kinetycznego i siła oporu są niezachowawcze. Rozważmy na przykład klocek ślizgający się po podłodze w obecności tarcia. W czasie ruchu klocka siła tarcia kinetycznego działająca na klocek ze strony podłogi wykonuje nad nim pracę ujemną, spowalniając jego ruch i zamieniając jego energię kinetyczną na inny rodzaj energii — *energię termiczną* (związaną z ruchem chaotycznym atomów i cząsteczek). Wiemy z doświadczenia, że ta zamiana energii nie może być odwrócona (energia termiczna nie może zostać zamieniona przez siłę tarcia kinetycznego z powrotem w energię kinetyczną klocka). Choć zatem mamy układ ciał (złożony z klocka i podłogi), siłę działającą między elementami układu i zamianę energii związaną z działaniem tej siły, to siła ta nie jest zachowawcza. W związku z tym energia termiczna nie jest energią potencjalną.

W przypadku gdy na ciało działają jedynie siły zachowawcze, można podać metody znacznie upraszczające rozwiązywanie zadań dotyczących ruchu tego ciała. Jedną z takich metod omówimy w następnym paragrafie, w którym pokażemy, jak sprawdzić, czy siły są zachowawcze.

Siły zachowawcze: niezależność pracy od drogi

Podstawowe kryterium pozwalające stwierdzić, czy siła jest zachowawcza, czy niezachowawcza jest następujące: należy zbadać działanie siły na cząstkę poruszającą się po dowolnej *drodze zamkniętej*, tzn. rozpoczyna-

jącą ruch w jakimś punkcie początkowym i powracającą do tego punktu po pewnym czasie (czyli wykonującą *pełny obieg* pewnej drogi, o tym samym punkcie początkowym i końcowym). Siła jest zachowawcza tylko wtedy, gdy całkowita zmiana energii cząstki w czasie pełnego obiegu tej — i każdej innej — drogi zamkniętej jest równa zeru. Można to również wyrazić w następujący sposób:

Całkowita praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką poruszającą się po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zeru.

Wiemy z doświadczenia, że siła ciężkości spełnia to *kryterium drogi zamkniętej*. Przykładem może być ruch pomidora z rysunku 8.2. W punkcie, z którego zostaje wyrzucony, pomidor ma prędkość o wartości v_0 i energię kinetyczną równą $\frac{1}{2}mv_0^2$. Pod działaniem siły ciężkości pomidor zwalnia, osiąga prędkość równą zeru, po czym zaczyna spadać. W punkcie, z którego zostaje wyrzucony, ma znów prędkość o wartości v_0 i energię kinetyczną równą $\frac{1}{2}mv_0^2$. Siła ciężkości *odbiera* zatem od pomidora tyle samo energii w czasie jego wznoszenia, ile *przekazuje* mu w czasie spadku do punktu początkowego ruchu. Całkowita praca wykonana nad pomidorem przez siłę ciężkości w czasie pełnego obiegu drogi zamkniętej jest równa zeru.

Z kryterium drogi zamkniętej wynika ważny wniosek:

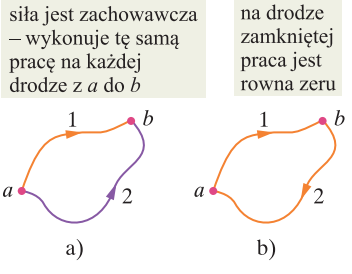
Praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką przemieszczającą się między dwoma punktami nie zależy od drogi, po jakiej porusza się cząstka.

Załóżmy na przykład, że cząstka przemieszcza się z punktu a do punktu b na rysunku 8.4a po drodze 1 albo po drodze 2. Jeśli na cząstkę działa tylko siła zachowawcza, to praca wykonana nad cząstką jest taka sama na obydwu drogach. Stwierdzenie to możemy zapisać w postaci związku

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}, \tag{8.2}$$

przy czym wskaźnik ab zawiera informację o położeniu początkowym i końcowym cząstki, a wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do drogi.

Jest to bardzo ważny wniosek pozwalający znacznie upraszczać rozwiązywanie trudnych zadań w przypadku, gdy występują tylko siły zachowawcze. Wyobraź sobie, że musisz obliczyć pracę wykonaną przez siłę zachowawczą nad ciałem poruszającym się między dwoma punktami po pewnej drodze i że obliczenia są bardzo trudne lub nawet niewykonalne bez dodatkowych informacji. Możesz wtedy wyznaczyć tę pracę, rozważając ruch cząstki między tymi dwoma punktami po innej drodze, dla której obliczenia są łatwiejsze, a więc możliwe do przeprowadzenia.



Rys. 8.4. a) Cząstka, na którą działa siła zachowawcza, może się przemieścić z punktu a do punktu b po drodze 1 lub 2. b) Cząstka wykonuje pełny obieg drogi zamkniętej: porusza się z punktu a do punktu b po drodze 1, a następnie powraca do punktu a po drodze 2

Wyprowadzenie równania (8.2)

Na rysunku 8.4b przedstawiono pewną drogę zamkniętą, przebytą przez cząstkę, na którą działa jedna siła. Cząstka porusza się z punktu a do punktu b po drodze 1, a następnie powraca do punktu a po drodze 2. W cza-

sie ruchu cząstki po obydwu drogach siła wykonuje nad nią pracę. Nie analizując, na której drodze praca ta jest dodatnia, a na której ujemna, oznaczmy po prostu pracę wykonaną od a do b na drodze 1 przez $W_{ab,1}$, a pracę wykonaną od b do a na drodze powrotnej 2 przez $W_{ba,2}$. Skoro siła jest zachowawcza, to praca całkowita na drodze zamkniętej musi być równa zeru, tzn.

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0,$$

a stąd

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}. \tag{8.3}$$

Z równania tego wynika, że praca wykonana na drodze w jedną stronę musi być przeciwna do pracy wykonanej na drodze powrotnej.

Rozważmy teraz pracę $W_{ab,2}$ wykonaną przez siłę nad cząstką w czasie jej ruchu z a do b po drodze 2, jak zaznaczono na rysunku 8.4a. Siła jest zachowawcza, a zatem praca ta jest przeciwna do $W_{ba,2}$, czyli

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}. \tag{8.4}$$

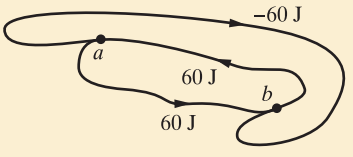
Podstawiając w równaniu (8.3) $W_{ab,2}$ zamiast $-W_{ba,2}$, otrzymujemy

$$W_{ab,1} = W_{ab,2},$$

czego zamierzaliśmy dowieść.

Sprawdzian 1

Na rysunku przedstawiono trzy drogi, które łączą punkty a i b. Działająca na cząstkę siła $\vec{F}$ wykonuje na każdej z tych dróg pracę o wartości podanej na rysunku. Korzystając z tych informacji, odpowiedz, czy siła $\vec{F}$ jest zachowawcza.

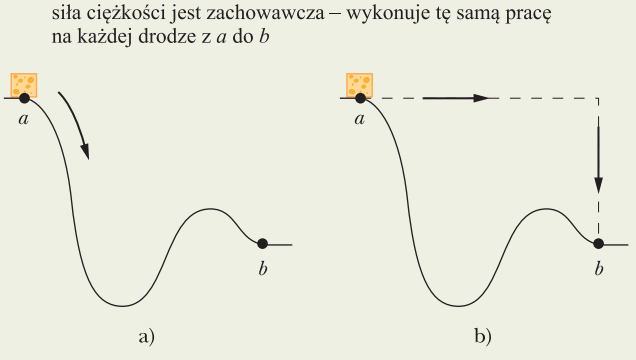


Przykład 8.01. Niezależność pracy od drogi, śliski ser

Ten przykład ma ci pokazać, że gdy siła jest zachowawcza, to nie ma nic złego w tym, by wybrać taką drogę, dla której obliczenia nie są skomplikowane. Na rysunku 8.5a pokazano blok śliskiego sera o masie 2 kg, ześlizgujący się bez tarcia z punktu a do punktu b po torze przedstawionym na rysunku. Całkowita droga przebyta przez ser po tym torze jest równa 2 m, a sumaryczna zmiana jego położenia w pionie wynosi 0,8 m. Jaką pracę wykonuje nad serem siła ciężkości w czasie jego ruchu po tym torze?

PODSTAWOWE FAKTY

1) Do obliczenia pracy wykonanej przez siłę ciężkości $\vec{F}_g$ nad serem w czasie jego ruchu po danym torze *nie możemy* zastosować wzoru (7.12) ($W_g = mgd\cos\phi$), gdyż kąt ϕ między kierunkami siły $\vec{F}_g$



Rys. 8.5. a) Blok sera ześlizguje się bez tarcia z punktu a do punktu b po torze przedstawionym na rysunku. b) Obliczenie pracy wykonanej nad serem przez siłę ciężkości na drodze oznaczonej linią przerywaną jest łatwiejsze niż wyznaczenie pracy wykonanej na drodze, po jakiej ser w rzeczywistości się przemieszczał, a wynik obliczeń jest taki sam dla obydwu dróg

i przemieszczenia $\vec{d}$ zmienia się wzdłuż toru w sposób, którego nie znamy (a gdybyśmy nawet znali dokładnie kształt toru i potrafili wyznaczyć zmienność ϕ wzdłuż tego toru, to obliczenia byłyby bardzo trudne). 2) Siła $\vec{F}_g$ jest siłą zachowawczą, więc do wyznaczenia pracy możemy zastosować jakąś inną drogę między a i b, dla której obliczenia są łatwe.

Obliczenia: Wybierzmy drogę oznaczoną na rysunku 8.5b linią przerywaną. Składa się ona z dwóch odcinków prostoliniowych. Dla odcinka poziomego kąt ϕ jest stały i wynosi 90°. Choć nie znamy przemieszczenia sera w poziomie, to na podstawie wzoru (7.12) stwierdzamy, że praca W_h, wykonana na odcinku poziomym jest równa

$$W_h = mgd\cos 90° = 0.$$

Dla odcinka pionowego przemieszczenie d jest równe 0,8 m, a ponieważ wektory $\vec{F}_g$ i $\vec{d}$ skierowane są w dół, to kąt ϕ jest stały i wynosi 0°. Z równania (7.12) wynika zatem, że praca W_v, wykonana na odcinku pionowym jest równa

$$W_v = mgd\cos 0° = (2\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}8\text{ m})(1)$$
$$= 15{,}7\text{ J}.$$

Całkowita praca wykonana nad serem przez siłę $\vec{F}_g$ w czasie jego ruchu z punktu a do punktu b, po drodze oznaczonej linią przerywaną, jest wobec tego równa

$$W = W_h + W_v$$
$$= (0) + (15{,}7\text{ J}) \approx 16\text{ J} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Jest to także wartość pracy wykonanej nad serem w czasie jego ruchu z a do b po danym torze.



Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Wyznaczanie energii potencjalnej

Wyprowadzimy teraz wzory na energię potencjalną dla dwóch jej rodzajów omawianych w tym rozdziale, tzn. dla grawitacyjnej energii potencjalnej i dla energii potencjalnej sprężystości. Najpierw jednak musimy znaleźć ogólny związek między siłą zachowawczą a związaną z nią energią potencjalną.

Rozważmy ciało o właściwościach cząstki stanowiące część układu, w którym działa siła zachowawcza $\vec{F}$. Gdy siła wykonuje nad ciałem pracę W, związana z tym zmiana energii potencjalnej układu jest przeciwna do wykonanej pracy. Związek ten zapisaliśmy już w równaniu (8.1) jako $\Delta E_p = -W$. W przypadku ogólnym, gdy siła może zależeć od położenia, praca W jest wyznaczona przez równanie (7.32), tzn.

$$W = \int_{x_{pocz}}^{x_{końc}} F(x)\,dx. \qquad (8.5)$$

Jest to wzór na pracę wykonaną przez siłę nad ciałem w czasie jego przemieszczania z punktu x_{pocz} do punktu $x_{końc}$, przy którym zmienia się konfiguracja układu (ponieważ siła jest zachowawcza, to praca jest taka sama dla każdej drogi między dwoma danymi punktami).

Podstawiając (8.5) do (8.1), wyznaczamy w postaci ogólnej zmianę energii potencjalnej układu związaną ze zmianą jego konfiguracji jako

$$\Delta E_p = -\int_{x_{pocz}}^{x_{końc}} F(x)\,dx. \qquad (8.6)$$

Grawitacyjna energia potencjalna

Rozważmy najpierw cząstkę o masie m, poruszającą się pionowo wzdłuż osi y (o kierunku dodatnim do góry). Gdy cząstka przemieszcza się z punktu y_{pocz} do punktu $y_{\text{końc}}$, siła ciężkości $\vec{F}_{\text{g}}$ wykonuje nad nią pracę. W celu wyznaczenia towarzyszącej temu zmiany energii potencjalnej układu ciało–Ziemia zastosujemy równanie (8.6), z tym że: 1) całkować będziemy wzdłuż osi y, a nie x, gdyż siła ciężkości działa w pionie, 2) zamiast siły F podstawimy wartość $-mg$, ponieważ siła $\vec{F}_{\text{g}}$ ma wartość mg i jest skierowana wzdłuż osi y w dół. Mamy wobec tego

$$\Delta E_{\text{p}} = -\int_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}} (-mg)\,\mathrm{d}y = mg\int_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}} \mathrm{d}y = mg\left[y\right]_{y_{\text{pocz}}}^{y_{\text{końc}}},$$

skąd wynika, że

$$\Delta E_{\text{p}} = mg(y_{\text{końc}} - y_{\text{pocz}}) = mg\Delta y. \tag{8.7}$$

Znaczenie fizyczne mają jedynie *zmiany* ΔE_{p} grawitacyjnej energii potencjalnej (tak samo, jak każdego innego rodzaju energii potencjalnej). Dla wygody obliczeń i rozważań przyjmujemy jednak nieraz, że konfiguracji układu cząstka–Ziemia, w której cząstka znajduje się na pewnej wysokości y nad Ziemią, odpowiada pewna grawitacyjna energia potencjalna E_{p}. W tym celu zapiszmy równanie (8.7) w postaci

$$E_{\text{p}} - E_{\text{p pocz}} = mg(y - y_{\text{pocz}}) \tag{8.8}$$

i uznajmy, że $E_{\text{p pocz}}$ jest grawitacyjną energią potencjalną układu w **konfiguracji odniesienia**, w której cząstka znajduje się w **punkcie odniesienia** y_{pocz}. Zazwyczaj przyjmuje się, że $E_{\text{p pocz}} = 0$ i $y_{\text{pocz}} = 0$. Równanie (8.8) przybiera wtedy następującą postać:

$$E_{\text{p}}(y) = mgy \qquad \text{(grawitacyjna energia potencjalna).} \tag{8.9}$$

Z tego równania wynika, że



Grawitacyjna energia potencjalna układu cząstka–Ziemia zależy jedynie od położenia y cząstki w pionie, liczonego względem punktu odniesienia $y = 0$ (czyli jej wysokości), a nie zależy od jej położenia w poziomie.

Energia potencjalna sprężystości

Rozważmy teraz układ klocek–sprężyna przedstawiony na rysunku 8.3, w którym ruchomy klocek jest przymocowany do końca sprężyny o stałej sprężystości k. Gdy klocek przemieszcza się z punktu x_{pocz} do punktu $x_{\text{końc}}$, działa na niego siła sprężystości $F = -kx$. W celu wyznaczenia odpowiadającej temu zmiany energii potencjalnej sprężystości układu klocek–sprężyna korzystamy z równania (8.6), w którym podstawiamy $-kx$ zamiast $F(x)$. Otrzymujemy

$$\Delta E_{\text{p}} = -\int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} (-kx)\,\mathrm{d}x = k\int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}},$$

czyli

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{końc}}^2 - \tfrac{1}{2}kx_{\mathrm{pocz}}^2. \qquad (8.10)$$

Aby powiązać energię potencjalną E_{p} z położeniem klocka x, wybieramy jako konfigurację odniesienia stan układu, gdy sprężyna jest nieodkształcona, a klocek znajduje się w punkcie $x_{\mathrm{pocz}} = 0$. Energia potencjalna $E_{\mathrm{p\ pocz}}$ jest wtedy równa zeru i równanie (8.10) przybiera postać

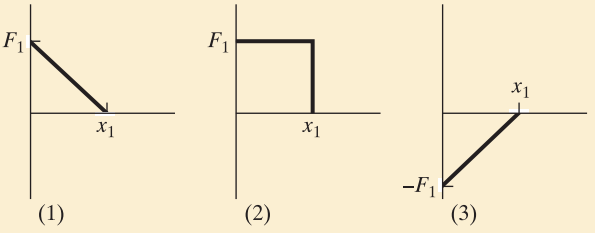
$$E_{\mathrm{p}} - 0 = \tfrac{1}{2}kx^2 - 0,$$

z czego wynika

$$E_{\mathrm{p}}(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(energia potencjalna sprężystości).} \qquad (8.11)$$

Sprawdzian 2

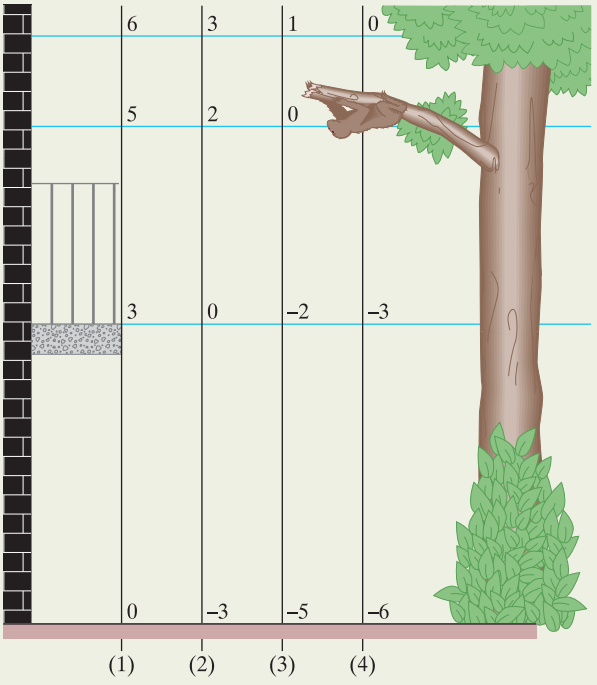
Cząstka, na którą działa siła zachowawcza skierowana wzdłuż osi x, przemieszcza się wzdłuż tej osi od $x = 0$ do x_1. Na rysunkach przedstawiono zależności siły od położenia w trzech przypadkach. We wszystkich przypadkach największa wartość bezwzględna siły F_1 jest taka sama. Uszereguj te przypadki według wartości zmiany energii potencjalnej podczas ruchu cząstki, począwszy od największej (dodatniej).



Przykład 8.02. Poziom odniesienia dla grawitacyjnej energii potencjalnej, leniwiec

W tym przykładzie pokażemy ci, że poziom odniesienia możesz wybrać tak, jak ci wygodnie, lecz potem musisz się już tego trzymać. Leniwiec o masie 2 kg wisi na gałęzi na wysokości 5 m nad ziemią (rys. 8.6).

a) Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna E_{p} układu leniwiec–Ziemia, gdy jako punkt odniesienia $y = 0$ wybierzemy położenie: 1) powierzchni ziemi, 2) podłogi balkonu znajdującego się o 3 m nad ziemią, 3) gałęzi, na której wisi leniwiec, 4) korony drzewa znajdującej się o 1 m nad tą gałęzią? Przyjmij, że na poziomie odniesienia $y = 0$ grawitacyjna energia potencjalna jest równa zeru.



Rys 8.6. Cztery przypadki wyboru punktu odniesienia $y = 0$. Wszystkie wartości y podano w metrach. Wartość energii potencjalnej układu leniwiec–Ziemia zależy od wyboru punktu odniesienia. Od tego wyboru nie zależy jednak zmiana energii potencjalnej ΔE_{p} układu w czasie ruchu leniwca, na przykład, gdy spada on z gałęzi

PODSTAWOWE FAKTY

Gdy ustalony jest punkt odniesienia, dla którego $y = 0$, grawitacyjną energię potencjalną E_p układu *względem tego punktu odniesienia* można wyznaczyć z równania (8.9).

Obliczenia: W przypadku 1 leniwiec znajduje się na wysokości $y = 5$ m i otrzymujemy:

$$E_p = mgy = (2\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(5\text{ m}) = 98\text{ J} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

W pozostałych przypadkach otrzymujemy:
2) $E_p = mgy = mg(2\text{ m}) = 39\text{ J}$,
3) $E_p = mgy = mg(0) = 0\text{ J}$,
4) $E_p = mgy = mg(-1\text{ m}) = -19{,}6\text{ J} \approx -20\text{ J}$ (odpowiedź).

b) Leniwiec spada na ziemię. Jaka jest przy tym zmiana energii potencjalnej ΔE_p układu leniwiec–Ziemia w każdym z przypadków wyboru punktu odniesienia?

PODSTAWOWE FAKTY

Zmiana energii potencjalnej nie zależy od wyboru poziomu odniesienia $y = 0$; zależy ona od zmiany wysokości Δy.

Obliczenia: We wszystkich czterech przypadkach mamy taką samą wartość $\Delta y = -5$ m. Wobec tego z równania (8.7) wynika, że we wszystkich przypadkach (od 1 do 4)

$$\Delta E_p = mg\Delta y = (2\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(-5\text{ m}) = -98\text{ J} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

8.2. ZACHOWANIE ENERGII MECHANICZNEJ

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

8.05 wybrać ciała tworzące układ i wyznaczyć energię mechaniczną układu jako sumę energii kinetycznej i energii potencjalnej wszystkich ciał tworzących ten układ;

8.06 zastosować dla układu izolowanego, w którym działają tylko siły zachowawcze, zasadę zachowania energii mechanicznej wiążącą energię kinetyczną i potencjalną układu w pewnej chwili początkowej z energią kinetyczną i potencjalną układu w jakiejś chwili końcowej.

Podstawowe fakty

- Energia mechaniczna układu jest sumą jego energii kinetycznej E_k i energii potencjalnej E_p:

$$E_{mech} = E_k + E_p.$$

- Układ nazywamy izolowanym, gdy żadne siły zewnętrzne nie powodują zmian energii w obrębie układu. Jeśli w układzie izolowanym pracę wykonują jedynie siły zachowawcze, to energia mechaniczna układu E_{mech} nie może ulegać zmianie. Jest to treść zasady zachowania energii mechanicznej, którą można wyrazić równaniem

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1},$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil w trakcie procesu wymiany energii. Zachowanie energii mechanicznej wyraża też równanie

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0.$$

Zachowanie energii mechanicznej

Energia mechaniczna E_{mech} układu jest sumą jego energii potencjalnej E_p oraz energii kinetycznej E_k wszystkich jego składników:

$$E_{mech} = E_k + E_p \qquad \text{(energia mechaniczna)}. \tag{8.12}$$

W tym podrozdziale zbadamy, co dzieje się z energią mechaniczną, gdy zamiana energii w układzie zachodzi jedynie pod wpływem sił zachowawczych, tzn. gdy na składniki układu nie działają siły tarcia ani siły oporu ośrodka. Założymy również, że układ jest *izolowany* od otoczenia, tzn. że żadne *siły zewnętrzne* pochodzące od ciał spoza układu nie powodują zmian energii w obrębie układu.

Gdy siła zachowawcza wykonuje pracę W nad jednym z ciał układu, zachodzi zamiana energii kinetycznej E_k ciała w energię potencjalną E_p układu. Z równania (7.10) wynika, że zmiana energii kinetycznej ΔE_k jest równa

$$\Delta E_k = W, \tag{8.13}$$

a z równania (8.1) — że zmiana energii potencjalnej wynosi

$$\Delta E_p = -W. \tag{8.14}$$

Z równań (8.13) i (8.14) otrzymujemy zatem

$$\Delta E_k = -\Delta E_p. \tag{8.15}$$

Oznacza to, że wzrost jednego z tych rodzajów energii jest dokładnie równy ubytkowi drugiego z nich.

Równanie (8.15) możemy również zapisać w postaci

$$E_{k2} - E_{k1} = -(E_{p2} - E_{p1}), \tag{8.16}$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil, a zatem do dwóch różnych konfiguracji składników układu. Przekształcając równanie (8.16), otrzymujemy

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1} \qquad \text{(zachowanie energii mechanicznej).} \tag{8.17}$$

Z równania tego wynika, że gdy układ jest izolowany, a na jego składniki działają jedynie siły zachowawcze, to

$$\begin{pmatrix}\text{suma } E_k \text{ i } E_p \text{ dla}\\ \text{dowolnego stanu układu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{suma } E_k \text{ i } E_p \text{ dla}\\ \text{każdego innego stanu układu}\end{pmatrix}.$$

Można to wyrazić jeszcze inaczej:

W układzie izolowanym, w którym zamiana energii pochodzi jedynie od sił zachowawczych, energia kinetyczna i energia potencjalna mogą się zmieniać, lecz ich suma, czyli energia mechaniczna E_{mech}, nie może ulegać zmianie.

Twierdzenie to nazywamy **zasadą zachowania energii mechanicznej** (widzisz teraz, czemu zawdzięczają swoją nazwę siły *zachowawcze*). Korzystając z równania (8.15), możemy tę zasadę zapisać w jeszcze innej postaci

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \tag{8.18}$$

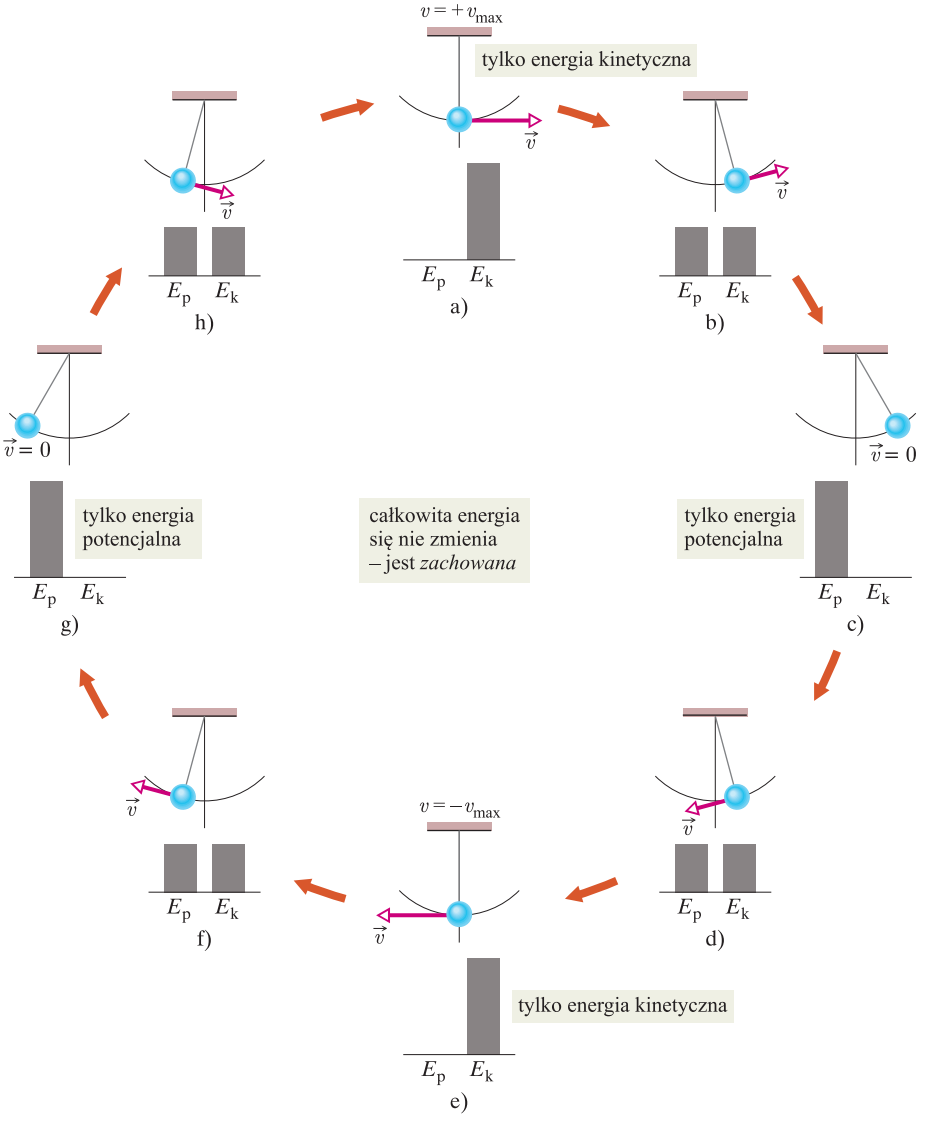
Zasada zachowania energii mechanicznej umożliwi nam rozwiązanie zadań, które są bardzo trudne, gdy korzysta się jedynie z zasad dynamiki. Wynika to z następującego twierdzenia:



W dawnych czasach osoby podrzucano przy użyciu koca, by mogły dalej sięgnąć wzrokiem nad równiną. Dziś to już tylko zabawa. Gdy widoczna na zdjęciu osoba leci w górę, jej energia kinetyczna zamienia się w grawitacyjną energię potencjalną. W najwyższym punkcie toru cała energia kinetyczna tej osoby jest już zamieniona w potencjalną. W czasie spadku zamiana energii przebiega w drugą stronę (© AP/Wide World Photos)

Gdy energia mechaniczna układu jest zachowana, można powiązać ze sobą sumę energii kinetycznej i potencjalnej w pewnej chwili i w jakiejś innej chwili *bez analizowania ruchu układu w chwilach pośrednich* i *bez wyznaczania pracy wykonanej przy tym przez siły działające w układzie*.

Na rysunku 8.7 przedstawiono przykład zastosowania zasady zachowania energii mechanicznej. W czasie drgań wahadła energia układu wahadło–Ziemia zmienia się okresowo z energii kinetycznej E_k w grawitacyjną energię potencjalną E_p i na odwrót, przy czym ich suma $E_k + E_p$ pozostaje stała. Jeśli znamy grawitacyjną energię potencjalną w chwili, gdy kulka osiąga największe wzniesienie (rys. 8.7c), to korzystając z równania (8.17), możemy wyznaczyć energię kinetyczną kulki w najniższym punkcie jej toru (rys. 8.7e).



Rys. 8.7. Wahadło, którego masa jest skupiona w kulce, wykonuje drgania — na rysunku przedstawiono ich pełny okres. W czasie ruchu wahadła kulka wznosi się i opada, przy czym zmienia się energia potencjalna i kinetyczna układu wahadło–Ziemia, lecz energia mechaniczna E_{mech} układu pozostaje stała. Można powiedzieć, że energia mechaniczna zmienia w sposób ciągły postać z kinetycznej na potencjalną i na odwrót. W fazach (a) i (e) cała energia układu jest energią kinetyczną. Kulka ma wtedy największą prędkość i znajduje się w najniższym punkcie toru. W fazach (c) i (g) cała energia układu jest energią potencjalną. Kulka ma wtedy prędkość równą zeru i znajduje się w najwyższym punkcie toru. W fazach (b), (d), (f) i (h) połowę energii układu stanowi energia kinetyczna, a połowę — potencjalna. Gdyby w czasie ruchu wahadła występowało tarcie w punkcie zaczepienia wahadła do sufitu lub gdyby ruch kulki napotykał opór powietrza, to energia mechaniczna E_{mech} nie byłaby zachowana i po pewnym czasie wahadło by się zatrzymało

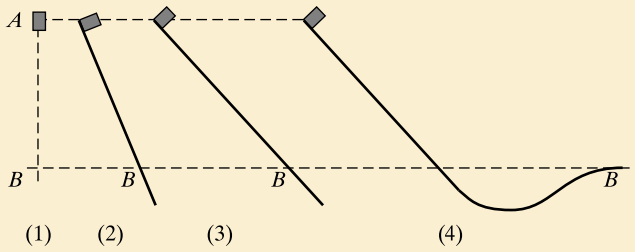
Jako punkt odniesienia możemy wybrać na przykład najniższy punkt toru kulki i przyjąć, że w tym punkcie grawitacyjna energia potencjalna $E_{p2} = 0$. Załóżmy, że w najwyższym punkcie toru energia potencjalna wynosi $E_{p1} = 20$ J względem wybranego punktu odniesienia. W najwyższym punkcie toru kulka ma prędkość równą zeru, więc energia kinetyczna w tym punkcie $E_{k1} = 0$. Wstawiając te wartości do równania (8.17), otrzymujemy energię kinetyczną E_{k2} kulki w najniższym punkcie toru:

$$E_{k2} + 0 = 0 + 20\ \text{J}, \qquad \text{czyli} \qquad E_{k2} = 20\ \text{J}.$$

Zauważ, że otrzymaliśmy ten wynik bez analizowania ruchu kulki między punktami jej największego i najmniejszego wzniesienia (jak na rys. 8.7d), a także bez wyznaczania pracy wykonanej przez siły powodujące ruch wahadła.

Sprawdzian 3

Na rysunku przedstawiono cztery przypadki ruchu klocka pozostającego początkowo w spoczynku. W jednym z nich klocek spada swobodnie, a w pozostałych ześlizguje się bez tarcia po pochylniach o różnym nachyleniu i kształcie. a) Uszereguj te przypadki według energii kinetycznej klocka w punkcie B, od wartości największej do najmniejszej. b) Uszereguj przypadki według wartości prędkości klocka w punkcie B, od największej do najmniejszej.



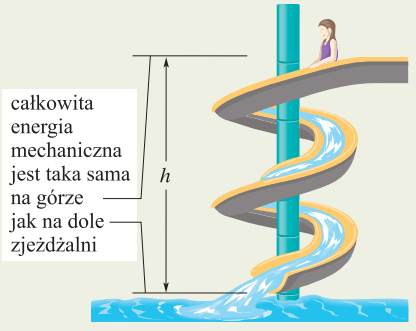
Przykład 8.03. Zachowanie energii mechanicznej, zjeżdżalnia wodna

Zasada zachowania energii bardziej się przydaje w zadaniach niż zasady dynamiki Newtona przede wszystkim dlatego, że umożliwia powiązanie stanu końcowego układu wprost z jego stanem początkowym bez analizowania pośrednich stanów ruchu. Przekonaj się o tym na poniższym przykładzie. Jak pokazano na rysunku 8.8, dziecko o masie m, nieruchome w chwili początkowej, zaczyna ześlizgiwać się wzdłuż zjeżdżalni wodnej. Punkt startowy znajduje się na wysokości $h = 8{,}5$ m nad dolnym końcem zjeżdżalni. Zakładając, że zjazd dziecka odbywa się — ze względu na obecność wody — bez tarcia, wyznacz prędkość dziecka na końcu zjeżdżalni.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Do wyznaczenia prędkości dziecka na końcu zjeżdżalni nie możemy zastosować przyspieszenia jego ruchu — jak to robiliśmy w poprzednich rozdziałach — gdyż nie znamy nachylenia zjeżdżalni. Jednak prędkość jest związana z energią kinetyczną, dlatego być może uda nam się wyznaczyć tę prędkość na podstawie zasady zachowania energii mechanicznej. Gdyby nam się to powiodło, to nie musielibyśmy znać ani nachylenia, ani w ogóle kształtu zjeżdżalni. 2) Energia mechaniczna jest jednak zachowana jedynie w układzie izolowanym, w którym zamiana energii jest powodowana przez siły zachowawcze. Sprawdźmy, czy tak jest w naszym przypadku.

Siły: Na dziecko działają dwie siły. *Siła ciężkości*, która wykonuje nad nim pracę jest siłą zachowawczą. *Siła normalna*, działająca na dziecko ze strony zjeżdżalni nie wykonuje nad nim pracy, gdyż w każ-



Rys. 8.8. Dziecko ześlizguje się ze zjeżdżalni wodnej o wysokości h

dym punkcie toru jest prostopadła do kierunku ruchu dziecka.

Układ: Jedyną siłą, jaka wykonuje pracę nad dzieckiem jest siła ciężkości, dlatego możemy rozważać układ dziecko–Ziemia. Możemy też przyjąć, że jest to układ izolowany.

Wobec tego, skoro rozpatrujemy układ izolowany, a pracę wykonuje w nim siła zachowawcza, *możemy* skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej.

Obliczenia: Oznaczmy energię mechaniczną układu, gdy dziecko znajduje się na górze zjeżdżalni, przez $E_{\text{mech,g}}$, a gdy znajduje się ono na dole — przez $E_{\text{mech,d}}$. Z zasady zachowania energii mechanicznej wynika, że

$$E_{\text{mech,d}} = E_{\text{mech,g}}. \tag{8.19}$$

Zapisując energię mechaniczną jako sumę energii kinetycznej i potencjalnej, otrzymujemy

$$E_{\text{k,d}} + E_{\text{p,d}} = E_{\text{k,g}} + E_{\text{p,g}}, \tag{8.20}$$

czyli

$$\tfrac{1}{2}mv_{\text{d}}^2 + mgy_{\text{d}} = \tfrac{1}{2}mv_{\text{g}}^2 + mgy_{\text{g}}.$$

Po podzieleniu obydwu stron tego równania przez m i jego przekształceniu otrzymujemy

$$v_{\text{d}}^2 = v_{\text{g}}^2 + 2g(y_{\text{g}} - y_{\text{d}}).$$

Podstawiając do tego wzoru $v_{\text{g}} = 0$ oraz $y_{\text{g}} - y_{\text{d}} = h$, dostajemy

$$v_{\text{d}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(8{,}5\ \text{m})} = 13\ \text{m/s}$$

(odpowiedź).

Jest to prędkość o takiej samej wartości, jaką miałoby dziecko po spadku swobodnym z wysokości 8,5 m. W rzeczywistości na zjeżdżalni występuje zawsze pewna siła tarcia i ruch dziecka jest nieco wolniejszy.

Uwaga: Zadanie to, trudne do rozwiązania na podstawie zasad dynamiki, okazało się całkiem proste, gdy do jego rozwiązania zastosowaliśmy zasadę zachowania energii mechanicznej. Gdybyśmy jednak chcieli znaleźć czas, po jakim dziecko znajdzie się na końcu zjeżdżalni, to zasada zachowania energii na nic by się nam nie przydała — musielibyśmy znać kształt zjeżdżalni i zadanie nie byłoby łatwe do rozwiązania.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

8.3. ZASTOSOWANIE KRZYWYCH ENERGII POTENCJALNEJ

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

8.07 wyznaczyć siłę działającą na cząstkę, znając jej energię potencjalną jako funkcję położenia x;

8.08 wyznaczyć siłę działającą na cząstkę z wykresu jej energii potencjalnej jako funkcji x;

8.09 narysować na wykresie energii potencjalnej jako funkcji x prostą poziomą odpowiadającą energii mechanicznej cząstki i wyznaczyć na tej podstawie energię kinetyczną cząstki w dowolnym punkcie x;

8.10 gdy cząstka porusza się wzdłuż osi x, wykorzystać wykres energii potencjalnej jako funkcji współrzędnej x i zasadę zachowania energii mechanicznej do powiązania ze sobą wartości energii cząstki w dwóch jej położeniach;

8.11 znaleźć na wykresie energii potencjalnej punkty zwrotne ruchu cząstki i obszary, w których cząstka nie może się znajdować ze względów energetycznych;

8.12 wyjaśnić pojęcia równowagi obojętnej, równowagi trwałej i równowagi nietrwałej.

Podstawowe fakty

- Jeśli znamy zależność energii potencjalnej od położenia cząstki $E_{\text{p}}(x)$ dla układu, w którym na cząstkę działa siła $F(x)$, to siła ta jest równa

$$F(x) = -\frac{\text{d}E_{\text{p}}(x)}{\text{d}x}.$$

- Jeśli znamy $E_{\text{p}}(x)$ w postaci graficznej (czyli w postaci wykresu), to w każdym punkcie x siła $F(x)$ jest równa wziętemu z przeciwnym znakiem nachyleniu krzywej w tym punkcie, a energia kinetyczna cząstki jest dana wzorem

$$E_{\text{k}}(x) = E_{\text{mech}} - E_{\text{p}}(x),$$

gdzie E_{mech} jest energią mechaniczną układu.

- Punktem zwrotnym nazywamy punkt x, w którym cząstka zmienia kierunek ruchu (co oznacza, że w tym punkcie $E_{\text{k}} = 0$).

- Cząstka jest w równowadze w punkcie, w którym nachylenie krzywej $E_{\text{p}}(x)$ jest równe zeru (co oznacza, że $F(x) = 0$).

Zastosowanie krzywych energii potencjalnej

Rozważmy jeszcze raz cząstkę będącą składnikiem układu, w którym działa siła zachowawcza. Przyjmijmy tym razem, że w czasie, gdy siła zachowawcza wykonuje nad nią pracę, cząstka może się poruszać tylko wzdłuż osi x. Bardzo wiele informacji o ruchu cząstki można uzyskać z wykresu energii potencjalnej układu jako funkcji położenia cząstki $E_p(x)$. Zanim jednak przejdziemy do analizy takich wykresów, wyprowadzimy jeszcze jeden związek.

Jak analitycznie wyznaczyć siłę?

Z równania (8.6) wiemy, jak w przypadku jednowymiarowym wyznaczyć zmianę energii potencjalnej ΔE_p między dwoma położeniami cząstki, jeśli znamy siłę $F(x)$. Obecnie chcemy skorzystać z tego równania w celu odwrotnym — chcielibyśmy wyznaczyć siłę, znając zależność energii potencjalnej od położenia $E_p(x)$.

Dla ruchu w jednym wymiarze praca W wykonana nad cząstką przez działającą na nią siłę, przy przemieszczeniu cząstki o odcinek Δx, wynosi $F(x)\Delta x$. Równanie (8.1) możemy zatem zapisać w postaci

$$\Delta E_p(x) = -W = -F(x)\Delta x. \tag{8.21}$$

Rozwiązując to równanie względem siły $F(x)$ i przechodząc w granicy do pochodnej, otrzymujemy

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} \qquad \text{(ruch w jednym wymiarze)}, \tag{8.22}$$

co jest wyrażeniem, które zamierzaliśmy wyprowadzić.

Aby sprawdzić ten wzór, podstawmy do niego $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$, czyli wyrażenie na energię sprężystości sprężyny. Z równania (8.22) otrzymujemy — jak się należało spodziewać — $F(x) = -kx$, czyli prawo Hooke'a. Podobnie możemy do tego wzoru podstawić $E_p(x) = mgx$, czyli wyrażenie na grawitacyjną energię potencjalną układu cząstka–Ziemia, gdy cząstka o masie m znajduje się na wysokości x nad ziemią. Z równania (8.20) otrzymujemy wówczas $F = -mg$, czyli wyrażenie na działającą na cząstkę siłę ciężkości.

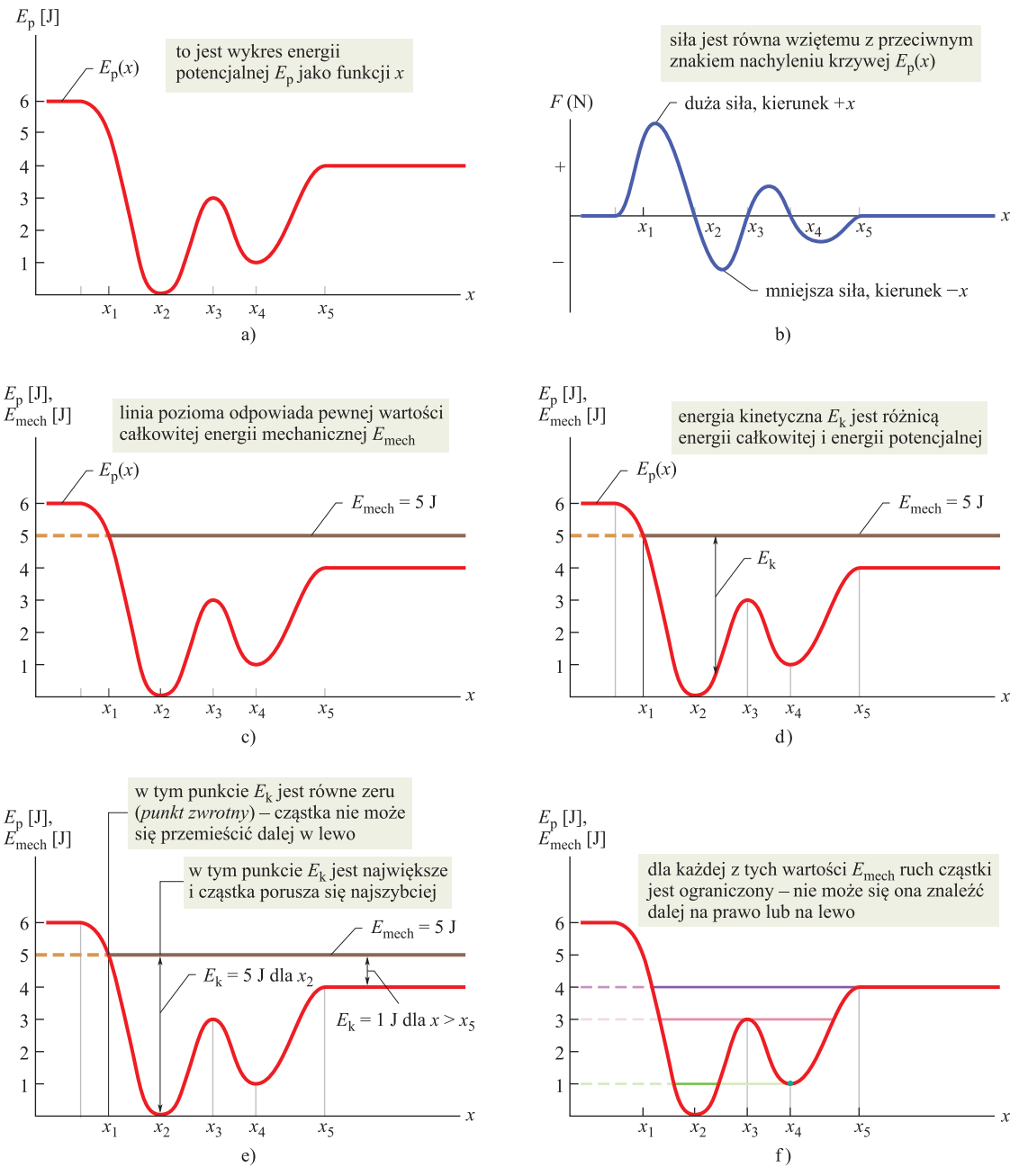
Krzywa energii potencjalnej

Na rysunku 8.9a przedstawiono wykres energii potencjalnej $E_p(x)$, jako funkcji położenia cząstki, dla układu zawierającego cząstkę poruszającą się w jednym wymiarze, nad którą pracę wykonuje siła zachowawcza $F(x)$. Siłę tę możemy łatwo wyznaczyć z tego wykresu, znajdując (graficznie) nachylenie krzywej $E_p(x)$ w różnych jej punktach (wiemy z równania (8.22), że wartość $F(x)$ jest przeciwna do nachylenia krzywej $E_p(x)$). Na rysunku 8.9b przedstawiono otrzymany w ten sposób wykres $F(x)$.

Punkty zwrotne

Pod nieobecność sił niezachowawczych energia mechaniczna E_{mech} układu ma wartość stałą daną równaniem

$$E_p(x) + E_k(x) = E_{mech}, \tag{8.23}$$



Rys. 8.9. a) Wykres $E_p(x)$, czyli zależności energii potencjalnej od położenia, dla układu zawierającego cząstkę mogącą poruszać się tylko wzdłuż osi x. Nie ma tarcia, więc energia mechaniczna jest zachowana. b) Wykres działającej na cząstkę siły $F(x)$ jako funkcji położenia otrzymanej z krzywej energii potencjalnej przez wyznaczenie jej nachylenia w poszczególnych punktach. c)–e) Wyznaczenie energii kinetycznej. f) Wykres $E_p(x)$, jak w punkcie (a), dla trzech wartości energii E_{mech}. **Na stronie *WileyPLUS* dostępna jest animacja tego rysunku z komentarzem słownym**

w którym $E_k(x)$ opisuje energię kinetyczną cząstki jako funkcję jej położenia x. Równanie (8.21) możemy zapisać jako

$$E_k(x) = E_{mech} - E_p(x). \tag{8.24}$$

Załóżmy, że energia E_{mech} (która jest — pamiętajmy — stała) wynosi 5 J. Na rysunku 8.9c należałoby ją przedstawić jako prostą poziomą, przechodzącą przez punkt na osi energii o wartości 5 J (w istocie już to zrobiono).

Z równania (8.24) i rysunku 8.9d wynika, jak wyznaczyć energię kinetyczną E_k dla dowolnego położenia cząstki x, mianowicie z krzywej $E_p(x)$ należy odczytać wartość E_p odpowiadającą danemu położeniu x, a następnie odjąć tę wartość E_p od E_{mech}. Na przykład na rysunku 8.9e, gdy cząstka znajduje się w dowolnym punkcie na prawo od x_5, wtedy $E_k = 1$ J. Energia E_k jest największa (5 J), gdy cząstka jest w punkcie x_2, a najmniejsza (równa zeru), gdy cząstka jest w punkcie x_1.

Energia E_k nie może być ujemna (gdyż wartość v^2 jest zawsze nieujemna), więc cząstka nie może znaleźć się na lewo od punktu x_1, w tym obszarze bowiem różnica $E_{mech} - E_p$ jest ujemna. Gdy cząstka porusza się z punktu x_2 do x_1, wartość E_k maleje (cząstka zwalnia) aż do $E_k = 0$ w punkcie x_1 (cząstka ma w tym punkcie prędkość równą zeru).

Zauważ, że gdy cząstka zbliża się do punktu x_1, działająca na nią siła — dana równaniem (8.22) — jest dodatnia (ponieważ nachylenie dE_p/dx jest ujemne). Oznacza to, że po dotarciu do punktu x_1 cząstka nie pozostaje w nim, lecz zaczyna poruszać się w prawo, czyli w kierunku przeciwnym do poprzedniego kierunku jej ruchu. Punkt, w którym $E_k = 0$ (gdyż $E_p = E$) i cząstka zmienia kierunek ruchu, taki jak x_1, nazywamy **punktem zwrotnym**. Z prawej strony wykresu nie ma punktu zwrotnego (w którym $E_k = 0$). Cząstka poruszająca się w prawo będzie już zawsze poruszała się w tym kierunku.

Położenia równowagi

Na rysunku 8.9f na tę samą co poprzednio krzywą energii potencjalnej $E_p(x)$ naniesiono trzy inne wartości E_{mech}. Zobaczmy, jak zmienia się sytuacja cząstki wraz ze zmianą tej energii. Jeśli $E_{mech} = 4$ J (linia fioletowa), to punkt zwrotny znajduje się bardziej na prawo niż x_1 (między x_1 a x_2). Z drugiej strony, dla każdego punktu leżącego na prawo od x_5 energia mechaniczna układu jest równa jego energii potencjalnej. Cząstka nie ma więc energii kinetycznej, a ponieważ — jak wynika z równania (8.22) — nie działa na nią żadna siła, to musi ona pozostawać w spoczynku. Takie położenie cząstki nazywamy położeniem **równowagi obojętnej** (w takim stanie jest np. kulka szklana, która leży na poziomym blacie).

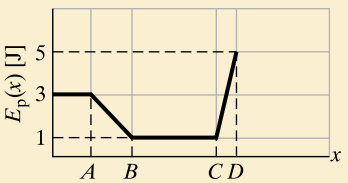
Jeśli $E_{mech} = 3$ J (linia różowa), to istnieją dwa punkty zwrotne — jeden między x_1 a x_2 oraz drugi między x_4 a x_5. Ponadto, w punkcie x_3 mamy $E_k = 0$. Na cząstkę umieszczoną dokładnie w tym punkcie nie działa żadna siła, a zatem pozostaje ona w spoczynku. Gdy jednak przemieści się ona choć trochę w którąś stronę, zacznie na nią działać siła w kierunku zgodnym z przemieszczeniem cząstki, a zatem cząstka będzie się od tego punktu oddalać. W takim przypadku mówimy o położeniu **równowagi**

nietrwałej (przykładem może być kulka szklana starannie umieszczona na szczycie kuli do kręgli).

Rozważmy jeszcze zachowanie się cząstki dla $E_{mech} = 1$ J (linia zielona). Jeśli cząstkę umieścimy w punkcie x_4, to zostanie ona w tym punkcie na zawsze. Nie może ona przemieścić się sama z tego punktu ani w lewo, ani w prawo, bo odpowiadałoby to ujemnej energii kinetycznej. Jeśli pchnęlibyśmy ją nieznacznie w lewą lub prawą stronę, to pojawiłaby się siła zwrotna kierująca cząstkę z powrotem do x_4. Takie położenie nazywamy położeniem **równowagi trwałej** (przykład: kulka szklana na dnie miski w kształcie półkuli). Cząstka umieszczona w pobliżu punktu x_2 znajdzie się między dwoma punktami zwrotnymi. Będzie ona mogła poruszać się — ale niezbyt daleko — w stronę punktu x_1 lub punktu x_3. W takiej sytuacji mówimy, że cząstka znajduje się w *studni potencjału* (w naszym przypadku o kształcie filiżanki).

Sprawdzian 4

Na rysunku przedstawiono krzywą energii potencjalnej $E_p(x)$ dla układu zawierającego cząstkę mogącą się poruszać w jednym wymiarze. a) Uszereguj obszary AB, BC i CD według wartości siły działającej na cząstkę, od największej do najmniejszej. b) Jaki jest kierunek siły działającej na cząstkę w obszarze AB?



Przykład 8.04. Korzystanie z wykresu energii potencjalnej

Ciało o masie 2 kg porusza się wzdłuż osi x, gdy działa na nią siła zachowawcza skierowana wzdłuż tej osi (zagadnienie jest jednowymiarowe). Na rysunku 8.10a przedstawiono energię potencjalną ciała $E_p(x)$ związaną z działaniem tej siły (ciało znajdujące się w punkcie x — w zakresie od $x = 0$ do $x = 7$ m — ma zaznaczoną na rysunku wartość $E_p(x)$). W punkcie $x = 6{,}5$ m ciało ma prędkość $\vec{v}_0 = (-4 \text{ m/s})\hat{i}$.

a) Wyznacz prędkość ciała w punkcie $x_1 = 4{,}5$ m na podstawie wykresu z rysunku 8.10a.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Energia kinetyczna ciała jest dana wzorem (7.1) ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$). 2) Na ciało działa siła zachowawcza, więc w trakcie jego ruchu zachowana jest energia mechaniczna E_{mech} ($= E_k + E_p$). 3) Z wykresu funkcji $E_p(x)$, jak na rysunku 8.10a, można wyznaczyć energię kinetyczną jako różnicę E_{mech} i E_p.

Obliczenia: W punkcie $x = 6{,}5$ m ciało ma energię kinetyczną

$$E_{k0} = \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}(2 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 = 16 \text{ J}.$$

W tym punkcie energia potencjalna $E_{p0} = 0$, a zatem energia mechaniczna wynosi

$$E_{mech} = E_{k0} + E_{p0} = 16 \text{ J} + 0 = 16 \text{ J}.$$

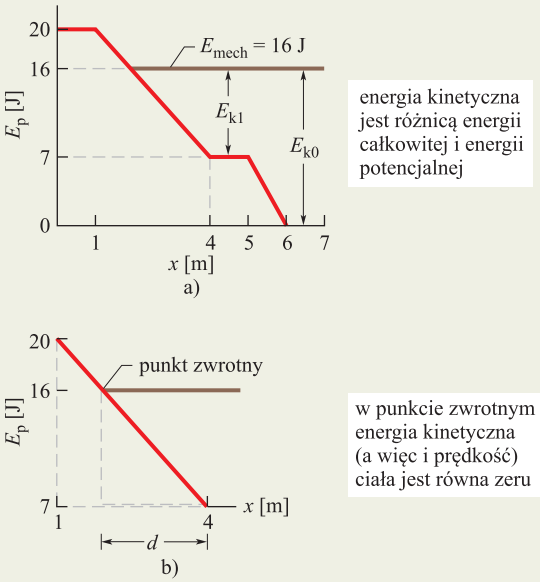
Tę wartość E_{mech} zaznaczono na rysunku 8.10a w postaci linii poziomej. Z rysunku odczytujemy, że w punkcie $x_1 = 4{,}5$ m energia potencjalna jest równa $E_{p1} = 7$ J. Energia kinetyczna E_{k1} jest różnicą E_{mech} i E_{p1}:

$$E_{k1} = E_{mech} - E_{p1} = 16 \text{ J} - 7 \text{ J} = 9 \text{ J}.$$

Ponieważ $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2$, otrzymujemy ostatecznie

$$v_1 = 3 \text{ m/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Znajdź położenie punktu zwrotnego w ruchu tego ciała.



Rys. 8.10. a) Wykres energii potencjalnej E_p jako funkcji położenia ciała x. b) Fragment tego wykresu potrzebny do wyznaczenia punktu, w którym ciało zawraca

PODSTAWOWE FAKTY

W punkcie zwrotnym działanie siły powoduje zmniejszenie się prędkości do zera, po czym ciało zaczyna się poruszać w kierunku przeciwnym do pierwotnego. Tak więc w punkcie zwrotnym $v = 0$ i $E_k = 0$.

Obliczenia: Energia kinetyczna E_k jest różnicą E_{mech} i E_p, a zatem na wykresie z rysunku 8.10a musimy znaleźć punkt, w którym prosta pozioma odpowiadająca wartości E_{mech} przecina krzywą $E_p(x)$, jak pokazano w powiększeniu na rysunku 8.10b. W przedstawionym na tym rysunku zakresie x funkcja $E_p(x)$ jest liniowa, wobec czego z podobieństwa trójkątów wynika, że

$$\frac{16\text{ J} - 7\text{ J}}{d} = \frac{20\text{ J} - 7\text{ J}}{4\text{ m} - 1\text{ m}},$$

a zatem $d = 2{,}08\text{ m} \approx 2{,}1\text{ m}$. Punkt zwrotny jest zatem punktem o współrzędnej

$$x = 4\text{ m} - d = 1{,}9\text{ m} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

c) Wyznacz siłę, jaka działa na ciało w przedziale $1{,}9\text{ m} < x < 4\text{ m}$

PODSTAWOWE FAKTY

Siła jest dana wzorem (8.22) ($F(x) = -\mathrm{d}E_p(x)/\mathrm{d}x$), czyli jest równa wziętemu z przeciwnym znakiem nachyleniu krzywej $E_p(x)$.

Obliczenia: Z wykresu na rysunku 8.10b widać, że w przedziale $1\text{ m} < x < 4\text{ m}$ siła wynosi

$$F = -\frac{7\text{ J} - 20\text{ J}}{4\text{ m} - 1\text{ m}} = 4{,}3\text{ N} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Siła ma zatem wartość 4,3 N i dodatni kierunek osi x. Tak powinno być, bo ciało poruszało się początkowo w lewo, a siła je zatrzymała i zmusiła do ruchu w prawo.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

8.4. PRACA WYKONANA NAD UKŁADEM PRZEZ SIŁĘ ZEWNĘTRZNĄ

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

8.13 wyznaczyć zmianę energii kinetycznej i potencjalnej układu, gdy praca jest wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną, a tarcie nie występuje;

8.14 podać związek, jaki łączy zmiany energii kinetycznej, potencjalnej i termicznej, gdy praca jest wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną w obecności tarcia.

Podstawowe fakty

- Gdy na układ działa siła zewnętrzna, praca wykonana przez tę siłę jest równa energii przekazanej układowi lub odebranej od niego.
- Gdy na układ działa więcej niż jedna siła, energia przekazana układowi lub odebrana od niego jest równa pracy wykonanej przez wypadkową tych sił.

- Pod nieobecność tarcia praca wykonana nad układem i zmiana jego energii mechanicznej ΔE_{mech} są sobie równe:

$$W = \Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p}}.$$

- Gdy w układzie działa siła tarcia kinetycznego, zmienia się energia termiczna układu E_{term} (związana z chaotycznym ruchem atomów i cząsteczek ciał układu). Praca wykonana nad układem jest wtedy równa

$$W = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}}.$$

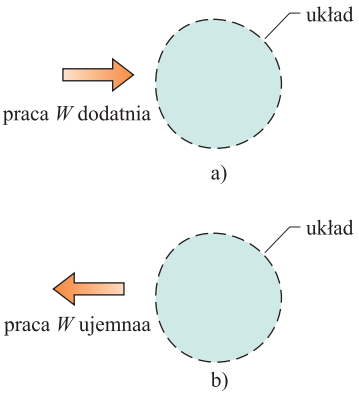
- Zmiana energii termicznej ΔE_{term} jest związana z wartością siły tarcia f_{k} i wartością przemieszczenia pod wpływem siły zewnętrznej d zależnością

$$\Delta E_{\text{term}} = f_{\text{k}} d.$$

Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną

W rozdziale 7 zdefiniowaliśmy pracę jako energię przekazaną ciału lub odebraną od niego w wyniku działania na to ciało siły. Obecnie uogólnimy tę definicję na przypadek siły zewnętrznej, działającej na układ ciał.

Praca jest równa energii przekazanej układowi lub odebranej od niego przez siłę zewnętrzną działającą na ten układ.



Rys. 8.11. a) Praca W wykonana nad dowolnym układem jest dodatnia, jeśli energia zostaje przekazana układowi. b) Praca W jest ujemna, gdy energia jest odebrana od układu

Na rysunku 8.11a przedstawiono sytuację, w której praca jest dodatnia (układ *zyskuje* energię), a na rysunku 8.11b — sytuację, w której praca jest ujemna (układ *traci* energię). Gdy na układ działa więcej niż jedna siła, energia przekazana układowi lub odebrana od niego jest równa *całkowitej pracy* wykonanej przez te siły.

Energia jest przekazywana w podobny sposób, w jaki odbywają się przelewy pieniędzy na rachunek bankowy i z tego rachunku. Jeśli układ stanowi pojedyncza cząstka lub ciało o analogicznych właściwościach, jakie rozważaliśmy w rozdziale 7, to praca wykonana przez siłę nad tym układem może zmienić jedynie jego energię kinetyczną. Praca jest wtedy równoważna zmianie energii kinetycznej, co opisuje równanie (7.10) ($\Delta E_{\text{k}} = W$). W języku bankowców powiemy, że pojedyncza cząstka ma tylko jeden rachunek energii, zwany energią kinetyczną. Siła zewnętrzna może przekazać energię na ten rachunek lub odprowadzić ją z niego. Gdy jednak układ jest bardziej złożony, siła zewnętrzna może powodować zmiany innych rodzajów energii (na przykład energii potencjalnej) — układ złożony ma wiele rachunków energii.

Spróbujemy wyznaczyć związki między pracą i energią dla takich złożonych układów, rozważając dwa podstawowe przypadki, w których nie występuje lub występuje tarcie.

Brak tarcia

Wyobraź sobie, że startujesz w konkursie rzutu kulą do kręgli. Aby wyrzucić kulę, najpierw przykucasz, umieszczając ręce na podłodze pod kulą, po czym gwałtownie prostujesz się, podnosząc jednocześnie szybko ręce, aby w końcu wyrzucić kulę pod kątem w górę, mniej więcej na wysokości twarzy. Przy twoim ruchu w górę siła, jaką działasz na kulę, niewątpliwie wykonuje pracę. Jest to siła zewnętrzna, która przekazuje energię… no właśnie — jakiemu układowi?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, zastanówmy się, jakie ciała doznają zmiany energii. Zmienia się energia kinetyczna kuli (o ΔE_k), a ponadto — ponieważ zmienia się odległość kuli od ziemi — ulega zmianie grawitacyjna energia potencjalna układu kula–Ziemia (o ΔE_p). Aby uwzględnić obie te zmiany, musimy rozpatrywać układ kula–Ziemia. Przyłożona przez ciebie siła jest siłą zewnętrzną wykonującą pracę nad tym układem, a praca ta jest równa

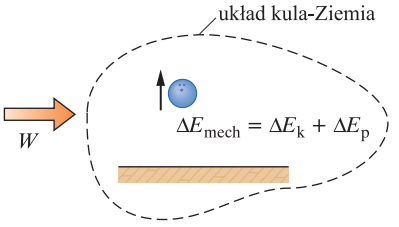
$$W = \Delta E_k + \Delta E_p, \tag{8.25}$$

czyli

$$W = \Delta E_{mech} \qquad \text{(praca wykonana nad układem, brak tarcia)}, \tag{8.26}$$

przy czym ΔE_{mech} jest zmianą energii mechanicznej układu. Dwa powyższe równania, zilustrowane także na rysunku 8.12, pozwalają stwierdzić równość pracy wykonanej nad układem przez siłę zewnętrzną i zmiany energii układu pod nieobecność tarcia.

praca siły, którą podnosisz kulę, przekazuje układowi energię kinetyczną i potencjalną



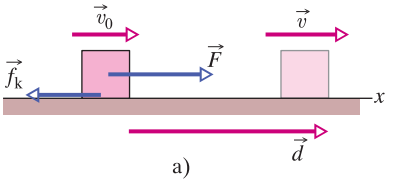
Rys. 8.12. Nad układem złożonym z kuli do kręgli i Ziemi zostaje wykonana dodatnia praca W, co powoduje zmianę energii mechanicznej ΔE_{mech} układu, zmianę energii kinetycznej ΔE_k kuli oraz grawitacyjnej energii potencjalnej ΔE_p układu

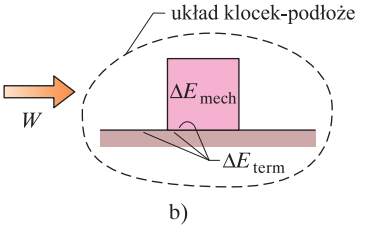
Obecność tarcia

Rozważmy obecnie sytuację przedstawioną na rysunku 8.13a. Na klocek działa wzdłuż osi x stała siła pozioma $\vec{F}$, przy czym przy przemieszczeniu klocka o d jego prędkość zwiększa się z $\vec{v}_0$ na $\vec{v}$. W czasie ruchu klocka działa na niego ze strony podłoża stała siła tarcia kinetycznego $\vec{f}_k$. Przyjmijmy początkowo, że naszym układem jest sam klocek i zastosujmy do niego drugą zasadę dynamiki. W rozważanym przypadku możemy ją zapisać dla składowych wzdłuż osi x ($F_{wyp,x} = ma_x$), skąd mamy

$$F - f_k = ma. \tag{8.27}$$

siła zewnętrzna dostarcza energię, a siła tarcia zamienia jej część na energię termiczną





zatem praca siły zewnętrznej zwiększa energię kinetyczną oraz energię termiczną

Rys. 8.13. a) Klocek porusza się po podłożu pod wpływem siły $\vec{F}$, a jego ruchowi przeciwdziała siła tarcia kinetycznego. Klocek doznaje przemieszczenia $\vec{d}$, przy czym na początku ma prędkość $\vec{v}_0$, a na końcu — $\vec{v}$. b) Siła $\vec{F}$ wykonuje dodatnią pracę W nad układem klocek–podłoże, co powoduje zmianę energii mechanicznej ΔE_{mech} klocka, oraz zmianę energii termicznej ΔE_{term} klocka i podłoża

Obie siły są stałe, a zatem stałe jest też przyspieszenie $\vec{a}$. Możemy więc skorzystać z równania (2.16), aby otrzymać

$$v^2 = v_0^2 + 2ad.$$

Rozwiązując to równanie względem a, a następnie podstawiając rozwiązanie do równania (8.27), dostajemy po przekształceniach

$$Fd = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 + f_k d. \tag{8.28}$$

Dla klocka $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta E_k$, dlatego powyższe równanie możemy zapisać jako

$$Fd = \Delta E_k + f_k d. \tag{8.29}$$

W ogólniejszym przypadku (na przykład, gdy klocek porusza się po równi pochyłej) może zachodzić również zmiana energii potencjalnej. Aby to uwzględnić, uogólnimy równanie (8.29), zapisując je w postaci

$$Fd = \Delta E_{mech} + f_k d. \tag{8.30}$$

Doświadczalnie można stwierdzić, że gdy klocek ślizga się po podłożu, sam klocek i ta część podłoża, po której się on ślizga, się rozgrzewają. Jak dowiesz się z rozdziału 18, temperaturę ciała można powiązać z energią termiczną E_{term} ciała, tzn. energią związaną z chaotycznym ruchem atomów i cząsteczek ciała. Energia termiczna klocka i podłoża wzrasta, ponieważ: 1) działa między nimi tarcie oraz 2) następuje ruch ciała. Przypomnijmy, że tarcie pochodzi od spawania na zimno stykających się ze sobą powierzchni. Gdy klocek ślizga się po podłożu, na styku powierzchni klocka i podłoża ciągle następuje zrywanie i tworzenie na nowo miejsc spawanych, dzięki czemu klocek i powierzchnia się rozgrzewają. W wyniku poślizgu rośnie zatem ich energia termiczna E_{term}.

Doświadczenie uczy nas także, że wzrost energii termicznej ΔE_{term} jest równy iloczynowi wartości f_k i d:

$$\Delta E_{term} = f_k d \qquad \text{(wzrost energii termicznej przy poślizgu).} \tag{8.31}$$

Równanie (8.30) możemy zatem zapisać jako

$$Fd = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term}. \tag{8.32}$$

Wielkość Fd jest pracą W wykonaną przez siłę zewnętrzną $\vec{F}$ (czyli energią przekazaną w wyniku działania tej siły), lecz nad jakim układem wykonana jest ta praca (jakim ciałom przekazana jest energia)? Aby odpowiedzieć na to pytanie, zastanówmy się, jakie ciała zmieniają swoją energię. Zmienia się energia mechaniczna klocka, a także energia termiczna klocka i podłoża. Wobec tego siła $\vec{F}$ wykonuje pracę nad układem klocek–podłoże. Praca ta jest równa

$$W = \Delta E_{mech} + \Delta E_{term} \qquad \text{(praca wykonana nad układem w obecności tarcia).} \tag{8.33}$$

Równanie to, które zilustrowano na rysunku 8.13b, pozwala stwierdzić równość pracy wykonanej nad układem przez siłę zewnętrzną i zmiany energii układu w obecności tarcia.

Sprawdzian 5

Wykonano trzy doświadczenia, podczas których do klocka ślizgającego się po podłożu w obecności tarcia przyłożono poziomo, jak na rysunku 8.13a, siły zewnętrzne o różnych wartościach. W tabeli podano wartości sił oraz ich wpływ na wartość prędkości klocka. We wszystkich tych doświadczeniach siła działała na klocek podczas takiego samego przemieszczenia d. Uszereguj te doświadczenia ze względu na zmianę energii termicznej klocka i podłoża, w czasie przemieszczenia klocka o d, od największej do najmniejszej.

Doświadczenie	F	Wartość prędkości klocka
a	5 N	zmalała
b	7 N	nie zmieniła się
c	8 N	wzrosła

Przykład 8.05. Praca, tarcie, zmiana energii termicznej, kapuściane głowy

Dostawca żywności pcha po betonowej podłodze drewnianą skrzynię z głowami kapusty (o całkowitej masie $m = 14$ kg), działając na nią stałą siłą poziomą $\vec{F}$ o wartości 40 N. W trakcie prostoliniowego przemieszczenia o wartości $d = 0{,}5$ m prędkość skrzyni maleje od wartości $v_0 = 0{,}6$ m/s do wartości $v = 0{,}2$ m/s.

a) Wyznacz pracę wykonaną przez siłę $\vec{F}$. Nad jakim układem jest ona wykonana?

PODSTAWOWE FAKTY

Siła zewnętrzna $\vec{F}$ jest stała, więc wykonaną przez nią pracę W możemy wyznaczyć z równania (7.7) ($W = Fd\cos\phi$).

Obliczenia: Podstawiając do równania (7.7) wartości liczbowe danych i uwzględniając fakt, że wektory siły $\vec{F}$ i przemieszczenia $\vec{d}$ mają ten sam kierunek, otrzymujemy

$$W = Fd\cos\phi = (40\text{ N})(0{,}5\text{ m})\cos 0^\circ = 20\text{ J} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Rozumowanie: Aby ustalić, które ciała stanowią układ, nad którym wykonywana jest praca, zastanówmy się, które ciała zmieniają swoje energie. Wartość prędkości skrzyni ulega zmianie, tak więc z pewnością zmienia się energia kinetyczna skrzyni. Czy między skrzynią a podłogą występuje tarcie, a więc, czy ulega zmianie energia termiczna skrzyni i podłogi? Zauważ, że kierunek siły $\vec{F}$ jest taki sam, jak kierunek prędkości skrzyni. Gdyby zatem nie było tarcia, to w wyniku działania siły $\vec{F}$ *zwiększałaby się* prędkość skrzyni. Tymczasem skrzynia *zwalnia*, a więc tarcie z pewnością występuje, a zatem następuje zmiana energii termicznej skrzyni i podłogi. Wobec tego układem, nad którym wykonywana jest praca, jest układ skrzynia–podłoga, ponieważ obie zmiany energii występują w tym układzie.

b) Ile wynosi wzrost energii termicznej ΔE_{term} układu skrzynia–podłoga?

PODSTAWOWE FAKTY

Zmiana energii termicznej ΔE_{term} jest związana z wykonaną przez siłę $\vec{F}$ pracą W za pomocą równania (8.33) wyrażającego równość pracy i zmiany energii w obecności tarcia:

$$W = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}}. \qquad (8.34)$$

Obliczenia: Wartość pracy W znamy już z punktu (a). Zmiana energii mechanicznej ΔE_{mech} skrzyni jest równa tylko zmianie jej energii kinetycznej, ponieważ energia potencjalna się nie zmienia. Mamy zatem

$$\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_{\text{k}} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (8.34) i rozwiązując je względem ΔE_{term}, otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{term}} &= W - (\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2) = W - \tfrac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)\\ &= 20\text{ J} - \tfrac{1}{2}(14\text{ kg})[(0{,}2\text{ m/s})^2 - (0{,}6\text{ m/s})^2]\\ &= 22{,}2\text{ J} \approx 22\text{ J} \qquad \text{(odpowiedź)}.\end{aligned}$$

Bez dodatkowych doświadczeń nie możemy stwierdzić, ile energii termicznej zyskała skrzynia, a ile podłoga. Znamy tylko łączny wzrost ich energii termicznej.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

8.5. ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

8.15 zastosować do układu izolowanego (czyli takiego, dla którego wypadkowa sił zewnętrznych jest równa zeru) zasadę zachowania energii wiążącą całkowitą energię układu (wszelkich jej rodzajów) w pewnej chwili początkowej z jego energią w dowolnej innej chwili;

8.16 podać dla układu, który nie jest izolowany, związek, jaki łączy pracę wykonaną nad układem przez wypadkową sił zewnętrznych ze zmianami różnych rodzajów energii układu;

8.17 zastosować związek średniej mocy ze zmianą energii i przedziałem czasu, w jakim ona zachodzi;

8.18 wyznaczyć moc chwilową (czyli szybkość zmiany energii w danej chwili), znając szybkość zmiany energii jako funkcję czasu (w postaci równania lub wykresu).

Podstawowe fakty

- Całkowita energia układu E (suma jego energii mechanicznej i energii wewnętrznej, w tym termicznej) może ulec zmianie tylko wtedy, kiedy energia zostanie dostarczona do układu lub od niego odebrana. To stwierdzenie, wynikające z doświadczenia, nosi nazwę zasady zachowania energii.
- Jeśli nad układem jest wykonana praca W, to

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wewn}}.$$

Dla układu izolowanego (dla którego $W = 0$) wynika stąd

$$\Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wewn}} = 0$$

oraz

$$E_{\text{mech},2} = E_{\text{mech},1} - \Delta E_{\text{term}} - \Delta E_{\text{wewn}},$$

gdzie wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil.

- Moc jest to *szybkość*, z jaką siła zmienia energię układu. Jeśli w przedziale czasu Δt energia się zmienia o ΔE, to moc średnia związana z działaniem siły jest równa

$$P_{\text{śr}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

- Moc chwilowa związana z działaniem siły wynosi

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

Na wykresie energii E jako funkcji czasu t moc jest równa nachyleniu krzywej w danej chwili.

Zasada zachowania energii

Omówiliśmy już wiele sytuacji, w których energia jest dostarczana ciałom lub ich układom, lub też jest od nich odbierana, co przypomina przepływ pieniędzy między rachunkami bankowymi. We wszystkich przypadkach zakładaliśmy, że każdą zmianę energii możemy jakoś wyjaśnić, że energia nie może się w cudowny sposób pojawiać ani znikać. Wyrażając to bardziej formalnie przyjmowaliśmy (prawidłowo), że energia spełnia prawo, zwane **zasadą zachowania energii**, dotyczące **całkowitej energii** E układu. Energia całkowita jest to suma energii mechanicznej układu, jego energii termicznej oraz wszystkich rodzajów jego *energii wewnętrznej*, innych niż energia termiczna (tych innych postaci energii wewnętrznej jeszcze nie omawialiśmy). Zasada ta mówi, co następuje:



> Zmiana całkowitej energii E układu jest równa energii dostarczonej do układu lub od niego odebranej.

Jedynym rozważanym przez nas dotąd sposobem zmiany energii jest wykonanie nad układem pracy W. Zatem zasadę zachowania energii możemy tymczasem zapisać w postaci

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wewn}}, \qquad (8.35)$$

przy czym ΔE_{mech} jest dowolną zmianą energii mechanicznej układu, ΔE_{term} — dowolną zmianą jego energii termicznej, a ΔE_{wewn} — dowolną zmianą innych postaci jego energii wewnętrznej. Zmiana energii mechanicznej ΔE_{mech} zawiera w sobie zmianę energii kinetycznej ΔE_{k} oraz zmianę energii potencjalnej ΔE_{p} układu (sprężystości, grawitacyjnej lub jakiejkolwiek innej).

Zasady zachowania energii *nie wyprowadziliśmy* z podstawowych praw fizyki. Jest to prawo wynikające z niezliczonych doświadczeń. Naukowcy i inżynierowie nie napotkali dotychczas żadnego wyjątku od tej zasady. Tak już jest, że energia nie może w żaden cudowny sposób pojawić się ani zniknąć.



Rys. 8.14. Opuszczając się wzdłuż ściany skalnej, alpinista dokonuje zamiany grawitacyjnej energii potencjalnej układu złożonego z siebie, swojego sprzętu i Ziemi na inne rodzaje energii. Wykonujący zjazd alpinista owinął linę wokół metalowych pierścieni, tak że lina trze o nie. Dzięki temu większość energii potencjalnej zamienia się na energię termiczną liny i pierścieni, a nie na energię kinetyczną alpinisty (fot. Greg Epperson/Shutterstock)

Układ izolowany

Jeśli układ jest izolowany od otoczenia, to energia nie może być do niego dostarczona ani od niego odebrana. W tym przypadku zasada zachowania energii ma następujące brzmienie:

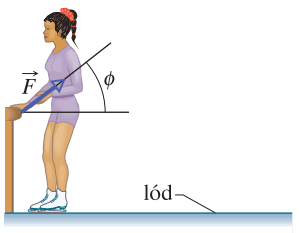
Całkowita energia E układu izolowanego nie może się zmieniać.

Wiele zmian energii może natomiast zachodzić *w obrębie* układu izolowanego, na przykład energia kinetyczna może zamieniać się na energię potencjalną lub energię termiczną. Jednakże suma wszystkich rodzajów energii w układzie nie może ulegać zmianie. Powtórzmy, że energia nie może w żaden cudowny sposób pojawić się ani zniknąć.

Jako przykład możemy przeanalizować sytuację przedstawioną na rysunku 8.14. Zakładamy, że alpinista, jego sprzęt i Ziemia stanowią układ izolowany. Opuszczając się wzdłuż ściany skalnej, przy czym zmienia się konfiguracja ciał układu, alpinista musi sterować zamianą grawitacyjnej energii potencjalnej układu na inne rodzaje energii (energia nie może po prostu znikać). Energia potencjalna zamienia się częściowo na energię kinetyczną alpinisty. Jednak nie chce on oczywiście, aby ta zamiana energii była zbyt duża, bo wtedy musiałby bardzo szybko zjeżdżać wzdłuż ściany. Aby to osiągnąć, linę przekłada się przez metalowe pierścienie, tak aby przy ruchu alpinisty w dół występowało tarcie między liną a tymi pierścieniami. Przy ślizganiu się pierścieni po linie grawitacyjna energia potencjalna układu zamienia się na energię termiczną liny i pierścieni z szybkością, którą alpinista może łatwo sterować. Całkowita energia układu alpinista–sprzęt–Ziemia (czyli suma grawitacyjnej energii potencjalnej, energii kinetycznej i energii termicznej tego układu) nie zmienia się w czasie zjazdu alpinisty wzdłuż ściany.

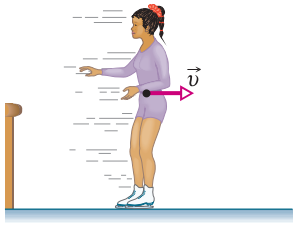
Zasadę zachowania energii w układzie izolowanym możemy zapisać na dwa sposoby. Z jednej strony, możemy wstawić w równaniu (8.35) $W = 0$, co daje

$$\Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wewn}} = 0 \qquad \text{(układ izolowany).} \qquad (8.36)$$

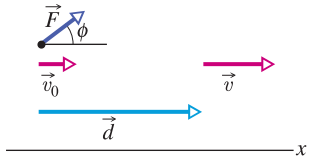


a)

odepchnięcie się łyżwiarki od poręczy powoduje zamianę jej energii wewnętrznej na energię kinetyczną

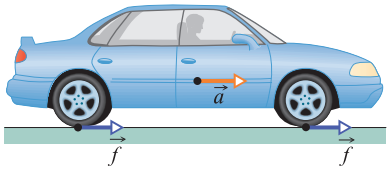


b)



c)

Rys. 8.15. a) Gdy łyżwiarka odpycha się od poręczy, działa na nią ze strony tej poręczy siła $\vec{F}$. b) Po oderwaniu się łyżwiarki od poręczy porusza się ona z prędkością $\vec{v}$. c) Na łyżwiarkę działa siła zewnętrzna $\vec{F}$ skierowana pod kątem ϕ do osi poziomej x. Gdy łyżwiarka przemieszcza się o $\vec{d}$, jej prędkość zmienia się z $\vec{v}_0$ ($= 0$) na $\vec{v}$ pod wpływem składowej poziomej siły $\vec{F}$



Rys. 8.16. Samochód z napędem na cztery koła porusza się ruchem przyspieszonym w prawo. Powierzchnia drogi działa na dolną powierzchnię opon siłami tarcia, z których dwie pokazano na rysunku. Wypadkowa siła zewnętrzna $\vec{F}$, jaka działa na samochód, jest sumą tych czterech sił

Z drugiej strony, możemy zapisać energię mechaniczną jako $\Delta E_{\text{mech}} = E_{\text{mech},2} - E_{\text{mech},1}$, gdzie wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil, na przykład przed i po zajściu pewnego procesu. Równanie (8.36) przybiera wtedy postać

$$E_{\text{mech},2} = E_{\text{mech},1} - \Delta E_{\text{term}} - \Delta E_{\text{wewn}}. \tag{8.37}$$

Z równania (8.37) wynika, że:

Dla układu izolowanego możemy powiązać całkowitą energię układu w pewnej chwili z jego całkowitą energią w innej chwili w sposób *niewymagający znajomości energii w chwilach pośrednich*.

Stwierdzenie to daje nam do ręki bardzo użyteczne narzędzie do rozwiązywania zadań dotyczących układów izolowanych w sytuacji, gdy potrzebny jest nam związek energii układu przed i po zajściu w układzie pewnego procesu.

W podrozdziale 8.2 omówiliśmy układy izolowane w pewnej szczególnej sytuacji, mianowicie, gdy nie działają w nich siły niezachowawcze (jak np. siła tarcia kinetycznego). W tym szczególnym przypadku zarówno ΔE_{term}, jak i ΔE_{wewn} wynoszą zero i równanie (8.37) sprowadza się do równania (8.18). Inaczej mówiąc, energia mechaniczna jest zachowana w układzie izolowanym, w którym nie działają siły niezachowawcze.

Siły zewnętrzne i wewnętrzne zmiany energii

Siła zewnętrzna może zmienić energię kinetyczną lub potencjalną ciała bez wykonywania nad nim pracy, tzn. bez wymiany energii z ciałem. Może bowiem spowodować zamianę jednego rodzaju energii ciała w inny jej rodzaj.

Przykład takiej sytuacji zilustrowano na rysunku 8.15. Znajdująca się początkowo w spoczynku łyżwiarka odpycha się od poręczy i zaczyna się ślizgać po lodzie (rys. 8.15a i b). Jej energia kinetyczna rośnie w wyniku działania na nią ze strony poręczy siły zewnętrznej $\vec{F}$. Siła ta nie przekazuje jednak energii od poręczy do łyżwiarki, czyli nie wykonuje nad łyżwiarką pracy. W omawianej sytuacji energia kinetyczna łyżwiarki rośnie w wyniku wewnętrznej zamiany energii mięśni łyżwiarki na jej energię kinetyczną.

Inny przykład przedstawiono na rysunku 8.16. Samochód z napędem na cztery koła (co oznacza, że silnik obraca wszystkie cztery koła pojazdu) zwiększa swoją prędkość. W trakcie przyspieszania silnik powoduje, że opony pchają powierzchnię drogi do tyłu. Dzięki temu pojawia się siła tarcia $\vec{f}$, która działa na wszystkie koła pojazdu w kierunku jego ruchu. Wypadkowa siła zewnętrzna $\vec{F}$, która działa na pojazd ze strony drogi i jest sumą sił tarcia działających na poszczególne koła, powoduje przyspieszenie $\vec{a}$ pojazdu i wzrost jego energii kinetycznej. Siła $\vec{F}$ nie przekazuje jednak energii od drogi do pojazdu, czyli nie wykonuje nad nim pracy. Energia kinetyczna samochodu rośnie w wyniku zamiany energii wewnętrznej paliwa na energię kinetyczną pojazdu.

W przypadkach podobnych do przytoczonych powyżej działającą na ciało siłę zewnętrzną $\vec{F}$ można nieraz powiązać ze zmianą energii mechanicznej ciała, jeśli uda się uprościć opis sytuacji. Rozpatrzmy przykład

z łyżwiarką. Zakładamy, że gdy łyżwiarka odpychała się od poręczy, na drodze d (rys. 8.15c) jej przyspieszenie było stałe, w wyniku czego jej prędkość zmieniła się z $v_0 = 0$ na v (co oznacza, że zakładamy stałą wartość F siły $\vec{F}$ i stały kąt ϕ). Przyjmujemy także, że gdy łyżwiarka nie dotyka już poręczy, jej ruch można traktować jak ruch cząstki, a ponadto zaniedbujemy wzrost energii termicznej mięśni łyżwiarki i inne zmiany fizjologiczne związane z wykorzystaniem przez łyżwiarkę siły swych mięśni. Po takim uproszczeniu sytuacji możemy skorzystać z równania (7.5) ($\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d$), z którego otrzymujemy

$$E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k0}} = (F\cos\phi)d,$$

czyli

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = Fd\cos\phi. \tag{8.38}$$

W przypadku gdy zachodzi również zmiana położenia ciała w pionie, trzeba uwzględnić również zmianę grawitacyjnej energii potencjalnej ΔE_{p} i zapisać równanie (8.38) w postaci

$$\Delta E_{\mathrm{p}} + \Delta E_{\mathrm{k}} = Fd\cos\phi. \tag{8.39}$$

Siła po prawej stronie tego równania nie wykonuje pracy nad ciałem, lecz jest mimo to odpowiedzialna za zmiany energii ciała po lewej stronie równania.

Moc

Gdy już wiemy, w jaki sposób energia może przechodzić z jednej postaci w inną, możemy uogólnić definicję mocy podaną w podrozdziale 7.6. Stwierdziliśmy tam, że moc jest szybkością, z jaką siła wykonuje pracę. Mówiąc bardziej ogólnie, moc P jest to szybkość związanej z działaniem siły zamiany jednej postaci energii na inną. Jeśli w przedziale czasu Δt zamianie ulega energia ΔE, to **moc średnia** związana z działaniem siły jest równa

$$P_{\mathrm{śr}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \tag{8.40}$$

Podobnie **moc chwilowa** związana z działaniem tej siły wynosi

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{8.41}$$

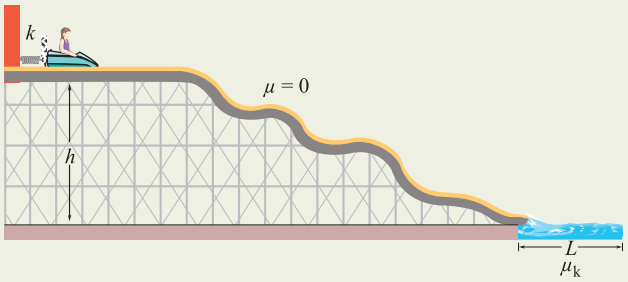
Przykład 8.06. Mnóstwo energii na zjeżdżalni w akwaparku

Na rysunku 8.17 pokazano zjeżdżalnię wodną. Ślizgacz zostaje wprawiony w ruch za pomocą sprężyny i zjeżdża po pokrytym wodą torze (bez tarcia) aż do dolnego końca toru, gdzie zostaje zahamowany do zatrzymania za pomocą tarcia. Całkowita masa ślizgacza i jego pasażera wynosi $m = 200$ kg, sprężyna o stałej sprężystości $k = 3{,}2 \cdot 10^3$ N/m jest początkowo ściśnięta o $d = 5$ m, wysokość punktu startowego względem końcowego wynosi $h = 35$ m, a współczynnik tarcia kinetycznego na poziomym końcu toru jest równy $\mu_{\mathrm{k}} = 0{,}8$. Jaką drogę L przebędzie ślizgacz na poziomym końcu toru, zanim się zatrzyma?

PODSTAWOWE FAKTY

Zanim weźmiesz kalkulator i zaczniesz wstawiać dane do równań, zastanów się, czy zawarłeś w równaniu wszystkie siły, i jakim układem ciał chcesz się zajmować. Dopiero wtedy będziesz wiedział, jakie równania

trzeba napisać. Czy mamy układ izolowany (i wykorzystamy zasadę zachowania energii), czy nad układem wykonuje pracę zewnętrzna siła (i trzeba powiązać pracę tej siły ze zmianą energii układu)?



Rys. 8.17. Zjazd ślizgaczem w akwaparku

Siły: Siła normalna, która działa na ślizgacz ze strony toru, nie wykonuje pracy nad ślizgaczem, ponieważ jej kierunek jest zawsze prostopadły do wektora przemieszczenia ślizgacza. Siła ciężkości wykonuje pracę nad ślizgaczem, ale ponieważ jest to siła zachowawcza, to możemy z nią związać energię potencjalną. Gdy sprężyna wypycha ślizgacz na tor i nadaje mu prędkość początkową, siła sprężystości wykonuje pracę nad ślizgaczem, zamieniając energię potencjalną sprężystości ściśniętej sprężyny na energię kinetyczną ślizgacza. Sprężyna działa też siłą na nieruchomą ścianę. Na poziomym końcu toru na ślizgacz działa siła tarcia o tor, w związku z czym zwiększa się energia termiczna ślizgacza i toru.

Układ: Niech układ, którym się będziemy zajmować, zawiera wszystkie oddziałujące ze sobą ciała, tzn. ślizgacz, tor, sprężynę, Ziemię i ścianę. Wszystkie siły, które wyliczyliśmy przed chwilą, działają *w tym układzie*, a zatem jest to układ *izolowany*, a więc jego całkowita energia się nie zmienia. Równanie, które wykorzystamy, to nie równanie zawierające siłę zewnętrzną wykonującą pracę nad układem, lecz zasada zachowania energii. Zapiszmy ją w postaci wynikającej z równania (8.37):

$$E_{\text{mech},2} = E_{\text{mech},1} - \Delta E_{\text{term}}. \qquad (8.42)$$

To trochę jak bilans finansowy: końcowa ilość pieniędzy to początkowa ich ilość *minus* suma pieniędzy ukradzionych nam przez złodzieja. Teraz końcowa energia mechaniczna jest równa jej początkowej wartości *minus* energia ukradziona przez tarcie. Nic się w żaden cudowny sposób nie pojawia ani nie znika.

Obliczenia: Wiemy już, jakie równanie napisać, więc wyznaczmy drogę L. Niech wskaźnik 1 odnosi się do stanu początkowego ślizgacza (przed wypchnięciem go przez sprężynę), a wskaźnik 2 — do stanu końcowego ślizgacza (po jego zatrzymaniu na poziomym końcu toru). W obu tych stanach energia mechaniczna układu jest sumą wszystkich energii potencjalnych i wszystkich energii kinetycznych.

Mamy dwa rodzaje energii potencjalnej: energię potencjalną sprężystości ($E_{\text{p,s}} = \frac{1}{2}kx^2$), związaną ze ściśniętą sprężyną, i grawitacyjną energię potencjalną ($E_{\text{p,g}} = mgy$), związaną z poziomem, na jakim znajduje się ślizgacz. W tym drugim przypadku za poziom odniesienia przyjmiemy poziomy koniec toru. Oznacza to, że początkowa wysokość ślizgacza wynosi $y = h$, a na końcu jego wysokość jest równa zeru ($y = 0$).

W stanie początkowym ślizgacz się nie porusza, a sprężyna jest ściśnięta, a więc energia mechaniczna układu wynosi

$$E_{\text{mech},1} = E_{\text{k1}} + E_{\text{p,s1}} + E_{\text{p,g1}} = 0 + \tfrac{1}{2}kd^2 + mgh. \qquad (8.43)$$

W stanie końcowym sprężyna jest w stanie nieodkształconym, a ślizgacz jest znów w spoczynku, lecz na dole toru. Energia mechaniczna układu wynosi więc

$$E_{\text{mech},2} = E_{\text{k2}} + E_{\text{p,s2}} + E_{\text{p,g2}} = 0 + 0 + 0. \qquad (8.44)$$

Znajdźmy teraz zmianę energii termicznej ślizgacza i toru wodnego na poziomie dolnym. Ze wzoru (8.31) wynika, że ΔE_{term} jest równe $f_{\text{k}}L$ (iloczynowi wartości siły tarcia i drogi, na jakiej tarcie działa). Z równania (6.2) wiemy z kolei, że $f_{\text{k}} = \mu_{\text{k}}F_{\text{N}}$, gdzie F_{N} jest siłą normalną. W obszarze, w którym działa siła tarcia, ślizgacz porusza się poziomo, a więc wartość siły normalnej F_{N} jest równa mg (są to wartości sił, które się równoważą w pionie). Wobec tego energia mechaniczna „ukradziona” przez tarcie jest równa

$$\Delta E_{\text{term}} = \mu_{\text{k}}mgL. \qquad (8.45)$$

(Notabene, bez dodatkowych doświadczeń *nie możemy* stwierdzić, ile energii termicznej zyskał ślizgacz, a ile tor — znamy tylko łączny wzrost ich energii termicznej). Podstawiając wielkości z równań (8.43), (8.44) i (8.45) do równania (8.42), otrzymujemy

$$0 = \tfrac{1}{2}kd^2 + mgh - \mu_{\text{k}}mgL, \qquad (8.46)$$

a stąd

$$L = \frac{kd^2}{2\mu_{\text{k}}mg} + \frac{h}{\mu_{\text{k}}} = \frac{(3{,}2 \cdot 10^3\ \text{N/m})(5\ \text{m})^2}{2(0{,}8)(200\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)} + \frac{35\ \text{m}}{0{,}8}$$
$$= 69{,}3\ \text{m} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Zauważ na koniec, jak proste jest to rozwiązanie. Po wybraniu właściwego układu ciał i stwierdzeniu, że jest on izolowany, zrozumieliśmy, że musimy wykorzystać zasadę zachowania energii. To znaczy powiązaliśmy stan początkowy i stan końcowy układu, nie zajmując się w ogóle jego stanami pośrednimi. W szczególności nie musieliśmy się wcale interesować tym, jak porusza się ślizgacz na pochyłych fragmentach toru. Gdybyśmy się zdecydowali korzystać z drugiej zasady dynamiki, musielibyśmy dokładnie poznać kształt toru i obliczenia byłyby znacznie bardziej złożone i trudne.



Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Podsumowanie

Siły zachowawcze Siła jest **siłą zachowawczą**, jeśli całkowita praca wykonana przez nią nad cząstką poruszającą się po dowolnym torze zamkniętym, tzn. powracającą po pewnym czasie do punktu wyjściowego jest równa zeru. Z definicji równoważnej danej wyżej wynika, że siła jest zachowawcza, o ile całkowita praca wykonana nad cząstką w czasie jej przemieszczania między dowolnymi dwoma punktami nie zależy od drogi, po jakiej porusza się cząstka. Siła ciężkości i siła sprężystości są siłami zachowawczymi, natomiast siła tarcia kinetycznego jest **siłą niezachowawczą**.

Energia potencjalna **Energia potencjalna** jest to energia związana z konfiguracją ciał w układzie, w którym działają siły zachowawcze. Gdy siła zachowawcza wykonuje pracę W nad jedną z cząstek układu, jego energia potencjalna zmienia się o

$$\Delta E_p = -W. \tag{8.1}$$

Jeśli cząstka przemieszcza się z punktu x_{pocz} do punktu $x_{końc}$, to zmiana energii potencjalnej układu wynosi

$$\Delta E_p = -\int_{x_{pocz}}^{x_{końc}} F(x)\,dx. \tag{8.6}$$

Grawitacyjna energia potencjalna Energię potencjalną układu złożonego z Ziemi i znajdującej się w jej pobliżu cząstki nazywamy **grawitacyjną energią potencjalną**. Gdy cząstka zmienia wysokość z y_{pocz} na $y_{końc}$, zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu cząstka–Ziemia jest równa

$$\Delta E_p = mg(y_{końc} - y_{pocz}) = mg\Delta y. \tag{8.7}$$

Jeśli jako **położenie odniesienia** cząstki wybierzemy punkt $y_{pocz} = 0$, w którym energię potencjalną przyjmiemy za równą zeru: $E_{p\,pocz} = 0$, to grawitacyjna energia potencjalna E_p cząstki na dowolnej wysokości y wyraża się jako

$$E_p(y) = mgy. \tag{8.9}$$

Energia potencjalna sprężystości **Energia potencjalna sprężystości** jest to energia związana ze stanem ściśnięcia lub rozciągnięcia ciała sprężystego. Sprężyna, która po przemieszczeniu jej swobodnego końca o x działa siłą sprężystości $F = -kx$ ma energię potencjalną sprężystości równą

$$E_p(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{8.11}$$

Konfiguracją odniesienia jest dla sprężyny stan, w którym jest ona nieodkształcona; w tym stanie $x = 0$ i $E_p = 0$.

Energia mechaniczna **Energia mechaniczna** układu jest to suma jego energii kinetycznej E_k i energii potencjalnej E_p:

$$E_{mech} = E_k + E_p. \tag{8.12}$$

Układem izolowanym nazywamy układ, w którym żadne *siły zewnętrzne* nie powodują zmian energii. Jeśli w układzie izolowanym pracę wykonują tylko siły zachowawcze, to energia mechaniczna E_{mech} układu nie ulega zmianie. Stwierdzenie to, noszące nazwę **zasady zachowania energii mechanicznej** można zapisać w postaci

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}, \tag{8.17}$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil w trakcie procesu zamiany energii. Zasadę tę można również podać w postaci

$$\Delta E_{mech} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0. \tag{8.18}$$

Krzywe energii potencjalnej Jeśli znamy zależność energii potencjalnej układu $E_p(x)$ od położenia cząstki, na którą działa w jednym wymiarze siła $F(x)$, to siłę możemy wyznaczyć ze wzoru

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}. \tag{8.22}$$

Jeśli funkcja $E_p(x)$ jest dana w postaci wykresu, to siłę $F(x)$ można wyznaczyć dla dowolnej wartości x jako nachylenie krzywej w punkcie x, wzięte z przeciwnym znakiem, a energię kinetyczną cząstki można otrzymać jako

$$E_k(x) = E_{mech} - E_p(x), \tag{8.24}$$

przy czym E_{mech} jest energią mechaniczną układu. **Punktem zwrotnym** nazywamy punkt x, w którym cząstka zmienia kierunek ruchu (w takim punkcie $E_k = 0$). Cząstka jest w **równowadze** w punktach, w których nachylenie krzywej $E_p(x)$ jest równe zeru (w takich punktach $F(x) = 0$).

Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną Praca W jest równa energii przekazanej układowi lub od niego odebranej przez działanie na układ siłą zewnętrzną. Gdy na układ działa więcej niż jedna siła, zmiana energii układu jest równa *całkowitej pracy* wykonanej przez te wszystkie siły. Gdy nie występuje tarcie, praca wykonana nad układem jest równa zmianie energii mechanicznej ΔE_{mech} układu:

$$W = \Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p}}. \qquad (8.26, 8.25)$$

Gdy w układzie działa siła tarcia kinetycznego, zmienia się także energia termiczna ΔE_{term} układu (czyli energia związana z chaotycznym ruchem atomów i cząsteczek w układzie). Praca wykonana nad układem jest wtedy równa

$$W = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}}. \qquad (8.33)$$

Zmiana energii termicznej ΔE_{term} jest związana z wartością siły tarcia f_{k} i wartością przemieszczenia d ciała pod wpływem siły zewnętrznej, a związek ten opisuje równanie:

$$\Delta E_{\text{term}} = f_{\text{k}} d. \qquad (8.31)$$

Zasada zachowania energii **Całkowita energia** E układu (będąca sumą jego energii mechanicznej i różnych postaci energii wewnętrznej, w tym energii termicznej) może ulegać zmianie tylko o energię dostarczoną do układu lub od niego odebraną. To prawo empiryczne nosi nazwę **zasady zachowania energii**. Jeśli nad układem wykonywana jest praca W, to zachodzi równość

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wewn}}. \qquad (8.35)$$

Gdy układ jest izolowany ($W = 0$), otrzymujemy stąd

$$\Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wewn}} = 0, \qquad (8.36)$$

czyli

$$E_{\text{mech},2} = E_{\text{mech},1} - \Delta E_{\text{term}} - \Delta E_{\text{wewn}}, \qquad (8.37)$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwóch różnych chwil.

Moc **Moc** związana z działaniem siły jest to *szybkość*, z jaką następuje zamiana energii pod działaniem tej siły. Jeśli w przedziale czasu Δt siła przekazuje układowi lub odbiera od niego energię równą ΔE, to **moc średnia** związana z działaniem tej siły wynosi

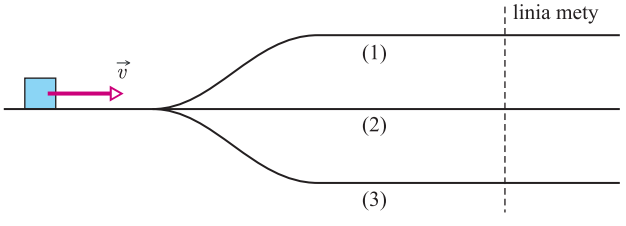
$$P_{\text{śr}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \qquad (8.40)$$

Moc chwilowa związana z działaniem tej siły jest równa

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \qquad (8.41)$$

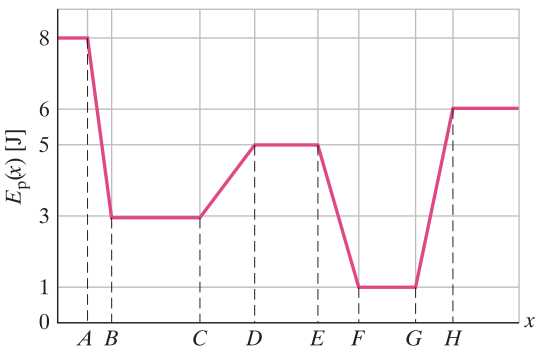
Pytania

1 Jak pokazano na rysunku 8.18, poruszający się poziomo klocek może dotrzeć do linii mety, oznaczonej na rysunku linią przerywaną, po jednym z trzech torów, po których może się poruszać bez tarcia, a które różnią się tylko wysokością. Uszereguj te tory w zależności od: a) prędkości klocka na linii mety, b) czasu, po jakim klocek dotrze do mety, od największych do najmniejszych.



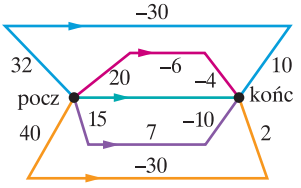
Rys. 8.18. Pytanie 1

2 Na rysunku 8.19 przedstawiono energię potencjalną cząstki jako funkcję jej położenia. a) Uszereguj obszary AB, BC, CD i DE według wartości siły działającej w nich na cząstkę, od największej do najmniejszej. Jaka może być największa wartość energii mechanicznej E_{mech} cząstki, aby cząstka: b) została uwięziona w studni potencjału po lewej stronie rysunku, c) została uwięziona w studni potencjału po prawej stronie rysunku, d) mogła poruszać się między tymi obszarami, ale nie mogła przedostać się na prawo od punktu H? W którym z obszarów: BC, DE czy FG, cząstka będzie miała: e) największą energię kinetyczną, f) prędkość o najmniejszej wartości, jeśli jej energia odpowiada sytuacji z punktu (d)?



Rys. 8.19. Pytanie 2

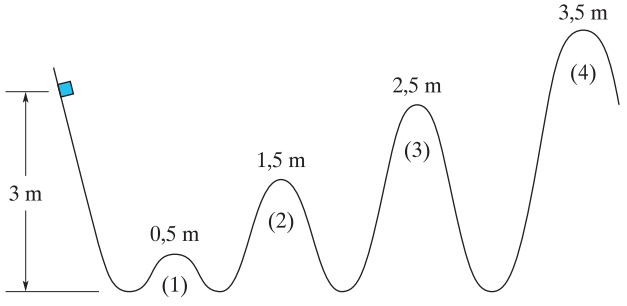
3 Na rysunku 8.20 przedstawiono pięć torów, łączących punkty pocz i końc, jeden prosty i cztery łamane. Wzdłuż toru prostego i trzech spośród torów łamanych na pewne ciało, poruszające się po tych torach, działa jedynie siła zachowawcza F_z. Wzdłuż



Rys. 8.20. Pytanie 3

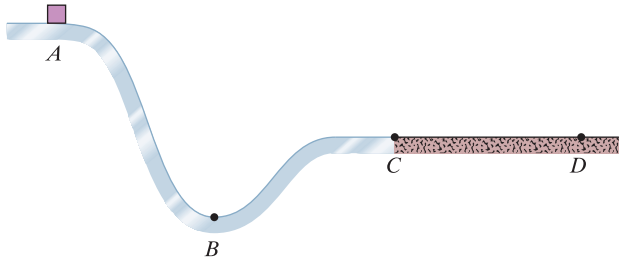
czwartego toru łamanego na ciało to działa zarówno siła F_z, jak i siła niezachowawcza F_{nz}. Przy każdym odcinku torów łamanych, między punktami pocz i końc podano wartość zmiany energii mechanicznej ΔE_{mech} ciała (w dżulach), zachodzącej w czasie ruchu ciała wzdłuż tego odcinka. a) Ile wynosi wartość ΔE_{mech} przy przejściu przez ciało z punktu pocz do końc po torze prostym? b) Ile wynosi wartość ΔE_{mech} pochodząca od siły F_{nz} na torze, wzdłuż którego działa ta siła?

4 Mały klocek, pozostający początkowo w spoczynku, ześlizguje się bez tarcia z wysokości 3 m wzdłuż toru o kształcie przedstawionym na rysunku 8.21. Górki wzdłuż toru mają identyczny, kołowy kształt szczytu (załóż, że klocek nie odrywa się tam od toru). a) Która z górek jest pierwszą, na którą klocek nie zdoła się już wspiąć? b) Jaki będzie ruch klocka od chwili, gdy nie zdoła wjechać na tę górkę? Na której górce: c) przyspieszenie dośrodkowe klocka będzie największe, d) siła normalna działająca na klocek będzie najmniejsza?



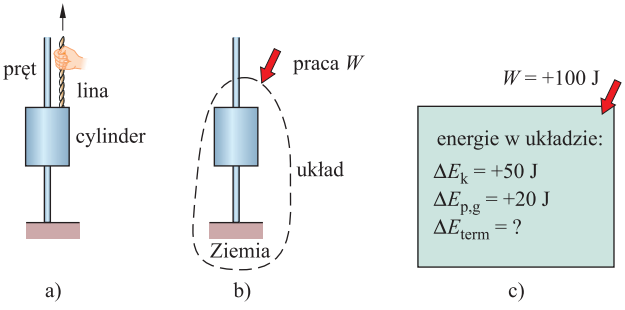
Rys. 8.21. Pytanie 4

5 Klocek ześlizguje się po torze pokazanym na rysunku 8.22, przy czym jego ruch z punktu A do punktu C odbywa się bez tarcia, a w obszarze CD na klocek działa siła tarcia. Czy energia kinetyczna klocka rośnie, maleje, czy nie zmienia się w obszarze: a) AB, b) BC, c) CD? d) Czy w tych obszarach energia mechaniczna klocka rośnie, maleje, czy pozostaje bez zmiany?



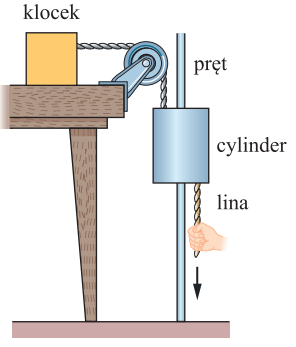
Rys. 8.22. Pytanie 5

6 Jak pokazano na rysunku 8.23a, ciągniesz w górę linę przymocowaną do cylindra umieszczonego na pionowym pręcie. Cylinder jest dopasowany do pręta tak ściśle, że porusza się po nim ze znacznym tarciem. Siła, którą działasz, wykonuje nad układem cylinder–pręt–Ziemia pracę $W = +100$ J (patrz rys. 8.23b). Wykaz zmian energii układu przedstawiono na rysunku 8.23c: energia kinetyczna E_k wzrosła o 50 J, a grawitacyjna energia potencjalna $E_{p,g}$ wzrosła o 20 J. Jedyną inną energią, jaka uległa zmianie, jest energia termiczna układu E_{term}. Wyznacz ΔE_{term}.



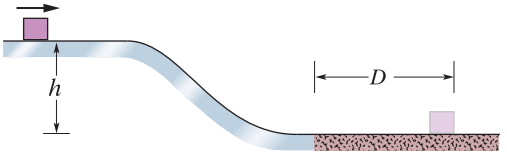
Rys. 8.23. Pytanie 6

7 Układ przedstawiony na rysunku 8.24 jest podobny do układu z pytania 6. W obecnym przypadku ciągniesz w dół linę przymocowaną do cylindra umieszczonego na pionowym pręcie ściśle dopasowanym do cylindra. Do cylindra przymocowana jest też druga lina, za pomocą której działasz na klocek ślizgający się przy tym po stole laboratoryjnym. Nad układem, który rozważaliśmy w poprzednim pytaniu, czyli układem cylinder–pręt–Ziemia, wykonujesz pracę 200 J, a układ wykonuje nad klockiem pracę 60 J. Energia kinetyczna układu wzrasta o 130 J, a jego grawitacyjna energia potencjalna maleje o 20 J. a) Sporządź wykaz zmian energii układu, jak na rysunku 8.23c. b) Oblicz zmianę energii termicznej układu.



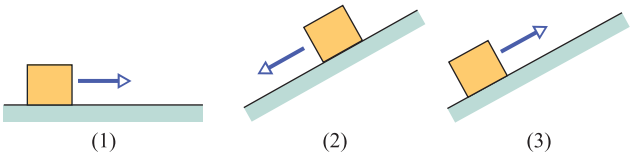
Rys. 8.24. Pytanie 7

8 Jak pokazano na rysunku 8.25, klocek ześlizguje się po torze o różnicy poziomów h. Siła tarcia działa na klocek jedynie na dolnym odcinku poziomym toru i powoduje zatrzymanie się klocka po przebyciu na tym odcinku drogi D. a) Czy droga ta zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie równa D, jeśli zmniejszymy wartość h? b) Czy droga ta zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie równa D, jeśli — nie zmieniając h — zwiększymy masę klocka?



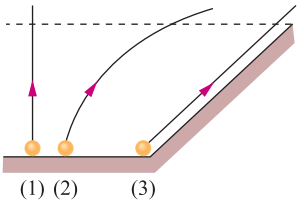
Rys. 8.25. Pytanie 8

9 Na rysunku 8.26 przedstawiono trzy przypadki, w których klocek ślizga się po płaszczyźnie, przy czym między klockiem a płaszczyzną występuje tarcie. We wszystkich przypadkach prędkość początkowa klocka ma jednakową wartość, a klocek ślizga się aż do zatrzymania się w wyniku działania siły tarcia kinetycznego. Uszereguj te przypadki w zależności od towarzyszącego ruchowi klocka wzrostu energii termicznej, od największego do najmniejszego.



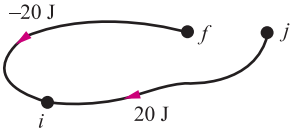
Rys. 8.26. Pytanie 9

10 Jak pokazano na rysunku 8.27, trzy śliwki wyrzucono ku górze z tego samego poziomu i z prędkością początkową o jednakowej wartości. Jedną rzucono pionowo w górę, drugą pod niewielkim kątem do pionu, a trzecią wzdłuż równi pochyłej, po której ślizga się ona bez tarcia. Uszereguj te śliwki w zależności od wartości ich prędkości na poziomie oznaczonym linią przerywaną, od największej do najmniejszej.



Rys. 8.27. Pytanie 10

11 Tory cząstki przemieszczającej się z punktu f do punktu i oraz z punktu j do punktu i pokazano na rysunku 8.28, na którym zaznaczono kierunek ruchu cząstki oraz podano pracę wykonaną przy tym nad cząstką przez siłę zachowawczą $\vec{F}$. Ile wynosi praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ nad cząstką przy jej przemieszczeniu z punktu f do punktu j?



Rys. 8.28. Pytanie 11

Zadania

Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

●_●●● Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

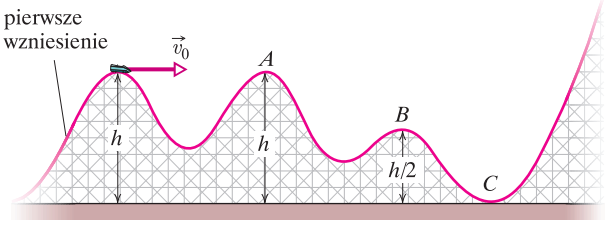
ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

Podrozdział 8.1. Energia potencjalna

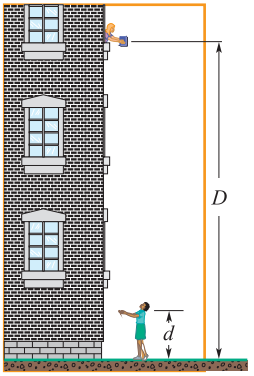
•1 **ssm** Ile wynosi stała sprężystości sprężyny, która ma energię potencjalną sprężystości równą 25 J po ściśnięciu jej o 7,5 cm w stosunku do jej długości w sytuacji, gdy nie jest odkształcona?

•2 Wagonik kolejki górskiej w wesołym miasteczku porusza się bez tarcia po torze o kształcie przedstawionym na rysunku 8.29 i na szczycie pierwszego wzniesienia o wysokości $h = 42$ m osiąga prędkość o wartości $v_0 = 17$ m/s. Masa wagonika jest równa $m = 825$ kg. Jaką pracę wykona nad wagonikiem siła ciężkości podczas jego ruchu ze szczytu pierwszego wzniesienia do punktu: a) A, b) B, c) C? Jeśli przyjmiemy, że grawitacyjna energia potencjalna układu wagonik–Ziemia jest równa zeru w punkcie C, to ile będzie ona równa, gdy wagonik znajdzie się w punkcie: d) B, e) A? f) Czy zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu między punktami A i B wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, jeśli zwiększymy masę m dwukrotnie?



Rys. 8.29. Zadania 2 i 9

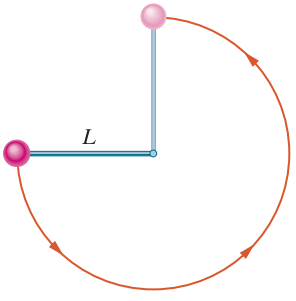
•3 Stojąc w oknie, upuszczasz podręcznik o masie 2 kg, znajdujący się początkowo na wysokości $D = 10$ m nad poziomem ulicy, tak aby mogła go złapać koleżanka stojąca na chodniku i trzymająca wyciągnięte ręce na wysokości $d = 1{,}5$ m nad poziomem ulicy (rys. 8.30). a) Jaką pracę W_g wykona nad podręcznikiem siła ciężkości



Rys. 8.30. Zadania 3 i 10

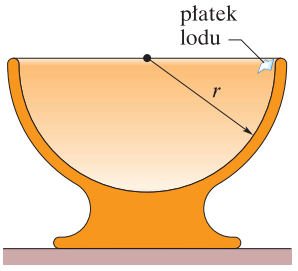
podczas jego lotu do rąk koleżanki? b) Jaka będzie w czasie tego lotu zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej ΔE_p układu podręcznik–Ziemia? Jeśli przyjmiemy, że grawitacyjna energia potencjalna E_p układu jest równa zeru na poziomie ulicy, to ile wynosi ona, gdy: c) wypuszczasz podręcznik z rąk, d) podręcznik dociera do rąk koleżanki? Załóż następnie, że na poziomie ulicy E_p wynosi 100 J i wyznacz w tych warunkach: e) W_g, f) ΔE_p, g) E_p na wysokości twoich rąk, h) E_p na wysokości rąk koleżanki.

•4 Na rysunku 8.31 przedstawiono kulkę o masie $m = 0{,}341$ kg, przymocowaną do końca cienkiego pręta o długości $L = 0{,}452$ m i znikomo małej masie. Drugi koniec pręta umocowany jest na osi, dzięki czemu kulka może zataczać okrąg w płaszczyźnie pionowej. W chwili początkowej pręt ustawiony jest poziomo — jak pokazano na rysunku — po czym zostaje pchnięty w dół, tak że kulka porusza się najpierw w dół, a następnie do góry, aż do położenia, w którym pręt jest skierowany pionowo w górę, przy czym w tym położeniu prędkość kulki wynosi już zero. Jaką pracę wykonała nad kulką siła ciężkości przy ruchu kulki od położenia początkowego do: a) najniższego punktu jej toru, b) najwyższego punktu jej toru, c) położenia przeciwległego w stosunku do początkowego? Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna układu kulka–Ziemia, gdy kulka znajduje się: d) w najniższym punkcie toru, e) w najwyższym punkcie toru, f) w położeniu przeciwległym w stosunku do początkowego, jeśli przyjęto, że energia ta jest równa zeru, gdy kulka znajduje się w położeniu początkowym? g) Załóż, że pręt pchnięto mocniej, w wyniku czego kulka dotarła do położenia górnego z prędkością różną od zera. Czy w tej sytuacji zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej podczas ruchu kulki z najniższego do najwyższego punktu toru jest większa, mniejsza czy taka sama, jak poprzednio?



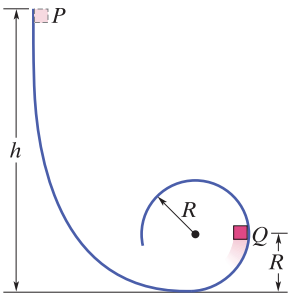
Rys. 8.31. Zadania 4 i 14

•5 ssm Jak pokazano na rysunku 8.32, płatek lodu o masie 2 g zostaje puszczony swobodnie na krawędzi miski w kształcie półkuli o promieniu r równym 22 cm. Płatek ześlizguje się po powierzchni miski bez tarcia. a) Jaką pracę wykona nad płatkiem siła ciężkości do chwili, gdy dotrze on na dno miski? b) Ile wyniesie zmiana energii potencjalnej układu płatek–Ziemia w czasie tego ruchu? c) Ile wynosi energia potencjalna płatka na krawędzi miski, jeśli przyjęto, że wynosi ona zero na dnie miski? d) Jeśli zaś przyjmiemy, że energia potencjalna jest równa zeru na krawędzi miski, to ile będzie ona wynosić, gdy płatek dotrze na dno miski? e) Czy wartości, jakie otrzymaliśmy jako odpowiedzi na pytania (a)–(d), zwiększą się, zmniejszą, czy pozostaną bez zmiany, jeśli zwiększymy dwukrotnie masę płatka?



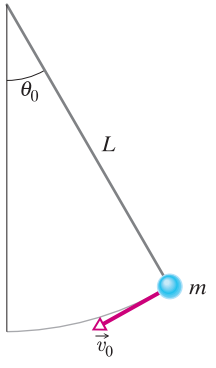
Rys. 8.32. Zadania 5 i 11

••6 Jak pokazano na rysunku 8.33, mały klocek o masie $m = 0{,}032$ kg może się ślizgać bez tarcia wzdłuż toru kończącego się kołową pętlą o promieniu $R = 12$ cm. Klocek zostaje puszczony swobodnie z punktu P znajdującego się na wysokości $h = 5R$ nad dolnym brzegiem pętli. Jaką pracę wykona nad klockiem siła ciężkości w czasie jego ruchu z punktu P do: a) punktu Q, b) najwyższego punktu pętli? Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna układu klocek–Ziemia, gdy klocek znajduje się: c) w punkcie P, d) w punkcie Q, e) w najwyższym punkcie pętli, jeśli przyjęto, że energia ta jest równa zeru, gdy kulka znajduje się na dole pętli? f) Czy wartości otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a)–(e) wzrosną, zmaleją, czy pozostaną bez zmiany, jeśli klocek nie zostanie puszczony z punktu startowego swobodnie, lecz z pewną różną od zera prędkością początkową skierowaną w dół wzdłuż toru?



Rys. 8.33. Zadania 6 i 17

••7 Na rysunku 8.34 przedstawiono cienki pręt o długości $L = 2$ m i znikomo małej masie, który może obracać się w płaszczyźnie pionowej wokół osi przechodzącej przez jeden z jego końców. Do drugiego końca pręta przymocowana jest ciężka kulka o masie $m = 5$ kg. Pręt zostaje odchylony od pionu o kąt $\theta_0 = 30°$ i puszczony z prędkością początkową $\vec{v}_0 = 0$. Ile wynosi: a) praca wykonana nad kulką przez siłę ciężkości, b) zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu kulka–Ziemia, gdy kulka porusza się od położenia wyjściowego do najniższego punktu jej toru? c) Ile wynosi energia potencjalna układu w chwili zwolnienia kulki, jeśli przyjęto, że energia ta jest równa zeru, gdy kulka znajduje się w najniższym punkcie jej toru? d) Czy wartości otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a)–(c) wzrosną, zmaleją, czy pozostaną bez zmiany, jeśli zwiększymy wartość kąta θ_0?



Rys. 8.34. Zadania 7, 18 i 21

••8 Kula śnieżna o masie 1,5 kg zostaje wystrzelona z urwiska o wysokości 12,5 m z prędkością początkową o wartości 14 m/s, skierowaną pod kątem 41° w górę od poziomu. a) Jaką pracę wykona nad tą kulą siła ciężkości w czasie lotu kuli aż do jej upadku na płaski grunt pod urwiskiem? b) Ile wyniesie zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu kula–Ziemia w czasie lotu kuli? c) Ile wynosić będzie energia potencjalna układu w chwili dotarcia kuli śnieżnej do gruntu pod urwiskiem, jeśli przyjęto, że energia ta jest równa zeru, gdy kula znajduje się na krawędzi urwiska?

Podrozdział 8.2. Zachowanie energii mechanicznej

•9 GO Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 2. Jaka jest wartość prędkości wagonika w punkcie: a) A, b) B, c) C? d) Jak wysoko wjedzie on na ostatnie wzniesienie, którego nie zdoła już pokonać? e) Czy wartości otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a)–(d) wzrosną, zmaleją czy pozostaną bez zmiany, jeśli dwukrotnie zwiększymy masę wagonika?

•10 Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 3. a) Jaka jest wartość prędkości podręcznika w chwili, gdy dociera on do rąk twojej koleżanki? b) Ile wyniesie wartość prędkości dla podręcznika o dwukrotnie większej masie? c) Czy wartość otrzymana jako odpowiedź na pytanie (a) wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, jeśli podręcznik nie zostanie puszczony swobodnie, lecz będzie rzucony w dół z pewną różną od zera prędkością początkową?

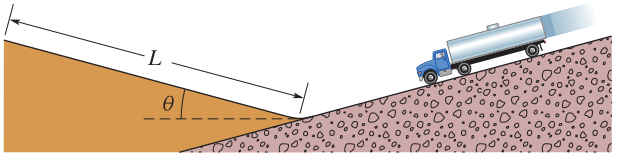
•11 ssm www Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 5. a) Jaka jest wartość prędkości płatka lodu w chwili, gdy dociera on do dna miski? b) Ile wyniesie wartość prędkości dla płatka o dwukrotnie większej masie? c) Czy wartość otrzymana jako odpowiedź na pytanie (a) wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, jeśli płatek nie zostanie puszczony z punktu startowego swobodnie, lecz z pewną różną od zera prędkością początkową skierowaną w dół wzdłuż powierzchni miski?

•12 Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 8. a) Wyznacz wartość prędkości kuli śnieżnej w chwili, gdy spadnie ona na grunt pod urwiskiem, korzystając z bilansu energii, a nie z metod z rozdziału 4. Jaka będzie wartość tej prędkości, jeśli zmienimy dane zadania tak, że: b) kąt wyrzucenia kuli będzie wynosił 41° *w dół* od poziomu, c) masa kuli będzie równa 2,5 kg?

•13 ssm Kulka kamienna o masie 5 g zostaje wystrzelona pionowo w górę z pistoletu sprężynowego. Sprężynę trzeba ścisnąć o 8 cm, jeśli kulka ma dotrzeć do tarczy znajdującej się 20 m nad położeniem kulki na ściśniętej sprężynie. a) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej $\Delta E_{p,g}$ układu kulka–Ziemia w czasie wznoszenia się tej kulki o 20 m? b) Ile wynosi zmiana energii potencjalnej sprężystości $\Delta E_{p,s}$ sprężyny w czasie wystrzelenia kulki? c) Ile wynosi stała sprężystości sprężyny?

•14 Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 4. a) Jaka musi być wartość prędkości początkowej kulki, aby osiągnęła ona najwyższy punkt swego toru z prędkością równą zeru? Jaka jest w tych warunkach wartość jej prędkości: b) w najniższym punkcie jej toru, c) w położeniu przeciwległym w stosunku do początkowego? d) Czy wartości otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a)–(c) wzrosną, zmaleją, czy pozostaną bez zmiany, jeśli dwukrotnie zwiększymy masę kulki?

•15 ssm Jak pokazano na rysunku 8.35, ciężarówka mająca zepsute hamulce pędzi w dół zbocza. W chwili, gdy prędkość pojazdu osiąga wartość 130 km/h, kierowcy udaje się skierować go na drogę wznoszącą się pod kątem $\theta = 15°$, po której ciężarówka jedzie bez tarcia. Masa ciężarówki wynosi $1{,}2 \cdot 10^4$ kg. a) Ile musi wynosić co najmniej długość tej drogi L, aby w czasie ruchu po niej ciężarówka zwolniła, aż do prędkości równej zeru (przyjmij, że możesz potraktować ciężarówkę jako cząstkę i uzasadnij to założenie)? Czy minimalna długość drogi L wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, jeśli: b) zmniejszymy masę ciężarówki, c) zmniejszymy prędkość ciężarówki?



Rys. 8.35. Zadanie 15

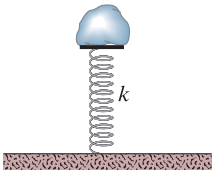
••16 Klocek o masie 700 g zostaje upuszczony z wysokości h_0 nad ustawioną pionowo sprężyną o stałej sprężystości $k = 400$ N/m i znikomo małej masie. Klocek spada na sprężynę i osiąga prędkość równą zeru po ściśnięciu sprężyny o 19 cm. Ile wynosi praca wykonana: a) przez klocek nad sprężyną, b) przez sprężynę nad klockiem? c) Ile wynosiła wysokość h_0? d) O jaki odcinek zostałaby maksymalnie ściśnięta sprężyna, gdyby klocek został upuszczony z wysokości $2h_0$ nad sprężyną?

••17 Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 6. Ile wynosi: a) składowa pozioma, b) składowa pionowa siły *wypadkowej* działającej na klocek w punkcie Q? c) Z jakiej wysokości h powinien być upuszczony klocek, aby w najwyższym punkcie pętli był na granicy utraty kontaktu z torem (co oznacza, że właśnie w tym punkcie siła normalna działająca na klocek ze strony toru staje się równa zeru)? d) Sporządź wykres zależności wartości siły normalnej działającej na klocek w najwyższym punkcie pętli, od wysokości początkowej klocka h, w zakresie od $h = 0$ do $h = 6R$.

••18 Przeanalizuj jeszcze raz sytuację z zadania 7. a) Jaką wartość ma prędkość kulki w najniższym punkcie jej toru? b) Czy wartość ta wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmiany, gdy zwiększymy masę kulki?

••19 GO Na rysunku 8.36 przedstawiono kamień o masie 8 kg spoczywający na ustawionej pionowo sprężynie. Sprę-

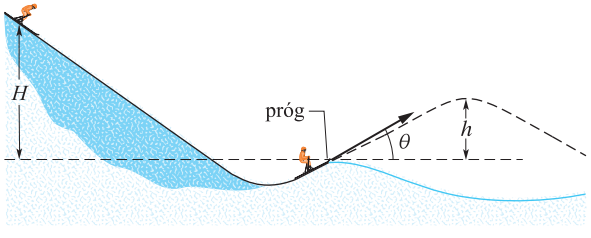
żyna jest ściśnięta o 10 cm. a) Ile wynosi stała sprężystości tej sprężyny? b) Naciskając na kamień, przemieszczamy go w dół o dalsze 30 cm, po czym zwalniamy nacisk. Ile wynosi energia potencjalna sprężystości ściśniętej w ten sposób sprężyny tuż przed zwolnieniem nacisku? c) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu kamień–Ziemia w czasie ruchu kamienia, od punktu zwolnienia nacisku do punktu jego największego wzniesienia? d) Na jaką największą wysokość — licząc od punktu zwolnienia nacisku — wzniesie się kamień?



Rys. 8.36. Zadanie 19

••20 GO Wahadło składa się z kamienia o masie 2 kg zawieszonego na lince o długości 4 m i znikomo małej masie. Przy przejściu przez swe najniższe położenie kamień ma prędkość o wartości 8 m/s. a) Jaka jest prędkość kamienia, gdy linka tworzy z pionem kąt 60°? b) Jaki jest największy kąt tworzony przez linkę z pionem, który osiąga wahadło? c) Jaka jest całkowita energia mechaniczna układu, jeśli energię potencjalną układu wahadło–Ziemia przyjęto za zerową, gdy kamień znajduje się w najniższym punkcie swego toru?

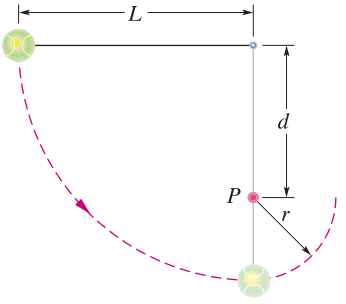
••21 Na rysunku 8.34 przedstawiono wahadło o długości $L = 1{,}25$ m. Ciężarek (stanowiący praktycznie całą masę wahadła) ma prędkość v_0, gdy linka tworzy z pionem kąt $\theta_0 = 40°$. a) Jaka jest prędkość ciężarka w najniższym punkcie jego toru, jeśli $v_0 = 8$ m/s? Jaka co najmniej musi być wartość v_0, aby wahadło dotarło następnie do położenia, w którym linka będzie: b) pozioma, c) pionowa (ciężarek na górze), a linka napięta? d) Czy odpowiedzi z punktów (b) i (c) wzrosną, zmaleją, czy pozostaną niezmienione, gdy kąt θ_0 zwiększymy o kilka stopni?



Rys. 8.37. Zadanie 22

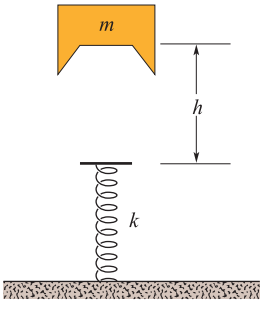
••22 Narciarz o masie 60 kg rusza wzdłuż rozbiegu skoczni narciarskiej, o kształcie pokazanym na rysunku 8.37, przy czym jego punkt startu, w którym pozostawał początkowo w spoczynku, znajduje się na wysokości 20 m nad progiem. W chwili oderwania się narciarza od progu jego prędkość tworzy z poziomem kąt $\theta = 28°$. Pomiń opór powietrza i załóż, że narciarz porusza się po rozbiegu bez tarcia. a) Na jaką maksymalną wysokość h ponad próg wzniesie się narciarz w czasie skoku? b) Czy wartość h zwiększy się, zmniejszy, czy pozostanie bez zmiany, jeśli narciarz zwiększy swój ciężar, zakładając plecak?

••23 ilw Na rysunku 8.38 przedstawiono nić o długości $L = 120$ cm. Na jednym końcu jest do niej przymocowana kulka, a drugi koniec jest unieruchomiony. W punkcie P, odległym od nieruchomego końca nici o $d = 75$ cm, znajduje się kołek. Gdy kulka, pozostająca początkowo w bezruchu na końcu poziomej nici, zostaje puszczona swobodnie, porusza się ona wzdłuż łuku zaznaczonego na rysunku linią przerywaną. Jaka jest wartość prędkości kulki: a) w najniższym punkcie jej toru, b) w najwyższym punkcie jej toru, po owinięciu się nici wokół kołka?



Rys. 8.38. Zadania 23 i 70

••24 Obciążnik o masie $m = 2$ kg zostaje puszczony z wysokości $h = 40$ cm na sprężynę, której stała sprężystości wynosi $k = 1960$ N/m (rys. 8.39). Wyznacz długość odcinka, o jaki maksymalnie zostanie ściśnięta sprężyna.

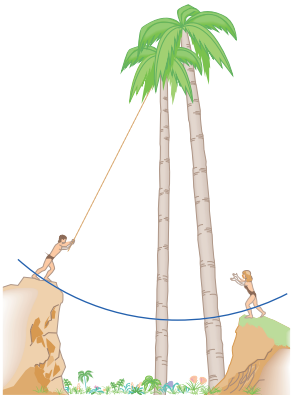


Rys. 8.39. Zadanie 24

••25 W chwili $t = 0$ piłka o masie 1 kg zostaje rzucona z wierzchołka wysokiej wieży z prędkością: $\vec{v} = (18 \text{ m/s})\hat{i} + (24 \text{ m/s})\hat{j}$. Wyznacz zmianę energii potencjalnej układu piłka–Ziemia ΔE_p od chwili $t = 0$ do chwili $t = 6$ s (w której piłka nadal była w locie).

••26 Na cząstkę poruszającą się wzdłuż osi x działa jedynie siła zachowawcza $\vec{F} = (6x - 12)\hat{i}$ N, gdzie x jest wyrażone w metrach. Energii potencjalnej cząstki E_p w polu tej siły przypisano wartość 27 J, gdy cząstka znajduje się w punkcie $x = 0$. a) Podaj wyrażenie na energię potencjalną E_p jako funkcję x. b) Ile wynosi największa dodatnia wartość tej energii potencjalnej? c) Dla jakich wartości x energia potencjalna jest równa zeru?

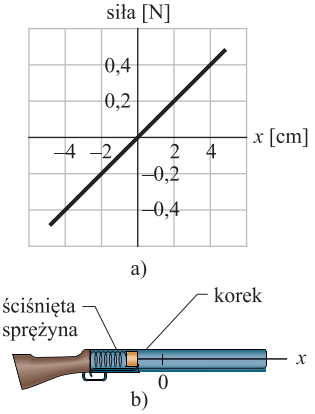
••27 Tarzan, którego ciężar wynosi 688 N, stara się przeskoczyć nad urwiskiem, trzymając się końca liany o długości 18 m (rys. 8.40). Naj-



Rys. 8.40. Zadanie 27

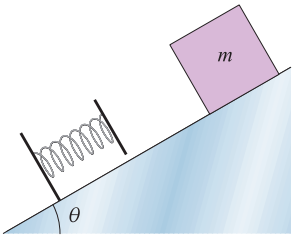
niższy punkt planowanego przez niego toru znajduje się 3,2 m niżej od jego punktu startowego. Liana zerwie się, jeśli siła jej naciągu przekroczy wartość 950 N. a) Czy liana się zerwie? b) Jeśli nie, to ile wynosi największa siła naprężenia liany podczas lotu Tarzana? Jeśli tak, to jaki kąt będzie tworzyła liana z pionem w chwili zerwania?

••28 Wykres na rysunku 8.41a odnosi się do sprężyny strzelby na korki pokazanej na rysunku 8.41b — przedstawia on zależność siły, jaką działa sprężyna w zależności od jej ściśnięcia lub rozciągnięcia. Wyobraź sobie, że sprężynę ściśnięto o 5,5 cm, aby wystrzelić korek o masie 3,8 g. a) Wyznacz prędkość korka przy założeniu, że odrywa się on od sprężyny w chwili, gdy sprężyna ma długość odpowiadającą brakowi jej odkształcenia. b) Przyjmij następnie, że korek przykleja się do sprężyny, tak że odrywa się od niej dopiero po jej rozciągnięciu o 1,5 cm. Oblicz w tym przypadku prędkość korka w chwili oderwania się od sprężyny.



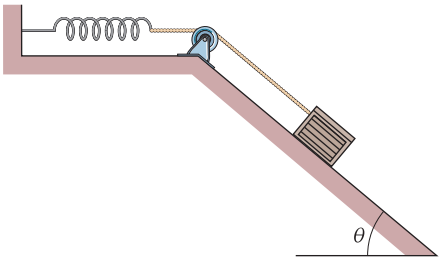
Rys. 8.41. Zadanie 28

••29 ssm www Jak pokazano na rysunku 8.42, klocek o masie 12 kg, znajdujący się początkowo w spoczynku, zaczyna poruszać się bez tarcia wzdłuż równi pochyłej o kącie nachylenia $\theta = 30°$. Na jego drodze znajduje się sprężyna, którą można ścisnąć o 2 cm, działając na nią siłą 270 N. Klocek zwalnia do prędkości równej zeru, po ściśnięciu sprężyny o 5,5 cm. a) Jaką drogę przebył klocek wzdłuż równi od punktu, w którym początkowo spoczywał, do punktu, w którym ponownie osiągnął prędkość równą zeru? b) Ile wynosiła prędkość klocka w chwili jego zetknięcia ze sprężyną?



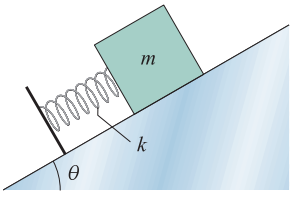
Rys. 8.42. Zadania 29 i 35

••30 GO Jak pokazano na rysunku 8.43, pojemnik na chleb o masie 2 kg znajduje się na równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 40°$, po której może się poruszać bez tarcia, i jest połączony ze sprężyną o stałej sprężystości $k = 120$ N/m za pomocą liny przełożonej przez bloczek. Zakładamy, że bloczek ma znikomo małą masę i obraca się bez tarcia. Początkowo pojemnik utrzymywany jest w spoczynku, a sprężyna nie jest odkształcona. Następnie zwalniamy pojemnik. a) Ile wyniesie prędkość pojemnika po przebyciu w dół równi drogi 10 cm? b) Jak daleko od położenia początkowego prędkość pojemnika spadnie do zera? Wyznacz c) wartość i d) kierunek przyspieszenia pojemnika w chwili, gdy jego prędkość będzie równa zeru.



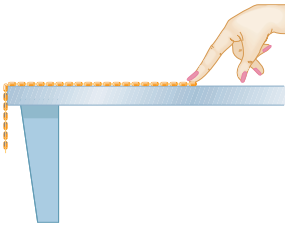
Rys. 8.43. Zadanie 30

••31 ilw Klocek o masie $m = 2$ kg leży na swobodnym końcu sprężyny na równi pochyłej o nachyleniu $\theta = 30°$ (rys. 8.44). Klocek nie jest przymocowany do sprężyny i może poruszać się po tej równi bez tarcia. Sprężyna, której stała sprężystości wynosi $k = 19{,}6$ N/cm, zostaje ściśnięta o 20 cm, a następnie puszczona swobodnie. a) Ile wynosi energia potencjalna sprężystości ściśniętej sprężyny? b) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu klocek–Ziemia w czasie ruchu klocka od punktu, w którym znajduje się on w chwili zwolnienia sprężyny, do punktu jego największego wzniesienia po równi? c) Jaką drogę przebędzie klocek wzdłuż równi od chwili zwolnienia sprężyny do chwili osiągnięcia przez niego największej wysokości?



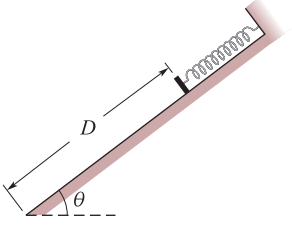
Rys. 8.44. Zadanie 31

••32 Jak pokazano na rysunku 8.45, łańcuszek leżący na stole, po którym może się on poruszać bez tarcia, jest przytrzymywany tak, że jedna czwarta jego długości zwisa ze stołu. Przyjmij, że łańcuszek ma długość $L = 28$ cm oraz masę $m = 0{,}012$ kg i wyznacz pracę potrzebną do wciągnięcia na stół zwisającej z niego części łańcuszka.



Rys. 8.45. Zadanie 32

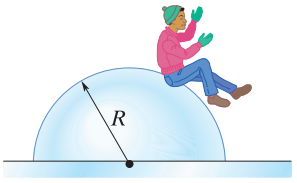
•••33 GO Jak pokazano na rysunku 8.46, sprężyna o stałej sprężystości $k = 170$ N/m jest umocowana na górnym końcu równi pochyłej o kącie nachylenia $\theta = 37°$. Dolny koniec nieodkształco-



Rys. 8.46. Zadanie 33

nej sprężyny znajduje się w odległości $D = 1$ m od dolnego końca równi. Sprężyna zostaje ściśnięta o 0,2 m za pomocą pojemnika o masie 2 kg, po czym pojemnik zostaje puszczony swobodnie w chwili, gdy jest nieruchomy. Pojemnik porusza się po równi bez tarcia. a) Jaka będzie wartość prędkości pojemnika, gdy sprężyna będzie ponownie nieodkształcona (tzn. w chwili, gdy pojemnik oderwie się od sprężyny)? b) Jaka będzie wartość prędkości pojemnika, gdy dotrze on do dolnego końca równi?

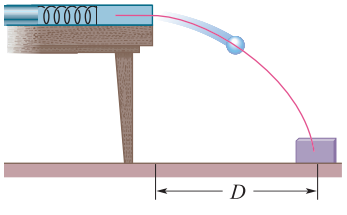
•••34 GO Chłopiec, siedzący początkowo na szczycie bryły lodu w kształcie półkuli o promieniu $R = 13{,}8$ m (rys. 8.47), zaczyna w pewnej chwili ześlizgiwać się po lodzie, przy czym jego prędkość początkowa jest znikomo mała, a jego ruch po lodzie odbywa się bez tarcia. Na jakiej wysokości nad podłożem odrywa się on od powierzchni bryły?



Rys. 8.47. Zadanie 34

•••35 GO Przedstawiony na rysunku 8.42 klocek o masie $m = 3{,}2$ kg, pozostający początkowo w spoczynku, ześlizguje się bez tarcia w dół wzdłuż równi pochyłej nachylonej pod kątem $\theta = 30°$ do poziomu. Po przebyciu wzdłuż równi drogi d klocek dociera do sprężyny o stałej sprężystości 431 N/m. Prędkość klocka spada do zera, gdy sprężyna jest ściśnięta o 21 cm. Wyznacz: a) drogę d, b) odległość punktu, w którym klocek po raz pierwszy zetknął się ze sprężyną, od punktu, w którym jego prędkość jest największa.

•••36 GO Dwoje dzieci bawi się w ten sposób, że starają się trafić kulką kamienną w małe pudełko leżące na podłodze. Kulka jest wystrzeliwana z ustawionej na stole wyrzutni sprężynowej. Pudełko jest odległe w poziomie od krawędzi stołu o $D = 2{,}2$ m (patrz rysunek 8.48). Jaś ścisnął sprężynę o 1,1 cm, lecz kulka upadła na podłogę, 27 cm przed środkiem pudełka. O jaki odcinek musi ścisnąć sprężynę Małgosia, aby trafić w środek pudełka? Przyjmij, że ani sprężyna, ani kulka nie doznają tarcia ze strony ścian wyrzutni.

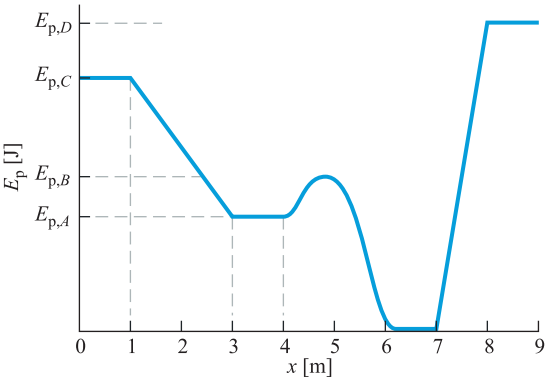


Rys. 8.48. Zadanie 36

•••37 Kawałek jednorodnej liny o długości 25 cm i masie 15 g jest początkowo przyklejony do sufitu na całej długości, a potem zwisa pionowo przyklejony do sufitu jednym końcem. Ile wynosi różnica grawitacyjnej energii potencjalnej liny w tych dwóch położeniach? *Wskazówka*: podziel linę na cienkie plasterki i wykonaj całkowanie.

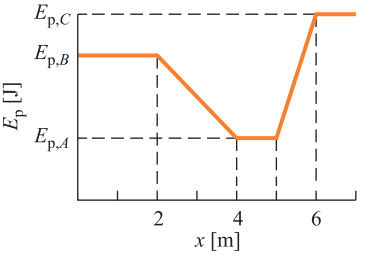
Podrozdział 8.3. Zastosowanie krzywych energii potencjalnej

••38 Na rysunku 8.49 przedstawiono wykres energii potencjalnej E_p cząstki o masie 0,2 kg jako funkcji jej położenia x. Cząstka porusza się wzdłuż osi x pod wpływem siły zachowawczej. Wartości energii na wykresie wynoszą: $E_{p,A} = 9$ J, $E_{p,C} = 20$ J, $E_{p,D} = 24$ J. Cząstkę puszczono swobodnie w punkcie, w którym $E_{p,B} = 12$ J, gdy jej energia kinetyczna była równa 4 J. Wyznacz prędkość cząstki w punkcie a) $x = 3{,}5$ m, b) $x = 6{,}5$ m. Wyznacz położenie c) lewego, d) prawego punktu zwrotnego.



Rys. 8.49. Zadanie 38

••39 GO Na rysunku 8.50 przedstawiono wykres energii potencjalnej E_p cząstki o masie 0,9 kg jako funkcji jej położenia x. Cząstka porusza się wzdłuż osi x, a siły niezachowawcze na nią nie działają. Wartości energii na wykresie wynoszą: $E_{p,A} = 15$ J, $E_{p,B} = 35$ J, $E_{p,C} = 45$ J. Cząstkę puszczono swobodnie w punkcie $x = 4{,}5$ m, gdy jej prędkość miała wartość 7 m/s i była skierowana wzdłuż osi x w lewo. a) Czy cząstka dotrze do punktu $x = 1$ m? Jeśli tak, podaj jej prędkość w tym punkcie, jeśli nie, podaj położenie punktu zwrotnego. Wyznacz b) wartość i c) kierunek siły działającej na cząstkę, gdy zaczyna się poruszać w lewo od $x = 4$ m. Załóż następnie, że cząstkę puszczono swobodnie w punkcie $x = 4{,}5$ m, gdy jej prędkość miała wartość 7 m/s, lecz była skierowana wzdłuż osi x w prawo. d) Czy cząstka dotrze do punktu $x = 7$ m? Jeśli tak, podaj jej prędkość w tym punkcie, jeśli nie, podaj położenie punktu zwrotnego. Wyznacz e) wartość i f) kierunek siły działającej na cząstkę, gdy zaczyna się poruszać w prawo od $x = 5$ m.



Rys. 8.50. Zadanie 39

••40 Energia potencjalna cząsteczki dwuatomowej (tzn. układu złożonego z dwóch atomów, jak H_2 lub O_2) jest dana wzorem

$$E_p = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6},$$

przy czym r jest odległością dwóch atomów, tworzących cząsteczkę, a A i B są stałymi dodatnimi. Ta energia potencjalna jest związana z istnieniem siły, która wiąże ze sobą atomy cząsteczki. a) Wyznacz *odległość równowagi*, tzn. odległość atomów, przy której siła działająca na każdy z nich jest równa zeru. Czy siła działająca między atomami jest siłą odpychania, czy siłą przyciągania, gdy ich odległość jest: b) mniejsza, c) większa od odległości równowagi?

•••41 Na cząstkę o masie 1 kg, poruszającą się wzdłuż osi x, działa tylko jedna siła zachowawcza $F(x)$. Energia potencjalna $E_p(x)$, związana z działaniem siły $F(x)$, jest dana wzorem

$$E_p(x) = -4xe^{-x/4}\ \text{J},$$

przy czym x wyrażono w metrach. W punkcie o współrzędnej $x = 5$ m cząstka ma energię kinetyczną równą 2 J. a) Ile wynosi energia mechaniczna układu? b) Sporządź wykres $E_p(x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant 10$ m i narysuj na nim prostą przedstawiającą energię mechaniczną układu. Na podstawie tego wykresu wyznacz: c) najmniejszą, d) największą wartość współrzędnej x punktów, w których może znajdować się cząstka w czasie swego ruchu. Wyznacz również: e) największą wartość energii kinetycznej cząstki, f) współrzędną x punktu, w którym energia kinetyczna cząstki przybiera tę wartość. g) Znajdź równanie przedstawiające zależność $F(x)$. h) Dla jakiej (skończonej) wartości x zachodzi równość $F(x) = 0$?

Podrozdział 8.4. Praca wykonana nad układem przez siłę zewnętrzną

•42 Robotnik pcha skrzynię o masie 27 kg po poziomej podłodze, działając na nią siłą skierowaną pod kątem 32° w dół od poziomu. Wiedząc, że skrzynia porusza się ze stałą prędkością i przebywa drogę 9,2 m, a współczynnik tarcia kinetycznego między skrzynią a podłogą wynosi 0,2, wyznacz: a) pracę wykonaną przez siłę, jaką robotnik działa na skrzynię, b) wzrost energii termicznej układu skrzynia–podłoga.

•43 Owczarek collie ciągnie po podłodze kosz, który służy mu za legowisko, przykładając do niego poziomo siłę o wartości 8 N. Działająca na kosz siła tarcia kinetycznego ma wartość 5 N. Kosz przebywa drogę 0,7 m. Ile wynosi: a) praca wykonana przez siłę, jaką owczarek działa na kosz, b) wzrost energii termicznej kosza i podłogi?

••44 Klocek o masie 4 kg porusza się po podłodze pod wpływem działającej na niego poziomo siły o wartości 35 N. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o podłogę wynosi 0,6. a) Wyznacz pracę wykonaną przez działającą na klocek siłę nad układem klocek–podłoga przy przemieszczeniu klocka o 3 m. b) Przy tym przemieszczeniu energia termiczna klocka wzrosła o 40 J. O ile wzrosła energia termiczna podłogi? c) O ile wzrosła energia kinetyczna klocka?

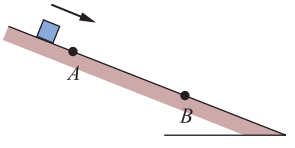
••45 ssm Klocek o masie 3,57 kg jest ciągnięty za pomocą liny po poziomej podłodze na drodze 4,06 m. Siła, działająca na klocek ze strony liny, jest skierowana pod kątem 15° w górę od poziomu i ma wartość 7,68 N. Wyznacz: a) pracę wykonaną przez siłę, jaką ciągnięta jest lina, b) wzrost energii termicznej układu klocek–podłoga, c) współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a podłogą.

Podrozdział 8.5. Zasada zachowania energii

•46 Zawodnik rzuca piłkę baseballową z prędkością początkową o wartości 132 km/h. Gdy inny zawodnik chwyta ją na takiej samej wysokości nad ziemią, piłka ma prędkość o wartości 33,5 m/s. O ile zmniejszyła się energia mechaniczna układu piłka–Ziemia w wyniku działania oporu powietrza (piłka baseballowa ma masę 225 g)?

•47 Zabawka frisbee zostaje wyrzucona w punkcie leżącym 1,1 m nad ziemią, z prędkością o wartości 12 m/s. Po osiągnięciu wysokości 2,1 m ma ona prędkość o wartości 10,5 m/s. O ile zmniejszyła się w tym czasie energia mechaniczna E_{mech} układu frisbee–Ziemia pod wpływem siły oporu powietrza?

•48 Jak pokazano na rysunku 8.51, klocek ześlizguje się po równi pochyłej. Między punktami A i B, odległymi od siebie o 5 m, na klocek działa siła $\vec{F}$ o wartości 2 N, skierowana wzdłuż równi w dół. Wartość działającej na klocek siły tarcia wynosi 10 N. Wyznacz pracę wykonaną nad klockiem przez siłę ciężkości, gdy klocek przemieszcza się z punktu A do B, wiedząc, że energia kinetyczna klocka wzrasta wówczas o 35 J.



Rys. 8.51. Zadania 48 i 71

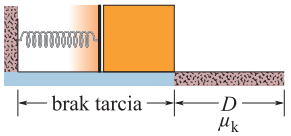
•49 ssm ilw Niedźwiadek o masie 25 kg ześlizguje się po pniu sosny. Jego prędkość początkowa, na wysokości 12 m nad ziemią, jest równa zeru, a prędkość w chwili dotarcia do ziemi wynosi 5,6 m/s. a) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu niedźwiadek–Ziemia w czasie zjazdu niedźwiadka na ziemię? b) Ile wynosi energia kinetyczna niedźwiadka w chwili dotarcia do ziemi? c) Ile wynosi średnia siła tarcia działająca na niedźwiadka w czasie jego ruchu?

•50 Narciarz o masie 60 kg ma przy odbiciu z progu skoczni narciarskiej prędkość o wartości 24 m/s, skierowaną pod kątem 25° w górę od poziomu. Na skoczka działa siła oporu powietrza, w wyniku czego w chwili lądowania w punkcie leżącym w pionie 14 m niżej od progu ma on prędkość o wartości 22 m/s. O ile zmniejszyła się pod wpływem oporu powietrza energia mechaniczna układu narciarz–Ziemia w czasie jego lotu, od wybicia z progu do lądowania na zeskoku?

•51 Podczas lawiny kamiennej nieruchomy początkowo blok skalny o masie 520 kg ześlizguje się po zboczu o długości 500 m i wysokości 300 m. Współczynnik tarcia kinetycznego między blokiem a zboczem wynosi 0,25. a) Przyjmując, że grawitacyjna energia potencjalna E_p układu blok–Ziemia jest równa zeru u podnóża stoku, wyznacz wartość E_p przed ześlizgnięciem się bloku. b) Ile energii zostaje zamienione w energię termiczną w czasie ruchu bloku? c) Ile wynosi energia kinetyczna bloku u podnóża stoku? d) Jaką ma on wtedy prędkość?

••52 Bochenek chleba ślizga się po stole przymocowany do końca poziomej sprężyny o stałej sprężystości $k = 400$ N/m. Drugi koniec sprężyny jest unieruchomiony. Gdy bochenek przechodzi przez punkt, w którym sprężyna jest nieodkształcona, jego energia kinetyczna jest równa 20 J. Na poruszający się bochenek działa siła tarcia o wartości 10 N. a) W jakiej odległości od punktu, w którym sprężyna jest nieodkształcona, prędkość bochenka stanie się równa zeru? b) Jaka będzie energia kinetyczna bochenka, gdy ponownie znajdzie się w punkcie, w którym sprężyna jest nieodkształcona?

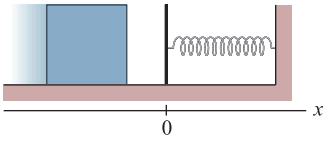
••53 GO Na rysunku 8.52 przedstawiono klocek o masie 3,5 kg wprawiany w ruch przyspieszony przez ściśniętą sprężynę o stałej sprężystości 640 N/m. Gdy sprężyna osiąga długość odpowiadającą stanowi, w którym jest nieodkształcona, klocek odrywa się od niej i porusza się po powierzchni poziomej aż do zatrzymania się, przebywając przy tym drogę $D = 7{,}8$ m. Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a tą powierzchnią wynosi $\mu_k = 0{,}25$. a) O ile wzrasta przy tym energia termiczna układu klocek–podłoże? b) Ile wynosi maksymalna energia kinetyczna klocka? c) O ile była ściśnięta sprężyna, gdy rozpoczął się ruch klocka?



Rys. 8.52. Zadanie 53

••54 Dziewczynka, której ciężar wynosi 267 N, ześlizguje się na placu zabaw po zjeżdżalni o długości 6,1 m i kącie nachylenia 20° do poziomu. Współczynnik tarcia kinetycznego między dzieckiem a zjeżdżalnią wynosi 0,1. a) Ile energii zostaje przy tym zamienione na energię termiczną? b) Jaka jest wartość prędkości dziewczynki na dole zjeżdżalni, jeśli jej prędkość na starcie miała wartość 0,457 m/s?

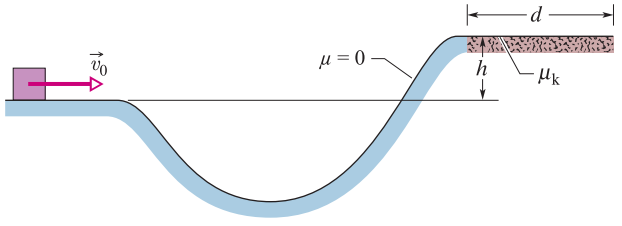
••55 ilw Na rysunku 8.53 przedstawiono klocek o masie $m = 2{,}5$ kg ślizgający się w kierunku sprężyny o stałej sprężystości $k = 320$ N/m. Prędkość klocka spada do zera, gdy sprężyna jest ściśnięta o 7,5 cm. Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a poziomą powierzchnią, po której się on ślizga, wynosi 0,25. Wyznacz: a) pracę wykonaną przez siłę sprężystości sprężyny, b) wzrost energii termicznej układu klocek–podłoże w czasie od zetknięcia się klocka ze sprężyną do osiągnięcia przez niego prędkości równej zeru. c) Jaką prędkość ma klocek w chwili dotarcia do sprężyny?



Rys. 8.53. Zadanie 55

••56 Do ustawionej poziomo sprężyny przyciskasz klocek o masie 2 kg, tak że sprężyna zostaje ściśnięta o 15 cm. Następnie puszczasz klocek, a sprężyna wprawia go w ruch po blacie stołu. Klocek zatrzymuje się w odległości 75 cm od punktu, w którym się znajdował, gdy zwolniłeś nacisk. Stała sprężystości sprężyny wynosi 200 N/m. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a blatem?

••57 GO Jak pokazano na rysunku 8.54, klocek ślizga się po torze mającym na końcach odcinki poziome, a między nimi pewne obniżenie. Tarcie między klockiem a torem występuje jedynie na końcowym poziomym odcinku toru. W wyniku działania siły tarcia klocek zatrzymuje się po przebyciu wzdłuż tego odcinka drogi d. Prędkość początkowa v_0 klocka ma wartość 6 m/s, różnica wysokości h poziomych odcinków toru jest równa 1,1 m, a współczynnik tarcia kinetycznego μ_k wynosi 0,6. Wyznacz wartość d.



Rys. 8.54. Zadanie 57

••58 Pudełko z ciasteczkami porusza się w górę po równi pochyłej o kącie nachylenia 40°. W punkcie odległym o 55 cm (licząc wzdłuż równi) od jej dolnego końca pudełko ma prędkość o wartości 1,4 m/s. Współczynnik tarcia kinetycznego między pudełkiem a równią wynosi 0,15. a) Jaką drogę w górę równi przebędzie jeszcze pudełko od tego punktu? b) Jaka będzie prędkość pudełka, gdy ześlizgnie się ono potem do dolnego końca równi? c) Czy wartości otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a) i (b) zwiększą się, zmniejszą, czy pozostaną bez zmiany, gdy zmniejszymy współczynnik tarcia kinetycznego (ale nie zmienimy podanej prędkości pudełka, ani punktu, w którym ma ono tę wartość)?

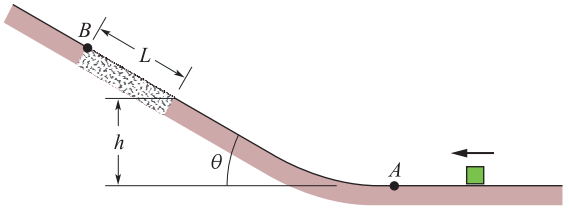
••59 Kamień, którego ciężar wynosi 5,29 N, wyrzucono pionowo z poziomu ziemi z prędkością początkową 20 m/s. Na kamień działa przez cały czas jego lotu siła oporu aerodynamicznego o wartości 0,265 N. Wyznacz: a) największą wysokość, na jaką wzniesie się kamień, b) prędkość kamienia w chwili upadku na ziemię.

••60 Tobołek o masie 4 kg rozpoczyna ruch w górę po równi pochyłej, o kącie nachylenia 30°, mając u jej podnóża energię kinetyczną równą 128 J. Jaką drogę przebędzie on po

równi, jeśli współczynnik tarcia kinetycznego między tobołkiem a równią wynosi 0,3?

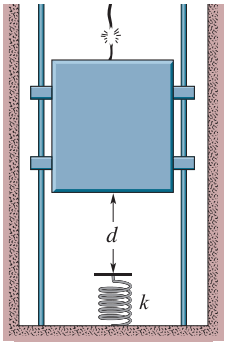
••61 Gdy chrząszcz z rodziny sprężykowatych leży na grzbiecie, może nagle podskoczyć, wyginając grzbiet, przy czym energia zmagazynowana w jego mięśniach zamienia się w energię mechaniczną. Towarzyszy też temu dobrze słyszalne kliknięcie (dlatego sprężykowate noszą po angielsku nazwę click beetle). Z nagrań wideo wynika, że chrząszcz o masie $m = 4{\cdot}10^{-6}$ kg potrafi podskoczyć o 0,77 mm w fazie wyskoku i wznieść się potem na wysokość $h = 0{,}3$ m. Ile wynoszą w fazie wyskoku: a) siła zewnętrzna działająca grzbiet chrząszcza ze strony podłoża, b) przyspieszenie chrząszcza wyrażone jako wielokrotność g?

•••62 GO Jak widać na rysunku 8.55, klocek ślizga się bez tarcia po torze poziomym, a potem po równi pochyłej. Na jej odcinku o długości $L = 0{,}75$ m ruch odbywa się z tarciem, a współczynnik tarcia kinetycznego wynosi 0,4. Ten odcinek zaczyna się w punkcie o wysokości $h = 2$ m nad poziomem podstawy równi o kącie nachylenia $\theta = 30°$. Klocek ma w punkcie A prędkość 8 m/s. Czy klocek dotrze do punktu B, gdzie kończy się odcinek, na którym występuje tarcie? Jeśli tak, wyznacz jego prędkość w tym punkcie, jeśli nie, podaj największą wysokość nad podstawę równi, na jaką klocek dotrze.



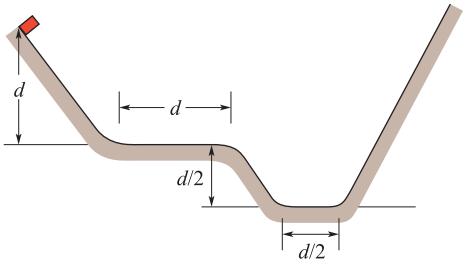
Rys. 8.55. Zadanie 62

•••63 Lina, na której zawieszona jest kabina windy, urywa się, gdy kabina stoi na pierwszym piętrze, a jej podłoga znajduje się na wysokości $d = 3{,}7$ m nad sprężyną amortyzującą o stałej sprężystości $k = 0{,}15$ MN/m (rys. 8.56). Układ zabezpieczający zwiększa wtedy docisk uchwytów kabiny do szyn windy, tak że ruch kabiny utrudnia stała siła tarcia o wartości 4,4 kN. a) Wyznacz prędkość kabiny w chwili jej dotarcia do sprężyny amortyzującej. b) Wyznacz długość odcinka x, o jaki maksymalnie zostanie ściśnięta ta sprężyna (siła tarcia działa także podczas ściskania sprężyny). c) Wyznacz wysokość, na jaką wzniesie się potem ponownie kabina wzdłuż szybu. d) Korzystając z zasady zachowania energii, wyznacz w przybliżeniu całkowitą drogę przebytą przez kabinę do jej zatrzymania (przyjmij, że siła tarcia jest praktycznie równa zeru, gdy kabina się nie porusza).



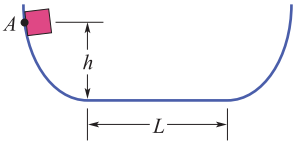
Rys. 8.56. Zadanie 63

•••64 GO Jak pokazano na rysunku 8.57, klocek rusza bez prędkości początkowej z punktu na wysokości $d = 40$ cm nad pierwszym płaskim odcinkiem toru. Tor z rysunku 8.57 składa się z odcinków płaskich, na których działa tarcie, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0,5, oraz odcinków pochyłych, po których klocek porusza się bez tarcia. Długości poszczególnych odcinków toru wynikają z rysunku. Klocek ślizga się, osiągając w pewnej chwili prędkość równą zeru. Gdzie to nastąpi? Jeśli będzie to na odcinku płaskim, powiedz, na którym, oraz podaj odległość tego punktu L od lewego brzegu odcinka. Jeśli to będzie na równi z prawej strony, podaj wysokość tego punktu H nad poziom dolnego odcinka płaskiego.



Rys. 8.57. Zadanie 64

•••65 GO Cząstka może ślizgać się wzdłuż toru, który wznosi się na końcach, a w części środkowej zawiera płaski odcinek o długości L, jak na rysunku 8.58. Po łukach na końcach toru cząstka porusza się bez tarcia, natomiast na płaskim odcinku toru występuje tarcie, a współczynnik tarcia kinetycznego między cząstką a torem wynosi tam $\mu_k = 0{,}2$. Cząstka zostaje puszczona swobodnie z prędkością początkową równą zeru w punkcie A leżącym na wysokości $h = L/2$ nad płaską częścią toru. Gdzie ta cząstka ostatecznie się zatrzyma?



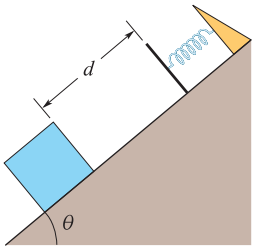
Rys. 8.58. Zadanie 65

Zadania dodatkowe

66 Leniwiec o masie 3,2 kg wisi na wysokości 3 m nad ziemią. a) Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna układu leniwiec–Ziemia przy założeniu, że energię tę mierzymy względem poziomu ziemi ($y = 0$)? Leniwiec zeskakuje potem na ziemię, przy czym opór aerodynamiczny jest znikomo mały. Ile wynoszą: b) energia kinetyczna, c) prędkość leniwca tuż przed dotarciem do ziemi?

67 ssm Sprężyna (o $k = 200$ N/m) jest umocowana na górze równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem $\theta =$

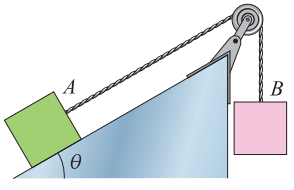
40° (patrz rys. 8.59). Klocek o masie 1 kg zostaje pchnięty w górę wzdłuż równi. Jego początkowa energia kinetyczna wynosi 16 J, a znajduje się on wówczas w odległości $d = 0{,}6$ m od sprężyny. a) Ile wynosi energia kinetyczna klocka po ściśnięciu przez niego sprężyny o 0,2 m? b) Jaka musiałaby być początkowa energia kinetyczna klocka, aby jego prędkość zmalała do zera po ściśnięciu sprężyny o 0,4 m?



Rys. 8.59. Zadanie 67

68 Z brzegu urwiska wystrzelono pocisk o masie 0,55 kg, nadając mu początkową energię kinetyczną 1550 J. Pocisk wzniósł się maksymalnie na 140 m ponad poziom, z którego go wystrzelono. Ile wynosiły składowe prędkości początkowej pocisku: a) pozioma i b) pionowa? c) Ile wynosi przemieszczenie pocisku w pionie (od punktu wystrzelenia pocisku) w chwili, gdy składowa pionowa prędkości pocisku wynosi 65 m/s?

69 ssm Na rysunku 8.60 przedstawiono dwa klocki połączone liną przełożoną przez bloczek, który ma znikomo małą masę i może się obracać bez tarcia. Ruchowi klocka po równi także nie towarzyszy tarcie. Masa klocka A wynosi 1 kg, masa klocka B jest równa 2 kg, a kąt θ ma wartość 30°. W chwili początkowej klocki są utrzymywane w spoczynku, a lina jest napięta. Następnie klockom pozwalamy się poruszać. Oblicz ich energię kinetyczną po przebyciu przez klocek B drogi 25 cm.

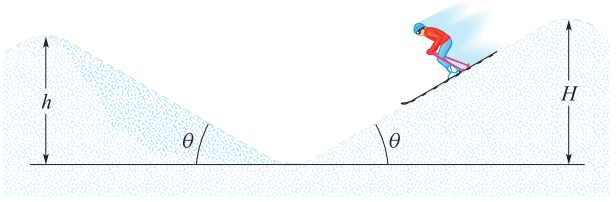


Rys. 8.60. Zadanie 69

70 GO Na rysunku 8.38 przedstawiono nić o długości $L = 120$ cm. Na jednym końcu jest do niej przymocowana kulka, a drugi koniec jest unieruchomiony. W punkcie P znajduje się kołek. Gdy kulka, pozostająca początkowo w bezruchu na końcu poziomej nici, zostaje puszczona swobodnie, porusza się ona w dół, a potem nić owija się wokół kołka. Jaka musi być co najmniej długość odcinka d, by kulka wykonała pełny obrót wokół kołka? *Wskazówka*: na górze toru kulka musi się wciąż poruszać (rozumiesz, dlaczego tak jest?).

71 ssm Jak pokazano na rysunku 8.51, klocek ześlizguje się bez tarcia w dół po równi pochyłej. Prędkość klocka w punktach A i B wynosi odpowiednio 2 m/s i 2,6 m/s. Gdy klocek ześlizguje się po równi kolejny raz, jego prędkość w punkcie A wynosi 4 m/s. Wyznacz prędkość klocka w punkcie B.

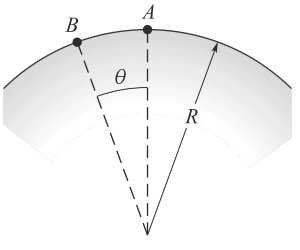
72 Dwie ośnieżone góry mają wysokości $H = 850$ m i $h = 750$ m względem obniżenia między nimi. Tor narciarski, prowadzący ze szczytu wyższej góry na szczyt niższej, ma całkowitą długość 3,2 km i średnie nachylenie $\theta = 30°$ (rys. 8.61). a) Nieruchomy początkowo narciarz rusza po torze ze szczytu wyższej góry. Jaką prędkość będzie on miał na szczycie niższej góry, jeśli nie używa kijków, a tarcie jest znikomo małe? b) Ile powinien wynosić w przybliżeniu współczynnik tarcia między nartami a śniegiem na stoku, aby narciarz zatrzymał się na szczycie niższej góry?



Rys. 8.61. Zadanie 72

73 ssm Plastikowy sześcian, na który działa poziomo siła o wartości 15 N, porusza się po podłodze ze stałą prędkością i przebywa drogę 3 m. Energia termiczna sześcianu wzrasta przy tym o 20 J. O ile wzrasta energia termiczna podłogi, po której ten sześcian się ślizga?

74 Narciarka o ciężarze 600 N przejeżdża bez tarcia po szczycie kulistego wzniesienia o promieniu $R = 20$ m (rys. 8.62). Przyjmij, że działający na narciarkę opór powietrza jest znikomo mały. Gdy narciarka wjeżdża na szczyt i znajduje się w punkcie B, dla którego kąt θ wynosi 20°, jej prędkość ma wartość 8 m/s. a) Jaka będzie jej prędkość na szczycie wzniesienia (tzn. w punkcie A), jeśli nie będzie ona używać kijków? b) Ile musi wynosić co najmniej prędkość narciarki w punkcie B, jeśli ma ona wjechać na szczyt wzniesienia? c) Czy odpowiedzi na powyższe pytania zwiększą się, zmaleją, czy pozostaną bez zmiany, jeśli zwiększymy ciężar narciarki do 700 N?



Rys. 8.62. Zadanie 74

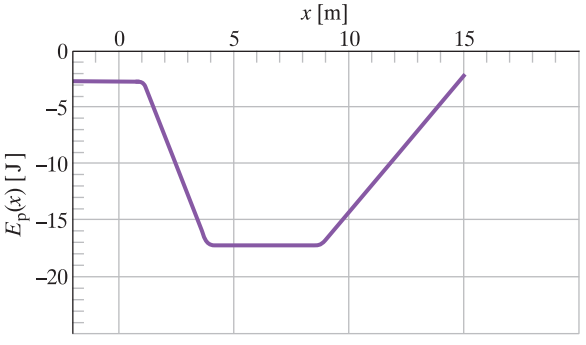
75 ssm Aby zbudować wahadło, kulę o masie 0,092 kg przymocowano do jednego końca pręta o długości 0,62 m i znikomo małej masie, a drugi koniec pręta zamocowano na osi obrotu. Pręt obrócono aż do położenia pionowego (z kulą na górze), po czym puszczono go, tak że mógł się obrócić na osi. Wyznacz a) prędkość kuli i b) naprężenie pręta w chwili, gdy kula dociera do swego najniższego położenia. Następnie pręt obrócono do położenia poziomego i pozwolono mu się wahać. c) Wyznacz kąt, jaki tworzy pręt z pionem, gdy naprężenie pręta jest równe ciężarowi kuli. d) Czy odpowiedź z punktu (c) wzrośnie, zmaleje, czy się nie zmieni, gdy zwiększymy masę kuli?

76 Cząstka porusza się wzdłuż osi x, najpierw z punktu $x = 1$ m do punktu $x = 4$ m, a następnie z powrotem do punktu $x = 1$ m pod wpływem działającej na nią siły zewnętrznej. Siła ta działa wzdłuż osi x, a jej wartości mogą być inne, gdy cząstka zwiększa i zmniejsza swe położenia. W tabelce podano te wartości w czterech przypadkach (x wyrażono w metrach).

	x rośnie	x maleje
a)	$+3$	-3
b)	$+5$	$+5$
c)	$+2x$	$-2x$
d)	$+3x^2$	$+3x^2$

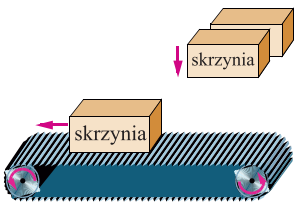
Wyznacz całkowitą pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną nad cząstką podczas jej ruchu *tam i z powrotem* w każdym z czterech przypadków. e) W których z tych przypadków (może w żadnym) siła zewnętrzna jest zachowawcza?

77 ssm Na cząstkę o masie 2 kg, poruszającą się wzdłuż osi x, działa siła zachowawcza $F(x)$. Wykres energii potencjalnej $E_p(x)$ związanej z działaniem tej siły $F(x)$ przedstawiono na rysunku 8.63. Gdy cząstka znajduje się w punkcie $x = 2$ m, jej prędkość wynosi $-1{,}5$ m/s. Wyznacz a) wartość i b) kierunek siły $F(x)$ w tym punkcie. Jakie są wartości graniczne x c) z lewej strony i d) z prawej strony, między którymi może poruszać się cząstka? e) Jaka jest wartość prędkości cząstki w punkcie $x = 7$ m?



Rys. 8.63. Zadanie 77

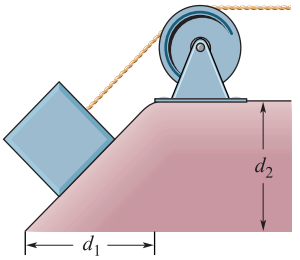
78 W pewnej fabryce skrzynie o masie 300 kg spadają pionowo z maszyny do ich pakowania na pas transmisyjny poruszający się z prędkością 1,2 m/s (rys. 8.64). Silnik utrzymuje stałą prędkość pasa. Współczynnik tarcia kinetycznego między każdą ze skrzyń a pasem wynosi 0,4. Po krótkim czasie od spadku na pas skrzynia przestaje się po nim ślizgać i porusza się z prędkością pasa. Rozważ przedział czasu, w którym skrzynia zostaje unieruchomiona względem pasa, i wyznacz dla tego przedziału: a) energię kinetyczną nadaną skrzyni, b) wartość działającej na skrzynię siły tarcia kinetycznego, c) energię dostarczoną przez silnik. Wykonaj obliczenia w układzie współrzędnych związanym z halą fabryczną. d) Wyjaśnij, dlaczego odpowiedzi w punktach (a) i (c) są od siebie różne.



Rys. 8.64. Zadanie 78

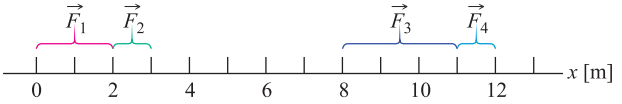
79 ssm Samochód o masie 1500 kg zaczyna ześlizgiwać się wzdłuż drogi nachylonej do poziomu pod kątem 5°, gdy jego prędkość ma wartość 30 km/h. Silnik pojazdu jest zgaszony i na samochód działa jedynie siła tarcia o powierzchnię drogi oraz siła ciężkości. Po przebyciu przez samochód drogi 50 m, jego prędkość wynosi 40 km/h. a) O ile zmniejszyła się energia mechaniczna pojazdu w wyniku działania siły tarcia? b) Ile wynosi wartość tej siły tarcia?

80 GO Blok granitowy o masie 1400 kg jest wciągany po równi pochyłej ze stałą prędkością o wartości 1,34 m/s przy użyciu wciągarki linowej (patrz rys. 8.65). Zaznaczone na rysunku odcinki mają długości: $d_1 = 40$ m i $d_2 = 30$ m. Współczynnik tarcia kinetycznego między blokiem a powierzchnią równi wynosi 0,4. Oblicz moc wciągarki.



Rys. 8.65. Zadanie 80

81 Cząstka może poruszać się tylko wzdłuż osi x, gdzie działają na nią siły zachowawcze (patrz rys. 8.66 i tabelka). Badamy ruch cząstki od chwili, gdy znajduje się ona w punkcie $x = 5$ m, ma energię kinetyczną $E_k = 14$ J i energię potencjalną $E_p = 0$. Załóż, że cząstka porusza się wtedy w ujemnym kierunku osi x i wyznacz jej: a) E_k i b) E_p w punkcie $x = 2$ m oraz c) E_k i d) E_p w punkcie $x = 0$. Załóż następnie, że w chwili początkowej cząstka porusza się w dodatnim kierunku osi x i wyznacz jej: e) E_k i f) E_p w punkcie $x = 11$ m, g) E_k i h) E_p w punkcie $x = 12$ m oraz i) E_k i j) E_p w punkcie $x = 13$ m. k) Sporządź wykres zależności $E_p(x)$ w przedziale od $x = 0$ do $x = 13$ m.



Rys. 8.66. Zadania 81 i 82

Na koniec załóż, że w chwili początkowej cząstka znajduje się w punkcie $x = 0$ i ma prędkość równą zeru. Wyznacz: l) jej energię kinetyczną w punkcie $x = 5$ m, m) największe położenie dodatnie x_{max}, jakie cząstka osiągnie. n) Co się stanie z cząstką po dotarciu przez nią do punktu x_{max}?

przedział	siła
od 0 do 2 m	$\vec{F}_1 = +(3\text{ N})\hat{i}$
od 2 m do 3 m	$\vec{F}_2 = +(5\text{ N})\hat{i}$
od 3 m do 8 m	$F = 0$
od 8 m do 11 m	$\vec{F}_3 = -(4\text{ N})\hat{i}$
od 11 m do 12 m	$\vec{F}_4 = -(1\text{ N})\hat{i}$
od 12 m do 15 m	$F = 0$

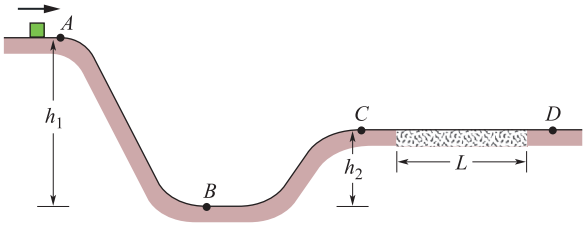
82 Rozważ ponownie układ sił z zadania 81 i załóż, że w chwili początkowej cząstka o masie 2 kg znajduje się w punkcie $x = 5$ m i ma prędkość o wartości 3,45 m/s skierowaną w ujemnym kierunku osi x. a) Czy cząstka dotrze do punktu $x = 0$? Jeśli tak, podaj jej prędkość w tym punkcie, jeśli nie, podaj położenie punktu zwrotnego. Załóż następnie, że w chwili początkowej cząstka ta znajduje się w punkcie $x = 5$ m i ma prędkość o wartości 3,45 m/s skierowaną w dodatnim kierunku osi x. b) Czy cząstka dotrze do punktu $x = 13$ m? Jeśli tak, podaj jej prędkość w tym punkcie, jeśli nie, podaj położenie punktu zwrotnego.

83 ssm Blok o masie 15 kg porusza się bez tarcia po poziomej powierzchni z przyspieszeniem o wartości 2 m/s^2. Na pewnej drodze jego prędkość wzrasta od wartości 10 m/s do wartości 30 m/s. Ile wynosi przy tym: a) zmiana energii mechanicznej bloku, b) średnia szybkość, z jaką energia jest przekazywana blokowi? Ile wynosi chwilowa wartość tej szybkości, gdy prędkość bloku ma wartość: c) 10 m/s, d) 30 m/s?

84 Stwierdzono, że dla pewnej sprężyny prawo Hooke'a *nie jest* spełnione. Po zmianie jej długości o odcinek x (w metrach) działa ona siłą o wartości $52{,}8x + 38{,}4x^2$ (w niutonach) i kierunku przeciwnym do jej odkształcenia. a) Wyznacz pracę potrzebną do zwiększenia wydłużenia sprężyny z $x = 0{,}5$ m do $x = 1$ m. b) Jeden koniec sprężyny unieruchomiono, a do drugiego przymocowano ciało o masie 2,17 kg, po czym sprężynę rozciągnięto o $x = 1$ m. Następnie nieruchome w tych warunkach ciało puszczono swobodnie. Wyznacz prędkość ciała w chwili, gdy wydłużenie sprężyny wynosi $x = 0{,}5$ m. c) Czy siła wywierana przez sprężynę jest zachowawcza, czy niezachowawcza (uzasadnij swoją odpowiedź)?

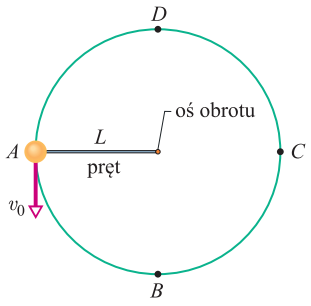
85 ssm Z wodospadu o wysokości 100 m spada w ciągu każdej sekundy 1200 m^3 wody. Trzy czwarte energii kinetycznej uzyskiwanej przez wodę podczas spadku jest zamieniane na energię elektryczną prądnicy elektrowni wodnej. Ile wynosi moc tej prądnicy, tzn. z jaką szybkością wytwarza ona energię elektryczną? Przyjmij, że masa 1 m^3 wody wynosi 1000 kg.

86 GO Jak pokazano na rysunku 8.67, niewielki klocek rusza z punktu A z prędkością o wartości 7 m/s i porusza się po torze bez tarcia aż do odcinka o długości $L = 12$ m, na którym współczynnik tarcia kinetycznego klocka o tor wynosi 0,7. Zaznaczone na rysunku wysokości są równe $h_1 =$ 6 m i $h_2 = 2$ m. Wyznacz prędkość klocka a) w punkcie B i b) w punkcie C. c) Czy klocek dotrze do punktu D? Jeśli tak, wyznacz jego prędkość w tym punkcie, jeśli nie, podaj długość odcinka, na którym działa tarcie, jaką klocek przebędzie.



Rys. 8.67. Zadanie 86

87 ssm Na rysunku 8.68 przedstawiono pręt o długości L i znikomo małej masie, do którego na jednym końcu przymocowano kulę o masie m, a drugą umieszczono na osi obrotu, tak że kula może zataczać okrąg w płaszczyźnie pionowej. Załóż, że na osi obrotu nie ma tarcia. W chwili początkowej pręt był poziomy, a kula znajdowała się w punkcie A i miała prędkość o wartości v_0. Kula dotarła do punktu D, osiągając w tym punkcie prędkość równą zeru. a) Wyznacz v_0 jako funkcję L, m i g. b) Wyznacz naprężenie pręta w chwili, gdy kula przechodzi przez punkt B. c) Gdy oś trochę zabrudzono, aby obrót odbywał się z niewielkim tarciem, kula rozpoczynająca ruch, jak w poprzednim przypadku, dotarła tylko do punktu C. O ile zmniejszyła się jej energia mechaniczna podczas tego ruchu? d) O ile zmniejszy się jej energia mechaniczna do chwili, gdy w końcu kula zatrzyma się w punkcie B po kilku wahaniach układu?



Rys. 8.68. Zadanie 87

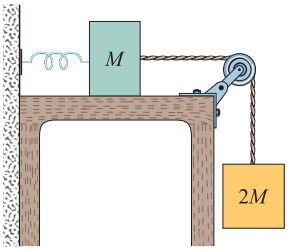
88 Balon napełniony wodą, którego masa wynosi 1,5 kg, zostaje wystrzelony pionowo w górę z prędkością początkową o wartości 3 m/s. a) Ile wynosi energia kinetyczna balonu tuż po jego wystrzeleniu? b) Ile wynosi praca wykonana nad balonem przez siłę ciężkości podczas jego lotu w górę? c) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu balon–Ziemia w czasie wznoszenia się balonu? d) Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna tego układu w chwili osiągnięcia przez balon największej wysokości lotu, jeśli przyjęto, że energia ta jest równa zeru w punkcie wystrzelenia balonu? e) Ile wynosi grawitacyjna energia potencjalna tego układu w chwili wystrzelenia balonu, jeśli przyjęto, że jest ona równa zeru w punkcie osiągnięcia przez balon największej wysokości lotu? f) Ile wynosi największa wysokość lotu balonu?

89 Puszka napoju o masie 2,5 kg zostaje rzucona w dół z wysokości 4 m z prędkością początkową o wartości 3 m/s. Opór powietrza można zaniedbać. Wyznacz energię kinetyczną puszki: a) w chwili jej dotarcia do ziemi, b) w połowie drogi do ziemi. Wyznacz c) energię kinetyczną puszki i d) grawitacyjną energię potencjalną układu puszka–Ziemia 0,2 s przed dotarciem kulki do ziemi. Przyjmij, że energię potencjalną mierzymy względem ziemi (czyli punktu $y = 0$).

90 Kufer o masie 50 kg przebywa w górę po równi nachylonej do poziomu pod kątem 30° drogę o długości 6 m, gdy

działa na niego stała siła pozioma. Współczynnik tarcia kinetycznego kufra o równię wynosi 0,2. Oblicz: a) pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną, b) wzrost energii termicznej kufra i równi.

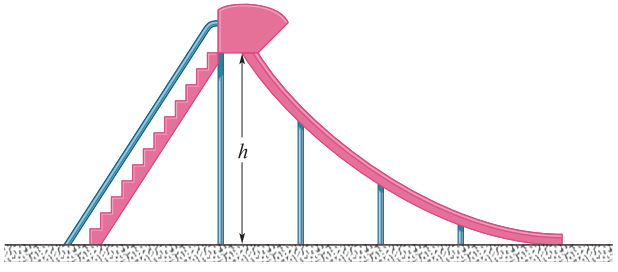
91 GO Dwa klocki, o masach $M = 2$ kg i $2M$, połączono ze sprężyną o stałej sprężystości $k = 200$ N/m, której drugi koniec unieruchomiono. Klocki połączono ze sobą linką przełożoną przez bloczek. Ruch klocka po poziomej powierzchni oraz obrót bloczka zachodzą bez tarcia, a bloczek ma znikomo małą masę (patrz rys. 8.69). W chwili początkowej sprężyna była nieodkształcona, a klocki były nieruchome. a) Wyznacz łączną energię kinetyczną obu klocków w chwili, gdy klocek wiszący opadł o 0,09 m. b) Wyznacz energię kinetyczną klocka wiszącego w chwili, gdy opadł on o 0,09 m. c) Wyznacz drogę, którą przebędzie w pionie klocek wiszący do chwili, gdy jego prędkość stanie się równa zeru.



Rys. 8.69. Zadanie 91

92 Strumień popiołu wulkanicznego porusza się po płaskim gruncie, a w pewnym momencie dociera do wzgórza wznoszącego się pod kątem 10°. Czoło strumienia zatrzymuje się po przebyciu po pochyłości drogi 920 m. Załóżmy, że uwięzione w strumieniu gazy unoszą nieco popiół, tak że ruchowi strumienia po ziemi towarzyszy znikomo małe tarcie, w związku z czym można przyjąć, że energia mechaniczna czoła strumienia jest zachowana. Wyznacz prędkość początkową czoła strumienia.

93 Zjeżdżalnia na placu zabaw ma kształt łuku okręgu o promieniu 12 m. Jej wysokość jest równa $h = 4$ m, a jej dolny koniec jest styczny do powierzchni ziemi (rys. 8.70). Dziecko o masie 25 kg ześlizguje się po tej zjeżdżalni, ruszając z góry, z prędkością początkową równą zeru, i osiągając na dole zjeżdżalni prędkość o wartości 6,2 m/s. a) Ile wynosi długość zjeżdżalni? b) Ile wynosi średnia siła tarcia działająca na dziecko na tej drodze? Załóż następnie, że zjeżdżalnia nie jest styczna do podłoża, lecz do linii pionowej przechodzącej przez *górny koniec zjeżdżalni*. Ile wynosi w tym przypadku: c) długość zjeżdżalni, d) średnia siła tarcia działająca na dziecko w czasie zjazdu?



Rys. 8.70. Zadanie 93

94 Spalinowo-elektryczny układ napędowy luksusowego liniowca *Queen Elizabeth 2* miał moc maksymalną 92 MW przy prędkości podróżnej 32,5 węzła. Wyznacz siłę, jaką działał ten układ na statek w kierunku jego ruchu przy tej prędkości (1 węzeł to 1,852 km/h).

95 Robotnik w fabryce zwalnia niechcący blokadę, utrzymującą skrzynię o masie 180 kg w spoczynku, na szczycie pochylni o długości 3,7 m i kącie nachylenia 39° w stosunku do poziomu. Współczynnik tarcia kinetycznego między skrzynią a pochylnią i między skrzynią a poziomą podłogą hali fabrycznej wynosi 0,28. a) Z jaką prędkością porusza się skrzynia na dolnym końcu pochylni? b) Jaką drogę przebędzie skrzynia po podłodze hali (przyjmij, że energia kinetyczna skrzyni nie zmienia się przy zmianie kierunku ruchu skrzyni, gdy zjeżdża ona z pochylni na podłogę)? c) Czy wartości otrzymane jako odpowiedzi na pytania (a) i (b) zwiększą się, zmniejszą, czy pozostaną bez zmiany, gdy masa skrzyni zmniejszy się o połowę?

96 Baseballista o masie 70 kg „kradnie bazę" drużyny przeciwnej, wślizgując się na nią z prędkością 10 m/s, którą ma w chwili upadku na ziemię. Wyznacz a) spadek energii kinetycznej gracza i b) wzrost energii termicznej gracza i płyty, na którą się wślizguje.

97 Banan o masie 0,5 kg został rzucony pionowo w górę z prędkością początkową o wartości 4 m/s. Maksymalna wysokość jego lotu wyniosła 0,8 m. Wyznacz zmianę energii mechanicznej układu banan–Ziemia podczas lotu banana powodowaną przez opór powietrza.

98 Aby naostrzyć krawędź tnącą pewnego narzędzia, dociskamy ją do brzegu koła szlifierki siłą 180 N. Siła tarcia krawędzi tnącej narzędzia i koła szlifierki powoduje wygładzenie nierówności ostrza. Koło szlifierki ma promień 20 cm i wykonuje 2,5 obrotu na sekundę. Współczynnik tarcia kinetycznego ostrza o koło szlifierki wynosi 0,32. Wyznacz szybkość, z jaką energia silnika obracającego koło szlifierki jest zamieniana w energię termiczną koła i ostrza oraz w energię kinetyczną ziarenek metalu odrywanych od ostrza.

99 Pływak porusza się w basenie ze średnią prędkością 0,22 m/s. Średnia siła oporu jego ruchu wynosi 110 N. Jaką średnią moc musi mieć ten pływak?

100 Samochód, którego ciężar wraz z pasażerami wynosi 16 400 N, porusza się z prędkością 113 km/h, gdy kierowca zaczyna hamować i zatrzymuje pojazd. Siła tarcia kół pojazdu o nawierzchnię drogi ma wartość 8230 N. Wyznacz drogę hamowania.

101 Piłka o masie 0,63 kg zostaje wyrzucona pionowo w górę z prędkością początkową o wartości 14 m/s i w najwyższym punkcie toru znajduje się na wysokości 8,1 m nad punktem jej wyrzucenia. Ile wynosi zmiana energii mechanicznej układu

piłka–Ziemia w czasie wznoszenia się piłki na tę maksymalną wysokość?

102 Szczyt Mount Everestu znajduje się na wysokości 8850 m nad poziomem morza. a) Ile wynosi energia, którą musi zużyć wspinacz o masie 90 kg, aby pokonać działającą na niego siłę ciężkości przy wejściu z poziomu morza na szczyt góry? b) Ile batoników, o wartości energetycznej 1,25 MJ każdy, dostarcza takiej energii? Odpowiedź, jaką uzyskasz, powinna cię przekonać, że praca wykonana przeciw sile ciężkości to tylko bardzo mała część energii potrzebnej przy górskiej wspinaczce.

103 Sprinter o ciężarze 670 N pokonuje pierwsze 7 m dystansu w czasie 1,6 s, ruszając ze startu ze stałym przyspieszeniem. Wyznacz a) prędkość i b) energię kinetyczną sprintera po przebyciu pierwszych 7 m dystansu. b) Jaka jest średnia moc sprintera, gdy przebiega pierwsze 7 m dystansu?

104 Na ciało o masie 20 kg działa siła zachowawcza dana wzorem $F = -3x - 5x^2$, gdzie F wyrażono w niutonach, a x w metrach. Przyjmij, że związana z tą siłą energia potencjalna układu jest równa zeru, gdy ciało jest w punkcie $x = 0$. a) Wyznacz energię potencjalną układu, gdy ciało jest w punkcie $x = 2$ m. b) Wyznacz wartość prędkości ciała w punkcie $x = 0$, wiedząc, że w punkcie $x = 5$ m ma ono prędkość o wartości 4 m/s skierowaną w ujemnym kierunku osi x. c) Jakie byłyby wyniki z punktów (a) i (b), gdyby w punkcie $x = 0$ układ miał energię potencjalną -8 J?

105 Pewna maszyna pcha kufer o masie 40 kg w górę wzdłuż równi nachylonej do poziomu pod kątem 40°, działając na kufer siłą równoległą do równi. Kufer porusza się wzdłuż równi ze stałą prędkością i pokonuje drogę o długości 2 m, a współczynnik tarcia kinetycznego kufra o równię wynosi 0,4. Wyznacz: a) pracę wykonaną przez maszynę nad kufrem, b) wzrost energii termicznej kufra i równi.

106 Sprężyna dziecięcego pistoletu sprężynowego ma stałą sprężystości równą 700 N/m. Aby oddać strzał z tego pistoletu, najpierw ściska się sprężynę, potem umieszcza na niej kulę, a w końcu zwalnia sprężynę, która wypycha kulę z lufy. Kula odrywa się od sprężyny w chwili dotarcia do wylotu lufy. Gdy lufę skierowano ku górze pod kątem 30° do poziomu i wystrzelono kulę o masie 57 g, maksymalna wysokość lotu kuli ponad wylot lufy wyniosła 1,83 m. Załóż, że opór powietrza można zaniedbać. a) Z jaką prędkością wyleciała kula z lufy pistoletu? b) O ile została ściśnięta sprężyna, jeśli tarcie kuli o ścianki lufy można pominąć?

107 Jedyną siłą działającą na cząstkę jest siła zachowawcza $\vec{F}$. Gdy cząstka znajduje się w punkcie A, jej energia potencjalna w polu tej siły wynosi 40 J. Gdy cząstka przemieszcza się z punktu A do punktu B, siła $\vec{F}$ wykonuje nad cząstką pracę równą +25 J. Ile wynosi energia potencjalna cząstki w punkcie B?

108 W roku 1981 Daniel Goodwin wspiął się na szczyt wieżowca Searsa w Chicago o wysokości 443 m, wspinając się *na zewnątrz* budynku i korzystając z przyssawek i metalowych zaczepów. a) Załóż przybliżoną masę wspinacza i oblicz energię, którą musiał on przekazać ze swej energii wewnętrznej, aby zmienić grawitacyjną energię potencjalną układu Ziemia–Goodwin o wartość, jaką zyskał ten układ, gdy wspinacz wszedł na szczyt wieżowca. b) Oblicz energię potrzebną do wejścia na szczyt wieżowca po schodach wewnątrz budynku.

109 Artystka cyrkowa o masie 60 kg, początkowo nieruchoma, ześlizguje się po słupie na arenę. Oblicz jej energię kinetyczną w chwili dotarcia do areny przy założeniu, że siła tarcia kobiety o słup: a) jest znikomo mała (co nie jest bezpieczne dla kobiety), b) wynosi 500 N.

110 Klocek o masie 5 kg wystrzelono z prędkością 5 m/s ku górze wzdłuż równi nachylonej do poziomu pod kątem 30°. Jaką drogą przebędzie klocek wzdłuż równi ku górze, jeśli: a) między klockiem a równią nie występuje tarcie, b) współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a równią wynosi 0,4? c) W tym drugim przypadku oblicz wzrost energii termicznej klocka i równi podczas ruchu klocka ku górze. d) Przyjmij, że po osiągnięciu największego wzniesienia klocek ześlizguje się w dół równi mimo działania tarcia i oblicz prędkość klocka w chwili dotarcia do punktu, z którego został wystrzelony.

111 Pocisk o masie 9,4 kg wystrzelono pionowo w górę. W czasie wznoszenia się pocisku opór powietrza zmniejszył energię mechaniczną układu pocisk–Ziemia o 68 kJ. O ile wyżej wzniósłby się pocisk, gdyby nie było oporu powietrza?

112 Człowiek o masie 70 kg wyskakuje przez okno z płonącego domu i ląduje w siatce ratowniczej rozpiętej 11 m poniżej okna. Jego prędkość spada do zera, gdy siatka jest rozciągnięta o 1,5 m. Przyjmij, że siatka działa jak doskonała sprężyna, a energia mechaniczna jest zachowana podczas lądowania człowieka w siatce. Wyznacz energię potencjalną sprężystości siatki w chwili, gdy jest ona rozciągnięta o 1,5 m.

113 Pocisk o masie 30 g poruszający się poziomo z prędkością 500 m/s dociera do pionowej ściany i zagłębia się w nią na głębokość 12 cm. a) Ile wynosi przy tym zmiana energii mechanicznej pocisku? b) Jaka jest wartość średniej siły, jaką działa ściana na pocisk podczas jego zatrzymywania?

114 Samochód o masie 1500 kg rusza z miejsca w chwili $t = 0$ i na poziomej drodze uzyskuje prędkość 72 km/h w czasie 30 s. a) Ile wynosi energia kinetyczna pojazdu w chwili $t = 30$ s? b) Ile wynosi średnia moc pojazdu w przedziale czasu od $t = 0$ do $t = 30$ s? c) Ile wynosi moc chwilowa pojazdu w chwili $t = 30$ s, jeśli jego ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem?

115 Kulę śnieżną o masie 1,5 kg rzucono ku górze pod kątem 34° do poziomu z prędkością początkową o wartości 20 m/s.

a) Ile wynosi początkowa energia kinetyczna kuli? b) Ile wynosi zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej układu kula–Ziemia podczas lotu kuli od punktu jej wyrzucenia do punktu o największej wysokości kuli? c) Ile wynosi ta największa wysokość kuli?

116 Skoczek z samolotu spada ze stałą prędkością graniczną równą 59 m/s. Masa skoczka wynosi 68 kg. a) Z jaką szybkością zmniejsza się grawitacyjna energia potencjalna układu Ziemia–skoczek? b) Z jaką szybkością zmniejsza się energia mechaniczna tego układu?

117 Blok o masie 20 kg, znajdujący się na poziomej płaszczyźnie, połączono z poziomą sprężyną o stałej sprężystości $k = 4$ kN/m. Sprężynę rozciągnięto o 10 cm od długości odpowiadającej brakowi jej odkształcenia, przesuwając blok w prawą stronę. Następnie nieruchomy blok puszczono swobodnie. Między blokiem w ruchu a powierzchnią działa siła tarcia o wartości 80 N. a) Oblicz energię kinetyczną bloku po przebyciu przez niego drogi 2 cm od punktu zwolnienia. b) Oblicz energię kinetyczną bloku przy pierwszym przejściu przez punkt, w którym sprężyna jest nieodkształcona. c) Wyznacz największą energię kinetyczną bloku uzyskaną przez niego podczas ruchu od punktu zwolnienia do punktu, w którym sprężyna jest nieodkształcona.

118 Opory ruchu samochodu to tarcie o powierzchnię drogi, praktycznie niezależne od prędkości pojazdu, oraz opór powietrza, który jest proporcjonalny do kwadratu prędkości pojazdu. Dla pewnego samochodu o ciężarze 12 000 N całkowita siła oporu F jest dana wzorem $F = 300 + 1{,}8v^2$, gdzie F wyrażono w niutonach, a v w metrach na sekundę. Oblicz moc potrzebną do utrzymywania samochodu w ruchu przyspieszonym z przyspieszeniem 0,92 m/s^2, począwszy od prędkości 80 km/h. Wyraź ją w koniach mechanicznych.

119 ssm Piłkę o masie 50 g wyrzucono przez okno pod kątem 30° w górę od poziomu z prędkością początkową o wartości 8 m/s. Oblicz: a) energię kinetyczną piłki w najwyższym punkcie jej toru, b) wartość prędkości piłki, gdy znajdzie się ona o 3 m poniżej punktu wyrzucenia (korzystając z równań dla energii). Czy odpowiedź na pytanie (b) zależy od: c) masy piłki, d) kąta, pod jakim ją wyrzucono?

120 Sprężyna o stałej sprężystości 3200 N/m jest początkowo rozciągnięta tak, że jej energia potencjalna sprężystości wynosi 1,44 J (dla sprężyny nieodkształconej $E_p = 0$). Oblicz zmianę energii ΔE_p, gdy stan początkowy sprężyny zmienimy na: a) rozciągnięcie o 2 cm, b) ściśnięcie o 2 cm, c) ściśnięcie o 4 cm.

121 Lokomotywa o mocy 1,5 MW może w ciągu 6 minut zwiększyć prędkość pociągu z 10 m/s (w chwili $t = 0$) do 25 m/s. a) Wyznacz masę pociągu. Wyznacz b) prędkość pociągu i c) siłę, jaką lokomotywa działa na pociąg, jako funkcje czasu w przedziale od $t = 0$ do $t = 6$ min. d) Wyznacz drogę przebytą przez pociąg w przedziale czasu od $t = 0$ do $t = 6$ min.

122 ssm Krążek do gry w shuffleboard o masie 0,42 kg znajduje się początkowo w spoczynku. Gracz popycha go kijem, zwiększając jego prędkość do wartości 4,2 m/s, przy czym przyspieszenie krążka jest stałe. W tym czasie krążek przebywa drogę 2 m, po czym traci kontakt z kijem. Następnie krążek przebywa, ślizgając się, drogę 12 m i się zatrzymuje. Przyjmij, że podłoże jest poziome, a między nim a krążkiem działa stała siła tarcia. Oblicz wzrost energii termicznej układu krążek–podłoże w czasie przebycia przez krążek: a) ostatnich 12 m toru, b) pełnej drogi 14 m. c) Ile wynosi praca wykonana przez kij nad krążkiem?

123 Woda w rzece traci wysokość o 15 m, gdy przepływa przez rejon progów rzecznych. Wpływa ona w ten rejon z prędkością 3,2 m/s, a opuszcza go z prędkością 13 m/s. Jaki ułamek grawitacyjnej energii potencjalnej układu woda–Ziemia zamienia się przy tym na energię kinetyczną wody? *Wskazówka*: Rozpatrz spadek np. 10 kg wody.

124 Wartość siły grawitacyjnej działającej między ciałami o masach m_1 i m_2 jest dana wzorem

$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2},$$

gdzie G jest stałą, a x jest odległością ciał od siebie. a) Wyznacz odpowiadającą tej sile energię potencjalną $E_p(x)$. Załóż, że $E_p(x) \to 0$, gdy $x \to \infty$ i x jest dodatnie. b) Wyznacz pracę potrzebną do zmiany odległości ciał z $x = x_1$ w $x = x_1 + d$.

125 W ciągu każdej sekundy z wodospadu Niagara o wysokości 50 m spada woda o masie $5{,}5 \cdot 10^6$ kg. a) Ile wynosi spadek grawitacyjnej energii potencjalnej układu woda–Ziemia w ciągu każdej sekundy? b) Wyobraź sobie, że całą tę energię można zamienić na energię elektryczną (co nie jest możliwe). Jaka byłaby moc powstałej elektrowni (przypomnij sobie, że 1 m^3 wody ma masę 1000 kg)? c) Wyobraź sobie, że pewnej firmie udało się sprzedawać tę energię po 10 gr/kWh. Jaki byłby roczny przychód tej firmy?

126 Do budowy wahadła użyto kulki o masie 300 g, przymocowanej do końca nici o długości 1,4 m i znikomo małej masie (drugi koniec nici unieruchomiono). Kulkę odchylono w bok, tak że nić była napięta i tworzyła z pionem kąt 30°, a kulka była nieruchoma, po czym kulkę puszczono swobodnie. Wyznacz: a) wartość prędkości kulki, gdy nić tworzy z pionem kąt 20°, b) maksymalną wartość prędkości kulki. c) Jaki kąt tworzy z pionem nić wahadła, gdy prędkość kulki ma wartość równą jednej trzeciej jej wartości maksymalnej?

127 W pewnym numerze cyrkowym klaun o masie 60 kg zostaje wystrzelony z działa z prędkością początkową o wartości 16 m/s pod nieznanym kątem do poziomu i po krótkim czasie ląduje w siatce umieszczonej o 3,9 m wyżej niż punkt wystrze-

lenia. Pomiń opór powietrza w czasie lotu i oblicz energię kinetyczną klauna w chwili spadku do siatki.

128 Strażak o masie 70 kg zjeżdża po pionowym słupie o wysokości 4,3 m, startując ze stanu spoczynku. a) Załóż, że strażak trzyma słup bardzo lekko, tak że działające między nimi tarcie jest znikomo małe, i oblicz prędkość strażaka w chwili dotarcia na dolny poziom. b) Załóż z kolei, że strażak trzyma się słupa mocniej, tak że działa na niego ze strony słupa skierowana w górę siła tarcia o wartości 500 N. Oblicz w tym przypadku prędkość strażaka w chwili dotarcia na dolny poziom.

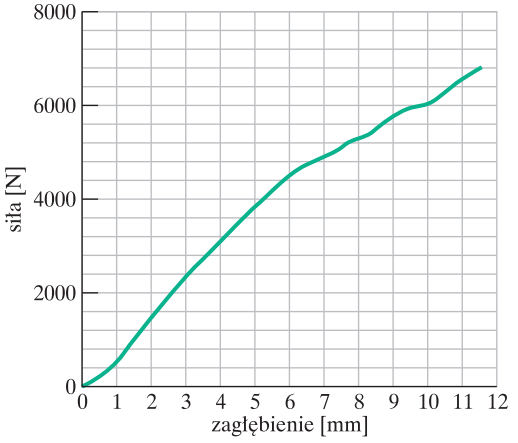
129 Kontynentalna część Stanów Zjednoczonych ma pole powierzchni równe około $8 \cdot 10^6$ km^2 i średnie wzniesienie nad poziom morza wynoszące około 500 m. Na tę powierzchnię spada rocznie około 75 cm deszczu. Dwie trzecie tej wody powraca do atmosfery w wyniku parowania, a reszta spływa stopniowo do oceanów. Wyobraź sobie, że udałoby się zbudować sieć elektrowni, która umożliwiłaby pełną zamianę związanego z tym spadkiem grawitacyjnej energii potencjalnej układu woda–Ziemia w energię elektryczną. Ile wynosiłaby moc takiej sieci elektrowni? Masa 1 m^3 wody wynosi 1000 kg.

130 Sprężynę o stałej sprężystości $k = 200$ N/m przymocowano jednym końcem do sufitu. Dolny koniec pionowej sprężyny znalazł się wówczas w punkcie $y = 0$. Do tego końca sprężyny przymocowano następnie klocek o ciężarze 20 N, przytrzymano go w położeniu, w którym sprężyna była wciąż nieodkształcona, a potem puszczono. Wyznacz energię kinetyczną E_k oraz zmiany (w stosunku do sytuacji początkowej) grawitacyjnej energii potencjalnej $\Delta E_{p,g}$ oraz energii potencjalnej sprężystości $\Delta E_{p,s}$ układu klocek–sprężyna dla następujących wartości y: a) -5 cm, b) -10 cm, c) -15 cm, d) -20 cm.

131 Przymocuj jeden koniec pionowej sprężyny do sufitu, a do drugiego jej końca przyczep główkę kapusty. Następnie powoli opuszczaj kapustę w dół aż do chwili, gdy działająca na nią w górę siła ze strony sprężyny stanie się równa działającej na nią sile ciężkości. Wykaż, że towarzyszący temu spadek grawitacyjnej energii potencjalnej układu kapusta–Ziemia jest dwa razy większy od wzrostu energii potencjalnej sprężystości sprężyny.

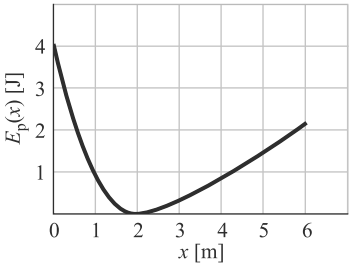
132 Największa siła, jaką możesz działać na jakiś przedmiot jednym z zębów trzonowych, wynosi około 750 N. Wyobraź sobie, że starasz się wbić ząb w sprężysty cukierek (jak tzw. żelki), który przeciwdziała temu, działając na twój ząb siłą sprężystości, jak sprężyna o stałej sprężystości $k = 2{,}5 \cdot 10^5$ N/m. Wyznacz: a) odcinek, o jaki uda ci się ścisnąć ten cukierek, b) pracę wykonaną przy tym przez twój ząb nad cukierkiem. c) Sporządź wykres wielkości wywieranej przez ciebie siły jako funkcji odcinka, o jaki cukierek zostaje ściśnięty. d) Jeśli ściśniętemu cukierkowi można przypisać energię potencjalną, sporządź także wykres tej energii jako funkcji liniowego odkształcenia cukierka.

W latach dziewięćdziesiątych XX wieku na miednicy pewnego dinozaura, o nazwie *Triceratops*, odkryto głębokie ślady zębów. Kształt śladów sugerował, że mogły one zostać pozostawione przez innego dinozaura, o nazwie tyranozaur (*Tyrannosaurus rex*). W celu zweryfikowania tej hipotezy naukowcy sporządzili replikę zęba tyranozaura z brązu i aluminium, którą następnie wciskali za pomocą prasy hydraulicznej w kość krowy na głębokość śladów w kości *Triceratopsa*. Na rysunku 8.71 przedstawiono przykładowy wykres otrzymanej w tych doświadczeniach zależności między przyłożoną siłą a zagłębieniem zęba w kość. Siła rośnie ze wzrostem zagłębienia, bo gdy ząb o niemal stożkowym kształcie zagłębia się w kość, wzrasta powierzchnia styku zęba z kością. e) Jaka praca została wykonana przez prasę hydrauliczną — a więc zapewne i tyranozaura — przy maksymalnym zagłębieniu zęba w kość? f) Czy z zagłębieniem zęba w kość można powiązać energię potencjalną? Omawiane doświadczenia wykazały, że tyranozaury dysponowały potężną siłą ukąszenia i związanym z tym wydatkiem energii, co wskazuje na to, że były one drapieżnikami, a nie padlinożercami.



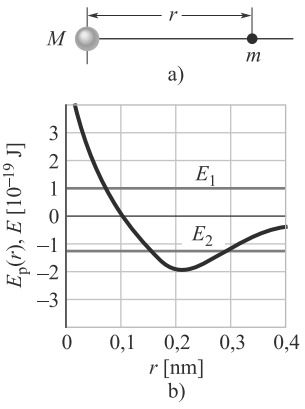
Rys. 8.71. Zadanie 132

133 Na cząstkę poruszającą się wzdłuż osi x działa siła zachowawcza $F(x)$. Na rysunku 8.72 przedstawiono zależność związanej z tą siłą energii potencjalnej $E_p(x)$ od położenia cząstki x. a) Wyznacz na tej podstawie funkcję $F(x)$ w zakresie $0 < x < 6$ m. b) Wyznacz energię kinetyczną $E_k(x)$, wiedząc, że energia mechaniczna układu wynosi 4 J. Nanieś tę funkcję na wykres z rysunku 8.72.



Rys. 8.72. Zadanie 133

134 Na rysunku 8.73a przedstawiono cząsteczkę złożoną z dwóch atomów o masach m i M (przy czym $m \ll M$), odległych od siebie o r. Na rysunku 8.73b pokazano wykres energii potencjalnej tej cząsteczki $E_p(r)$ jako funkcji r. Opisz ruch atomów, gdy: a) całkowita energia mechaniczna układu dwóch atomów E jest większa od zera (jak wartość E_1 na rysunku), b) energia E jest mniejsza od zera (jak wartość E_2 na rysunku).



Rys. 8.73. Zadanie 134

Przyjmij, że $E_1 = 10^{-19}$ J, a $r = 0{,}3$ nm, i oblicz: c) energię potencjalną układu, d) całkowitą energię kinetyczną atomów, e) siłę działającą na każdy atom (jej wartość i kierunek). Dla jakich wartości r siła ta jest: f) odpychająca, g) przyciągająca, h) równa zeru?

135 Rozpatrz jeszcze raz sytuację z zadania 83. Załóż teraz, że blok porusza się bez tarcia w górę po równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem 5°, i odpowiedz na pytania z zadania 83 (pozostałe dane w zadaniu 83).

136 Sprężynę o stałej siłowej $k = 620$ N/m umieszczono pionowo, wspierając jej dolny koniec na poziomej powierzchni. Na górny koniec naciśnięto, obniżając go o 25 cm, i umieszczono na nim klocek o ciężarze 50 N (nie mocując go do sprężyny). Następnie układ puszczono swobodnie. Załóż, że grawitacyjna energia potencjalna klocka $E_{p,g}$ jest równa zeru w punkcie zwolnienia sprężyny ($y = 0$) i oblicz energię kinetyczną klocka E_k w punktach o współrzędnej y równej: a) 0, b) 0,05 m, c) 0,1 m, d) 0,15 m i e) 0,2 m. Oblicz ponadto f) wysokość, na jaką wzniesie się klocek ponad punkt zwolnienia sprężyny.

ROZDZIAŁ 9

Środek masy i pęd

9.1. ŚRODEK MASY

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał. . .

9.01 wyznaczyć położenie środka masy układu cząstek, znając ich położenie na prostej lub na płaszczyźnie;

9.02 wyznaczyć środek masy rozciągłego ciała symetrycznego, korzystając z cech jego symetrii;

9.03 wyznaczyć środek masy dwu- lub trójwymiarowego ciała rozciągłego o jednorodnym rozkładzie masy a) dzieląc je w myśli na prostsze obiekty geometryczne, z których każdy można zastąpić cząstką w jego środku geometrycznym, a następnie b) znajdując środek masy tych cząstek.

Podstawowe fakty

- Środkiem masy układu n cząstek nazywamy punkt o współrzędnych

$$x_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_{\text{u}}}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \qquad y_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_{\text{u}}}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad z_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_{\text{u}}}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i,$$

czyli

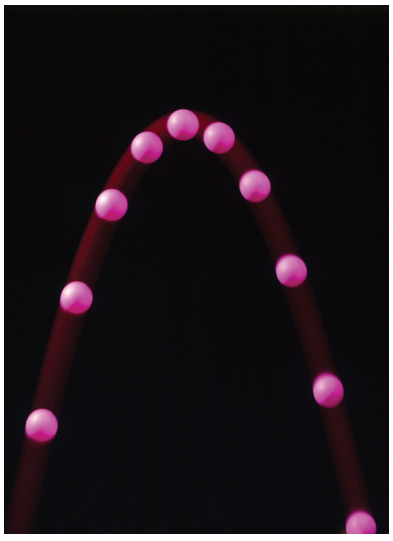
$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{m_{\text{u}}}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i,$$

gdzie m_{u} jest całkowitą masą układu.

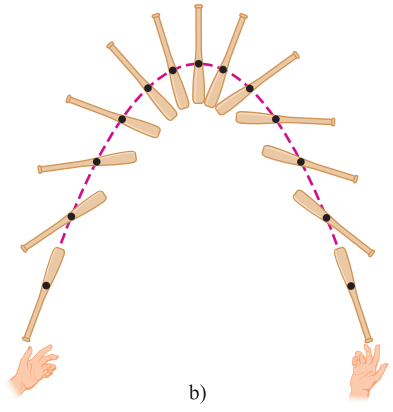
O fizyce

Każdy inżynier mechanik pełniący funkcję biegłego sądowego odtwarza wypadek drogowy, wykorzystując prawa fizyki. Każdy nauczyciel tańca radzący baletnicy, jak wykonywać różne skoki, też korzysta z zasad fizyki. W istocie analiza każdego skomplikowanego ruchu wymaga jego uproszczenia przez zrozumienie jego fizyki. W tym rozdziale zajmiemy się uproszczeniem opisu skomplikowanych ruchów układów ciał, jak samochód czy baletnica, przez wyznaczenie pewnego szczególnego punktu układu — jego *środka masy*.

Oto prosty przykład. Gdy rzucisz w powietrze piłkę, w miarę możliwości nie wprawiając jej w ruch obrotowy (rys. 9.1a), przekonasz się, że jej ruch jest prosty — jej tor jest paraboliczny, jak widzieliśmy w rozdziale 4, i piłkę możemy traktować jak cząstkę. Gdy rzucisz do góry kij baseballowy (rys. 9.1b), przekonasz się, że jego ruch jest znacznie bardziej złożony — każda część kija porusza się inaczej, ich tory mają różne kształty, nie można



a)



b)

Rys. 9.1. a) Wyrzucona w powietrze piłka porusza się po torze parabolicznym (fot. Richard Megna/Fundamental Photographs). b) Gdy rzucimy kij baseballowy, po takim torze porusza się tylko środek masy kija (oznaczony jako czarna kropka), a tory wszystkich innych punktów kija są znacznie bardziej złożone

więc uważać ruchu kija za ruch cząstki. Jest to ruch układu cząstek, z których każda porusza się po innym torze. Istnieje jednak taki punkt kija — jego środek masy — który porusza się po paraboli, dokładnie tak, jak wyrzucona w powietrze cząstka. Inne części kija obracają się wokół środka masy. (Możesz wyznaczyć położenie środka masy, podpierając poziomy kij wyciągniętym palcem tak, aby kij nie ześlizgiwał się z palca w żadną stronę — środek masy leży wówczas na osi kija, wprost nad twoim palcem).

Nie zrobisz pewnie kariery, podrzucając w górę kije baseballowe, lecz możesz zrobić karierę, doradzając skoczkom w dal lub tancerzom, jak wykonywać skoki, korzystając z ruchów rąk i nóg lub obrotów tułowia. W każdym przypadku będziesz musiał zacząć od wyznaczenia środka masy skoczka, gdyż to jest punkt, którego ruch jest najprostszy do opisania.

Środek masy

Zdefiniujemy teraz **środek masy** (ŚM) układu cząstek (nawet tak złożonego, jak ludzkie ciało), aby móc przewidzieć ruch tego układu.

Środek masy ciała lub układu ciał to punkt, który porusza się tak, jak gdyby 1) była w nim skupiona cała masa układu oraz 2) wszystkie siły zewnętrzne były przyłożone w tym właśnie punkcie.

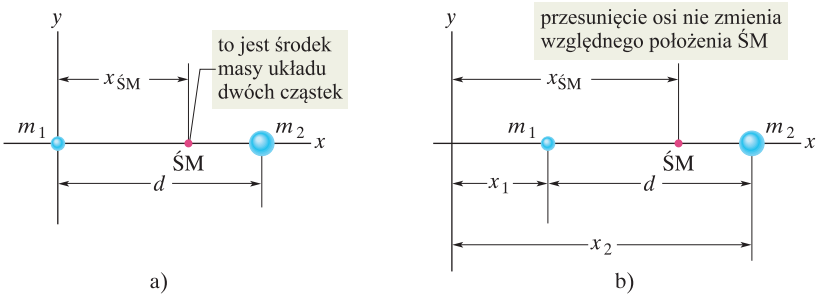
Teraz zajmiemy się przez pewien czas problemem znajdowania środka masy różnych układów ciał. Zaczniemy od układów zawierających tylko kilka cząstek, a potem przejdziemy do układów bardzo wielu cząstek (także ciał stałych, jak np. kij baseballowy). W dalszej części rozdziału zbadamy ruch środka masy układu pod wpływem sił zewnętrznych działających na układ.

Układy cząstek

Dwie cząstki. Na rysunku 9.2a przedstawiono dwie cząstki o masach m_1 i m_2, odległe od siebie o d. Oś x dla wygody wybrano tak, że przechodzi ona przez obie cząstki, a jej początkiem jest położenie cząstki o masie m_1. Położenie środka masy tego układu cząstek *definiujemy* jako

$$x_{\text{ŚM}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \tag{9.1}$$

Załóżmy na przykład, że $m_2 = 0$. Mamy więc tylko jedną cząstkę o masie m_1, a zatem środek masy musi być punktem, w którym się ona znajduje. Równanie (9.1) sprowadza się w tym przypadku — tak, jak oczekujemy — do: $x_{\text{ŚM}} = 0$. Jeśli $m_1 = 0$, to znów mamy tylko jedną cząstkę (o masie m_2) i zgodnie z oczekiwaniem otrzymujemy $x_{\text{ŚM}} = d$. Jeśli $m_1 = m_2$, tzn. masy cząstek są jednakowe, to środek masy powinien leżeć w połowie odległości między cząstkami. Równanie (9.1) daje w tym przypadku $x_{\text{ŚM}} = \frac{1}{2}d$, a więc znów to, czego należy oczekiwać. Wreszcie, gdy ani m_1, ani m_2 nie są równe zeru, z równania (9.1) wynika, że $x_{\text{ŚM}}$ może przybierać jedynie wartości między 0 a d, czyli środek masy leży gdzieś między cząstkami.



Rys. 9.2. a) Dwie cząstki o masach m_1 i m_2, odległe od siebie o d. Czerwoną kropką oznaczono położenie środka masy (ŚM), wyznaczone z równania (9.1). b) To samo, co na rysunku (a), lecz dla początku osi bardziej odległego od obydwu cząstek. Położenie środka masy obliczono teraz z równania (9.2). Położenie środka masy względem cząstek jest w obydwu przypadkach takie samo

Nie musimy umieszczać początku układu współrzędnych w punkcie, w którym znajduje się jedna z cząstek. Na rysunku 9.2b przedstawiono sytuację bardziej ogólną, gdy początek układu współrzędnych wybrano na lewo od obydwu cząstek. Położenie środka masy definiujemy w tym przypadku jako

$$x_{ŚM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{9.2}$$

Zauważ, że jeśli w tym równaniu podstawimy $x_1 = 0$, to x_2 będzie równe d i równanie (9.2) sprowadzi się do równania (9.1) — jak oczekiwaliśmy. Zauważ też, że choć początek układu współrzędnych umieściliśmy w innym punkcie niż poprzednio, to położenie środka masy względem cząstek nie uległo zmianie. Względne położenie środka masy zależy od właściwości cząstek, a nie od układu współrzędnych, którym się akurat posługujemy.

Równanie (9.2) możemy przedstawić w postaci

$$x_{ŚM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_u}, \tag{9.3}$$

przy czym m_u jest całkowitą masą układu (w naszym przypadku $m_u = m_1 + m_2$).

Wiele cząstek. W sytuacji bardziej ogólnej, gdy wzdłuż osi x rozłożono n cząstek, całkowita masa układu jest równa $m_u = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$, a położenie jego środka masy wynosi

$$x_{ŚM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_u} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{9.4}$$

Wskaźnik i jest tzw. wskaźnikiem bieżącym, przybierającym wartości całkowite od 1 do n. Numeruje on poszczególne cząstki, a także ich masy i położenia.

Trzy wymiary. Jeśli cząstki znajdują się w przestrzeni trójwymiarowej, to środek masy ma trzy współrzędne. Uogólnienie równania (9.4) daje:

$$x_{ŚM} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_{ŚM} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_{ŚM} = \frac{1}{m_u} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{9.5}$$

Położenie środka masy możemy również przedstawić w zapisie wektorowym. Przypomnijmy najpierw, że jeśli cząstka znajduje się w punkcie

o współrzędnych x_i, y_i i z_i, to jej położenie można określić za pomocą wektora położenia (łączącego środek układu z cząstką):

$$\vec{r}_i = x_i\hat{\mathrm{i}} + y_i\hat{\mathrm{j}} + z_i\hat{\mathrm{k}}, \tag{9.6}$$

przy czym wskaźnik i numeruje cząstki, a $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ oraz $\hat{\mathrm{k}}$ są to wektory jednostkowe, skierowane w dodatnich kierunkach osi x, y oraz z. Położenie środka masy możemy zatem określić jako

$$\vec{r}_{\mathrm{ŚM}} = x_{\mathrm{ŚM}}\hat{\mathrm{i}} + y_{\mathrm{ŚM}}\hat{\mathrm{j}} + z_{\mathrm{ŚM}}\hat{\mathrm{k}}. \tag{9.7}$$

Jeśli wolisz zapis zwarty, masz tu zamiast trzech równań skalarnych (9.5) jedno równanie wektorowe

$$\vec{r}_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{u}}}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i, \tag{9.8}$$

przy czym m_{u} jest — jak poprzednio — całkowitą masą układu. Możesz sprawdzić, że równanie to jest poprawne, podstawiając do niego wyrażenia (9.6) i (9.7), a następnie rozdzielając je na składowe x, y i z — powinieneś w ten sposób otrzymać równania (9.5).

Ciała rozciągłe

Ciała, z którymi spotykamy się w życiu codziennym, jak choćby kij baseballowy, składają się z tak wielkiej liczby cząstek (atomów), że najlepiej opisać je za pomocą ciągłego rozkładu materii. „Cząstkami" ciała są w tym opisie różniczkowe elementy masy dm, sumy w równaniu (9.5) przechodzą w całki, a zatem współrzędne środka masy można zdefiniować jako

$$x_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{u}}}\int x\,\mathrm{d}m, \quad y_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{u}}}\int y\,\mathrm{d}m, \quad z_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{u}}}\int z\,\mathrm{d}m, \tag{9.9}$$

przy czym m_{u} jest masą całego ciała. Całkowanie umożliwia w istocie wydajne obliczenie sum w równaniach (9.5) dla bardzo dużej liczby cząstek, co bez tego mogłoby nam zająć lata.

Obliczenie tych całek dla ciał z naszego otoczenia (jak telewizor czy łoś) jest dość trudne, zajmiemy się więc jedynie ciałami *jednorodnymi*. Takie ciała mają stałą *gęstość*, czyli masę jednostki objętości, co oznacza, że ich gęstość ρ (grecka litera ro) jest dla każdego elementu ich objętości taka sama, jak dla całego ciała. Z równania (1.8) mamy zatem

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{m_{\mathrm{u}}}{V}, \tag{9.10}$$

przy czym dV jest objętością elementu ciała o masie dm, a V — całkowitą objętością ciała. Jeśli podstawimy $\mathrm{d}m = (m_{\mathrm{u}}/V)\mathrm{d}V$ z równania (9.10) do równania (9.9), to stwierdzimy, że

$$x_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{V}\int x\,\mathrm{d}V, \qquad y_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{V}\int y\,\mathrm{d}V, \qquad z_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V. \tag{9.11}$$

Symetria upraszcza sprawę. Jednej lub kilku z tych całek nie trzeba obliczać, jeśli ciało ma środek, oś lub płaszczyznę symetrii. Środek masy

ciała leży wówczas w tym punkcie, na tej osi lub na tej płaszczyźnie. Na przykład środek masy jednorodnej kuli (która ma środek symetrii) leży w środku tej kuli (będącym jej środkiem symetrii). Środek masy jednorodnego stożka (którego oś jest jego osią symetrii) leży gdzieś na tej osi. Środek masy banana (który ma płaszczyznę symetrii dzielącą go na dwie symetryczne połówki) leży gdzieś na tej płaszczyźnie.

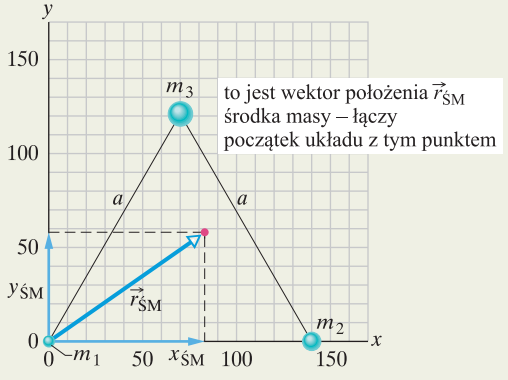
Środek masy ciała nie musi leżeć w obrębie tego ciała. W środku masy obwarzanka nie ma nic do jedzenia, a w środku masy podkowy — ani trochę żelaza.

Przykład 9.01. Środek masy, trzy cząstki

Trzy cząstki o masach $m_1 = 1{,}2$ kg, $m_2 = 2{,}5$ kg i $m_3 = 3{,}4$ kg leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku $a = 140$ cm. Znajdź położenie środka masy układu tych trzech cząstek.

PODSTAWOWE FAKTY

Mamy tu do czynienia z oddzielnymi cząstkami, a nie z ciałem rozciągłym, a zatem do wyznaczenia środka ich masy możemy skorzystać z równania (9.5). Cząstki leżą w jednej płaszczyźnie (płaszczyźnie trójkąta równobocznego), a zatem będziemy musieli wykorzystać tylko dwa pierwsze z tych równań.



Rys. 9.3. Trzy cząstki leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a. Ich środek masy leży w punkcie o wektorze położenia $\vec{r}_{ŚM}$

Obliczenia: Aby ułatwić sobie obliczenia, wybierzmy układ współrzędnych tak, że jedna z cząstek leży w jego początku, a jeden z boków trójkąta, w którego wierzchołkach znajdują się cząstki, leży na osi x (jak na rysunku 9.3). Współrzędne cząstek są wtedy następujące:

Cząstka	Masa [kg]	x [cm]	y [cm]
1	1,2	0	0
2	2,5	140	0
3	3,4	70	120

Całkowita masa układu m_u jest równa 7,1 kg.

Współrzędne środka masy w tym układzie wyznaczamy z równania (9.5) i otrzymujemy

$$x_{ŚM} = \frac{1}{m_u}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_u}$$
$$= \frac{(1{,}2\text{ kg})(0) + (2{,}5\text{ kg})(140\text{ cm}) + (3{,}4\text{ kg})(70\text{ cm})}{(7{,}1\text{ kg})}$$
$$= 83\text{ cm} \qquad \text{(odpowiedź)}$$

oraz

$$y_{ŚM} = \frac{1}{m_u}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_u}$$
$$= \frac{(1{,}2\text{ kg})(0) + (2{,}5\text{ kg})(0) + (3{,}4\text{ kg})(120\text{ cm})}{(7{,}1\text{ kg})}$$
$$= 58\text{ cm} \qquad \text{(odpowiedź).}$$

Na rysunku 9.3 położenie środka masy przedstawiono za pomocą wektora położenia $\vec{r}_{ŚM}$ o współrzędnych $x_{ŚM}$ i $y_{ŚM}$. Gdybyśmy wybrali inny układ współrzędnych, współrzędne środka masy byłyby inne, lecz położenie ŚM względem cząstek by się nie zmieniło.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 9.02. Środek masy, płyta z dziurą

W tym zadaniu jest wiele słów, lecz są one potrzebne, byśmy mogli wyznaczyć środek masy, stosując prostą algebrę, a nie trudny przecież rachunek całkowy. Na rysunku 9.4a przedstawiono jednorodną płytę metalową o promieniu $2R$, z której na taśmie produkcyjnej wykrojono (usunięto) krążek o promieniu R (pokazany na rysunku 9.4b). Znajdź położenie środka masy otrzymanej w ten sposób płyty z dziurą ŚM_D w układzie współrzędnych zaznaczonym na rysunku.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Spróbujmy najpierw określić z grubsza położenie środka masy płyty D, korzystając z jej właściwości symetrii. Zauważ, że płyta jest symetryczna względem osi x (jej część dolną możemy nałożyć na górną, obracając ją wokół osi x). Wobec tego ŚM_D musi leżeć na osi x. Po wycięciu krążka płyta nie jest już symetryczna względem osi y. Masa jej części leżącej na prawo od osi y jest większa od części leżącej na lewo od tej osi, a więc ŚM_D musi leżeć na prawo od osi y. Tak właśnie z grubsza ustalone położenie ŚM_D zaznaczono na rysunku 9.4a.

2) Zauważmy ponadto, że płyta D jest rozciągłym ciałem stałym, a zatem do dokładnego wyznaczenia współrzędnych środka masy ŚM_D płyty D możemy w zasadzie zastosować równanie (9.11). Nie jest to jednak łatwe. Powinniśmy wyznaczyć współrzędne x i y środka masy płyty, która jest cienka i jednorodna. Gdyby płyta była gruba, powiedzielibyśmy, że jej środek masy leży w połowie jej grubości. Z drugą współrzędną jest większy kłopot: aby skorzystać z równania (9.11), powinniśmy znać funkcję opisującą kształt płyty z dziurą, którą musielibyśmy dopiero scałkować.

3) Znacznie prościej będzie skorzystać z następującego spostrzeżenia: środek masy to punkt, który porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona cała masa ciała *jednorodnego*. Możemy więc potraktować ciało jak cząstkę i uniknąć całkowania.

Obliczenia: Najpierw wstawmy usunięty krążek (nazwijmy go krążkiem K) z powrotem w miejsce, z którego został wycięty z pierwotnej płyty pełnej (nazwijmy ją płytą P), jak pokazano na rysunku 9.4c. Ze względu na symetrię kołową krążka K jego środek masy ŚM_K znajduje się w jego środku, czyli w punkcie $x = -R$ (jak pokazano na rysunku). Analogicznie, środek masy płyty pełnej P znajduje się w jej środku, czyli w początku układu współrzędnych (co także pokazano na rysunku). Mamy więc:

Ciało	Środek masy	Położenie ŚM	Masa
D	ŚM_D	$x_\text{D} = ?$	m_D
K	ŚM_K	$x_\text{K} = -R$	m_K
P	ŚM_P	$x_\text{P} = 0$	$m_\text{P} = m_\text{K} + m_\text{D}$

Możemy teraz skorzystać z uwagi o skupieniu masy: krążek K możemy zastąpić cząstką o masie m_K znajdującą się w punkcie $x_\text{K} = -R$, a płytę bez krążka — cząstką o masie m_D znajdującą się w punkcie x_D (rys. 9.4c). Położenie środka masy układu tych dwóch cząstek $x_{\text{K+D}}$ możemy wyznaczyć z równania (9.2). Otrzymujemy zatem

$$x_{\text{K+D}} = \frac{m_\text{K}x_\text{K} + m_\text{D}x_\text{D}}{m_\text{K} + m_\text{D}}. \tag{9.12}$$

Zauważ teraz, że łącząc krążek K z płytą D, otrzymujemy płytę pełną P. Wobec tego położenie $x_{\text{K+D}}$ punktu $\text{ŚM}_{\text{K+D}}$ musi być takie samo, jak położenie x_P punktu ŚM_P, a to ostatnie jest początkiem układu współrzędnych, czyli $x_{\text{K+D}} = x_\text{P} = 0$. Podstawiając to do równania (9.12) i wyznaczając z niego x_D, dostajemy

$$x_\text{D} = -x_\text{K}\frac{m_\text{K}}{m_\text{D}}. \tag{9.13}$$

Stosunek mas w tym równaniu możemy powiązać ze stosunkiem pól powierzchni odpowiednich części płyty, ponieważ:

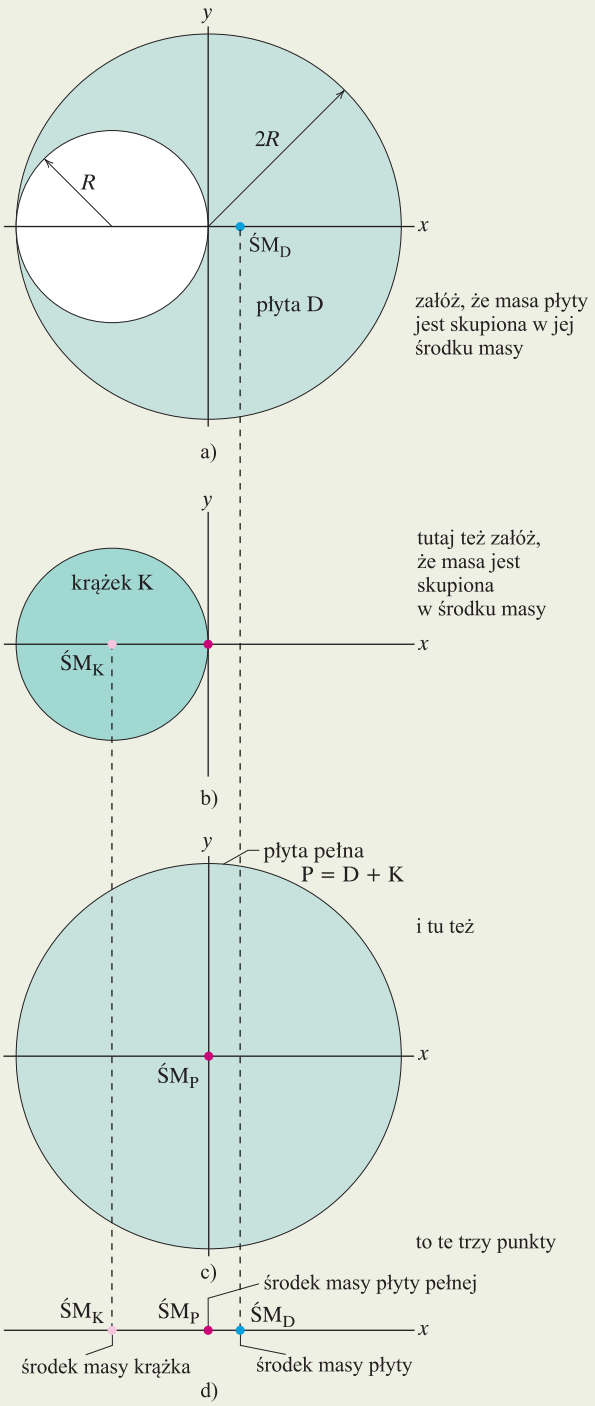
$$\begin{aligned}\text{masa} &= (\text{gęstość}) \cdot (\text{objętość}) \\ &= (\text{gęstość}) \cdot (\text{grubość}) \cdot (\text{pole powierzchni}).\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\frac{m_\text{K}}{m_\text{D}} = \frac{(\text{gęstość})_\text{K}}{(\text{gęstość})_\text{D}} \cdot \frac{(\text{grubość})_\text{K}}{(\text{grubość})_\text{D}} \cdot \frac{(\text{pole powierzchni})_\text{K}}{(\text{pole powierzchni})_\text{D}}.$$

Płyta jest jednorodna, a zatem gęstości i grubości różnych jej części są jednakowe. Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned}\frac{m_\text{K}}{m_\text{D}} &= \frac{(\text{pole powierzchni})_\text{K}}{(\text{pole powierzchni})_\text{D}} \\ &= \frac{(\text{pole powierzchni})_\text{K}}{(\text{pole powierzchni})_\text{P} - (\text{pole powierzchni})_\text{K}}\end{aligned}$$



Rys. 9.4. a) Płyta D powstała przez wycięcie krążka o promieniu R z kołowej płyty o promieniu $2R$. Środek masy płyty D znajduje się w punkcie ŚM_D. b) Krążek K. c) Wycięty krążek K włożono w pozostały po nim otwór, tworząc znów wyjściową płytę pełną P. Na rysunku zaznaczono środek masy ŚM_K krążka K, oraz środek masy ŚM_P płyty P. d) Środek masy $\text{ŚM}_{\text{D+K}}$ układu D + K leży w punkcie ŚM_P, czyli w punkcie $x = 0$

$$= \frac{\pi R^2}{\pi(2R^2) - \pi R^2} = \frac{1}{3}.$$

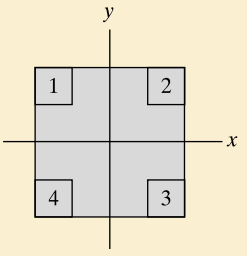
Podstawiając ten związek oraz $x_K = -R$ do równania (9.13), otrzymujemy ostatecznie:

$$x_D = \frac{1}{3}R \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy wideo i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Sprawdzian 1

Na rysunku przedstawiono jednorodną płytę kwadratową, od której mają być odcięte jednakowe małe kwadraty w każdym z jej rogów. a) Gdzie leży środek masy płyty przed tą operacją? Gdzie leży on po odcięciu: b) kwadratu 1, c) kwadratów 1 i 2, d) kwadratów 1 i 3, e) kwadratów 1, 2 i 3, f) wszystkich czterech kwadratów? Odpowiedz, podając punkty, osie lub ćwiartki układu współrzędnych (oczywiście nie wykonując żadnych obliczeń).



9.2. DRUGA ZASADA DYNAMIKI NEWTONA DLA UKŁADU CZĄSTEK

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

9.04 zastosować drugą zasadę dynamiki dla układu cząstek, wykorzystując zależność przyspieszenia środka masy układu od wypadkowej wszystkich sił działających na cząstki układu;

9.05 zastosować równania ruchu ze stałym przyspieszeniem do opisu ruchu pojedynczych cząstek układu i ruchu środka masy układu;

9.06 wyznaczyć prędkość środka masy układu, znając masy i prędkości cząstek układu;

9.07 wyznaczyć przyspieszenie środka masy układu, znając masy i przyspieszenia cząstek układu;

9.08 wyznaczyć prędkość środka masy układu, znając położenie środka masy jako funkcję czasu;

9.09 wyznaczyć przyspieszenie środka masy układu, znając prędkość środka masy jako funkcję czasu;

9.10 wyznaczyć zmianę prędkości środka masy układu, całkując względem czasu przyspieszenie środka masy;

9.11 wyznaczyć przemieszczenie środka masy układu, całkując względem czasu prędkość środka masy;

9.12 wyjaśnić, jak dla układu dwóch cząstek są związane ze sobą przemieszczenia i prędkości cząstek, gdy cząstki te się poruszają, lecz ich środek masy nie zmienia swego położenia.

Podstawowe fakty

• Ruch środka masy każdego układu cząstek jest opisany drugą zasadą dynamiki Newtona dla układu cząstek, czyli równaniem

$$\vec{F}_{wyp} = m_u \vec{a}_{ŚM},$$

gdzie $\vec{F}_{wyp}$ jest wypadkową wszystkich sił *zewnętrznych*, jakie działają na układ, m_u jest całkowitą masą układu, a $\vec{a}_{ŚM}$ jest przyspieszeniem środka masy układu.

Druga zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek

Gdy już wiemy, jak znaleźć środek masy układu cząstek, zbadamy ruch środka masy pod wpływem sił zewnętrznych. Zaczniemy od prostego układu dwóch kul bilardowych.

Jeśli pchniesz jedną kulę bilardową w kierunku drugiej nieruchomej początkowo bili, to zapewne spodziewasz się, że po zderzeniu układ bil będzie poruszał się do przodu. Zdziwiłbyś się, gdyby obie kule poruszały się do tyłu (w twoją stronę) lub obie potoczyły się w lewo lub w prawo. Intuicyjnie czujesz, że *coś* musi się poruszać do przodu.

Punktem, który porusza się do przodu i którego ruch jest całkowicie niezaburzony przez zderzenie, jest środek masy układu zderzających się bil. Jeśli skupisz swoją uwagę na tym punkcie — znajdującym się zawsze w połowie odległości bil, gdyż mają one takie same masy — to po kilku doświadczeniach przy stole bilardowym łatwo to spostrzeżesz. Niezależnie od tego, czy zderzenie jest czołowe, czy jest ledwie muśnięciem się kul lub czymś pośrednim między tymi sytuacjami skrajnymi, środek masy porusza się do przodu, jak gdyby nie było żadnego zderzenia. Zbadamy teraz ruch środka masy nieco bardziej szczegółowo.

Ruch środka masy układu. Przeanalizujmy teraz zespół n cząstek o masach niekoniecznie jednakowych. Interesuje nas *jedynie* ruch ich środka masy. Choć środek masy to tylko punkt, jego ruch jest taki sam, jak ruch cząstki o masie równej sumie mas wszystkich cząstek układu. Do jego opisu możemy zastosować pojęcia położenia, prędkości i przyspieszenia. Okazuje się (co wkrótce udowodnimy), że ruch środka masy układu cząstek opisywany jest równaniem wektorowym:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m_{\text{u}}\vec{a}_{\text{ŚM}} \qquad \text{(układ cząstek).} \tag{9.14}$$

Jest to druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu środka masy układu cząstek. Zauważ, że ma ona taką samą postać ($\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$), jak dla ruchu jednej cząstki. Wielkości w niej występujące należy jednak dobierać z pewną starannością.

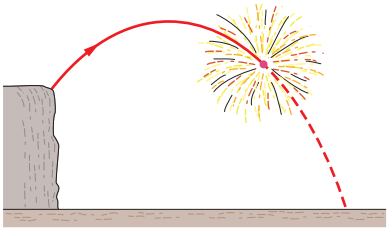
1. $\vec{F}_{\text{wyp}}$ jest to wypadkowa *wszystkich sił zewnętrznych*, jakie działają na układ. Siły działające między składnikami układu cząstek (*siły wewnętrzne*) nie występują w równaniu (9.14).
2. m_{u} jest *całkowitą masą* układu. Zakładamy, że w czasie ruchu układu jego masa nie zwiększa się, ani nie zmniejsza, tak że m_{u} jest stałe. Taki układ nazywamy **układem zamkniętym**.
3. $\vec{a}_{\text{ŚM}}$ jest przyspieszeniem *środka masy* układu. Równanie (9.14) nie daje żadnych informacji o przyspieszeniu jakiegokolwiek innego punktu układu.

Równanie (9.14) jest równoważne trzem równaniom dla składowych $\vec{F}_{\text{wyp}}$ i $\vec{a}_{\text{ŚM}}$ wzdłuż trzech osi układu współrzędnych. Oto te równania:

$$\vec{F}_{\text{wyp},x} = m_{\text{u}}\vec{a}_{\text{ŚM},x}, \quad \vec{F}_{\text{wyp},y} = m_{\text{u}}\vec{a}_{\text{ŚM},y}, \quad \vec{F}_{\text{wyp},z} = m_{\text{u}}\vec{a}_{\text{ŚM},z}. \tag{9.15}$$

Kule bilardowe. Wróćmy teraz do naszych kul bilardowych i zbadajmy dokładniej ich ruch. Od chwili, gdy pierwsza bila została wprawiona w ruch, na nasz układ ciał (dwie bile) nie działa żadna wypadkowa siła zewnętrzna. Z równania (9.14) wynika, że skoro $\vec{F}_{\text{wyp}} = 0$, to także $\vec{a}_{\text{ŚM}} = 0$. Przyspieszenie jest szybkością zmiany prędkości, oznacza to więc, że prędkość środka masy układu cząstek (dwóch bil) się nie zmienia. Podczas zderzenia w układzie działają siły *wewnętrzne*, czyli siły, jaką każda z bil działa na drugą. Te siły nie mają wpływu na wielkość siły $\vec{F}_{\text{wyp}}$, która jest

działające w czasie wybuchu siły wewnętrzne nie mogą zmienić toru środka masy



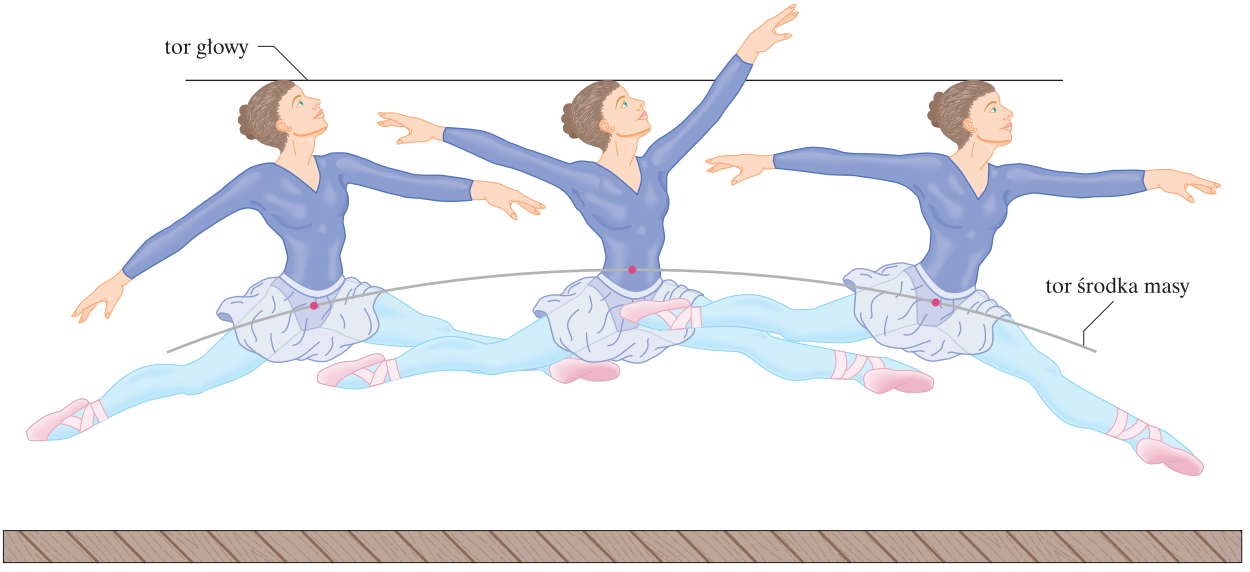
Rys. 9.5. W czasie pokazu sztucznych ogni rakieta eksploduje w locie. Jeśli pominiemy opór powietrza, to środek masy kawałków, na które rozpadła się rakieta, porusza się po torze parabolicznym, po jakim poruszałaby się rakieta, gdyby nie uległa rozpadowi, aż do chwili spadku pierwszych fragmentów rakiety na ziemię

nadal równa zeru. Tak więc, jeśli środek masy układu cząstek porusza się przed zderzeniem w pewnym kierunku i z pewną prędkością, to po zderzeniu będzie poruszał się w tym samym kierunku i z taką samą prędkością.

Ciało rozciągłe. Równanie (9.14) stosujemy nie tylko dla układu cząstek, lecz i dla ciała rozciągłego, jak na przykład kij baseballowy z rysunku 9.1b. W tym konkretnym przypadku m_u w równaniu (9.14) jest masą kija, a $\vec{F}_{wyp}$ — działającą na kij siłą ciężkości. Z równania (9.14) wynika, że $\vec{a}_{ŚM} = \vec{g}$. Innymi słowy, środek masy kija poruszał się tak, jak gdyby kij był cząstką o masie m_u, na którą działa siła $\vec{F}_g$.

Rozpad ciała. Inny ciekawy przypadek przedstawiono na rysunku 9.5. Wyobraź sobie, że w czasie pokazu sztucznych ogni wystrzelono rakietę, która najpierw poruszała się po torze parabolicznym, po czym w pewnej chwili eksplodowała i rozpadła się na kawałki. Gdyby rakieta nie wybuchła, to nadal poruszałaby się po torze przedstawionym na rysunku. Siły działające w czasie wybuchu to siły *wewnętrzne* działające w układzie, którym jest najpierw rakieta, a potem jej fragmenty. Są to siły, które działają między składnikami naszego układu ciał. Jeśli pominiemy opór powietrza, to działającą na układ wypadkową siłą *zewnętrzną* $\vec{F}_{wyp}$ jest siła ciężkości, niezależnie od tego, czy rakieta rozpadła się na części, czy nie. Wobec tego z równania (9.14) wynika, że przyspieszenie $\vec{a}_{ŚM}$ środka masy fragmentów rakiety jest równe $\vec{g}$ dopóty, dopóki wszystkie fragmenty rakiety po eksplozji znajdują się w locie. Oznacza to, że środek masy fragmentów porusza się po takim samym torze parabolicznym, po jakim poruszałaby się rakieta, gdyby nie wybuchła w locie.

Skok baletnicy. Baletnica, wykonująca skok „grand jeté”, zaraz po oderwaniu się od sceny wznosi ręce i prostuje nogi do pozycji poziomej (rys. 9.6). Dzięki temu jej środek masy przemieszcza się ku górze. Środek masy baletnicy porusza się nad sceną po torze parabolicznym, lecz dzięki



Rys. 9.6. Skok „grand jeté” (na podstawie książki Kennetha Lawsa *The Physics of Dance*, Schirmer Books, 1984)

zmianie jego położenia w obrębie ciała tancerki znajduje się on coraz bliżej jej głowy i tułowia. W wyniku tego głowa i tułów baletnicy poruszają się po torze niemal poziomym, co sprawia wrażenie „płynięcia" tancerki nad sceną.



Uzasadnienie równania (9.14)

Wyprowadzimy teraz to bardzo ważne równanie. Dla układu n cząstek ze wzoru (9.8) otrzymujemy

$$m_u\vec{r}_{ŚM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots + m_n\vec{r}_n, \tag{9.16}$$

przy czym m_u jest całkowitą masą układu, a $\vec{r}_{ŚM}$ — wektorem położenia środka masy układu.

Różniczkując równanie (9.16) względem czasu, dostajemy

$$m_u\vec{v}_{ŚM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n, \tag{9.17}$$

gdzie $\vec{v}_i$ ($= d\vec{r}_i/dt$) jest prędkością i-tej cząstki, a $\vec{v}_{ŚM}$ ($= d\vec{r}_{ŚM}/dt$) — prędkością środka masy.

Różniczkując następnie równanie (9.17) względem czasu, otrzymujemy

$$m_u\vec{a}_{ŚM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots + m_n\vec{a}_n, \tag{9.18}$$

gdzie $\vec{a}_i$ ($= d\vec{v}_i/dt$) jest przyspieszeniem i-tej cząstki, a $\vec{a}_{ŚM}$ ($= d\vec{v}_{ŚM}/dt$) — przyspieszeniem środka masy. Choć środek masy jest tylko punktem geometrycznym, to możemy mu — podobnie jak cząstce — przypisać położenie, prędkość i przyspieszenie.

Z drugiej zasady dynamiki wynika, że iloczyn $m_i\vec{a}_i$ jest równy sile wypadkowej działającej na i-tą cząstkę. Korzystając z tego, możemy zapisać równanie (9.18) w postaci

$$m_u\vec{a}_{ŚM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n. \tag{9.19}$$

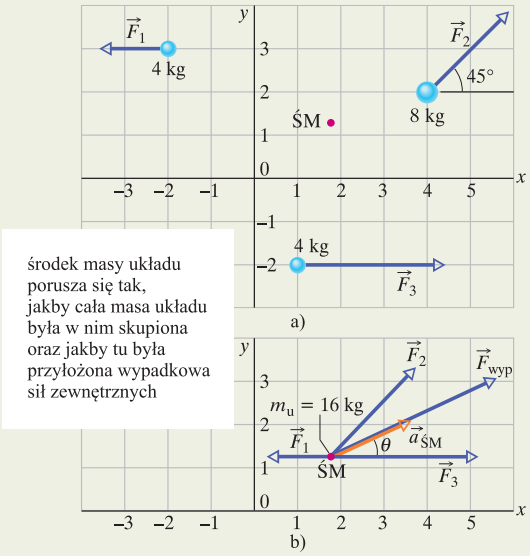
Po prawej stronie równania (9.19) występują zarówno siły, jakimi działają na siebie cząstki układu (siły wewnętrzne), jak i siły działające na cząstki układu spoza tego układu (siły zewnętrzne). Siły wewnętrzne można połączyć w pary akcja–reakcja, które — na mocy trzeciej zasady dynamiki — redukują się w sumie po prawej stronie równania (9.19). Suma ta jest zatem równa jedynie sumie wektorowej wszystkich sił *zewnętrznych*, jakie działają na układ cząstek. Równanie (9.19) sprowadza się zatem do równania (9.14), które zamierzaliśmy uzasadnić.

Sprawdzian 2

Dwoje łyżwiarzy trzyma przeciwległe końce tyczki o znikomo małej masie. Łyżwiarze stoją na tafli lodowej, po której mogą poruszać się bez tarcia. Przyjmij, że oś układu współrzędnych jest zgodna z kierunkiem tyczki, a początek osi znajduje się w środku masy układu dwojga łyżwiarzy. Jedno z łyżwiarzy — Filip — waży dwa razy tyle, co drugie — Eliza. Gdzie spotkają się łyżwiarze, jeśli: a) Filip ciągnie tyczkę, chwytając ją coraz dalej tak, aby zbliżyć się do Elizy, b) tyczkę ciągnie w ten sposób Eliza, c) oboje ciągną tyczkę równocześnie?

Przykład 9.03. Ruch środka masy, trzy cząstki

Gdy cząstki układu poruszają się razem, sprawa jest prosta — środek masy układu porusza się tak, jak one. Lecz co się dzieje, gdy każda cząstka porusza się w innym kierunku i z innym przyspieszeniem? Oto przykład takiej sytuacji. Trzy cząstki przedstawione na rysunku 9.7a znajdują się początkowo w spoczynku. W pewnej chwili na każdą z nich zaczyna działać siła *zewnętrzna* pochodząca od ciał spoza tego układu cząstek. Kierunki działania sił pokazano na rysunku, a ich wartości są równe: $F_1 = 6$ N, $F_2 = 12$ N i $F_3 = 14$ N. Ile wynosi przyspieszenie środka masy układu i w jakim kierunku będzie się on poruszać?



Rys. 9.7. a) Na trzy cząstki znajdujące się początkowo w spoczynku zaczynają działać siły zewnętrzne. Na rysunku zaznaczono położenia początkowe cząstek i ich środka masy oraz działające na nie siły. b) Siły przesunięto do środka masy, który porusza się jak cząstka o masie m_u równej całkowitej masie układu. Pokazano również wektor wypadkowej siły zewnętrznej $\vec{F}_{wyp}$ oraz wektor przyspieszenia $\vec{a}_{ŚM}$ środka masy

PODSTAWOWE FAKTY

Położenie środka masy zaznaczono na rysunku czerwoną kropką. Środek masy możemy traktować jako cząstkę o masie równej całkowitej masie układu, tzn. $m_u = 16$ kg. Można również uważać, że siły zewnętrzne działają tak, jak gdyby przyłożone były w środku masy układu (rys. 9.7b).

Obliczenia: Ruch środka masy opisuje druga zasada dynamiki ($\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$), która w naszym przypadku przybiera postać

$$\vec{F}_{wyp} = m_u \vec{a}_{ŚM}, \tag{9.20}$$

czyli

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m_u \vec{a}_{ŚM},$$

skąd wynika, że

$$\vec{a}_{ŚM} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{m_u}. \tag{9.21}$$

Z równania (9.20) wynika, że przyspieszenie środka masy układu $\vec{a}_{ŚM}$ ma taki sam kierunek, jak wypadkowa siła zewnętrzna $\vec{F}_{wyp}$ działająca na układ (rys. 9.7b). W chwili początkowej cząstki spoczywają, a więc spoczywa również ich środek masy. Wobec tego, gdy środek masy zaczyna się poruszać, przemieszcza się on we wspólnym kierunku $\vec{a}_{ŚM}$ i $\vec{F}_{wyp}$.

Aby obliczyć wartość prawej strony równania (9.21), zapiszemy to równanie dla składowych, a następnie wyznaczymy z niego składowe wektora $\vec{a}_{ŚM}$ i sam wektor. Równanie dla składowych wzdłuż osi x ma postać

$$a_{ŚM,x} = \frac{F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}}{m_u}$$
$$= \frac{(-6\text{ N}) + (12\text{ N})\cos 45° + (14\text{ N})}{(16\text{ kg})} = 1{,}03\text{ m/s}^2,$$

a dla składowych wzdłuż osi y:

$$a_{ŚM,y} = \frac{F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}}{m_u}$$
$$= \frac{(0) + (12\text{ N})\sin 45° + (0)}{(16\text{ kg})} = 0{,}53\text{ m/s}^2.$$

Mając wartości składowych, wyznaczamy moduł wektora $\vec{a}_{ŚM}$:

$$a_{ŚM} = \sqrt{(a_{ŚM,x})^2 + (a_{ŚM,y})^2}$$
$$= 1{,}16\text{ m/s}^2 \approx 1{,}2\text{ m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}$$

oraz kąt, jaki tworzy on z dodatnim kierunkiem osi x:

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{a_{ŚM,y}}{a_{ŚM,x}} = 27° \qquad \text{(odpowiedź).}$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

9.3. PĘD

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

9.13 wyjaśnić, że pęd jest wielkością wektorową, czyli ma i wartość, i kierunek, a można go również wyrazić przez składowe;

9.14 obliczyć pęd cząstki jako iloczyn jej masy i prędkości;

9.15 obliczyć zmianę pędu (jego wielkości i kierunku) przy zmianie prędkości i kierunku ruchu cząstki;

9.16 zastosować związek pędu cząstki z wypadkową sił działających na tę cząstkę;

9.17 wyznaczyć pęd układu cząstek jako iloczyn całkowitej masy układu i prędkości jego środka masy;

9.18 zastosować związek pędu środka masy układu cząstek z wypadkową sił działających na ten układ.

Podstawowe fakty

- Dla pojedynczej cząstki definiujemy pęd $\vec{p}$ jako

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Jest to wektor, który ma kierunek taki sam, jak prędkość cząstki. Korzystając z pojęcia pędu, możemy zapisać drugą zasadę dynamiki w postaci

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

- Dla układu cząstek analogiczne równania są następujące:

$$\vec{P} = m_{\text{u}}\vec{v}_{\text{ŚM}} \qquad \text{oraz} \qquad \vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}.$$

Pęd

Pęd, bardzo ważną wielkość fizyczną, zdefiniujemy najpierw dla pojedynczej cząstki. Później uogólnimy tę definicję na przypadek układów wielu cząstek.

Słowo „pęd" jest ci już niewątpliwie dobrze znane. Ma wiele znaczeń w mowie potocznej, lecz tylko jedno ścisłe znaczenie w fizyce. **Pędem** cząstki jest wektor $\vec{p}$ zdefiniowany jako

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(pęd cząstki)}, \tag{9.22}$$

przy czym m jest masą cząstki, a $\vec{v}$ — jej prędkością. Ponieważ m jest zawsze dodatnią wielkością skalarną, z równania (9.22) wynika, że wektory $\vec{p}$ i $\vec{v}$ mają taki sam kierunek. Wynika z niego również, że jednostką pędu w układzie SI jest kilogram razy metr na sekundę (kg · m/s).

Siła i pęd. Korzystając z pojęcia pędu, możemy sformułować drugą zasadę dynamiki jako:

> Szybkość zmian pędu cząstki jest równa wypadkowej sił działających na cząstkę i ma kierunek tej siły.

Właśnie tak pierwotnie sformułował ją Newton. Stwierdzenie to możemy zapisać w postaci równania

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.23}$$

Z równania (9.23) wynika, że źródłem zmiany pędu cząstki $\vec{p}$ jest wypadkowa $\vec{F}_{\text{wyp}}$ sił zewnętrznych działających na tę cząstkę. Inaczej mówiąc, pęd cząstki może się zmienić tylko wtedy, gdy wypadkowa sił zewnętrz-

nych działających na cząstkę jest różna od zera. Gdy nie ma sił zewnętrznych (lub się one równoważą), *nie ma* też zmiany pędu cząstki $\vec{p}$. Jak się przekonamy w podrozdziale 9.5, fakt ten można bardzo skutecznie wykorzystać do rozwiązywania pewnego rodzaju zadań.

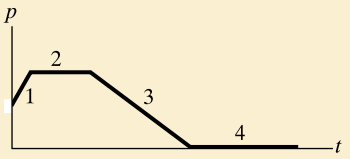
Podstawiając do równania (9.23) $\vec{p}$ ze wzoru (9.22), otrzymujemy dla stałej masy m:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}.$$

Wyrażenia $\vec{F}_{\text{wyp}} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ oraz $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$ są więc równoważnymi sobie postaciami drugiej zasady dynamiki Newtona dla ruchu cząstki.

Sprawdzian 3

Na rysunku pokazano, jak zależy od czasu pęd cząstki poruszającej się wzdłuż osi x. Na cząstkę działa siła mająca kierunek tej osi. a) Uszereguj cztery obszary z rysunku według wartości działającej w nich siły, od największej do najmniejszej. b) W którym z tych obszarów cząstka zwalnia?



Pęd układu cząstek

Uogólnimy teraz definicję pędu na przypadek układów wielu cząstek. Przeanalizujmy układ n cząstek o pewnych wartościach masy, prędkości i pędu. Cząstki mogą ze sobą oddziaływać, a ponadto mogą na nie działać siły zewnętrzne. Cały układ cząstek ma pęd $\vec{P}$, zdefiniowany jako suma wektorowa pędów poszczególnych cząstek. Wobec tego

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n. \quad (9.24)$$

Porównując to równanie ze wzorem (9.17), stwierdzamy, że

$$\vec{P} = m_{\text{u}}\vec{v}_{\text{ŚM}} \qquad \text{(pęd układu cząstek).} \qquad (9.25)$$

Korzystając z powyższego wzoru, możemy podać jeszcze inną definicję pędu układu cząstek:

Pęd układu cząstek jest równy iloczynowi całkowitej masy układu m_{u} oraz prędkości jego środka masy.

Siła i pęd. Różniczkując równanie (9.25) względem czasu (prędkość może się zmieniać, a masa nie), otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = m_{\text{u}}\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\text{ŚM}}}{\mathrm{d}t} = m_{\text{u}}\vec{a}_{\text{ŚM}}. \quad (9.26)$$

Porównując ze sobą równania (9.14) i (9.26), możemy stwierdzić, że drugą zasadę dynamiki Newtona dla układu cząstek możemy również zapisać w postaci

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(układ cząstek),} \qquad (9.27)$$

przy czym $\vec{F}_{\text{wyp}}$ jest wypadkową sił zewnętrznych działających na układ. Równanie to stanowi uogólnienie równania dla pojedynczej cząstki: $\vec{F}_{\text{wyp}} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ na przypadek układu wielu cząstek. Z równania tego wynika, że źródłem zmiany pędu układu cząstek $\vec{P}$ jest wypadkowa $\vec{F}_{\text{wyp}}$ sił zewnętrznych działających na ten układ. Inaczej mówiąc, pęd układu cząstek może się zmienić tylko wtedy, gdy wypadkowa sił zewnętrznych działających na ten układ jest różna od zera. Gdy nie ma sił zewnętrznych (lub się one równoważą), *nie ma* też zmiany pędu układu $\vec{P}$. Również ten fakt można bardzo skutecznie wykorzystać do rozwiązywania pewnego rodzaju zadań.

9.4. ZDERZENIE I POPĘD SIŁY

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

9.19 wyjaśnić, że popęd siły jest wielkością wektorową, czyli ma i wartość, i kierunek, a można go również wyrazić przez składowe;

9.20 zastosować związek popędu siły ze zmianą pędu;

9.21 zastosować związek popędu siły ze średnią siłą i czasem działania popędu siły;

9.22 zastosować równania ruchu ze stałym przyspieszeniem do wyznaczenia związku popędu siły z siłą średnią;

9.23 obliczyć popęd siły (a zatem i zmianę pędu), całkując siłę względem czasu, gdy znana jest zależność funkcyjna $\vec{F}(t)$;

9.24 obliczyć popęd siły (a zatem i zmianę pędu), całkując graficznie siłę względem czasu, gdy znany jest wykres funkcji $\vec{F}(t)$;

9.25 wyznaczyć średnią siłę działającą na cel, który doznaje ciągu zderzeń z padającymi na niego cząstkami, wykorzystując związek tej siły z szybkością, z jaką dociera do celu masa pocisków, i ze zmianą prędkości każdej cząstki w wyniku zderzenia.

Podstawowe fakty

- Druga zasada dynamiki w postaci zawierającej pęd, zastosowana do ciała biorącego udział w zderzeniu, prowadzi do związku

$$\vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}} = \Delta\vec{p} = \vec{J},$$

gdzie $\vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}} = \Delta\vec{p}$ jest zmianą pędu ciała, a $\vec{J}$ jest popędem siły $\vec{F}(t)$, jaka działa na ciało podczas zderzenia,

$$\vec{J} = \int_{t_{\text{pocz}}}^{t_{\text{końc}}} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Jeśli siła $\vec{F}(t)$ ma w czasie zderzenia wartość średnią $F_{\text{śr}}$, a Δt jest czasem trwania zderzenia, to w przypadku jednowymiarowym

$$J = F_{\text{śr}}\Delta t.$$

- Gdy stały strumień pocisków o jednakowej masie m i jednakowej prędkości v pada na stanowiące cel unieruchomione ciało, wówczas średnia siła działająca na to ciało wynosi

$$F_{\text{śr}} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v,$$

gdzie $n/\Delta t$ jest częstością zderzeń pocisków z celem, a Δv jest zmianą prędkości tych pocisków przy zderzeniu. Ta siła średnia może być tez wyrażona w postaci

$$F_{\text{śr}} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v,$$

gdzie $\Delta m/\Delta t$ jest to szybkość, z jaką dociera do celu masa pocisków. Zmiana prędkości Δv jest równa $-v$, gdy przy zderzeniu pociski zostają zatrzymane, natomiast jest równa $-2v$, gdy pociski odbijają się od celu w tył, bez zmiany wartości ich prędkości.

Zderzenie i popęd siły

Pęd ciała $\vec{p}$ nie zmieni się, dopóki nie zacznie na nie działać siła zewnętrzna (jedna lub różna od zera wypadkowa kilku sił). Aby zmienić pęd ciała, musimy przyłożyć do niego jakąś siłę, na przykład je popchnąć. W bardziej



W zderzeniu z kijem baseballowym piłka wyraźnie się odkształca (fot. Harold E. Edgerton, © The Harold and Esther Edgerton Family Trust, dzięki uprzejmości Palm Press, Inc.)

widowiskowym przypadku możemy spowodować zderzenie tego ciała z kijem baseballowym. *Zderzenie* ciał mamy wtedy, gdy siły działają między ciałami krótko, lecz mają dużą wartość, co powoduje szybką zmianę pędu ciała. Zderzenia spotykamy w naszym świecie dość często, zacznijmy jednak od bardzo prostego przypadku, gdy ciało, które się porusza (*pocisk*) zderza się z innym ciałem (*celem*), ruchomym lub nie.

Pojedyncze zderzenie

Niech pociskiem będzie piłka, a celem kij baseballowy. Zderzenie trwa krótko, a siła działająca w nim na piłkę jest tak duża, że ją spowalnia, zatrzymuje, a nawet zmienia kierunek jej ruchu na przeciwny. Na rysunku 9.8 pokazano zderzające się ciała w pewnej chwili. Na piłkę działa siła $\vec{F}(t)$, która zmienia się w trakcie zderzenia. Ta siła zmienia pęd piłki $\vec{p}$, a związek jej zmiany z siłą wynika z drugiej zasady dynamiki, która w zapisie z wykorzystaniem pędu ma postać $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$. Z tego równania widać, że zmiana pędu piłki w przedziale czasu $\mathrm{d}t$ wynosi

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}(t)\mathrm{d}t. \tag{9.28}$$

Całkowitą zmianę pędu piłki podczas zderzenia możemy wyznaczyć, całkując obustronnie równanie (9.28) od chwili początkowej t_{pocz} (tuż przed zderzeniem) do chwili końcowej $t_{\text{końc}}$ (tuż po zderzeniu). Otrzymujemy

$$\int_{\vec{p}_{\text{pocz}}}^{\vec{p}_{\text{końc}}} \mathrm{d}\vec{p} = \int_{t_{\text{pocz}}}^{t_{\text{końc}}} \vec{F}(t)\mathrm{d}t. \tag{9.29}$$

Lewa strona tego równania wynosi $\vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}} = \Delta\vec{p}$, czyli stanowi zmianę pędu ciała. Prawą stronę zależną zarówno od wielkości siły działającej podczas zderzenia, jak i od czasu jej działania nazywamy **popędem siły** w czasie zderzenia i oznaczamy przez $\vec{J}$. Tak więc

$$\vec{J} = \int_{t_{\text{pocz}}}^{t_{\text{końc}}} \vec{F}(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(definicja popędu siły).} \tag{9.30}$$

Jak widać, zmiana pędu ciała podczas zderzenia jest równa popędowi siły działającej na to ciało:

$$\Delta\vec{p} = \vec{J}. \tag{9.31}$$

Równanie to można także zapisać w postaci wektorowej jako

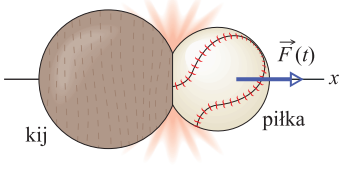
$$\vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}} = \vec{J} \tag{9.32}$$

oraz w postaci równań dla składowych wektorów, tzn.

$$\Delta p_x = J_x \tag{9.33}$$

oraz

$$p_{\text{końc},x} - p_{\text{pocz},x} = \int_{t_{\text{pocz}}}^{t_{\text{końc}}} F_x \mathrm{d}t. \tag{9.34}$$



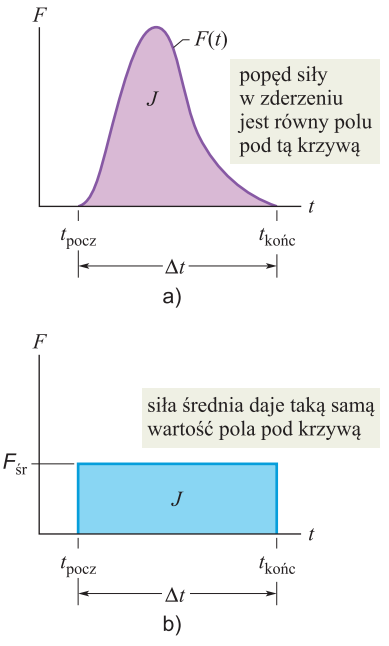
Rys. 9.8. Podczas zderzenia piłki z kijem baseballowym działa na nią siła $\vec{F}(t)$

Całkowanie siły. Jeśli znamy funkcję $\vec{F}(t)$, to możemy wyznaczyć $\vec{J}$ (a zatem i zmianę pędu), całkując tę funkcję. Jeśli znamy tylko wykres tej funkcji, to możemy wyznaczyć $\vec{J}$ graficznie jako pole powierzchni ograniczonej krzywą i osią t, jak na rysunku 9.9a. W wielu przypadkach nie znamy tej zależności funkcyjnej, lecz znamy średnią wartość siły $F_{śr}$ i czas trwania zderzenia Δt ($= t_{końc} - t_{pocz}$). Możemy wtedy wyznaczyć wartość popędu siły ze wzoru

$$J = F_{śr}\Delta t. \tag{9.35}$$

Siła średnia jest wykreślona na rysunku 9.9b jako funkcja czasu. Pole pod tą krzywą musi być równe polu pod krzywą obrazującą rzeczywistą zależność $F(t)$ z rysunku 9.9a, gdyż oba te pola są równe wartości popędu siły J.

Równie dobrze moglibyśmy zająć się nie piłką, lecz kijem baseballowym z rysunku 9.8. Z trzeciej zasady dynamiki wiemy, że w każdej chwili siła działająca na kij ma taką samą wartość i przeciwny kierunek, jak siła działająca na piłkę. Z równania (9.30) wynika więc, że popęd siły działającej na kij ma taką samą wartość i przeciwny kierunek, jak popęd siły działającej na piłkę.



Rys. 9.9. a) Wykres wartości siły $F(t)$ działającej na piłkę w czasie zderzenia z rysunku 9.8, jako funkcji czasu. Pole powierzchni pod tą krzywą jest równe wartości popędu siły $\vec{J}$, doznawanego przez piłkę P podczas całego zderzenia. b) Wysokość zacieniowanego prostokąta jest wartością średnią siły $F_{śr}$ działającej na piłkę w przedziale czasu Δt. Pole tego prostokąta jest równe polu pod krzywą z rysunku (a), a zatem także wartości popędu $\vec{J}$ siły podczas zderzenia

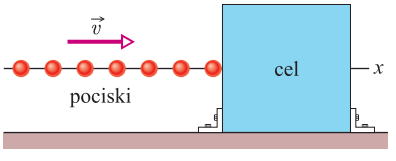
Sprawdzian 4

Spadochroniarz, któremu nie otworzył się spadochron, wylądował na śniegu i doznał niewielkich obrażeń. Gdyby przyszło mu lądować na odkrytym gruncie, czas wytracenia przez niego prędkości byłby 10-krotnie krótszy, czego z pewnością by nie przeżył. Czy obecność śniegu zwiększa, zmniejsza, czy nie zmienia wartości: a) zmiany pędu spadochroniarza, b) popędu siły zatrzymującej spadochroniarza, c) siły zatrzymującej spadochroniarza?

Ciąg zderzeń

Przeanalizujmy obecnie siłę działającą na ciało w wyniku ciągu jednakowych, regularnie następujących po sobie zderzeń. Wyobraź sobie, że dla zabawy ustawiliśmy armatkę do wystrzeliwania piłek tenisowych tak, że są one z dużą częstotliwością kierowane w stronę ściany. Przy każdym zderzeniu piłki ze ścianą, na tę ścianę działa siła, lecz jej wartość nas nie interesuje. Chcemy znaleźć średnią siłę $F_{śr}$, jaka działa na ścianę przy jej ostrzale, czyli średnią siłę w czasie, w którym zachodzi wiele zderzeń.

Na rysunku 9.10 przedstawiono cel w postaci ciała unieruchomionego, na które pada stały strumień pocisków o jednakowych masach m i pędach $m\vec{v}$, poruszających się wzdłuż osi x. Oznaczmy przez n liczbę pocisków zderzających się z celem w przedziale czasu Δt. Ruch pocisków zachodzi wzdłuż osi x, tak więc możemy zajmować się tylko składowymi wzdłuż tej osi. Załóżmy zatem, że każdy pocisk ma początkowo pęd mv, a w wyniku zderzenia pęd ten zmienia się o Δp. Łączna zmiana pędu n pocisków padających na cel w przedziale czasu Δt wynosi $n\Delta p$. Łączny popęd siły $\vec{J}$, jakiego doznaje cel w czasie Δt ma również wartość $n\Delta p$, jest skierowany wzdłuż osi x, a jego kierunek jest przeciwny do kierunku zmiany pędu. Zależność tę możemy zapisać dla składowych w kierunku ruchu pocisków w postaci



Rys. 9.10. Stały strumień pocisków o jednakowych pędach pada na stanowiące cel unieruchomione ciało. Średnia siła $F_{śr}$ działająca na to ciało jest skierowana w prawo i ma wartość zależną od częstości zderzeń z padającymi na nie pociskami, czyli — równoważnie — od szybkości, z jaką dociera do niego masa pocisków

$$J = -n\Delta p, \tag{9.36}$$

gdzie znak minus oznacza, że wektory $\vec{J}$ i $\Delta\vec{p}$ mają przeciwne kierunki.

Siła średnia. Przekształcając równanie (9.35) i podstawiając do niego związek (9.36), otrzymujemy średnią siłę $F_{śr}$, działającą na cel w wyniku zderzeń z pociskami:

$$F_{śr} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v. \tag{9.37}$$

Równanie to podaje zależność $F_{śr}$ od $n/\Delta t$, czyli częstości zderzeń pocisków z celem, oraz Δv, czyli zmiany prędkości tych pocisków przy zderzeniu.

Zmiana prędkości. Jeśli przy zderzeniu pociski zostają zatrzymane, to do równania (9.37) musimy zamiast Δv podstawić

$$\Delta v = v_{końc} - v_{pocz} = 0 - v = -v, \tag{9.38}$$

gdzie przez v_{pocz} ($= v$) i $v_{końc}$ ($= 0$) oznaczyliśmy odpowiednio prędkość pocisku przez zderzeniem i po zderzeniu. Jeśli natomiast pociski odbijają się od celu w tył, bez zmiany wartości ich prędkości, to $v_{końc} = -v$ i otrzymujemy

$$\Delta v = v_{końc} - v_{pocz} = -v - v = -2v. \tag{9.39}$$

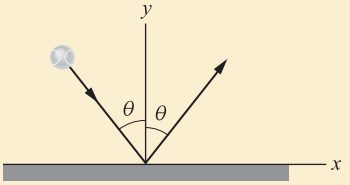
W przedziale czasu Δt do celu docierają pociski o łącznej masie $\Delta m = nm$. Korzystając z tego oznaczenia, równanie (9.37) możemy zapisać w postaci

$$F_{śr} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v. \tag{9.40}$$

To równanie podaje zależność $F_{śr}$ od $\Delta m/\Delta t$, czyli szybkości, z jaką dociera do celu masa pocisków. Jak poprzednio, do równania tego możemy podstawić wartości Δv z równań (9.38) lub (9.39), zależnie od stanu pocisków po zderzeniu.

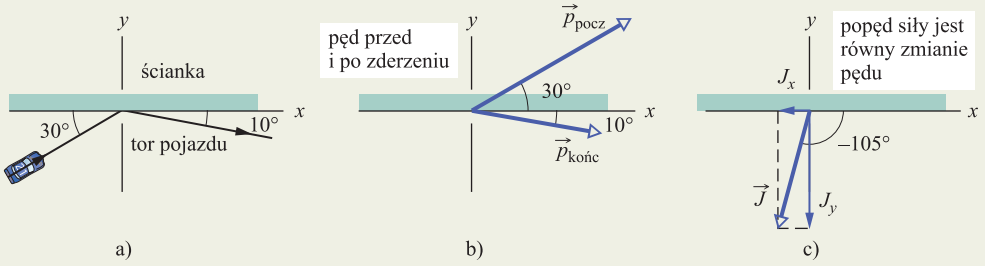
Sprawdzian 5

Na rysunku przedstawiono widzianą z góry piłkę, odbijającą się od pionowej ściany bez zmiany wartości prędkości. Rozważ zmianę pędu $\Delta\vec{p}$ piłki. a) Czy Δp_x jest dodatnie, ujemne, czy równe zeru? b) Czy Δp_y jest dodatnie, ujemne, czy równe zeru? c) Jaki jest kierunek wektora $\Delta\vec{p}$?



Przykład 9.04. Popęd siły w 2D, zderzenie samochodu ze ścianą

Zderzenie samochodu wyścigowego ze ścianą. Na rysunku 9.11a przedstawiono widok z góry toru kierowcy samochodu wyścigowego (i jego pojazdu) podczas zderzenia samochodu ze ścianką ograniczającą tor wyścigowy. Tuż przed zderzeniem pojazd jechał z prędkością $v_{pocz} = 70$ m/s po linii prostej tworzącej ze ścianką kąt 30°. Tuż po zderzeniu jego prędkość wynosiła $v_{końc} = 50$ m/s, a prosty tor pojazdu tworzył ze ścianką kąt 10°. Masa kierowcy wynosi 80 kg.



Rys. 9.11. a) Widziany z góry tor samochodu wyścigowego, który wpadł on na ściankę ograniczającą tor wyścigowy. Pęd początkowy $\vec{p}_{\text{pocz}}$ i końcowy $\vec{p}_{\text{końc}}$ kierowcy pojazdu. c) Popęd siły działającej na kierowcę podczas zderzenia $\vec{J}$

a) Wyznacz $\vec{J}$ — popęd siły działającej na kierowcę w tym zderzeniu.

PODSTAWOWE FAKTY

Kierowcę możemy potraktować jak cząstkę i opisać jego ruch pojęciami z tego podrozdziału. Nie możemy jednak obliczyć $\vec{J}$ wprost z równania (9.30), bo nie wiemy nic o sile $\vec{F}(t)$, jaka działała na kierowcę w trakcie zderzenia — nie znamy ani postaci funkcji $\vec{F}(t)$, ani jej wykresu, aby móc wyznaczyć $\vec{J}$ za pomocą całkowania. *Możemy* jednak wyznaczyć $\vec{J}$ ze zmiany pędu kierowcy $\vec{p}$, wykorzystując równanie (9.32) ($\vec{J} = \vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}}$).

Obliczenia: Na rysunku 9.11b przedstawiono wektory pędu kierowcy przed zderzeniem ($\vec{p}_{\text{pocz}}$, kierunek 30° względem $+x$) i po zderzeniu ($\vec{p}_{\text{końc}}$, kierunek $-10°$ względem $+x$). Z równań (9.32) i (9.22) ($\vec{p} = m\vec{v}$) mamy więc

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{p}_{\text{końc}} - \vec{p}_{\text{pocz}} = m\vec{v}_{\text{końc}} - m\vec{v}_{\text{pocz}} \\ &= m(\vec{v}_{\text{końc}} - \vec{v}_{\text{pocz}}). \qquad (9.41)\end{aligned}$$

Wszystkie wielkości po prawej stronie tego równania znamy, więc możemy wykonać obliczenia. Nie mając pod ręką kalkulatora wektorowego, zapiszemy równanie (9.41) dla składowych x i y.

Składowa x: Dla składowych wzdłuż osi x mamy

$$\begin{aligned}J_x &= m(v_{\text{końc},x} - v_{\text{pocz},x}) \\ &= (80\text{ kg})\left[(50\text{ m/s})\cos(-10°) - (70\text{ m/s})\cos 30°\right] \\ &= -910\text{ kg}\cdot\text{m/s}.\end{aligned}$$

Składowa y: Dla składowych wzdłuż osi y mamy

$$\begin{aligned}J_y &= m(v_{\text{końc},y} - v_{\text{pocz},y}) \\ &= (80\text{ kg})\left[(50\text{ m/s})\sin(-10°) - (70\text{ m/s})\sin 30°\right] \\ &= -3495\text{ kg}\cdot\text{m/s} \approx -3500\text{ kg}\cdot\text{ m/s}.\end{aligned}$$

Popęd siły: Popęd siły jest zatem równy

$$\vec{J} = (-910\hat{\text{i}} - 3500\hat{\text{j}})\text{ kg}\cdot\text{m/s} \qquad \text{(odpowiedź)},$$

co oznacza, że jego wartość (moduł) wynosi

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = 3616\text{ kg}\cdot\text{m/s} \approx 3600\text{ kg}\cdot\text{m/s} \qquad \text{(odpowiedź)},$$

a kąt tworzony przez wektor $\vec{J}$ z dodatnim kierunkiem osi x jest równy

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{J_y}{J_x}\right).$$

Korzystając z kalkulatora, dostajemy 75,4°. Pamiętamy jednak, że taki sam jest tangens kąta różniącego się od powyższego o 180° i musimy sami wybrać kąt spełniający warunki zadania. W tym celu rysujemy składowe wektora $\vec{J}$ (rys. 9.11c). Na podstawie tego rysunku decydujemy, że warunki zadania spełnia kąt $75{,}4° + 180° = 255{,}4° \approx 255°$, co można też zapisać jako

$$\theta = -105° \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Zderzenie trwało 14 ms. Wyznacz średnią wartość siły działającej w tym zderzeniu na kierowcę.

PODSTAWOWE FAKTY

Jak wynika z równania (9.35) ($J = F_{\text{śr}}\Delta t$), średnia wartość siły $F_{\text{śr}}$ jest równa ilorazowi wartości popędu siły J i czasu zderzenia Δt.

Obliczenia: Mamy zatem:

$$\begin{aligned}F_{\text{śr}} &= \frac{J}{\Delta t} = \frac{3616\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0{,}014\text{ s}} \\ &= 2{,}583\cdot 10^5\text{ N} \approx 2{,}6\cdot 10^5\text{ N} \qquad \text{(odpowiedź)}.\end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru $F = ma$ i pamiętając, że $m = 80$ kg, możemy stwierdzić, iż średnie przyspieszenie kierowcy podczas zderzenia wynosiło około

$3{,}22 \cdot 10^3$ m/s^2, czyli $329g$, co oznacza, że kierowca nie mógł przeżyć tego wypadku.

Sztuka przetrwania: Inżynierowie projektujący i budujący ścianki ograniczające tor wyścigowy starają się zmniejszyć prawdopodobieństwo wypadków śmiertelnych, nadając ściankom zdolność odkształcania się przy uderzeniu w nie, dzięki czemu czas zderzenia się zwiększa. Gdyby zderzenie, które analizowaliśmy w tym zadaniu, trwało 10 razy dłużej, a inne wielkości pozostały bez zmiany, średnia siła i średnie przyspieszenie kierowcy byłyby 10 razy mniejsze i kierowca mógłby przeżyć wypadek.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

9.5. ZACHOWANIE PĘDU

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

9.26 zastosować zasadę zachowania pędu, wiążącą ze sobą pędy początkowe i końcowe cząstek, w przypadku izolowanego układu cząstek;

9.27 wyjaśnić, że zachowanie pędu dotyczy z osobna składowych wzdłuż każdej z osi układu współrzędnych, *pod warunkiem*, że wypadkowa sił zewnętrznych ma wzdłuż tej osi składową równą zeru.

Podstawowe fakty

- Jeśli układ jest zamknięty i izolowany, tak że wypadkowa działających na układ sił *zewnętrznych* jest równa zeru, to pęd układu $\vec{P}$ jest stały, nawet jeśli pędy cząstek układu się zmieniają, tzn.

$$\vec{P} = \text{const} \qquad \text{(układ zamknięty i izolowany).}$$

- Zasadę zachowania pędu można również zapisać w postaci zawierającej pęd początkowy i końcowy układu:

$$\vec{P}_{\text{pocz}} = \vec{P}_{\text{końc}} \qquad \text{(układ zamknięty i izolowany).}$$

Zachowanie pędu

Załóżmy, że wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ cząstek $\vec{F}_{\text{wyp}}$, a zatem i całkowity popęd siły $\vec{J}$, są równe zeru (tzn. układ jest izolowany) oraz że żadne cząstki nie opuszczają układu, ani do niego nie przybywają (tzn. układ jest zamknięty). Podstawiając do równania (9.27) $\vec{F}_{\text{wyp}} = 0$, otrzymujemy $d\vec{P}/dt = 0$, co oznacza, że:

$$\vec{P} = \text{const} \qquad \text{(układ zamknięty i izolowany).} \qquad (9.42)$$

Wyrażając to słowami:

Jeśli na układ cząstek nie działają siły zewnętrzne lub ich wypadkowa jest równa zeru, to całkowity pęd $\vec{P}$ układu nie ulega zmianie.

Stwierdzenie to nosi nazwę **zasady zachowania pędu**, stanowiącej bardzo skuteczne narzędzie do rozwiązywania pewnego rodzaju zadań. Zasadę tę będziemy często stosować w postaci

$$\vec{P}_{\text{pocz}} = \vec{P}_{\text{końc}} \qquad \text{(układ zamknięty i izolowany).} \qquad (9.43)$$

Słownie oznacza to, że dla układu zamkniętego i izolowanego

$$\begin{pmatrix}\text{całkowity pęd układu}\\ \text{w pewnej chwili początkowej } t_{\text{pocz}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{całkowity pęd układu}\\ \text{w dowolnej chwili późniejszej } t_{\text{końc}}\end{pmatrix}.$$

Uwaga: Nie wolno mylić pędu z energią — w przykładach z tego podrozdziału pęd jest zachowany, a energia z pewnością nie.

Równania (9.42) i (9.43) są równaniami wektorowymi, a zatem każde z nich jest równoważne trzem równaniom wyrażającym zachowanie pędu wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych kierunków, np. trzech osi układu współrzędnych xyz. W zależności od tego, jakie siły działają na układ, pęd może nie być zachowany wzdłuż wszystkich trzech kierunków, a tylko wzdłuż jednego lub dwóch z nich. Prawdziwe jest przy tym następujące stwierdzenie:



Jeśli wypadkowa sił *zewnętrznych* działających na układ zamknięty ma wzdłuż pewnej osi składową równą zeru, to składowa pędu układu wzdłuż tej osi nie ulega zmianie.

Jak się dowiedzieć, czy pęd jest zachowany wzdłuż pewnej osi, na przykład osi x? Trzeba sprawdzić, jakie składowe mają wzdłuż tej osi siły działające na układ. Jeśli suma tych składowych jest równa zeru, to pęd układu wzdłuż tej osi jest zachowany. Rozważmy prosty przykład — wyobraź sobie, że rzucasz grejpfrut w drugi koniec pokoju. Jedyną siłą zewnętrzną działającą na grejpfrut (który przyjmiemy za nasz układ cząstek) w czasie jego lotu jest siła ciężkości $\vec{F}_g$ skierowana pionowo w dół. Wobec tego składowa pionowa pędu grejpfruta zmienia się w czasie jego lotu, lecz składowa pozioma jego pędu nie ulega zmianie, gdyż w poziomie nie działa na grejpfruta żadna siła zewnętrzna.

Zwróć uwagę, że mówimy o siłach zewnętrznych działających na układ zamknięty. Siły wewnętrzne mogą zmienić pęd składników układu, lecz nie mogą spowodować zmiany pędu układu jako całości. Na przykład wiele sił działa na różne organy twego ciała, lecz nie wprawiają cię one — na szczęście — w ruch po pokoju.

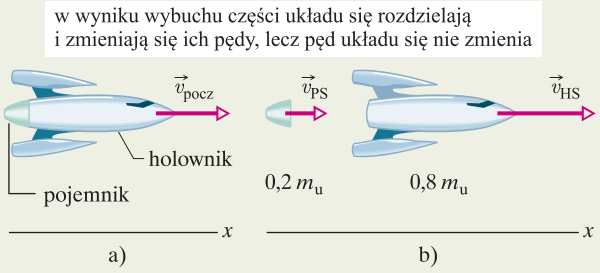


Sprawdzian 6

Pewien mechanizm leżący początkowo w bezruchu na podłodze, po której może się poruszać bez tarcia, nagle wybucha i rozpada się na dwie części, które rozjeżdżają się po podłodze. Jedna z tych części ślizga się w dodatnim kierunku osi x. a) Ile wynosi suma pędów obydwu części po wybuchu? b) Czy druga część może ślizgać się pod kątem względem osi x? c) Jaki jest kierunek pędu drugiej części?

Przykład 9.05. Wybuch 1D, prędkość względna, holownik kosmiczny

Wybuch 1D: Na rysunku 9.12a przedstawiono holownik kosmiczny wraz z pojemnikiem na ładunek, o łącznej masie m_u, poruszający się w kosmosie w kierunku osi x. Prędkość początkowa $\vec{v}_{pocz}$ holownika mierzona względem Słońca ma wartość 2100 km/h. W wyniku niewielkiego wybuchu holownik uwalnia się od pojemnika, którego masa wynosi $0{,}2m_u$ (rys. 9.12b). Holownik porusza się następnie wzdłuż osi x o 500 km/h szybciej niż pojemnik, tzn. prędkość względna holownika i pojemnika ma wartość v_{wzgl}, równą 500 km/h. Ile wynosi wówczas prędkość v_{HS} holownika względem Słońca ?



Rys. 9.12. a) Holownik kosmiczny z pojemnikiem na ładunek porusza się z prędkością początkową $\vec{v}_{pocz}$. b) Holownik odrzucił pojemnik na ładunek. Względem Słońca pojemnik ma teraz prędkość $\vec{v}_{PS}$, a holownik — prędkość $\vec{v}_{HS}$

PODSTAWOWE FAKTY

Układ ciał, który jest złożony z holownika i pojemnika na ładunek, jest zamknięty i izolowany, więc jego całkowity pęd jest zachowany, tzn.

$$\vec{P}_{pocz} = \vec{P}_{końc}, \tag{9.44}$$

przy czym wskaźniki pocz i końc odnoszą się do sytuacji przed wybuchem i po nim. (Niech cię nie dziwi postać tego równania — pęd *układu* się nie zmienia, choć pędy holownika i pojemnika na ładunek niewątpliwie ulegają zmianie).

Obliczenia: Ruch odbywa się przez cały czas w tym samym kierunku, a zatem możemy zajmować się tylko składowymi prędkości i pędów wzdłuż tego kierunku (pamiętając, że znak składowej świadczy o kierunku prędkości). Przed wybuchem mamy

$$P_{pocz} = m_u v_{pocz}. \tag{9.45}$$

Oznaczmy przez v_{PS} prędkość odrzuconego pojemnika względem Słońca. Całkowity pęd układu po wybuchu wynosi zatem

$$P_{końc} = (0{,}2m_u)v_{PS} + (0{,}8m_u)v_{HS}, \tag{9.46}$$

przy czym pierwszy wyraz po prawej stronie równania to pęd pojemnika, a drugi — pęd holownika.

Nie znamy prędkości v_{PS} pojemnika względem Słońca, lecz możemy ją przedstawić za pomocą znanych prędkości:

$$\begin{pmatrix}\text{prędkość holownika}\\ \text{względem Słońca}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{prędkość holownika}\\ \text{względem pojemnika}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{prędkość pojemnika}\\ \text{względem Słońca}\end{pmatrix}.$$

Zapisując to przy użyciu symboli, dostajemy

$$v_{HS} = v_{wzgl} + v_{PS}, \tag{9.47}$$

czyli

$$v_{PS} = v_{HS} - v_{wzgl}.$$

Podstawiając wyrażenie na v_{PS} do wzoru (9.46), a następnie wstawiając wyrażenia (9.45) i (9.46) do równania (9.44), otrzymujemy

$$m_u v_{pocz} = 0{,}2m_u(v_{HS} - v_{wzgl}) + 0{,}8m_u v_{HS},$$

a stąd

$$v_{HS} = v_{pocz} + 0{,}2v_{wzgl},$$

czyli

$$v_{HS} = (2100\ \text{km/h}) + (0{,}2)(500\ \text{km/h}) = 2200\ \text{km/h}$$

(odpowiedź).

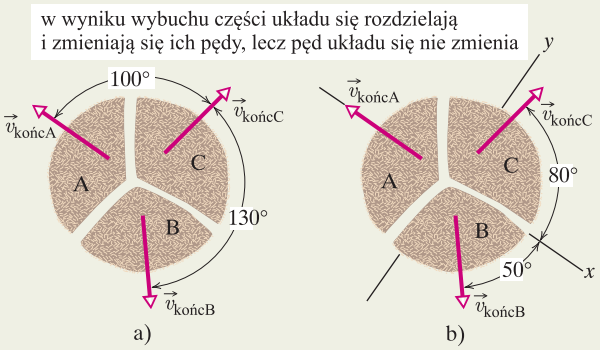
Przykład 9.06. Wybuch 2D, pęd, orzech kokosowy

Wybuch 2D: Petarda umieszczona wewnątrz orzecha kokosowego o masie m_u rozrywa go na trzy kawałki, które rozsypują się po podłodze. Przed wybuchem orzech pozostawał w spoczynku, a po wybuchu ruch jego kawałków po podłodze odbywa się bez tarcia. Widok z góry orzecha w chwilę po wybuchu przedstawiono na rysunku 9.13a. Kawałek C o masie $0{,}3m_u$ porusza się po wybuchu petardy z prędkością o wartości $v_{końcC} = 5$ m/s.

a) Ile wynosi prędkość kawałka B o masie $0{,}2m_u$?

PODSTAWOWE FAKTY

Musimy sprawdzić, czy w omawianym przypadku pęd jest zachowany. Zauważamy, że: 1) orzech i jego kawałki tworzą układ zamknięty; 2) siły działające podczas wybuchu są w tym układzie siłami wewnętrznymi; 3) wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ jest równa zeru. Wobec tego w układzie tym pęd jest na pewno zachowany. (Jak w poprzednim przykładzie — pęd *układu* się nie zmienia, choć pędy kawałków orzecha niewątpliwie ulegają zmianie).



Rys. 9.13. Trzy kawałki orzecha, na które został on rozerwany w wyniku wybuchu petardy, rozsypują się bez tarcia po podłodze w trzech kierunkach. a) Widok z góry tuż po wybuchu. b) To samo w wybranym, dwuwymiarowym układzie współrzędnych

Obliczenia: Zacznijmy od wyboru układu współrzędnych x, y, jak na rysunku 9.13b, tzn. tak, aby wektor $\vec{v}_{\text{końcA}}$ był skierowany zgodnie z ujemnym kierunkiem osi x. Oś x tworzy kąt 80° z kierunkiem wektora $\vec{v}_{\text{końcC}}$ i kąt 50° z kierunkiem wektora $\vec{v}_{\text{końcB}}$.

Pęd jest zachowany z osobna dla składowych wzdłuż osi x i y. Dla składowych wzdłuż osi y mamy

$$P_{\text{pocz},y} = P_{\text{końc},y}, \qquad (9.48)$$

przy czym wskaźnik pocz odnosi się do sytuacji początkowej (przed wybuchem), a wskaźnik y oznacza, że rozważamy składowe y wektorów $\vec{P}_{\text{pocz}}$ i $\vec{P}_{\text{końc}}$.

Wartość początkowa składowej pędu $P_{\text{pocz},y}$ jest równa zeru, ponieważ orzech znajduje się początkowo w spoczynku. Aby znaleźć wyrażenie na $P_{\text{końc},y}$, wyznaczymy składowe pędu każdego z kawałków, korzystając z równania (9.22) zapisanego dla składowych y ($p_y = mv_y$):

$$p_{\text{końcA},y} = 0,$$
$$p_{\text{końcB},y} = -0{,}2m_u v_{\text{końcB},y} = -0{,}2m_u v_{\text{końcB}} \sin 50°,$$
$$p_{\text{końcC},y} = 0{,}3m_u v_{\text{końcC},y} = 0{,}3m_u v_{\text{końcC}} \sin 80°$$

(postać pierwszego z tych równań $p_{\text{końcA},y} = 0$, jest konsekwencją naszego wyboru osi układu współrzędnych). Równanie (9.48) przybiera zatem postać

$$P_{\text{pocz},y} = P_{\text{końc},y} = p_{\text{końcA},y} + p_{\text{końcB},y} + p_{\text{końcC},y}.$$

Ponieważ $v_{\text{końcC}} = 5$ m/s, otrzymujemy stąd

$$0 = 0 - 0{,}2m_u v_{\text{końcB}} \sin 50° + (0{,}3m_u)(5\text{ m/s}) \sin 80°,$$

a następnie:

$$v_{\text{końcB}} = 9{,}64\text{ m/s} \approx 9{,}6\text{ m/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Ile wynosi prędkość kawałka A?

Obliczenia: Pęd jest też zachowany dla składowych wzdłuż osi x, ponieważ także wzdłuż tej osi na orzecha i jego kawałki nie działa żadna siła zewnętrzna. Mamy więc

$$P_{\text{pocz},x} = P_{\text{końc},x}, \qquad (9.49)$$

przy czym $P_{\text{pocz},x} = 0$, gdyż w chwili początkowej orzech spoczywa. Aby wyznaczyć $P_{\text{końc},x}$, obliczamy składowe x pędu końcowego poszczególnych kawałków orzecha, pamiętając, że masa kawałka A musi być równa $0{,}5m_u$ ($= m_u - 0{,}2m_u - 0{,}3m_u$):

$$p_{\text{końcA},x} = -0{,}5m_u v_{\text{końcA}}$$
$$p_{\text{końcB},x} = 0{,}2m_u v_{\text{końcB},x} = 0{,}2m_u v_{\text{końcB}} \cos 50°,$$
$$p_{\text{końcC},x} = 0{,}3m_u v_{\text{końcC},x} = 0{,}3m_u v_{\text{końcC}} \cos 80°.$$

Równanie (9.49) (wyrażające zachowanie pędu wzdłuż osi x) przybiera teraz postać

$$P_{\text{pocz},x} = P_{\text{końc},x} = p_{\text{końcA},x} + p_{\text{końcB},x} + p_{\text{końcC},x}.$$

Ponieważ $v_{\text{końcC}} = 5$ m/s, a $v_{\text{końcB}} = 9{,}64$ m/s, otrzymujemy

$$0 = -0{,}5m_u v_{\text{końcA}} + 0{,}2m_u(9{,}64\text{ m/s}) \cos 50° + (0{,}3m_u)(5\text{ m/s}) \cos 80°,$$

a stąd

$$v_{\text{końcA}} = 3\text{ m/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

9.6. PĘD I ENERGIA KINETYCZNA W ZDERZENIACH

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

9.28 odróżnić od siebie zderzenia sprężyste, niesprężyste i całkowicie niesprężyste;

9.29 wyjaśnić, że zderzenie w jednym wymiarze to takie, w którym ciała poruszają się wzdłuż tej samej prostej zarówno przed, jak i po zderzeniu;

9.30 zastosować zasadę zachowania pędu, czyli powiązać ze sobą pędy ciał przed i po zderzeniu, w przypadku jednowymiarowego zderzenia w układzie izolowanym;

9.31 wyjaśnić, że pęd i prędkość środka masy układu izolowanego nie zmieniają się nawet wtedy, gdy w układzie zachodzą zderzenia.

Podstawowe fakty

- W zderzeniu niesprężystym dwóch ciał energia kinetyczna układu tych ciał nie jest zachowana. Jeśli układ jest zamknięty i izolowany, to całkowity moment pędu układu *musi* być zachowany, co można wyrazić za pomocą równania wektorowego

$$\vec{p}_{1\text{pocz}} + \vec{p}_{2\text{pocz}} = \vec{p}_{1\text{końc}} + \vec{p}_{2\text{końc}},$$

w którym wskaźniki pocz i końc odnoszą się do wielkości przez zderzeniem i po zderzeniu.

- Jeśli ciała poruszają się wzdłuż jednej prostej, to zderzenie zachodzi w jednym wymiarze i zasadę zachowania pędu można zapisać za pomocą składowych względem tej prostej (osi):

$$m_1 v_{1\text{pocz}} + m_2 v_{2\text{pocz}} = m_1 v_{1\text{końc}} + m_2 v_{2\text{końc}}.$$

- Jeśli po zderzeniu ciała stykają się ze sobą, to zderzenie jest całkowicie niesprężyste i po zderzeniu ciała poruszają się z taką samą prędkością $\vec{V}$ (gdyż stykają się ze sobą, a zatem poruszają się wspólnie).

- Zderzenie ciał układu nie wpływa na położenie środka masy układu zamkniętego i izolowanego. W szczególności w wyniku zderzenia nie zmienia się prędkość środka masy $\vec{v}_{\text{ŚM}}$.

Pęd i energia kinetyczna w zderzeniach

W podrozdziale 9.4 badaliśmy zderzenie dwóch ciał, lecz skupiliśmy się wówczas na zachowaniu każdego ciała z osobna. W kolejnych kilku podrozdziałach interesować się będziemy przede wszystkim układem zderzających się ciał i założymy, że jest to układ zamknięty i izolowany. W podrozdziale 9.5 poznaliśmy bardzo ważną zasadę dotyczącą takich układów. Jest to zasada zachowania pędu, która mówi, że jeśli wypadkowa sił zewnętrznych działających na ciała w układzie jest równa zeru, to całkowity pęd układu $\vec{P}$ się nie zmienia. Zasada ta jest bardzo użyteczna, gdyż umożliwia wyznaczenie zmian zachodzących w wyniku zderzenia *bez* znajomości szczegółów przebiegu zderzenia (na przykład wielkości spowodowanych uszkodzeń).

Będziemy też interesować się całkowitą energią kinetyczną układu zderzających się ciał. Jeśli ta energia układu nie zmienia się w wyniku zderzenia, to jest ona *zachowana* (tzn. jest taka sama przed i po zderzeniu). Zderzenie o tej właściwości nazywamy **zderzeniem sprężystym**. W zderzeniach, z jakimi spotykamy się na co dzień, na przykład w zderzeniu dwóch samochodów czy zderzeniu piłki z kijem, zawsze pewna część energii kinetycznej ulega zamianie na jakąś inną postać energii, np. na energię termiczną lub energię akustyczną (dźwiękową). Zderzenia, w których energia kinetyczna układu *nie jest zachowana*, nazywamy **zderzeniami niesprężystymi**.

W pewnych przypadkach zderzenia ciał spotykanych w życiu codziennym możemy jednak traktować *w przybliżeniu* jako sprężyste. Wyobraź

sobie, że upuszczasz na twarde podłoże niezwykle sprężystą piłkę („superpiłkę"). Gdyby zderzenie tej piłki z podłożem (czyli ziemią) było sprężyste, piłka miałaby po zderzeniu taką samą energię kinetyczną, jak przed nim, a zatem wzniosłaby się na wysokość, z jakiej została upuszczona. Nawet bardzo sprężysta piłka odbija się jednak na wysokość nieco mniejszą od pierwotnej, co oznacza, że przynajmniej część energii kinetycznej jest tracona w czasie zderzenia, a zatem zderzenie nie jest całkiem sprężyste. Niemniej jednak czasem można pominąć tę niewielką zmianę energii kinetycznej i uważać zderzenie za *niemal* sprężyste.

W zderzeniu niesprężystym dwóch ciał zawsze część energii kinetycznej układu jest tracona. Strata ta jest największa, gdy po zderzeniu ciała przylegają do siebie. Takie zderzenie nazywamy **zderzeniem całkowicie niesprężystym**. Zderzenie piłki z kijem baseballowym jest niesprężyste. Zderzenie kulki z mokrej zaprawy gipsowej z tym kijem jest całkowicie niesprężyste, gdyż kulka przykleja się do kija.

Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze

Zderzenia niesprężyste 1D

Na rysunku 9.14 przedstawiono dwa ciała tuż przed i tuż po *zderzeniu w jednym wymiarze*. Na rysunku zaznaczono też prędkości ciał przed zderzeniem (wskaźnik pocz) i po zderzeniu (wskaźnik końc). Te dwa ciała tworzą rozważany przez nas układ, który jest zamknięty i izolowany. Z zasady zachowania pędu dla tego układu wynika, że

$$\begin{pmatrix}\text{całkowity pęd}\\ \text{przed zderzeniem } \vec{P}_{\text{pocz}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{całkowity pęd}\\ \text{po zderzeniu } \vec{P}_{\text{końc}}\end{pmatrix},$$

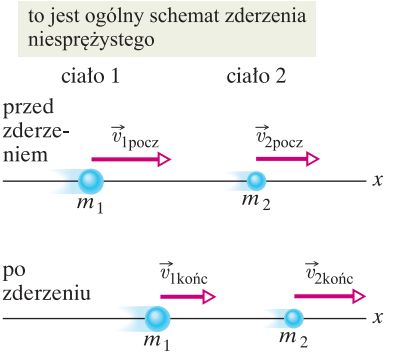
co można zapisać jako

$$\vec{p}_{1\text{pocz}} + \vec{p}_{2\text{pocz}} = \vec{p}_{1\text{końc}} + \vec{p}_{2\text{końc}}. \qquad (9.50)$$

Ruch odbywa się w jednym wymiarze, dlatego możemy opuścić strzałki nad symbolami oznaczające wektory i zajmować się tylko składowymi wzdłuż kierunku ruchu. Korzystając z zależności $p = mv$, przekształcamy równanie (9.50) do postaci

$$m_1 v_{1\text{pocz}} + m_2 v_{2\text{pocz}} = m_1 v_{1\text{końc}} + m_2 v_{2\text{końc}}. \qquad (9.51)$$

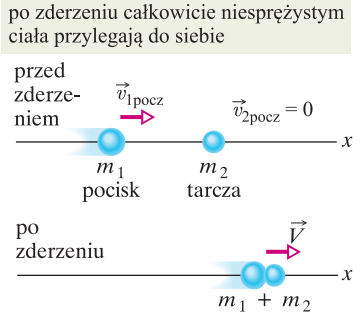
Jeśli znamy na przykład wartości mas i prędkości początkowych obydwu ciał oraz prędkość końcową jednego ciała, to z równania (9.51) możemy wyznaczyć prędkość końcową drugiego z nich.



Rys. 9.14. Ciała 1 i 2 poruszające się wzdłuż osi x przed zderzeniem i po ich zderzeniu niesprężystym

Zderzenie całkowicie niesprężyste 1D

Na rysunku 9.15 przedstawiono dwa ciała, przed zderzeniem i po ich całkowicie niesprężystym zderzeniu (co oznacza, że po zderzeniu ciała stykają się ze sobą). Przyjmijmy, że przed zderzeniem ciało o masie m_2 pozostawało w spoczynku ($v_{2\text{pocz}} = 0$). Ciało to będziemy nazywać *tarczą*, a ciało poruszające się — *pociskiem*. Wspólną prędkość przylegających do siebie



Rys. 9.15. Całkowicie niesprężyste zderzenie dwóch ciał. Przed zderzeniem ciało o masie m_2 pozostaje w spoczynku, a ciało o masie m_1 porusza się dokładnie w kierunku ciała nieruchomego. Po zderzeniu ciała stykają się ze sobą i poruszają się wspólnie z prędkością $\vec{V}$

ciał po zderzeniu oznaczmy przez V. Równanie (9.51) daje w tym przypadku

$$m_1 v_{1\text{pocz}} = (m_1 + m_2)V, \tag{9.52}$$

czyli

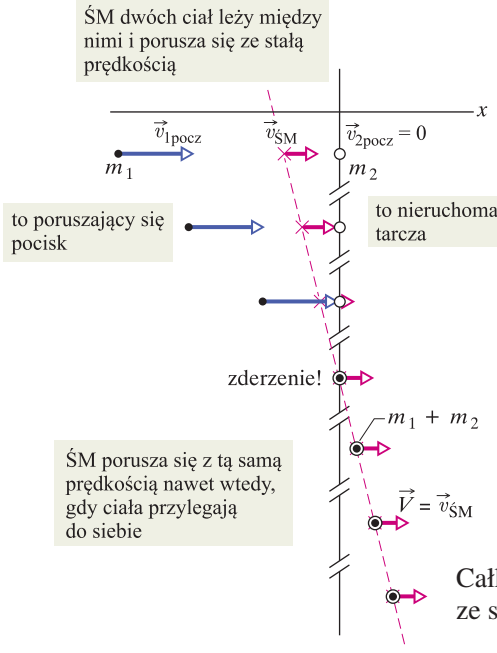
$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}}. \tag{9.53}$$

Jeśli znamy na przykład wartości mas i prędkości początkowej $v_{1\text{pocz}}$ pocisku, to z równania (9.53) możemy wyznaczyć prędkość końcową V. Zwróć uwagę, że V musi być zawsze mniejsze od $v_{1\text{pocz}}$, ponieważ ułamek $m_1/(m_1 + m_2)$ jest zawsze mniejszy od jedności.

Prędkość środka masy

Prędkość $\vec{v}_{\text{ŚM}}$ środka masy układu zamkniętego i izolowanego nie może się zmienić w wyniku zderzenia, ponieważ wypadkowa działających na układ sił zewnętrznych, które mogłyby to sprawić, jest dla układu izolowanego równa zeru. Aby wyznaczyć $\vec{v}_{\text{ŚM}}$, przeanalizujmy jeszcze raz układ dwóch ciał oraz ich zderzenie w jednym wymiarze przedstawione na rysunku 9.14. Równanie (9.25) ($\vec{P} = m_{\text{u}}\vec{v}_{\text{ŚM}}$) podaje związek $\vec{v}_{\text{ŚM}}$ z całkowitym pędem $\vec{P}$ układu dwóch ciał, który możemy zapisać jako

$$\vec{P} = m_{\text{u}}\vec{v}_{\text{ŚM}} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{\text{ŚM}}. \tag{9.54}$$



Rys. 9.16. Położenie dwóch ciał z rysunku 9.15 zderzających się ze sobą całkowicie niesprężyście w kilku równo odległych od siebie chwilach. W każdym przypadku pokazano także położenie środka masy układu. Prędkość $\vec{v}_{\text{ŚM}}$ środka masy nie ulega zmianie w wyniku zderzenia. Po zderzeniu ciała poruszają się razem, a więc ich wspólna prędkość $\vec{V}$ musi być równa $\vec{v}_{\text{ŚM}}$

Całkowity pęd $\vec{P}$ jest zachowany podczas zderzenia; jest on równy każdej ze stron równania (9.50). Biorąc lewą stronę tego równania, mamy

$$\vec{P} = \vec{p}_{1\text{pocz}} + \vec{p}_{2\text{pocz}}. \tag{9.55}$$

Wstawiając wyrażenie na $\vec{P}$ do równania (9.54) i rozwiązując je następnie względem $\vec{v}_{\text{ŚM}}$, dostajemy

$$\vec{v}_{\text{ŚM}} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1\text{pocz}} + \vec{p}_{2\text{pocz}}}{m_1 + m_2}. \tag{9.56}$$

Prawa strona tego równania jest stała, a zatem $\vec{v}_{\text{ŚM}}$ ma taką samą wartość przed i po zderzeniu.

Jako przykład na rysunku 9.16 pokazano stroboskopowy obraz ruchu środka masy w przypadku zderzenia całkowicie niesprężystego przedstawionego na rysunku 9.15. Ciało 2 jest tarczą, a więc jego początkowy pęd w równaniu (9.56) wynosi $\vec{p}_{2\text{pocz}} = m_2\vec{v}_{2\text{pocz}} = 0$. Ciało 1 jest pociskiem, a więc jego początkowy pęd w równaniu (9.56) wynosi $\vec{p}_{1\text{pocz}} = m_1\vec{v}_{1\text{pocz}}$. Zauważ, że w miarę upływu czasu (czemu odpowiadają kolejne ujęcia na tym rysunku) środek masy porusza się w prawo ze stałą prędkością, zarówno przed zderzeniem, jak i po zderzeniu. Po zderzeniu wspólna prędkość $\vec{V}$ obydwu ciał jest równa $\vec{v}_{\text{ŚM}}$, ponieważ środek masy porusza się wraz ze stykającymi się ze sobą ciałami.

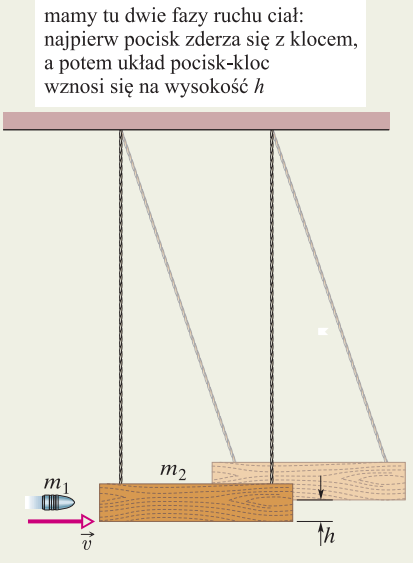
Sprawdzian 7

Ciała 1 i 2 ulegają całkowicie niesprężystemu zderzeniu w jednym wymiarze. Ile wynosi ich pęd po zderzeniu, jeśli ich pędy przed zderzeniem wynoszą odpowiednio: a) 10 kg · m/s i 0, b) 10 kg · m/s i 4 kg · m/s, c) 10 kg · m/s i −4 kg · m/s?

Przykład 9.07. Zachowanie pędu, wahadło balistyczne

W tym przykładzie spotkamy się z podejściem często stosowanym w fizyce. Zdarza się, że nie możemy rozwiązać zadania jako całości, gdyż nie mamy równania, które można by do tego wykorzystać. Możemy jednak nieraz podzielić takie zadanie na części, które możemy rozwiązać, mając potrzebne do tego równania.

Przed wynalezieniem elektronicznych przyrządów do pomiaru czasu prędkość pocisków (np. karabinowych) mierzono za pomocą *wahadła balistycznego*. W wersji pokazanej na rysunku 9.17 stanowi je duży kloc drewniany o masie $m_2 = 5{,}4$ kg, zawieszony na dwóch długich linach. Pocisk o masie $m_1 = 9{,}5$ g wystrzelony w kierunku tego kloca zatrzymuje się w nim bardzo szybko. Układ *kloc + pocisk* odchyla się ku górze, przy czym jego środek masy wznosi się w pionie na wysokość $h = 6{,}3$ cm w chwili, gdy prędkość układu zmniejsza się do zera. Ile wynosiła prędkość pocisku tuż przez zderzeniem z klocem?



Rys. 9.17. Wahadło balistyczne stosowane do pomiaru prędkości pocisku

PODSTAWOWE FAKTY

Łatwo się zorientować, że wysokość h, na jaką wznosi się wahadło, zależy od prędkości v pocisku. Jednakże nie możemy wyznaczyć związku między tymi wielkościami z zasady zachowania energii mechanicznej, gdyż niewątpliwie przy zagłębianiu się pocisku w kloc energia mechaniczna ulega zamianie na inne postacie energii (jak energia termiczna i energia potrzebna do odkształcenia drewna). Musimy więc podejść do zagadnienia inaczej. Zauważ, że złożony ruch układu można rozdzielić na dwie fazy, z których każdą zbadamy osobno: 1) zderzenie pocisku z klocem, 2) ruch układu po zderzeniu, w trakcie którego energia mechaniczna *jest* zachowana.

***Rozumowanie, krok 1*:** Zderzenie pocisku z klocem trwa bardzo krótko, dlatego też możemy zrobić dwa ważne

założenia. 1) Przyjmijmy, że w czasie zderzenia siła ciężkości działająca na kloc i siła działająca na niego ze strony lin nadal równoważą się wzajemnie. Zatem w czasie zderzenia popęd sił zewnętrznych działających na układ pocisk–kloc jest równy zeru. Układ jest więc izolowany, wobec czego jego całkowity pęd jest zachowany:

$$\begin{pmatrix}\text{całkowity pęd}\\ \text{przed zderzeniem}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{całkowity pęd}\\ \text{po zderzeniu}\end{pmatrix}. \qquad (9.57)$$

2) Przyjmujemy, że zderzenie zachodzi w jednym wymiarze w tym sensie, że kierunek ruchu pocisku i kloca *tuż po zderzeniu* jest taki sam, jak kierunek ruchu pocisku przed zderzeniem. Skoro zderzenie zachodzi w jednym wymiarze, kloc pozostaje początkowo w spoczynku, a pocisk grzęźnie w klocu, to zasadę zachowania pędu możemy wyrazić za pomocą równania (9.53). Stosując symbole wprowadzone w treści zadania, mamy

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v. \qquad (9.58)$$

Rozumowanie, krok 2: W czasie ruchu wahadłowego pocisku razem z klocem energia mechaniczna układu pocisk–kloc–Ziemia jest zachowana:

$$\begin{pmatrix}\text{energia mechaniczna}\\ \text{w położeniu dolnym}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{energia mechaniczna}\\ \text{w położeniu górnym}\end{pmatrix} \qquad (9.59)$$

(energia ta nie zmienia się pod wpływem sił działających na kloc ze strony lin, gdyż te siły działają zawsze prostopadle do kierunku ruchu kloca). Przyjmijmy, że grawitacyjna energia potencjalna jest równa zeru, gdy kloc znajduje się w położeniu początkowym. Zachowanie energii mechanicznej oznacza zatem, że energia kinetyczna układu, gdy wahadło zaczyna się wznosić, musi być równa grawitacyjnej energii potencjalnej w najwyższym punkcie ruchu wahadła. Prędkość pocisku i kloca na początku ruchu wahadła jest równa prędkości układu tuż po zderzeniu, czyli V, a zatem zasadę zachowania energii możemy w naszym przypadku zapisać w postaci

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = (m_1 + m_2)gh. \qquad (9.60)$$

***Wynik łączny*:** Wstawiając do tego wzoru V z równania (10.22), otrzymujemy

$$\begin{aligned} v &= \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh} \qquad (9.61)\\ &= \left(\frac{0{,}0095\ \text{kg} + 5{,}45\ \text{kg}}{0{,}0095\ \text{kg}}\right)\sqrt{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}063\ \text{m})}\\ &= 630\ \text{m/s} \qquad \text{(odpowiedź).}\end{aligned}$$

Wahadło balistyczne jest swego rodzaju „przetwornikiem" zamieniającym dużą prędkość ciała lekkiego (pocisku) na małą, a zatem znacznie łatwiejszą do zmierzenia, prędkość ciała ciężkiego (kloca).

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

9.7. ZDERZENIA SPRĘŻYSTE W JEDNYM WYMIARZE

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

9.32 zastosować zasadę zachowania energii oraz zasadę zachowania pędu, czyli powiązać ze sobą energie i pędy ciał przed i po zderzeniu, w przypadku jednowymiarowego zderzenia sprężystego w układzie izolowanym;

9.33 opisać ruch ciał po zderzeniu pocisku z nieruchomą tarczą, gdy: 1) masy ciał są jednakowe, 2) tarcza ma większą masę niż pocisk oraz 3) pocisk ma większą masę niż tarcza.

Podstawowe fakty

• Zderzenie sprężyste to takie zderzenie, w którym energia kinetyczna układu zderzających się ciał jest zachowana. Gdy układ jest zamknięty i izolowany, zachowany jest też pęd układu. W przypadku jednowymiarowym, gdy tarczą jest ciało 2, a pociskiem ciało 1, z zasad zachowania energii i pędu wynika, że tuż po zderzeniu prędkości ciał wynoszą

$$v_{1\text{końc}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}}$$

oraz

$$v_{2\text{końc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}}.$$

Zderzenia sprężyste w jednym wymiarze

Jak mówiliśmy w podrozdziale 9.6, zderzenia spotykane w życiu codziennym są niesprężyste, lecz nieraz możemy je w przybliżeniu uważać za sprężyste. Oznacza to, że można przyjąć, iż energia kinetyczna zderzających się ciał jest w przybliżeniu zachowana, czyli nie zostaje zamieniona na inne rodzaje energii:

$$\begin{pmatrix}\text{całkowita energia kinetyczna}\\ \text{przed zderzeniem}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{całkowita energia kinetyczna}\\ \text{po zderzeniu}\end{pmatrix}. \tag{9.62}$$

Oznacza to, że:



Przy zderzeniu sprężystym energia kinetyczna każdego ze zderzających się ciał może się zmienić, lecz nie może ulec zmianie całkowita energia kinetyczna układu tych ciał.

Przykładem zderzenia, które można w przybliżeniu uważać za sprężyste, jest zderzenie dwóch kul bilardowych. Jeśli to zderzenie jest czołowe (tzn. kula ruchoma porusza się dokładnie w kierunku kuli nieruchomej), to niemal cała energia kinetyczna kuli ruchomej może zostać przekazana kuli początkowo nieruchomej (z faktu, że zderzeniu kul towarzyszy charakterystyczny odgłos uderzenia można jednak wyciągnąć wniosek, że pewna niewielka część energii kinetycznej zostaje zamieniona na energię fali dźwiękowej).

Nieruchoma tarcza

Na rysunku 9.18 przedstawiono dwa ciała przed zderzeniem i po ich zderzeniu sprężystym w jednym wymiarze, podobnym do zderzenia czołowego kul bilardowych. Ciało o masie m_1 i prędkości początkowej $\vec{v}_{1\text{pocz}}$ porusza się przed zderzeniem w kierunku ciała o masie m_2, które jest przed zderzeniem nieruchome ($\vec{v}_{2\text{pocz}} = 0$). Załóżmy, że ten układ dwóch ciał jest zamknięty i izolowany. Wobec tego całkowity pęd układu jest zachowany, co możemy wyrazić — korzystając z równania (9.51) — jako

$$m_1 v_{1\text{pocz}} = m_1 v_{1\text{końc}} + m_2 v_{2\text{końc}} \qquad \text{(zachowanie pędu)}. \tag{9.63}$$

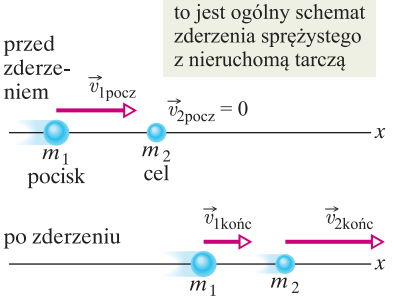
Skoro zderzenie jest sprężyste, to zachowana jest również całkowita energia kinetyczna, co możemy zapisać następująco:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1\text{pocz}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1\text{końc}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2\text{końc}}^2 \qquad \text{(zachowanie energii kinetycznej)}. \tag{9.64}$$

W każdym z tych równań wskaźnik pocz odnosi się do prędkości początkowej zderzających się ciał, a wskaźnik końc — do ich prędkości końcowych. Jeśli znamy masy ciał oraz prędkość początkową $v_{1\text{pocz}}$ ciała 1, to wielkościami nieznanymi są prędkości końcowe $v_{1\text{końc}}$ i $v_{2\text{końc}}$ obydwu ciał. Te dwie niewiadome możemy wyznaczyć, gdyż mamy do dyspozycji dwa równania.

W tym celu zapiszmy równanie (9.63) jako

$$m_1(v_{1\text{pocz}} - v_{1\text{końc}}) = m_2 v_{2\text{końc}}, \tag{9.65}$$



Rys. 9.18. Ciało 1 porusza się wzdłuż osi x przed zderzeniem sprężystym z ciałem 2, które jest przed zderzeniem nieruchome. Po zderzeniu obydwa ciała poruszają się wzdłuż tej osi

a równanie (9.64) jako[1]

$$m_1(v_{1\text{pocz}} - v_{1\text{końc}})(v_{1\text{pocz}} + v_{1\text{końc}}) = m_2 v_{2\text{końc}}^2. \tag{9.66}$$

Dzieląc stronami równania (9.66) i (9.65), otrzymujemy po niewielkich przekształceniach

$$v_{1\text{końc}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}} \tag{9.67}$$

oraz

$$v_{2\text{końc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}}. \tag{9.68}$$

Zauważ, że z równania (9.68) wynika, że $v_{2\text{końc}}$ jest zawsze dodatnie (tzn. ciało o masie m_2 początkowo nieruchome, po zderzeniu zawsze porusza się do przodu). Z równania (9.67) wynika natomiast, że $v_{1\text{końc}}$ może być dodatnie lub ujemne (tzn. ciało o masie m_1 porusza się po zderzeniu do przodu, jeśli $m_1 > m_2$, lecz odbija się od tarczy, jeśli $m_1 < m_2$).

Rozważmy kilka przypadków szczególnych.

1. ***Ciała o jednakowych masach.*** Jeśli $m_1 = m_2$, to równania (9.67) i (9.68) sprowadzają się do postaci

   $$v_{1\text{końc}} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad v_{2\text{końc}} = v_{1\text{pocz}},$$

   co odpowiada idealnemu uderzeniu bilardzisty — przy zderzeniu czołowym ciał o jednakowych masach ciało 1 (początkowo ruchome) zatrzymuje się, a ciało 2 (początkowo nieruchome) uzyskuje prędkość równą prędkości początkowej ciała 1. Innymi słowy, przy zderzeniu czołowym ciała o jednakowych masach „wymieniają się prędkościami". To ostatnie stwierdzenie jest słuszne także wtedy, gdy tarcza (ciało 2) nie jest początkowo nieruchoma.
2. ***Tarcza o bardzo dużej masie.*** Jeśli tarcza ma bardzo dużą masę, to spełniony jest związek $m_2 \gg m_1$. Przykładem takiej sytuacji może być wystrzelenie piłki golfowej w kierunku nieruchomej kuli armatniej. Równania (9.67) i (9.68) sprowadzają się w tym przypadku do postaci

   $$v_{1\text{końc}} \approx -v_{1\text{pocz}} \qquad \text{oraz} \qquad v_{2\text{końc}} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1\text{pocz}}. \tag{9.69}$$

   Z równań tych wynika, że ciało 1 (piłka golfowa) po prostu odbija się wzdłuż linii padania, bez zmiany wartości prędkości. Natomiast ciało 2 (kula armatnia) porusza się po zderzeniu do przodu, lecz jego prędkość jest bardzo mała, gdyż wyrażenie w nawiasach w równaniu (9.69) jest dużo mniejsze od jedności. Tego właśnie należało się spodziewać.
3. ***Pocisk o bardzo dużej masie.*** Jest to przypadek odwrotny do poprzedniego, tzn. przypadek, gdy $m_1 \gg m_2$. Odpowiada on wystrzeleniu kuli armatniej w kierunku nieruchomej piłki golfowej. Równania (9.67) i (9.68) sprowadzają się teraz do

   $$v_{1\text{końc}} \approx v_{1\text{pocz}} \qquad \text{oraz} \qquad v_{2\text{końc}} \approx 2v_{1\text{pocz}}. \tag{9.70}$$

[1] Zastosowaliśmy przy tym tożsamość $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, co pozwoli nam łatwiej rozwiązać układ równań (9.65) i (9.66).

Z równań (9.70) wynika, że ciało 1 (kula armatnia) porusza się nadal do przodu, z prędkością praktycznie niezmienioną w wyniku zderzenia. Ciało 2 (piłka golfowa) natomiast porusza się po zderzeniu do przodu, z prędkością dwa razy większą od prędkości kuli armatniej. Możesz się dziwić, dlaczego ta prędkość jest właśnie dwa razy większa. Aby to wyjaśnić, przypomnij sobie zderzenie opisane równaniami (9.69), podczas którego prędkość pocisku o małej masie (piłki golfowej) zmienia się z $+v$ na $-v$, co daje *zmianę* prędkości o $2v$. W obecnym przykładzie zachodzi taka sama *zmiana* jej prędkości (z tym, że tym razem od wartości 0 do wartości $2v$).

Ruchoma tarcza

Po rozważeniu sprężystego zderzenia pocisku z nieruchomą tarczą zajmiemy się teraz przypadkiem, w którym przed zderzeniem sprężystym obydwa ciała znajdują się w ruchu.

W sytuacji przedstawionej na rysunku 9.19 zasada zachowania pędu przybiera postać

$$m_1 v_{1\text{pocz}} + m_2 v_{2\text{pocz}} = m_1 v_{1\text{końc}} + m_2 v_{2\text{końc}}, \tag{9.71}$$

a zasada zachowania energii może być zapisana jako

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1\text{pocz}}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2\text{pocz}}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1\text{końc}}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2\text{końc}}^2. \tag{9.72}$$

Aby rozwiązać ten układ równań względem $v_{1\text{końc}}$ i $v_{2\text{końc}}$, przekształćmy równanie (9.71) do postaci

$$m_1(v_{1\text{pocz}} - v_{1\text{końc}}) = -m_2(v_{2\text{pocz}} - v_{2\text{końc}}), \tag{9.73}$$

a równanie (9.72) do postaci

$$m_1(v_{1\text{pocz}} - v_{1\text{końc}})(v_{1\text{pocz}} + v_{1\text{końc}}) = -m_2(v_{2\text{pocz}} - v_{2\text{końc}})(v_{2\text{pocz}} + v_{2\text{końc}}). \tag{9.74}$$

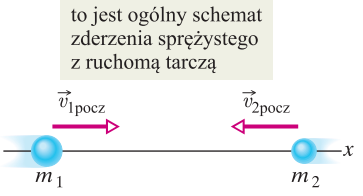
Dzieląc stronami równania (9.74) i (9.73), otrzymujemy po niewielkich przekształceniach

$$v_{1\text{końc}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2\text{pocz}} \tag{9.75}$$

oraz

$$v_{2\text{końc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2\text{pocz}}. \tag{9.76}$$

Zauważ, że przypisanie ciałom wskaźników 1 i 2 jest całkowicie dowolne. Zamiana wskaźników (1 na 2 i 2 na 1) na rysunku 9.19 oraz w równaniach (9.75) i (9.76) nie zmienia tych równań. Zauważ również, że jeśli podstawimy $v_{2\text{pocz}} = 0$, to ciało 2 stanie się tarczą nieruchomą, jak na rysunku 9.18, a równania (9.75) i (9.76) sprowadzą się do równań (9.67) i (9.68).



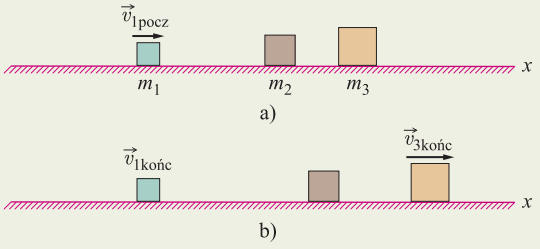
Rys. 9.19. Dwa ciała przed czołowym zderzeniem sprężystym

Sprawdzian 8

Ile wynosi końcowy pęd tarczy z rysunku 9.18, jeśli początkowy pęd pocisku jest równy 6 kg · m/s, a końcowy pęd pocisku wynosi: a) 2 kg · m/s, b) −2 kg · m/s? c) Ile wynosi końcowa energia kinetyczna tarczy, jeśli początkowa energia kinetyczna pocisku jest równa 5 J, a jego końcowa energia kinetyczna wynosi 2 J?

Przykład 9.08. Zderzenia sprężyste, jedno za drugim

Jak pokazano na rysunku 9.20a, klocek 1 porusza się w kierunku dwóch nieruchomych klocków z prędkością $v_{1\text{pocz}} = 10$ m/s. W pewnej chwili zderza się on z klockiem 2, który następnie zderza się z klockiem 3 o masie $m_3 = 6$ kg. Po drugim zderzeniu klocek 2 jest znów nieruchomy, a klocek 3 ma prędkość $v_{3\text{końc}} = 5$ m/s (rys. 9.20b). Załóż, że zderzenia są sprężyste. Ile wynoszą masy klocków 1 i 2? Ile wynosi prędkość końcowa klocka 1, $v_{1\text{końc}}$?



Rys. 9.20. Klocek 1 zderza się z nieruchomym początkowo klockiem 2, a ten zderza się następnie z nieruchomym początkowo klockiem 3

PODSTAWOWE FAKTY

Założyliśmy, że zderzenia są sprężyste, więc energia mechaniczna klocków jest zachowana (straty energii związane z dźwiękiem, ogrzewaniem i drganiami klocków uznajemy za znikomo małe). Zachowany jest również pęd w kierunku ruchu klocków (czyli osi x), gdyż na klocki nie działają żadne siły zewnętrzne. Wobec spełnienia obu zasad zachowania możemy skorzystać z równań (9.67) i (9.68).

Obliczenia: Jeśli zaczniemy od pierwszego zderzenia, to nie zdziałamy zbyt wiele, bo mamy za dużo niewiadomych — nie znamy mas i prędkości końcowych klocków. Zacznijmy więc od zderzenia drugiego — wiemy, że po zderzeniu z klockiem 3 klocek 2 się zatrzymuje. Stosując dla tego zderzenia równanie (9.67) z odpowiednią zmianą wskaźników, otrzymujemy

$$v_{2\text{końc}} = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_{2\text{pocz}},$$

gdzie $v_{2\text{pocz}}$ jest prędkością klocka 2 tuż przed zderzeniem, a $v_{2\text{końc}}$ jego prędkością tuż po zderzeniu. Wiemy, że $v_{2\text{końc}} = 0$ (klocek 2 się zatrzymuje) oraz że $m_3 = 6$ kg, wobec czego

$$m_2 = m_3 = 6 \text{ kg}. \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

W podobny sposób wykorzystujemy dla drugiego zderzenia równanie (9.68)

$$v_{3\text{końc}} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_{2\text{pocz}},$$

w którym $v_{3\text{końc}}$ jest prędkością końcową klocka 3. Podstawiając do tego równania $m_2 = m_3$ oraz $v_{3\text{końc}} = 5$ m/s, dostajemy

$$v_{2\text{pocz}} = v_{3\text{końc}} = 5 \text{ m/s}.$$

Teraz możemy już zająć się zderzeniem pierwszym, zachowując ostrożność przy wielkościach dotyczących klocka 2 — jego prędkość końcowa po pierwszym zderzeniu $v_{2\text{końc}}$ jest równa jego prędkości przed zderzeniem drugim $v_{2\text{pocz}}$ ($= 5$ m/s). Wykorzystując równanie (9.68) dla pierwszego zderzenia i uwzględniając, że $v_{1\text{pocz}} = 10$ m/s, dostajemy

$$v_{2\text{końc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{2\text{pocz}},$$

czyli

$$5 \text{ m/s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (10 \text{ m/s}),$$

a stąd

$$m_1 = \tfrac{1}{3} m_2 = \tfrac{1}{3}(6 \text{ kg}) = 2 \text{ kg} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Na koniec korzystamy z równania (9.67) dla pierwszego zderzenia i otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_{1\text{końc}} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}} \\ &= \frac{\frac{1}{3} m_2 - m_2}{\frac{1}{3} m_2 + m_2} (10 \text{ m/s}) \\ &= -5 \text{ m/s}. \qquad \text{(odpowiedź)}. \end{aligned}$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

9.8. ZDERZENIA W DWÓCH WYMIARACH

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

9.34 zastosować zasadę zachowania pędu wzdłuż każdej osi układu współrzędnych, czyli powiązać ze sobą składowe pędów ciał wzdłuż *tej samej osi* przed i po zderzeniu, w przypadku dwuwymiarowego zderzenia w układzie izolowanym;

9.35 w przypadku dwuwymiarowego zderzenia *sprężystego* w układzie izolowanym a) zastosować zasadę zachowania pędu wzdłuż każdej osi układu współrzędnych, czyli powiązać ze sobą składowe pędów ciał wzdłuż *tej samej osi* przed i po zderzeniu oraz b) zastosować zasadę zachowania energii kinetycznej, czyli powiązać ze sobą wartości energii kinetycznej ciał przed i po zderzeniu.

Podstawowe fakty

- Gdy dwa ciała zderzają się ze sobą, nie poruszając się przed zderzeniem wzdłuż tej samej osi (czyli gdy zderzenie nie jest czołowe), ich zderzenie zachodzi w dwóch wymiarach. W układzie zamkniętym i izolowanym obowiązuje zasada zachowania pędu, która dla takiego zderzenia ma postać

$$\vec{p}_{1\text{pocz}} + \vec{p}_{2\text{pocz}} = \vec{p}_{1\text{końc}} + \vec{p}_{2\text{końc}}.$$

Zasadę zachowania pędu można też zapisać w postaci dwóch równań dla składowych wzdłuż każdej z osi układu współrzędnych, w którym opisujemy zderzenie. W szczególnym przypadku zderzenia sprężystego musi być także zachowana energia kinetyczna układu, co nam daje jeszcze jedno równanie

$$E_{\text{k},1\text{pocz}} + E_{\text{k},2\text{pocz}} = E_{\text{k},1\text{końc}} + E_{\text{k},2\text{końc}}.$$

Zderzenia w dwóch wymiarach

Gdy dwa ciała zderzają się ze sobą, kierunki ich ruchu po zderzeniu zależą od popędów sił, jakimi działają na siebie te ciała. W przypadku gdy zderzenie nie jest czołowe, kierunki ruchu ciał po zderzeniu są inne niż przed nim. Jeśli takie zderzenie w dwóch wymiarach zachodzi w układzie zamkniętym i izolowanym, to całkowity pęd układu musi być zachowany, tzn.

$$\vec{p}_{1\text{pocz}} + \vec{p}_{2\text{pocz}} = \vec{p}_{1\text{końc}} + \vec{p}_{2\text{końc}}. \tag{9.77}$$

W szczególnym przypadku zderzenia sprężystego musi być także zachowana energia kinetyczna układu, tzn.

$$E_{\text{k},1\text{pocz}} + E_{\text{k},2\text{pocz}} = E_{\text{k},1\text{końc}} + E_{\text{k},2\text{końc}}. \tag{9.78}$$

Do analizy zderzenia w dwóch wymiarach przy zastosowaniu równania (9.77) wygodnie jest zapisać to równanie dla składowych w układzie współrzędnych xy. Jako przykład na rysunku 9.21 przedstawiono zderzenie niecentralne (tzn. zderzenie, które nie jest czołowe) pocisku i tarczy, która przed zderzeniem się nie porusza. Popędy sił działających między tymi ciałami sprawiają, że po zderzeniu ciała poruszają się w kierunkach tworzących z osią x, tzn. osią, wzdłuż której poruszał się przed zderzeniem pocisk, kąty θ_1 i θ_2. Równanie (9.77) ma dla składowych wzdłuż osi x postać

$$m_1 v_{1\text{pocz}} = m_1 v_{1\text{końc}} \cos\theta_1 + m_2 v_{2\text{końc}} \cos\theta_2, \tag{9.79}$$

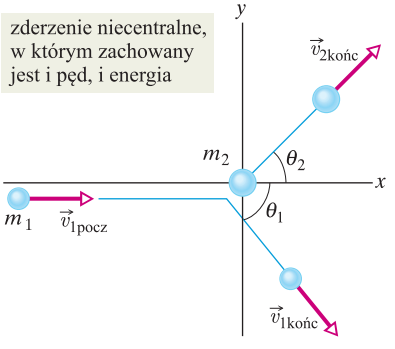
a dla składowych wzdłuż osi y

$$0 = -m_1 v_{1\text{końc}} \sin\theta_1 + m_2 v_{2\text{końc}} \sin\theta_2. \tag{9.80}$$

Równanie (9.78) obowiązujące w szczególnym przypadku zderzenia sprężystego możemy wyrazić przez prędkości ciał jako

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1\text{pocz}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1\text{końc}}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2\text{końc}}^2 \qquad \text{(energia kinetyczna)}. \tag{9.81}$$

W równaniach od (9.79) do (9.81) występuje siedem zmiennych: dwie



Rys. 9.21. Sprężyste zderzenie niecentralne dwóch ciał. Ciało o masie m_2 (tarcza) jest przed zderzeniem nieruchome

masy m_1 i m_2, trzy prędkości $\vec{v}_{1\text{pocz}}$, $\vec{v}_{1\text{końc}}$ i $\vec{v}_{2\text{końc}}$ oraz dwa kąty θ_1 i θ_2. Jeśli znamy przynajmniej cztery z tych wielkości, to pozostałe możemy wyznaczyć, rozwiązując układ trzech wspomnianych równań.

Sprawdzian 9

Przyjmij, że w sytuacji z rysunku 9.21 pęd pocisku przed zderzeniem wynosi 6 kg · m/s, a po zderzeniu ma składowe równe 4 kg · m/s wzdłuż osi x i -3 kg · m/s wzdłuż osi y. Ile wynoszą po zderzeniu składowe: a) x, b) y pędu tarczy?

9.9. UKŁAD O ZMIENNEJ MASIE: RAKIETA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał. . .

9.36 zastosować równanie wiążące ze sobą szybkość, z jaką rakieta traci masę, prędkość względną rakiety i spalin, masę rakiety i jej przyspieszenie;

9.37 zastosować równanie wiążące ze sobą zmianę prędkości rakiety, prędkość względną rakiety i spalin oraz początkową i końcową masę rakiety;

9.38 powiązać ze sobą szybkość zmiany masy układu ze zmianą jego pędu, w przypadku gdy zmienia się masa poruszającego się układu.

Podstawowe fakty

- Pod nieobecność sił zewnętrznych przyspieszenie chwilowe rakiety jest dane wzorem

$$Rv_{\text{wzgl}} = m_{\text{u}}a,$$

gdzie m_{u} jest masą chwilową rakiety (w tym pozostałego paliwa), R — szybkością, z jaką spalane jest paliwo, a v_{wzgl} — prędkością względną rakiety i spalin. Wielkość Rv_{wzgl} nazywa się siłą ciągu rakiety.

- Dla rakiety o stałych wartościach R i v_{wzgl} zmiana jej prędkości z v_{pocz} na $v_{\text{końc}}$ jest związana ze zmianą masy z $m_{\text{u pocz}}$ na $m_{\text{u końc}}$ wzorem

$$v_{\text{końc}} - v_{\text{pocz}} = v_{\text{wzgl}} \ln \frac{m_{\text{u pocz}}}{m_{\text{u końc}}}.$$

Układ o zmiennej masie: rakieta

Dotychczas zajmowaliśmy się układami, co do których zakładaliśmy, że ich całkowita masa pozostaje stała. Czasem jednak tak nie jest, na przykład dla rakiety. W chwili startu rakiety większość jej masy stanowi paliwo, które jest potem stopniowo spalane i wyrzucane przez dysze silnika pojazdu. Aby uwzględnić zmianę masy rakiety w czasie jej ruchu, zastosujemy drugą zasadę dynamiki Newtona nie dla samej rakiety, lecz dla układu, jaki stanowią łącznie rakieta i wyrzucane przez nią produkty spalania paliwa. Masa *tego* układu *nie zmienia się* w czasie lotu rakiety.

Wyznaczenie przyspieszenia

Wyobraź sobie, że znajdujesz się w spoczynku w inercjalnym układzie odniesienia i obserwujesz rakietę poruszającą się ruchem przyspieszonym w przestrzeni kosmicznej, gdzie nie działa na nią ani siła ciężkości, ani siła oporu aerodynamicznego. Ruch rakiety jest zatem prostoliniowy. Przyjmijmy, że w chwili t masa rakiety wynosi m_{u}, a jej prędkość jest wówczas równa v (patrz rys. 9.22a).

Na rysunku 9.22b przedstawiono sytuację w chwili późniejszej o dt. Rakieta ma teraz prędkość $v + dv$ oraz masę $m_u + dm_u$, przy czym zmiana masy dm_u jest *ujemna*. Produkty spalania paliwa, wyrzucone przez rakietę w przedziale czasu dt, mają masę $-dm_u$, a ich prędkość względem naszego inercjalnego układu odniesienia wynosi u.

Zachowanie pędu. Rozważmy układ złożony z rakiety i produktów spalania wyrzuconych z silnika w czasie dt. Układ ten jest zamknięty i izolowany, a zatem jego pęd musi być zachowany w przedziale czasu dt, czyli musi zachodzić związek

$$P_{\text{pocz}} = P_{\text{końc}}, \tag{9.82}$$

przy czym wskaźniki pocz i końc odnoszą się do chwil stanowiących początek i koniec przedziału dt. Równanie (9.82) możemy zapisać w postaci

$$m_u v = -dm_u u + (m_u + dm_u)(v + dv), \tag{9.83}$$

przy czym pierwszy wyraz po prawej stronie równania jest pędem spalin wyrzuconych w przedziale czasu dt, a drugi wyraz — pędem rakiety na końcu przedziału dt.

Prędkość względna. Równanie (9.83) można zapisać w prostszej postaci, przez wprowadzenie prędkości względnej rakiety i spalin v_{wzgl} związanej z prędkościami w układzie inercjalnym zależnością

$$\begin{pmatrix}\text{prędkość rakiety}\\ \text{w układzie inercjalnym}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{prędkość rakiety}\\ \text{względem spalin}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{prędkość spalin}\\ \text{w układzie inercjalnym}\end{pmatrix}.$$

Zapisując to równanie za pomocą symboli, otrzymujemy

$$(v + dv) = v_{\text{wzgl}} + u,$$

czyli

$$u = v + dv - v_{\text{wzgl}}. \tag{9.84}$$

Po podstawieniu wyrażenia na u do równania (9.83) i wykonaniu prostych przekształceń algebraicznych dostajemy

$$-dm_u v_{\text{wzgl}} = m_u dv. \tag{9.85}$$

Dzieląc obie strony równania przez dt, otrzymujemy

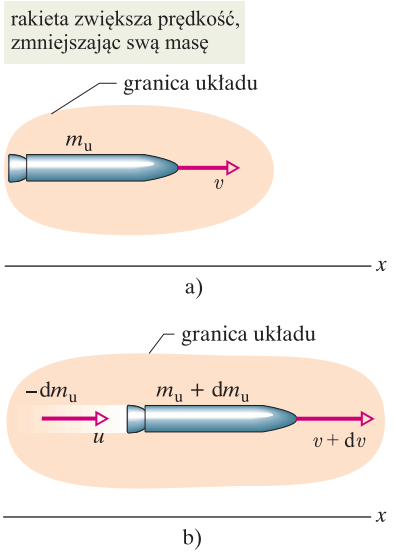
$$-\frac{dm_u}{dt} v_{\text{wzgl}} = m_u \frac{dv}{dt}. \tag{9.86}$$

Wielkość dm_u/dt (czyli szybkość, z jaką rakieta traci masę) oznaczymy przez $-R$, przy czym R jest szybkością, z jaką spalane jest paliwo (R jest wielkością dodatnią). Zauważając ponadto, że dv/dt jest to przyspieszenie rakiety, możemy zapisać równanie (9.86) w postaci

$$R v_{\text{wzgl}} = m_u a. \tag{9.87}$$

Równanie (9.87) obowiązuje w każdej chwili, przy czym masa m_u, szybkość spalania paliwa R i przyspieszenie a odnoszą się do tej samej chwili.

Lewa strona równania (9.87) ma wymiar siły ($\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$) i zależy tylko od parametrów silnika rakiety, mianowicie od szybkości zużycia pa-



Rys. 9.22. a) Rakieta poruszająca się ruchem przyspieszonym, obserwowana z inercjalnego układu odniesienia, ma w chwili t masę m_u. b) To samo, co na rysunku (a), lecz w chwili $t + dt$. Pokazano również produkty spalania paliwa, wyrzucone w przedziale czasu dt

liwa R oraz prędkości v_{wzgl}, z jaką wyrzucane są spaliny względem rakiety. Wyraz Rv_{wzgl} nazywamy **siłą ciągu** rakiety i oznaczamy symbolem T. Zapisując równanie (9.87) w postaci $T = m_u a$, rozpoznajemy w nim bez trudu drugą zasadę dynamiki Newtona, przy czym a jest przyspieszeniem rakiety w chwili, w której ma ona masę równą m_u.

Wyznaczenie prędkości

Jak zmienia się prędkość rakiety w miarę spalania przez nią paliwa? Z równania (9.85) otrzymujemy

$$dv = -v_{wzgl}\frac{dm_u}{m_u}.$$

Scałkowanie tego równania daje

$$\int_{v_{pocz}}^{v_{końc}} dv = -v_{wzgl}\int_{m_{u\,pocz}}^{m_{u\,końc}} \frac{dm_u}{m_u},$$

przy czym $m_{u\,pocz}$ jest masą początkową rakiety, a $m_{u\,końc}$ — jej masą końcową. Obliczając całki, otrzymujemy wyrażenie na wzrost prędkości rakiety w czasie, w którym jej masa zmienia się z $m_{u\,pocz}$ na $m_{u\,końc}$:

$$v_{końc} - v_{pocz} = v_{wzgl}\ln\frac{m_{u\,pocz}}{m_{u\,końc}} \qquad (9.88)$$

(symbol „ln” oznacza *logarytm naturalny*). Z równania tego widać, że korzystne jest stosowanie rakiet wielostopniowych, dla których odrzucanie kolejnych części rakiety po zużyciu zawartego w nich paliwa daje dodatkowe zmniejszenie wartości $m_{u\,końc}$. Najlepsza rakieta to taka, która w chwili osiągnięcia celu zawiera tylko swój ładunek.

Przykład 9.09. Silnik rakietowy, siła ciągu, przyspieszenie

We wszystkich poprzednich przykładach w tym rozdziale zakładaliśmy, że masa układu się nie zmienia. Teraz mamy przykład, w którym układ (rakieta) zmniejsza swą masę. Rakieta o masie początkowej $m_{u\,pocz}$ równej 850 kg zużywa paliwo z szybkością $R = 2{,}3$ kg/s. Prędkość v_{wzgl} wyrzucanych z silnika spalin względem rakiety wynosi 2800 m/s.

a) Jaką siłę ciągu ma silnik tej rakiety?

PODSTAWOWE FAKTY

Siła ciągu T jest równa iloczynowi szybkości zużycia paliwa R i prędkości względnej v_{wzgl}, z jaką spaliny opuszczają pojazd, zgodnie z równaniem (9.87).

Obliczenia: Mamy zatem

$$T = Rv_{wzgl} = (2{,}3\ \text{kg/s})(2800\ \text{m/s})$$
$$= 6440\ \text{N} \approx 6400\ \text{N} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Ile wynosi początkowe przyspieszenie rakiety?

PODSTAWOWE FAKTY

Wartość przyspieszenia a rakiety jest związana z siłą ciągu T zależnością $T = m_u a$, przy czym m_u jest masą rakiety. Trzeba jednak pamiętać, że w miarę zużywania paliwa m_u maleje, a zaś rośnie. Naszym zadaniem jest znalezienie początkowej wartości a, musimy zatem do tego wzoru podstawić wartość początkową masy rakiety $m_{u\,pocz}$.

Obliczenia:
Otrzymujemy

$$a = \frac{T}{m_{u\,pocz}} = \frac{(6440\ \text{N})}{(850\ \text{kg})} = 7{,}6\ \text{m/s}^2 \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Jeśli rakieta ma być wystrzelona w kosmos z powierzchni Ziemi, to jej przyspieszenie początkowe musi

być większe niż $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, czyli musi być większe niż przyspieszenie ziemskie na powierzchni Ziemi. Inaczej mówiąc, siła ciągu rakiety musi być większa niż działająca początkowo na rakietę siła ciężkości, której wartość $m_{\mathrm{u\,pocz}}g$ wynosi w naszym przypadku $(850\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})$ czyli 8330 N. Warunek ten nie jest spełniony (gdyż — jak stwierdziliśmy — $T = 6400$ N), a zatem nasza rakieta nie może być z powodzeniem wystrzelona w kosmos z powierzchni Ziemi; jej siła ciągu jest na to zbyt mała.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Podsumowanie

Środek masy **Środkiem masy** układu n cząstek nazywamy punkt o współrzędnych:

$$x_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{u}}}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i,$$
$$y_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{u}}}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \qquad (9.5)$$
$$z_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{u}}}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i,$$

czyli

$$\vec{r}_{\mathrm{ŚM}} = \frac{1}{m_{\mathrm{u}}}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i, \qquad (9.8)$$

przy czym m_{u} jest całkowitą masą układu.

Druga zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek Ruch środka masy dowolnego układu cząstek jest opisany przez **drugą zasadę dynamiki Newtona dla układu cząstek** w postaci

$$\vec{F}_{\mathrm{wyp}} = m_{\mathrm{u}}\vec{a}_{\mathrm{ŚM}}. \qquad (9.14)$$

W tym równaniu $\vec{F}_{\mathrm{wyp}}$ jest wypadkową wszystkich sił *zewnętrznych* działających na układ, m_{u} — całkowitą masą układu, a $\vec{a}_{\mathrm{ŚM}}$ — przyspieszeniem środka masy układu.

Pęd i druga zasada dynamiki Newtona Dla pojedynczej cząstki **pęd** $\vec{p}$ definiujemy jako

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad (9.22)$$

co pozwala zapisać drugą zasadę dynamiki jako

$$\vec{F}_{\mathrm{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \qquad (9.23)$$

Dla układu cząstek powyższe związki przybierają postać:

$$\vec{P} = m_{\mathrm{u}}\vec{v} \qquad \text{oraz} \qquad \vec{F}_{\mathrm{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}. \qquad (9.25, 9.27)$$

Zderzenie i popęd siły Z drugiej zasady dynamiki Newtona dla cząstki biorącej udział w zderzeniu, zapisanej przy użyciu jej pędu, wynika związek popędu siły ze zmianą pędu cząstki:

$$\vec{p}_{\mathrm{końc}} - \vec{p}_{\mathrm{pocz}} = \Delta\vec{p} = \vec{J}, \qquad (9.31, 9.32)$$

w którym $\vec{p}_{\mathrm{końc}} - \vec{p}_{\mathrm{pocz}} = \Delta\vec{p}$ jest zmianą pędu cząstki w czasie zderzenia, a $\vec{J}$ — **popędem siły** $\vec{F}(t)$ działającej w czasie zderzenia na tę cząstkę ze strony drugiej zderzającej się cząstki:

$$\vec{J} = \int_{t_{\mathrm{pocz}}}^{t_{\mathrm{końc}}} \vec{F}(t)\mathrm{d}t. \qquad (9.30)$$

Jeśli $F_{\mathrm{śr}}$ jest średnią wartością siły $\vec{F}(t)$, a Δt — czasem trwania zderzenia, to w przypadku jednowymiarowym

$$J = F_{\mathrm{śr}}\Delta t. \qquad (9.35)$$

Jeśli na ciało, które jest unieruchomione, pada stały strumień cząstek, z których każda ma masę m i prędkość v, to na ciało działa średnia siła

$$F_{\mathrm{śr}} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v, \qquad (9.37)$$

przy czym $n/\Delta t$ jest częstością zderzeń cząstek z ciałem unieruchomionym, a Δv — zmianą prędkości każdej cząstki przy zderzeniu. Siłę tę można również wyrazić jako

$$F_{\mathrm{śr}} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v, \qquad (9.40)$$

gdzie $\Delta m/\Delta t$ jest szybkością, z jaką masa cząstek dociera do celu. W równaniach (9.37) i (9.40) $\Delta v = -v$, jeśli przy zderzeniu cząstki zostają zatrzymane, a $\Delta v = -2v$, jeśli cząstki odbijają się od celu do tyłu bez zmiany wartości ich prędkości.

Zachowanie pędu Jeśli układ jest izolowany, tzn. wypadkowa działających na niego sił zewnętrznych jest równa zeru, to pęd układu $\vec{P}$ pozostaje stały,

$$\vec{P} = \mathrm{const} \qquad \text{(układ zamknięty i izolowany).} \qquad (9.42)$$

Stwierdzenie to można także zapisać w postaci

$$\vec{P}_{\mathrm{pocz}} = \vec{P}_{\mathrm{końc}} \qquad \text{(układ zamknięty i izolowany),} \qquad (9.43)$$

przy czym wskaźniki pocz i końc odnoszą się do wartości $\vec{P}$ w pewnej chwili przyjętej za początkową i w pewnej chwili późniejszej, którą przyjęliśmy za końcową. Równania (9.42) i (9.43) są równoważnymi sobie sformułowaniami **zasady zachowania pędu**.

Zderzenia niesprężyste w jednym wymiarze W *zderzeniach niesprężystych* dwóch ciał energia kinetyczna układu

nie jest zachowana (nie jest stała). Jeśli jednak układ jest zamknięty i izolowany, to całkowity pęd układu *musi być* zachowany (*jest* stały), co można zapisać w postaci równania wektorowego

$$\vec{p}_{1\text{pocz}} + \vec{p}_{2\text{pocz}} = \vec{p}_{1\text{końc}} + \vec{p}_{2\text{końc}}, \qquad (9.50)$$

przy czym wskaźniki pocz i końc odnoszą się do chwil tuż przed oraz tuż po zderzeniu.

Jeśli ciała poruszają się wzdłuż jednej prostej, czyli zderzenie zachodzi w jednym wymiarze, to równanie (9.50) można wyrazić za pomocą składowych prędkości ciał wzdłuż tej prostej:

$$m_1 v_{1\text{pocz}} + m_2 v_{2\text{pocz}} = m_1 v_{1\text{końc}} + m_2 v_{2\text{końc}}. \qquad (9.51)$$

Jeśli ciała stykają się ze sobą po zderzeniu, to zderzenie nazywamy *całkowicie niesprężystym*. W tym przypadku ciała poruszają się po zderzeniu z tą samą prędkością V (gdyż poruszają się razem).

Ruch środka masy Jeśli zderzające się ciała tworzą układ zamknięty i izolowany, to zderzenie nie ma wpływu na ruch środka masy tych ciał. W szczególności prędkość $\vec{v}_{\text{ŚM}}$ środka masy nie ulega zmianie w wyniku zderzenia.

Zderzenia sprężyste w jednym wymiarze *Zderzenie sprężyste* jest szczególnym rodzajem zderzenia, w którym zachowana jest całkowita energia kinetyczna układu zderzających się ciał. Wiele rodzajów zderzeń, z jakimi spotykamy się w życiu codziennym można uważać w przybliżeniu za zderzenia sprężyste. Jeśli ciała tworzą układ zamknięty i izolowany, to zachowany jest również pęd tego układu. Gdy zderzenie w jednym wymiarze polega na zderzeniu cząstki ruchomej 1 (pocisku) z nieruchomą tarczą 2, z zachowania energii kinetycznej i pędu układu wynikają następujące wyrażenia na prędkości ciał zaraz po zderzeniu:

$$v_{1\text{końc}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}} \qquad (9.67)$$

oraz

$$v_{2\text{końc}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1\text{pocz}}. \qquad (9.68)$$

Zderzenia w dwóch wymiarach Jeśli dwa ciała zderzają się, ale ich ruch nie odbywa się wzdłuż jednej prostej (tzn. zderzenie nie jest czołowe), to mamy do czynienia ze zderzeniem w dwóch wymiarach. Dla zamkniętego i izolowanego układu zderzających się ciał w zderzeniu zachowany jest całkowity pęd układu, co daje

$$\vec{p}_{1\text{pocz}} + \vec{p}_{2\text{pocz}} = \vec{p}_{1\text{końc}} + \vec{p}_{2\text{końc}}. \qquad (9.77)$$

Równanie to można zapisać w postaci dwóch równań dla składowych (po jednym dla każdego z dwóch wymiarów). W szczególnym przypadku zderzenia sprężystego zachowana musi być także energia kinetyczna układu, co daje trzecie równanie

$$E_{\text{k},1\text{pocz}} + E_{\text{k},2\text{pocz}} = E_{\text{k},1\text{końc}} + E_{\text{k},2\text{końc}}. \qquad (9.78)$$

Układy o zmiennej masie Pod nieobecność sił zewnętrznych rakieta porusza się ruchem przyspieszonym, którego przyspieszenie chwilowe jest dane równaniem

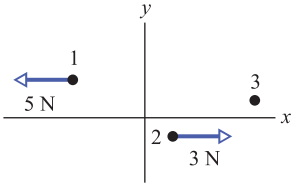
$$Rv_{\text{wzgl}} = m_{\text{u}} a, \qquad (9.87)$$

przy czym m_{u} jest chwilową masą rakiety (w tym paliwa, które nie zostało jeszcze zużyte), R — szybkością spalania paliwa, a v_{wzgl} — prędkością spalin względem rakiety. Wielkość Rv_{wzgl} nazywamy **siłą ciągu** silnika rakiety. Dla rakiety, dla której wartości R i v_{wzgl} są stałe, a jej prędkość zmienia się z v_{pocz} na $v_{\text{końc}}$, gdy jej masa zmienia się z $m_{\text{u pocz}}$ na $m_{\text{u końc}}$, otrzymujemy

$$v_{\text{końc}} - v_{\text{pocz}} = v_{\text{wzgl}} \ln \frac{m_{\text{u pocz}}}{m_{\text{u końc}}}. \qquad (9.88)$$

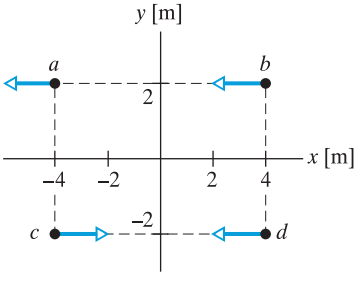
Pytania

1 Na rysunku 9.23 przedstawiono widok z góry trzech cząstek, na które działają siły zewnętrzne. Wartości i kierunki sił działających na dwie z tych cząstek pokazano na rysunku. Jaka jest wartość i kierunek siły działającej na trzecią cząstkę, jeśli środek masy układu tych trzech cząstek: a) jest nieruchomy, b) porusza się w prawo ze stałą prędkością, c) porusza się w prawo ruchem przyspieszonym?



Rys. 9.23. Pytanie 1

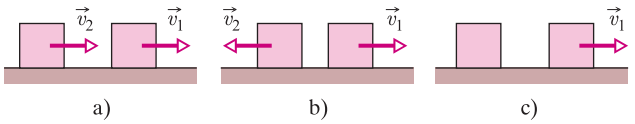
2 Na rysunku 9.24 przedstawiono widok z góry czterech cząstek o jednakowych masach ślizgających się bez tarcia po podłożu ze stałymi prędkościami. Kierunki ich prędkości pokazano na rysunku, a wartości ich prędkości są takie same. Przeanalizuj różne pary cząstek i odpowiedz,



Rys. 9.24. Pytanie 2

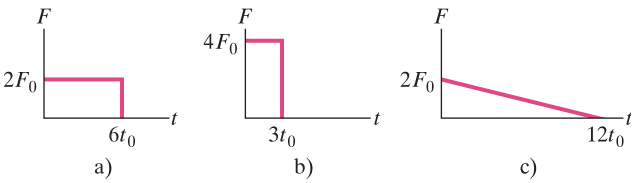
które pary tworzą taki układ, że jego środek masy: a) jest nieruchomy, b) jest nieruchomy i znajduje się w początku układu współrzędnych, c) jest ruchomy, a w czasie tego ruchu przechodzi przez początek układu współrzędnych.

3 Pudło porusza się ze stałą prędkością w dodatnim kierunku osi x. Nagle wybucha i rozpada się na dwie części. Jedna z tych części o masie m_1 ma po wybuchu prędkość v_1 dodatnią, a druga o masie m_2 — prędkość v_2: a) dodatnią (rys. 9.25a), b) ujemną (rys. 9.25b), c) równą zeru (rys. 9.25c). Uszereguj te trzy przypadki według wartości prędkości v_1, od największej do najmniejszej.



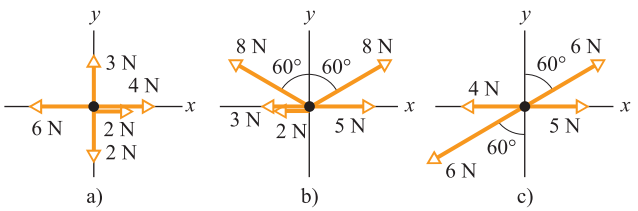
Rys. 9.25. Pytanie 3

4 Na rysunku 9.26 przedstawiono trzy wykresy zależności wartości siły od czasu dla ciała biorącego udział w zderzeniu. Uszereguj te przypadki według wartości popędu działającej na to ciało siły, od największej do najmniejszej.



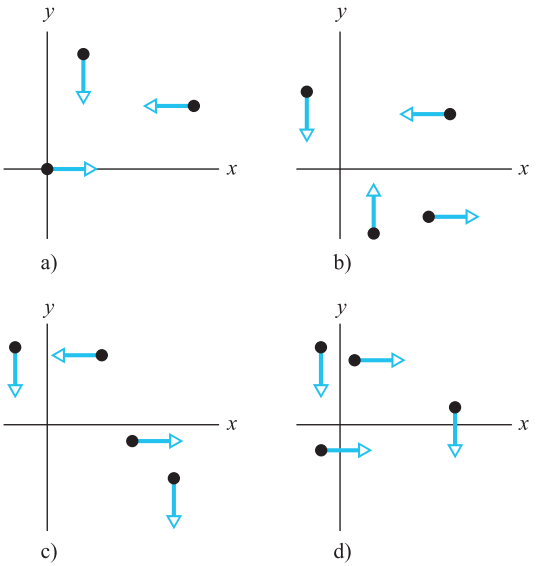
Rys. 9.26. Pytanie 4

5 Na rysunku 9.27 przedstawiono widok z góry sił działających na trzy pudełka czekoladek poruszające się bez tarcia po ladzie sklepowej. W przypadku każdego z pudełek odpowiedz, czy jego pęd jest zachowany wzdłuż osi x i wzdłuż osi y.



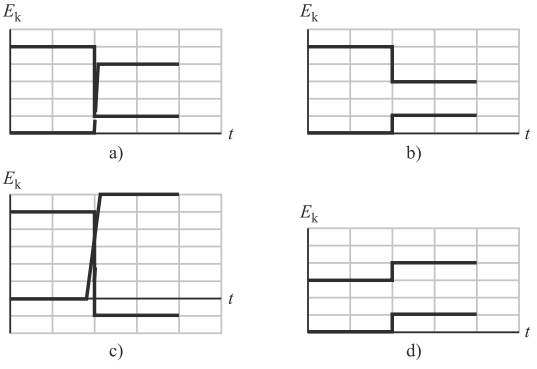
Rys. 9.27. Pytanie 5

6 Na rysunku 9.28 przedstawiono cztery grupy trzech lub czterech jednakowych cząstek poruszających się równolegle do osi x lub y z jednakowymi prędkościami. Uszereguj te grupy według wartości prędkości ich środka masy, od największej do najmniejszej.



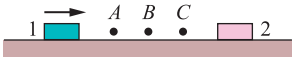
Rys. 9.28. Pytanie 6

7 Klocek ślizga się bez tarcia po podłodze i w pewnej chwili zderza się z klockiem o takiej samej masie, początkowo nieruchomym. Na rysunku 9.29 przedstawiono na wykresie zależność energii kinetycznej tych klocków jako funkcji czasu w czterech przypadkach. a) Które z wykresów przedstawiają sytuację niemożliwą ze względu na prawa fizyki? Które z pozostałych wykresów odpowiadają b) zderzeniu sprężystemu, c) zderzeniu niesprężystemu?



Rys. 9.29. Pytanie 7

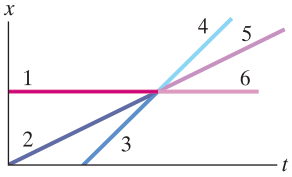
8 Na rysunku 9.30 przedstawiono położenie dwóch klocków w pewnej chwili. Klocek 1 ślizga się bez tarcia po podłodze w kierunku nieruchomego klocka 2, z którym zderza się potem sprężyście. Na rysunku przedstawiono również trzy kropki oznaczające możliwe położenia środka masy klocków w chwili, której odpowiada położenie klocków na rysunku (punkt B leży w połowie odległości klocków). Czy klocek 1 po zderzeniu nie



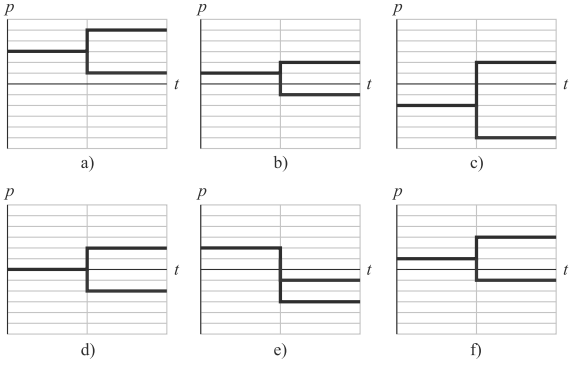
Rys. 9.30. Pytanie 8

porusza się, porusza się w prawo, czy porusza się w lewo, jeśli środek masy klocków w chwili odpowiadającej położeniu klocków na rysunku znajduje się w punkcie a) A, b) B, c) C?

9 Dwa ciała doznają zderzenia sprężystego w jednym wymiarze, wzdłuż osi x. Na rysunku 9.31 przedstawiono wykres położenia tych ciał oraz ich środka masy jako funkcji czasu. a) Czy przed zderzeniem poruszają się obydwa ciała, czy też jedno z nich jest nieruchome? Które odcinki na rysunku odpowiadają ruchowi środka masy: b) przed zderzeniem, c) po zderzeniu? d) Czy masa ciała, które porusza się przed zderzeniem szybciej, jest większa, mniejsza, czy może równa masie drugiego ciała?



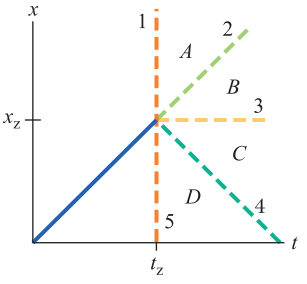
Rys. 9.31. Pytanie 9



Rys. 9.32. Pytanie 10

10 Klocek znajdujący się na poziomej podłodze był początkowo nieruchomy, ślizgał się w dodatnim kierunku osi x lub ślizgał się w ujemnym kierunku osi x. W pewnej chwili klocek rozpadł się na dwie części, ślizgające się potem wzdłuż osi x. Na rysunku 9.32 przedstawiono na wykresie zależność pędu klocka i części, na które się rozpadł, jako funkcji czasu w sześciu przypadkach. Które z tych wykresów przedstawiają sytuację niemożliwą ze względu na prawa fizyki? Uzasadnij odpowiedź.

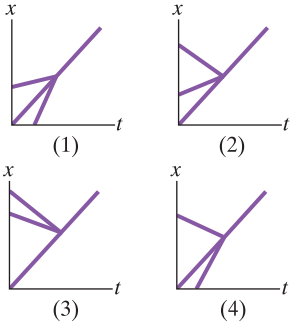
11 Klocek 1 o masie m_1 ślizga się bez tarcia wzdłuż osi x i w pewnej chwili zderza się sprężyście z nieruchomym przez zderzeniem klockiem 2 o masie m_2. Na rysunku 9.33 przedstawiono na wykresie położenie klocka 1 jako funkcję czasu przed zderzeniem, które zaszło w punkcie x_z w chwili t_z.



Rys. 9.33. Pytanie 11

W którym z oznaczonych literami obszarów będzie zawarty wykres położenia klocka 1 jako funkcji czasu po zderzeniu, jeśli a) $m_1 < m_2$, b) $m_1 > m_2$? c) Która z oznaczonych cyframi prostych będzie wykresem położenia klocka 1 jako funkcji czasu po zderzeniu, jeśli $m_1 = m_2$?

12 Na rysunku 9.34 przedstawiono cztery wykresy położenia dwóch ciał oraz ich środka masy w zależności od czasu. Ciała tworzą układ zamknięty i izolowany, w którym zachodzi całkowicie niesprężyste zderzenie w jednym wymiarze, wzdłuż osi x. Czy w sytuacji z rysunku 1: a) dwa ciała, b) ich środek masy poruszają się w dodatnim czy ujemnym kierunku osi x? c) Które wykresy odpowiadają sytuacji niemożliwej z fizycznego punktu widzenia? Uzasadnij odpowiedź.



Rys. 9.34. Pytanie 12

Zadania

GO Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

●–●●● Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

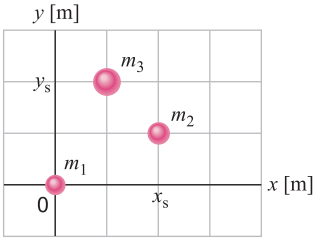
ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

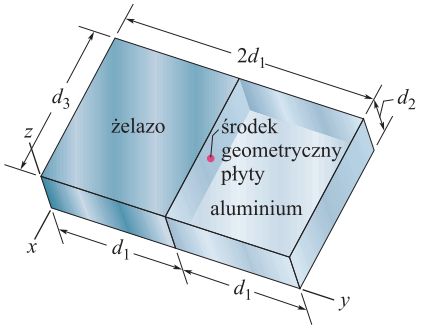
Podrozdział 9.1. Środek masy

•1 Na poziomej płaszczyźnie znajdują się dwie cząstki. Cząstka o masie 2 kg znajduje się w punkcie o współrzędnych x, y równych (−1,2 m, 0,5 m), a cząstka o masie 4 kg — w punkcie o współrzędnych (0,6 m, −0,75 m). Wyznacz a) współrzędną x i b) współrzędną y punktu, w którym należy umieścić cząstkę o masie 3 kg, aby środek masy układu tych trzech cząstek znajdował się w punkcie o współrzędnych x, y równych (−0,5 m, −0,7 m).

•2 Znajdź: a) współrzędną x, b) współrzędną y środka masy układu trzech cząstek, przedstawionego na rysunku 9.35. Masy cząstek wynoszą: $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 4$ kg i $m_3 = 8$ kg, a jednostki na osiach wykresu są wyznaczone przez współrzędne punktów $x_s = 2$ m i $y_s = 2$ m. c) Czy środek masy tego układu będzie się zbliżał do cząstki o masie m_3, czy też od niej oddalał, gdy masa tej cząstki będzie się stopniowo zwiększać?



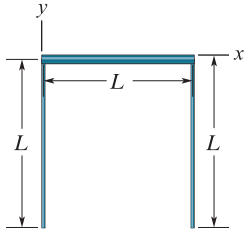
Rys. 9.35. Zadanie 2



Rys. 9.36. Zadanie 3

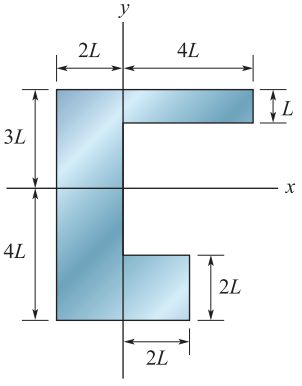
••3 Rysunek 9.36 przedstawia płytę złożoną z dwóch materiałów — jedna jej połowa jest z aluminium (o gęstości 2,7 g/cm^3), a druga z żelaza (o gęstości 7,85 g/cm^3). Wymiary płyty są równe: $d_1 = 11$ cm, $d_2 = 2{,}8$ cm i $d_3 = 13$ cm. Wyznacz: a) współrzędną x, b) współrzędną y i c) współrzędną z środka masy tej płyty.

••4 Trzy cienkie, jednorodne pręty, każdy o długości $L = 22$ cm ustawiono tak, że tworzą odwróconą literę U, jak pokazano na rysunku 9.37. Pręty ustawione pionowo mają każdy masę 14 g, a pręt poziomy ma masę 42 g. Wyznacz: a) współrzędną x, b) współrzędną y środka masy tego układu prętów.



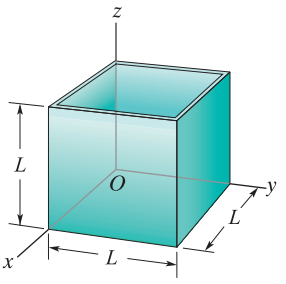
Rys. 9.37. Zadanie 4

••5 GO Wyznacz: a) współrzędną x, b) współrzędną y środka masy przedstawionej na rysunku 9.38 płyty o stałej gęstości, jeśli $L = 5$ cm.



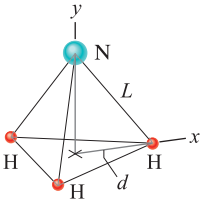
Rys. 9.38. Zadanie 5

••6 Na rysunku 9.39 przedstawiono pudełko w kształcie sześcianu zbudowane z płyty metalowej o stałej gęstości i znikomo małej grubości. Pudełko nie ma ściany górnej, a jego krawędź ma długość $L = 40$ cm. Wyznacz: a) współrzędną x, b) współrzędną y, c) współrzędną z środka masy tego pudełka.



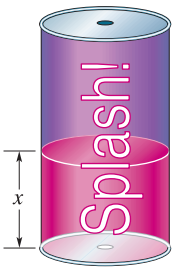
Rys. 9.39. Zadanie 6

•••7 W cząsteczce amoniaku NH_3 (rys. 9.40) trzy atomy wodoru (H) znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego, w odległości $d = 9{,}4 \cdot 10^{-11}$ m od środka tego trójkąta. Atom azotu (N) znajduje się w wierzchołku ostrosłupa prawidłowego, którego podstawą jest trójkąt utworzony przez atomy wodoru. Stosunek mas atomów azotu i wodoru wynosi 13,9, a odległość atomu azotu od każdego z atomów wodoru jest równa $L = 10{,}14 \cdot 10^{-11}$ m. Wyznacz: a) współrzędną x, b) współrzędną y środka masy tej cząsteczki.



Rys. 9.40. Zadanie 7

•••8 GO Walcowa puszka do napojów o masie 0,14 kg, wysokości 12 cm i stałej gęstości jest początkowo wypełniona napojem gazowanym o masie 0,354 kg (rys. 9.41). Następnie robimy niewielkie otwory w środku obydwu podstaw walca (zakładamy, że masa puszki nie zmienia się przy tym), aby opróżnić puszkę z napoju. Oznaczmy przez h wysokość środka masy puszki i zawartego w niej napoju. Ile wynosi h: a) przed wypuszczeniem napoju z puszki, b) po całkowitym jej opróżnieniu? c) Jak zmienia się wartość h w czasie wypływania napoju z puszki? d) Oznacz przez x wysokość słupa napoju w puszce w określonej chwili i wyznacz wartość x w chwili, gdy środek masy puszki i zawartego w niej napoju znajduje się najniżej.



Rys. 9.41. Zadanie 8

Podrozdział 9.2. Druga zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek

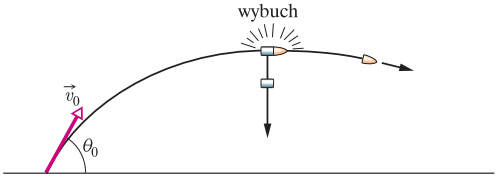
•9 ilw Jeden kamień upuszczono swobodnie w chwili $t = 0$, a drugi, o masie dwa razy większej niż pierwszy, upuszczono swobodnie z tego samego punktu w chwili $t = 100$ ms. a) W jakiej odległości od punktu wypuszczenia kamieni znaj-

duje się środek ich masy w chwili $t = 300$ ms (przyjmij, że żaden z kamieni nie spadł jeszcze na ziemię)? b) Ile wynosi prędkość ruchu środka masy kamieni w tej chwili?

•10 GO Samochód osobowy o masie 1000 kg stoi przed skrzyżowaniem, czekając na zmianę świateł. W chwili, gdy zapala się zielone światło, samochód rusza ze stałym przyspieszeniem, równym 4 m/s^2. W tej samej chwili wyprzedza go ciężarówka o masie 2000 kg, jadąca ze stałą prędkością o wartości 8 m/s. a) Jak daleko od sygnalizatora znajdzie się środek masy układu samochód–ciężarówka w chwili $t = 3$ s (przyjmij, że samochód rusza w chwili $t = 0$)? b) Z jaką prędkością porusza się w tej chwili środek masy samochodu i ciężarówki?

•11 Gigantyczna oliwka (o masie $m_1 = 0{,}5$ kg) znajduje się w początku układu współrzędnych, a gigantyczny orzech brazylijski (o masie $m_2 = 1{,}5$ kg) — w punkcie o współrzędnych $(1, 2)$ m na płaszczyźnie xy. W chwili $t = 0$ na oliwkę zaczyna działać siła $\vec{F}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j})$ N, a na orzech siła $\vec{F}_2 = (-3\hat{i} - 2\hat{j})$ N. Wyznacz przemieszczenie środka masy układu oliwka–orzech od chwili $t = 0$ do chwili $t = 4$ s i zapisz je za pomocą wektorów jednostkowych.

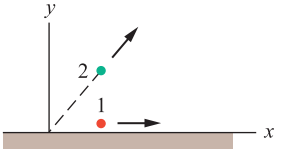
•12 Dwie łyżwiarki, jedna o masie 65 kg i druga o masie 40 kg stoją na lodowisku, trzymając za końce tyczkę o długości 10 m i znikomo małej masie. W pewnej chwili zaczynają ciągnąć tyczkę, chwytając ją coraz dalej i w ten sposób zbliżają się do siebie aż do chwili, gdy się spotkają. O ile przemieszcza się przy tym łyżwiarka o masie 40 kg?



Rys. 9.42. Zadanie 13

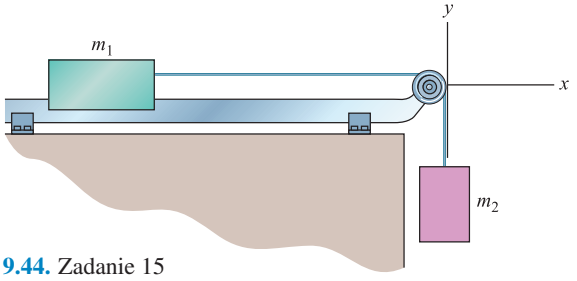
••13 ssm Granat zostaje wystrzelony z prędkością początkową $\vec{v}_0$ o wartości 20 m/s, pod kątem $\theta_0 = 60°$ do poziomu. W najwyższym punkcie toru granat wybucha i rozpada się na dwie części o jednakowych masach (rys. 9.42). Jedna z tych części, która ma tuż po wybuchu prędkość równą zeru, spada pionowo na ziemię. Jak daleko od wyrzutni spadnie na ziemię druga część granatu, jeśli teren jest płaski, a opór powietrza można pominąć?

••14 Na rysunku 9.43 przedstawiono dwie cząstki wprawione w ruch w początku układu współrzędnych w chwili $t = 0$. Cząstka 1 o masie $m_1 = 5$ g porusza się bez tarcia wzdłuż osi x ze stałą prędkością 10 m/s. Cząstce 2 o masie $m_2 = 3$ g nadano w chwili początkowej prędkość o wartości 20 m/s i kierunku takim, że w każdej chwili znajduje się ona pionowo nad cząstką 1. a) Wyznacz największą wysokość H_{max} środka masy tych cząstek podczas ich ruchu. Podaj w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych b) prędkość i c) przyspieszenie środka masy cząstek, gdy osiągnie on wysokość H_{max}.



Rys. 9.43. Zadanie 14

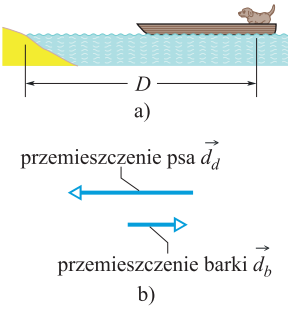
••15 Na rysunku 9.44 przedstawiono wózek na torze powietrznym połączony linką z zawieszonym na niej klockiem. Masa wózka wynosi $m_1 = 0{,}6$ kg, a jego środek znajduje się początkowo w punkcie o współrzędnych x, y równych $(-0{,}5$ m, $0)$. Masa klocka wynosi $m_2 = 0{,}4$ kg, a jego środek znajduje się początkowo w punkcie $(0, -0{,}1$ m). Masy linki i bloczka można pominąć. Wózek jest początkowo nieruchomy, a pewnej chwili zostaje puszczony swobodnie. Wózek i klocek poruszają się następnie aż do chwili, w której wózek uderzy w bloczek. Tarcie wózka na torze powietrznym i tarcie bloczka na jego osi można pominąć. a) Wyznacz przyspieszenie środka masy układu wózek–klocek. b) Wyznacz prędkość środka masy tego układu jako funkcję czasu t. Wyraź odpowiedzi z punktów (a) i (b) w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych. c) Naszkicuj tor środka masy. d) Jeśli ten tor jest zakrzywiony, powiedz, czy zakrzywia się on ku górze, czy ku dołowi, a jeśli jest prosty, podaj kąt, jaki tworzy z osią x.



Rys. 9.44. Zadanie 15

•••16 GO Ricardo o masie 80 kg i Carmelita, która jest od niego lżejsza, podziwiają o zmierzchu jezioro Merced z łódki o masie 30 kg. W chwili, gdy łódka jest nieruchoma na spokojnej wodzie, zamieniają się oni miejscami. Ich siedzenia są położone symetrycznie względem środka łódki i odległe od siebie o 3 m. Łódka przesuwa się przy tym o 40 cm względem słupka pomostu. Ile wynosi masa Carmelity?

•••17 GO Jak pokazano na rysunku 9.45a, pies o masie 4,5 kg stoi na barce o masie 18 kg, znajdując się w odległości $D = 6{,}1$ m od brzegu. Następnie pies przechodzi 2,4 m po barce w kierunku brzegu, po czym się zatrzymuje. Załóż, że między barką a wodą nie występuje tarcie i oblicz, jak daleko od brzegu znajduje się pies, kończąc spacer. *Wskazówka*: Spójrz na rysunek 9.45b.



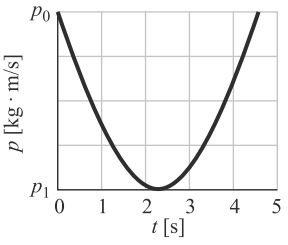
Rys. 9.45. Zadanie 17

Podrozdział 9.3. Pęd

•18 Piłka o masie 0,7 kg porusza się poziomo z prędkością 5 m/s i uderza w pionową ścianę. Prędkość piłki po odbiciu od ściany ma wartość 2 m/s. Jaka jest wartość zmiany pędu piłki przy opisanym odbiciu?

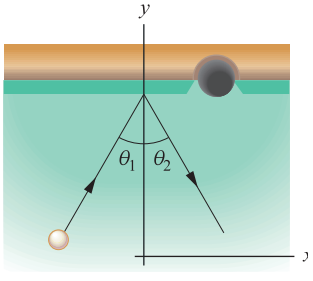
•19 ilw Ciężarówka o masie 2100 kg, jadąca na północ z prędkością 41 km/h, skręca w pewnej chwili na wschód i przyspiesza do prędkości 51 km/h. a) Ile wynosi zmiana energii kinetycznej ciężarówki przy tym manewrze? Jakie są przy tym: b) wartość, c) kierunek zmiany pędu ciężarówki?

••20 GO W chwili $t = 0$ piłka odbija się od ziemi i zaczyna się poruszać ku górze. Na rysunku 9.46 przedstawiono zależność jej pędu p od czasu t, przy czym $p_0 = 6\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$, a $p_1 = 4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$. Pod jakim kątem odbiła się piłka od ziemi? *Wskazówka*: Znajdź taki sposób rozwiązania tego zadania, który nie wymaga odczytu z wykresu czasu odpowiadającego najmniejszej wartości pędu piłki.



Rys. 9.46. Zadanie 20

••21 Piłka, której masa wynosi 0,3 kg, a prędkość ma wartość 15 m/s i jest skierowana pod kątem 35° w dół od poziomu, zderza się z kijem odbijającego ją gracza. Wyznacz wartość zmiany pędu piłki w wyniku jej odbicia, gdy po odbiciu jej prędkość: a) ma wartość 20 m/s i jest skierowana pionowo w dół, b) ma wartość 20 m/s w kierunku gracza, który ją rzucił w stronę odbijającego.



Rys. 9.47. Zadanie 22

••22 Bila odbija się od bandy stołu bilardowego, jak pokazano na rysunku 9.47, na którym przedstawiono widok stołu z góry. Bila ma masę 0,165 kg, a jej prędkość początkowa ma wartość 2 m/s, jest skierowana poziomo i tworzy z osią y kąt $\theta_1 = 30°$. Składowa y prędkości bili zmienia się przy odbiciu na przeciwną, a jej składowa x nie ulega zmianie. a) Ile wynosi kąt θ_2 na rysunku 9.47? b) Ile wynosi zmiana pędu bili zapisana za pomocą wektorów jednostkowych? Fakt, że bila toczy się po stole nie ma wpływu na odpowiedź na żadne z tych pytań.

Podrozdział 9.4. Zderzenie i popęd siły

•23 Aż do osiągnięcia wieku 70 lat Henri LaMothe zachwycał publiczność cyrkową skokami na brzuch z wysokości 12 m do zbiornika z wodą o głębokości 30 cm (rys. 9.48). Załóż, że prędkość skoczka malała do zera w chwili jego dotarcia do dna naczynia z wodą, przyjmij prawdopodobną wartość jego masy i wyznacz średni popęd siły działającej na skoczka ze strony wody.



Rys. 9.48. Zadanie 23. Skok na brzuch do zbiornika z wodą o głębokości 30 cm (fot. George Long/Getty Images, Inc.)

•24 W lutym 1955 roku spadochroniarz, który wyskoczył z samolotu na wysokości 370 m nad ziemią nie zdołał otworzyć spadochronu, lecz szczęśliwie wylądował na śniegu, dzięki czemu doznał tylko nieznacznych obrażeń. Załóż, że jego prędkość w chwili upadku wynosiła 56 m/s (była to jego prędkość graniczna), masa skoczka (wraz z kombinezonem i spadochronem) była równa 85 kg, a wartość działającej na niego siły była równa $1{,}2 \cdot 10^5$ N, co jest największą siłą, niepowodującą jeszcze obrażeń śmiertelnych. Wyznacz: a) minimalną grubość warstwy śniegu, która umożliwia skoczkowi przeżycie lądowania, b) wartość popędu siły, działającej na skoczka ze strony śniegu.

•25 Kula o masie 1,2 kg spada pionowo na podłoże i ma w chwili zetknięcia z podłożem prędkość 25 m/s. Prędkość kuli tuż po odbiciu ma wartość 10 m/s. a) Ile wynosi popęd siły działającej na kulę w czasie jej zetknięcia z podłożem? b) Ile wynosi średnia wartość siły działającej na podłoże ze strony kuli, jeśli czas zetknięcia się kuli z podłożem wynosi 0,02 s?

•26 Często spotykany, choć niebezpieczny żart towarzyski polega na wyciągnięciu krzesła spod siadającej na nim osoby,

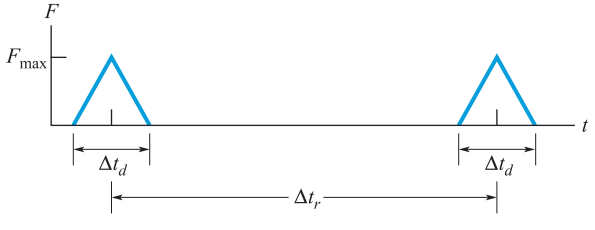
co powoduje, że osoba ląduje z hukiem na podłodze. Przyjmij, że osoba ma masę 70 kg, spada z wysokości 0,5 m, a jej zderzenie z podłogą trwa 0,082 s. Oblicz wartość a) popędu siły i b) średniej siły, jaka działa podczas zderzenia na człowieka ze strony podłogi.

•27 ssm Kula o masie 0,4 kg porusza się początkowo z prędkością 14 m/s w dodatnim kierunku osi x. W pewnej chwili zaczyna na nią działać przez 27 ms siła o ujemnym kierunku osi x. Siła nie ma stałej wartości, a jej popęd ma wartość 32,4 N · m. Wyznacz a) wartość prędkości i b) kierunek ruchu tej kuli w chwili, w której ta siłą już na nią nie działa. Wyznacz c) średnią wartość siły i d) kierunek popędu siły działającej na kulę.

•28 Zawodnik taekwondo uderza pionowo pięścią w cel z prędkością 13 m/s. Pięść zatrzymuje się po 5 ms. Przyjmij, że zderzająca się z celem pięść ma masę 0,7 kg i oblicz a) popęd siły oraz b) wartość średnią siły działającej na pięść zawodnika ze strony celu podczas ich zderzenia.

•29 Gangster ostrzeliwuje Supermana z pistoletu automatycznego, który wystrzeliwuje pociski o masie 3 g i prędkości 500 m/s, z częstością 100 kul na minutę. Przyjmij, że wszystkie pociski odbijają się od piersi Supermana dokładnie w kierunku ich padania, a wartość bezwzględna ich prędkości nie ulega przy tym zmianie. Jaka jest wartość średniej siły działającej na pierś Supermana ze strony strumienia kul?

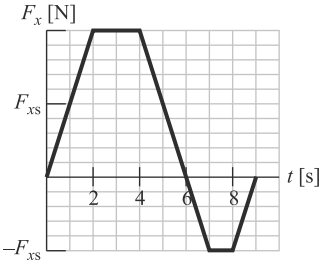
••30 *Dwie średnie siły*. Stały strumień kul śniegowych, o masie 0,25 kg i prędkości 4 m/s każda, pada prostopadle na ścianę, do której kule się przylepiają. Na rysunku 9.49 przedstawiono zależność wielkości F siły działającej na ścianę od czasu t. Na rysunku widać dwa kolejne zderzenia kul śnieżnych ze ścianą. Czas zderzenia wynosi $\Delta t_d = 10$ ms, zderzenia zachodzą co $\Delta t_r = 50$ ms, a maksymalna wartość siły wynosi podczas zderzenia $F_{\max} = 200$ N. Przyjmij, że zależność siły od czasu podczas zderzenia kuli ze ścianą można przybliżyć ramionami trójkąta równoramiennego. Wyznacz wartość a) popędu siły i b) siły średniej działającej na ścianę podczas każdego zderzenia. Wyznacz c) wartość średnią siły działającej na ścianę w przedziale czasu obejmującym wiele zderzeń.



Rys. 9.49. Zadanie 30

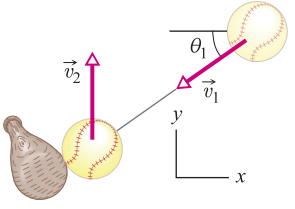
••31 *Podskocz przed upadkiem windy*. Lina się zrywa, zabezpieczenia nie działają i winda spada swobodnie z wysokości 36 m. Podczas zderzenia z dnem szybu windy pasażer o masie 90 kg zostaje zatrzymany w czasie 5 ms (zakładamy, że ani winda, ani pasażer nie odbijają się od dna). Wyznacz wartość a) popędu siły i b) siły średniej działającej na pasażera windy podczas tego zderzenia. Przyjmij, że pasażer podskoczył w windzie, osiągając prędkość 7 m/s względem podłogi windy, tuż przed zderzeniem windy z dnem szybu. Wyznacz w tej sytuacji wartość c) popędu siły i d) siły średniej działającej na pasażera przy założeniu, że czas zatrzymania pasażera się nie zmienił.

••32 Samochodzik zabawka o masie 5 kg może się poruszać wzdłuż osi x. Na rysunku 9.50 przedstawiono zależność wielkości F_x siły działającej na samochodzik od czasu t. Siła ta zaczyna działać w chwili $t = 0$, a jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktu $F_{xs} = 5$ N. Wyznacz pęd samochodzika $\vec{p}$ w chwili a) $t = 4$ s i b) $t = 7$ s oraz c) jego prędkość $\vec{v}$ w chwili $t = 9$ s, zapisując je za pomocą wektorów jednostkowych.



Rys. 9.50. Zadanie 32

••33 Piłka o masie 0,3 kg ma tuż przed odbiciem jej za pomocą kija prędkość $\vec{v}_1$ o wartości 12 m/s i porusza się w dół pod kątem $\theta_1 = 35°$ do poziomu. Piłka styka się z kijem przez 2 ms, po czym porusza się pionowo w górę i w chwili utraty kontaktu z kijem ma prędkość $\vec{v}_2$ o wartości 10 m/s, jak pokazano na rysunku 9.51. Wyznacz a) wartość i b) kierunek (względem dodatniego kierunku osi x) popędu siły działającej na piłkę ze strony kija oraz c) wartość i d) kierunek siły średniej działającej na piłkę ze strony kija.



Rys. 9.51. Zadanie 33

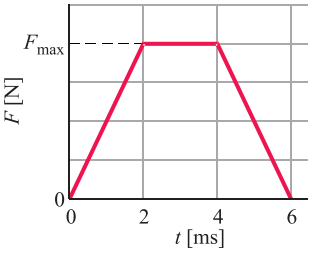
••34 Małe jaszczurki zwane bazyliszkami potrafią biegać po powierzchni wody. W każdym kroku jaszczurka najpierw uderza stopą w wodę, a następnie wciska ją w wodę tak szybko, że nad stopą tworzy się pęcherz powietrza. Aby nie pokonywać siły oporu cieczy przy wyciąganiu stopy z wody, jaszczurka podnosi stopę, zanim woda wyprze znad niej powietrze. Aby jaszczurka nie wpadła do wody, w czasie pełnej fazy kontaktu jej stopy z wodą (złożonej z uderzenia w powierzchnię wody, pchnięcia stopy w dół i wysunięcia stopy z wody) średni popęd siły, działającej na jaszczurkę w górę, musi równoważyć popęd pochodzący od siły ciężkości. Załóż, że masa jaszczurki wynosi 90 g, masa każdej jej stopy jest równa 3 g, prędkość stopy w chwili uderzenia nią w wodę wynosi 1,5 m/s, a cała faza kontaktu stopy z wodą trwa 0,6 s.

a) Jaka jest wartość popędu siły działającej na jaszczurkę w czasie każdego jej kroku (załóż, że jest on skierowany pionowo w górę)? b) Ile wynosi w czasie każdej (trwającej 0,6 s) fazy kontaktu stopy jaszczurki z wodą skierowany w dół popęd siły, związany z siłą ciężkości? c) Która faza kroku jaszczurki, uderzenie stopą w wodę, czy pchnięcie stopy pod wodę, jest głównym czynnikiem, umożliwiającym jaszczurce utrzymanie się na powierzchni wody? A może znaczenie obydwu tych czynności jest mniej więcej jednakowe?



Rys. 9.52. Zadanie 34. Jaszczurka biegnąca po powierzchni wody (fot. Stephen Dalton/Photo Researchers, Inc.)

••35 GO Na rysunku 9.53 przedstawiono schematyczny wykres zależności wartości F siły od czasu, odnoszący się do zderzenia bardzo sprężystej kuli o masie 58 g ze ścianą. Początkowa prędkość kuli wynosi 34 m/s i jest prostopadła do ściany. Po odbiciu kula porusza się w kierunku przeciwnym do kierunku padania, czyli znów prostopadłym do ściany i ma prędkość, o wartości w przybliżeniu takiej samej, jak przed zderzeniem. Wyznacz maksymalną wartość siły F_{max}, działającej na kulę ze strony ściany w czasie zderzenia.



Rys. 9.53. Zadanie 35

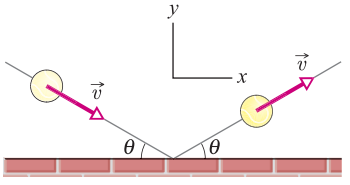
••36 Krążek o masie 0,25 kg spoczywa początkowo na powierzchni lodu o znikomo małym tarciu. W chwili $t = 0$ na krążek zaczyna działać poziomo siła $\vec{F} = (12 - 3t^2)\hat{i}$, gdzie $\vec{F}$ wyrażono w niutonach, a t w sekundach. Siła ta działa do chwili, w której jej wartość spadnie do zera. a) Wyznacz wartość popędu siły działającej na krążek od chwili $t = 0{,}5$ s do chwili $t = 1{,}25$ s. b) Wyznacz zmianę pędu krążka od chwili $t = 0$ do chwili, w której $F = 0$.

••37 ssm Piłkarz wybija z rzutu wolnego piłkę o masie 0,45 kg. But piłkarza styka się z piłką przez $3 \cdot 10^{-3}$ s, działając na nią w tym czasie siłą daną wyrażeniem

$$F(t) = [(6 \cdot 10^6)t - (2 \cdot 10^9)t^2]\ \text{N},$$

gdzie czas t z przedziału $0 \leqslant t \leqslant 3 \cdot 10^{-3}$ s jest wyrażony w sekundach. Wyznacz wartości: a) popędu siły działającej na piłkę w czasie wykopu, b) średniej siły działającej na piłkę ze strony buta piłkarza w czasie ich stykania się ze sobą, c) maksymalnej siły działającej na piłkę ze strony buta piłkarza w czasie ich stykania się ze sobą, d) prędkości piłki zaraz po oderwaniu się jej od buta piłkarza.

••38 Piłka o masie 300 g i prędkości 6 m/s pada na ścianę pod kątem θ równym 30°. Po odbiciu ma ona prędkość o takiej samej wartości, a jej tor tworzy ze ścianą taki sam kąt (patrz widok z góry na rysunku 9.54). W czasie odbicia piłka styka się ze ścianą przez 10 ms. a) Ile wynosi popęd siły działającej na piłkę ze strony ściany? b) Jaką średnią siłą działała piłka na ścianę? Podaj odpowiedzi w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.



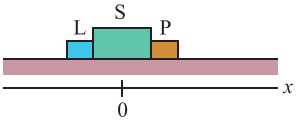
Rys. 9.54. Zadanie 38

Podrozdział 9.5. Zachowanie pędu

•39 ssm Leżący na podłodze człowiek o masie 91 kg rzuca w bok po podłodze kamień o masie 68 g, nadając mu prędkość o wartości 4 m/s. Z jaką prędkością zaczyna się wówczas sam ślizgać po podłodze, jeśli zarówno on, jak i kamień poruszają się po podłodze bez tarcia?

•40 Pojazd kosmiczny porusza się z prędkością 4300 km/h względem Ziemi, gdy zużyty człon napędowy zostaje odłączony od kabiny statku i odrzucony w tył z prędkością 82 km/h względem kabiny. Masa członu jest czterokrotnie większa od masy kabiny. Ile wynosi prędkość kabiny względem Ziemi tuż po odłączeniu od niej członu napędowego?

••41 Na rysunku 9.55 przedstawiono dwustronną „rakietę", która jest początkowo w spoczynku na pozbawionej tarcia podłodze, a jej środek znajduje się w początku osi x. Rakieta składa się z klocka środkowego S (o masie $M = 6$ kg) oraz stykających się z nim z lewej i prawej strony klocków L i P (o masie $m = 2$ kg każdy). Niewielkie wybuchy umożliwiają odrzucenie małych klocków od środkowego i wprawienie ich w ruch wzdłuż osi x. A oto kolejność zdarzeń: 1) W chwili $t = 0$ klocek L zostaje wyrzucony w lewo z prędkością 3 m/s *względem* klocków S i P, także poruszających się po wybuchu. 2) Następnie w chwili $t = 0{,}8$ s klocek P zostaje wyrzucony w prawo z prędkością 3 m/s *względem* klocka S. Wyznacz a) prędkość klocka S i b) położenie jego środka, w chwili $t = 2{,}8$ s.



Rys. 9.55. Zadanie 41

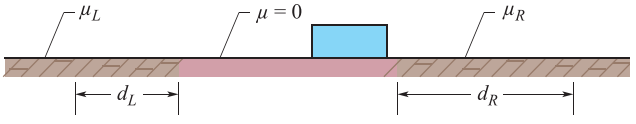
••42 Ciało o masie m i prędkości v względem pewnego obserwatora rozpada się na dwie części, z których jedna ma masę trzy razy większą od drugiej. Wybuch następuje w przestrzeni kosmicznej. Cząstka o mniejszej masie zatrzymuje się w układzie obserwatora. Ile wynosi energia przekazana układowi w trakcie wybuchu, mierzona w układzie odniesienia obserwatora?

••43 Na igrzyskach olimpijskich w roku 708 p.n.e. niektórzy zawodnicy startujący w konkursie skoku w dal z miejsca stosowali do zwiększenia długości swego skoku trzymane w rękach ciężarki o nazwie *halteres* (patrz rysunek 9.56). Zawodnik przemieszczał ciężarki do przodu tuż przed odbiciem, a podczas lotu przemieszczał je do tyłu i odrzucał. Przyjmijmy, że współczesny skoczek o masie 78 kg stosuje tę technikę, odrzucając poziomo w tył dwa ciężarki o masie 5,5 kg każdy w najwyższym punkcie swego lotu tak, że ich pozioma prędkość wynosi zero względem ziemi. Załóż, że prędkość skoczka tuż po odbiciu wynosi $\vec{v} = (9{,}5\hat{\mathrm{i}}+4\hat{\mathrm{j}})$ m/s (z ciężarkami lub bez) oraz że skoczek ląduje na wysokości belki, z której się odbija, i oblicz, o ile dłuższy jest skok z ciężarkami niż bez nich.



Rys. 9.56. Zadanie 43 (dzięki uprzejmości Réunion des Musées Nationaux/Art Resource)

••44 GO Klocek pokazany na rysunku 9.57 jest początkowo w spoczynku, a potem rozpada się na dwie części L i R, które poruszają się najpierw bez tarcia, a następnie docierają do obszarów, w których tarcie działa, i tam się zatrzymują. Część L o masie 2 kg dociera do obszaru o współczynniku tarcia kinetycznego $\mu_L = 0{,}4$ i zatrzymuje po przebyciu w tym obszarze drogi $d_L = 0{,}15$ m, a część R dociera do obszaru o współczynniku tarcia kinetycznego $\mu_R = 0{,}5$ i zatrzymuje po przebyciu w tym obszarze drogi $d_L = 0{,}25$ m. Wyznacz masę klocka.



Rys. 9.57. Zadanie 44

••45 ssm www Ciało o masie 20 kg porusza się w dodatnim kierunku osi x z prędkością 200 m/s, gdy w wyniku wybuchu w jego wnętrzu rozpada się ono na trzy części. Jedna z tych części o masie 10 kg porusza się po wybuchu z prędkością 100 m/s w dodatnim kierunku osi y, a druga, o masie 4 kg porusza się w ujemnym kierunku osi x z prędkością 500 m/s. a) Ile wynosi prędkość trzeciej części (w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych)? b) Ile wynosi energia uwolniona w czasie wybuchu? Pomiń zjawiska związane z działaniem siły ciężkości.

••46 Kocher o masie 4 kg ślizga się bez tarcia po podłodze. W pewnej chwili rozpada się on na dwie części o masach 2 kg, z których jedna porusza się na północ z prędkością 3 m/s, a druga — pod kątem 30° na północ względem kierunku wschodniego, z prędkością 5 m/s. Ile wynosiła prędkość kochera przed jego rozpadem?

••47 Naczynie pozostaje początkowo w spoczynku w początku układu współrzędnych x, y. W pewnej chwili naczynie wybucha i rozpada się na trzy części. Jedna z nich, o masie m, ma po wybuchu prędkość $(-30\text{ m/s})\hat{\mathrm{i}}$, druga, również o masie m, ma po wybuchu prędkość $(-30\text{ m/s})\hat{\mathrm{j}}$. Trzecia część ma masę $3m$. Wyznacz a) wartość i b) kierunek prędkości trzeciej części.

•••48 GO Cząstki A i B znajdują się na końcach ściśniętej sprężyny. Gdy sprężyna zostaje zwolniona, odpycha ona te cząstki od siebie, w wyniku czego rozbiegają się one w przeciwnych kierunkach, przy czym żadna z nich nie styka się ze sprężyną. Masa cząstki A jest 2 razy większa od masy cząstki B, a energia ściśniętej sprężyny jest równa 60 J. Przyjmij, że masa sprężyny jest znikomo mała i że cała jej energia zostaje przekazana cząstkom. Wyznacz energię kinetyczną: a) cząstki A, b) cząstki B po ich oddzieleniu się od sprężyny.

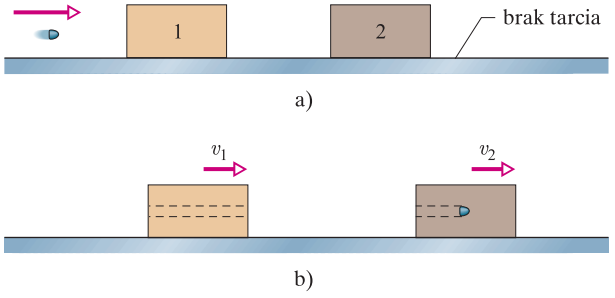
Podrozdział 9.6. Pęd i energia kinetyczna w zderzeniach

•49 Pocisk o masie 10 g uderza w wahadło balistyczne o masie 2 kg i grzęźnie w nim, w wyniku czego środek masy wahadła wznosi się w pionie o 12 cm. Oblicz wartość prędkości początkowej pocisku.

•50 Pocisk o masie 5,2 g poruszający się z prędkością 672 m/s uderza w drewniany klocek o masie 700 g spoczywający na podłożu, po którym może się poruszać bez tarcia. Pocisk przebija klocek i po wyjściu z niego porusza się w tym samym kierunku, lecz z prędkością zmniejszoną do wartości 428 m/s. a) Jaka prędkość została przy tym nadana klockowi? b) Z jaką prędkością porusza się środek masy układu pocisk–klocek?

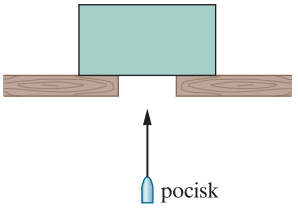
••51 GO Jak pokazano na rysunku 9.58a, poruszający się poziomo pocisk uderza w klocek 1 (o masie 1,2 kg), przebija go, uderza w klocek 2 (o masie 1,8 kg) i grzęźnie w nim. Klocki pozostawały początkowo w spoczynku, a po zderzeniach mają prędkości $v_1 = 0{,}63$ m/s i $v_2 = 1{,}4$ m/s (rys. 9.58b) i ślizgają się po podłożu bez tarcia. Pomiń masę materiału wybitego

przez pocisk z pierwszego klocka i wyznacz: a) prędkość pocisku tuż po wyjściu z pierwszego klocka, b) prędkość początkową pocisku.



Rys. 9.58. Zadanie 51

••52 GO Pocisk o masie 10 g poruszający się pionowo do góry z prędkością 1000 m/s uderza w spoczywający początkowo klocek o masie 5 kg, przebija go i po wyjściu z niego porusza się nadal pionowo do góry, lecz teraz z prędkością 400 m/s (rys. 9.59). Oblicz maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się klocek, licząc od jego położenia początkowego?



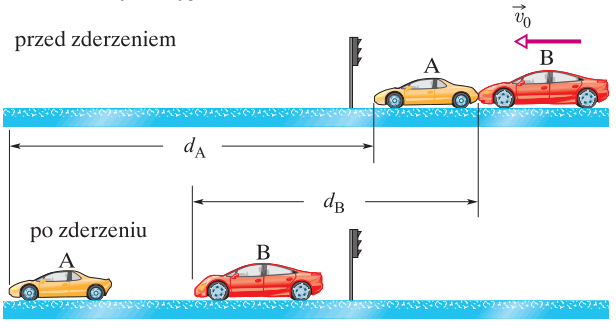
Rys. 9.59. Zadanie 52

••53 Na Alasce dość częste są zderzenia pojazdów z łosiami. Przyjmij, że na bardzo śliskiej drodze samochód o masie 1000 kg wpada na stojącego bez ruchu łosia o masie 500 kg, który w wyniku zderzenia zostaje rzucony na przednią szybę pojazdu (co się bardzo często zdarza). a) Oblicz, jaka część początkowej energii kinetycznej zamienia się w zderzeniu na energię inną niż mechaniczna. W Arabii Saudyjskiej równie częste są zderzenia pojazdów z wielbłądami. b) Oblicz, jaka część początkowej energii kinetycznej zamienia się na energię inną niż mechaniczna w zderzeniu podobnego samochodu z wielbłądem o masie 300 kg. c) Czy ta część energii (gdziekolwiek, niekoniecznie na Alasce czy w Arabii Saudyjskiej) rośnie, czy maleje ze wzrostem masy zwierzęcia?

••54 Dwie wilgotne kulki kitu poruszają się naprzeciw siebie wzdłuż osi pionowej. Ich zderzenie jest całkowicie niesprężyste. Tuż przed zderzeniem jedna z nich, o masie 3 kg, porusza się w górę z prędkością 20 m/s, a druga, o masie 2 kg, porusza się w dół z prędkością 12 m/s. Oblicz wysokość, na jaką wzniesie się w stosunku do punktu zderzenia duża kula kitu, powstała w wyniku zderzenia. Pomiń opór powietrza.

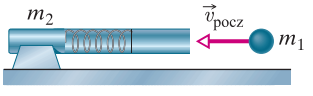
••55 ilw Klocek o masie 5 kg i prędkości 3 m/s zderza się z klockiem o masie 10 kg poruszającym się w tym samym kierunku z prędkością 2 m/s. Po zderzeniu klocek o masie 10 kg porusza się z prędkością 2,5 m/s w tym samym kierunku, co przed zderzeniem. a) Ile wynosi tuż po zderzeniu prędkość klocka o masie 5 kg? b) O ile zmieniła się całkowita energia kinetyczna układu obydwu klocków w wyniku ich zderzenia? c) Załóż następnie, że prędkość klocka o masie 10 kg po zderzeniu wynosiła 4 m/s. Ile wynosiła w tym przypadku zmiana energii kinetycznej układu klocków? d) Uzasadnij wynik otrzymany w punkcie (c).

••56 Jak pokazano na rysunku 9.60, na stojący pod czerwonym światłem samochód A wpada z tyłu samochód B. Masa samochodu A wynosi 1100 kg, a masa samochodu B jest równa 1400 kg. Po zderzeniu obydwa samochody ślizgają się po oblodzonej jezdni z zablokowanymi kołami i zatrzymują się pod wpływem siły tarcia po przebyciu drogi odpowiednio $d_A = 8{,}2$ m i $d_B = 6{,}1$ m. Współczynnik tarcia kinetycznego między zablokowanymi kołami każdego z samochodów a jezdnią wynosi $\mu_k = 0{,}13$. Wyznacz prędkość: a) samochodu A, b) samochodu B tuż po ich zderzeniu się ze sobą. c) Korzystając z zasady zachowania pędu wyznacz prędkość, jaką miał samochód B w chwili uderzenia w samochód A. d) Dlaczego skorzystanie tu z zasady zachowania pędu można uważać za dyskusyjne?

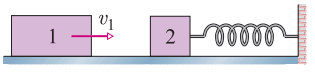


Rys. 9.60. Zadanie 56

••57 GO Jak pokazano na rysunku 9.61, kulka o masie $m_1 = 60$ g wpada z prędkością $v_{pocz} = 22$ m/s w lufę wyrzutni sprężynowej o masie $m_2 = 240$ g, znajdującej się początkowo w spoczynku na podłożu, po którym może poruszać się bez tarcia. Kulka zostaje uwięziona w lufie, w położeniu największego ściśnięcia sprężyny. Przyjmij, że wzrost energii termicznej w wyniku tarcia kulki o ściany lufy jest znikomo mały. a) Ile wynosi prędkość wyrzutni sprężynowej po zatrzymaniu się kulki w lufie? b) Jaka część początkowej energii kinetycznej kulki zamienia się w energię sprężystości sprężyny?



Rys. 9.61. Zadanie 57

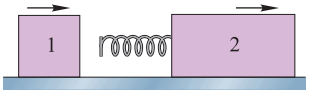


Rys. 9.62. Zadanie 58

•••58 Klocek 2 o masie 1 kg znajduje się w spoczynku na poziomej powierzchni, po której może poruszać się bez tarcia. Klocek ten jest przymocowany do jednego końca sprężyny o stałej sprężystości 200 N/m. Drugi koniec sprężyny jest unieruchomiony, a sprę-

żyna jest nieodkształcona (rys. 9.62). W pewnej chwili z klockiem tym zderza się klocek 1 o masie 2 kg, poruszający się z prędkością $v_1 = 4$ m/s. Po zderzeniu klocki poruszają się razem. Wyznacz maksymalną zmianę długości sprężyny odpowiadającą chwili, w której prędkość klocków jest równa zeru.

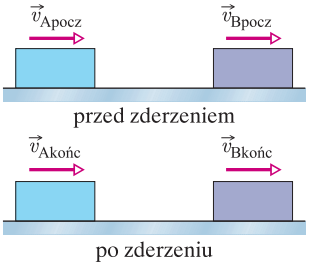
•••59 ilw Jak pokazano na rysunku 9.63, klocek 1 o masie 2 kg ślizga się po stole z prędkością 10 m/s, a przed nim znajduje się klocek 2 o masie 5 kg poruszający się w tym samym kierunku z prędkością 3 m/s. Ruch obu klocków odbywa się bez tarcia. Do klocka 2 przymocowana jest sprężyna o stałej sprężystości 1120 N/m. Wyznacz maksymalną zmianę długości sprężyny w trakcie zderzenia klocków, odpowiadającą chwili, w której klocki mają taką samą prędkość.



Rys. 9.63. Zadanie 59

Podrozdział 9.7. Zderzenia sprężyste w jednym wymiarze

•60 Na rysunku 9.64 przedstawiono dwa klocki ślizgające się po podłożu bez tarcia. Masa klocka A wynosi 1,6 kg, a masa klocka B — 2,4 kg. Kierunki prędkości klocków zaznaczono na rysunku strzałkami, a ich wartości wynoszą: $v_{\text{Apocz}} = 5{,}5$ m/s, $v_{\text{Bpocz}} = 2{,}5$ m/s (przed zderzeniem) oraz $v_{\text{Bkońc}} = 4{,}9$ m/s (po zderzeniu). Wyznacz a) wartość i b) kierunek (w lewo lub w prawo) prędkości $\vec{v}_{\text{Akońc}}$. c) Czy zderzenie klocków jest sprężyste?



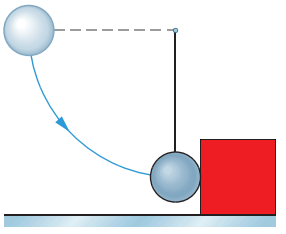
Rys. 9.64. Zadanie 60

•61 ssm Wózek o masie 340 g poruszający się bez tarcia po liniowym torze z poduszką powietrzną z prędkością początkową 1,2 m/s ulega zderzeniu sprężystemu z nieruchomym początkowo wózkiem o nieznanej masie. Po zderzeniu pierwszy wózek porusza się w tym samym kierunku co początkowo, z prędkością o wartości 0,66 m/s. a) Wyznacz masę drugiego wózka. b) Jaką prędkość ma on po zderzeniu? c) Ile wynosi prędkość środka masy układu tych dwóch wózków?

•62 Dwie kule tytanowe zbliżają się do siebie czołowo z jednakowymi prędkościami i zderzają się sprężyście. Jedna z kul, której masa wynosi 300 g jest po zderzeniu nieruchoma. a) Wyznacz masę drugiej kuli. b) Wyznacz prędkość środka masy tych kul, jeśli ich prędkości początkowe (o takiej samej wartości) wynoszą 2 m/s.

••63 Klocek 1, o masie m_1, ślizga się bez tarcia po podłodze i doznaje zderzenia sprężystego w jednym wymiarze z nieruchomym początkowo klockiem 2, o masie $m_2 = 3m_1$. Przed zderzeniem środek masy masy układu tych klocków ma prędkość o wartości 3 m/s. Jaką wartość ma po zderzeniu prędkość a) środka masy i b) klocka 2?

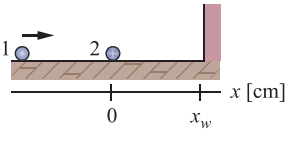
••64 GO Kula stalowa o masie 0,5 kg jest przymocowana do liny o długości 70 cm, nieruchomej na drugim końcu. Kula zostaje puszczona swobodnie, gdy lina jest pozioma (rys. 9.65). W najniższym punkcie toru swego ruchu kula uderza w nieruchomy klocek stalowy o masie 2,5 kg, spoczywający na podłożu, po którym może poruszać się bez tarcia. Zderzenie jest sprężyste. Wyznacz prędkość: a) kuli, b) klocka tuż po zderzeniu.


Rys. 9.65. Zadanie 64

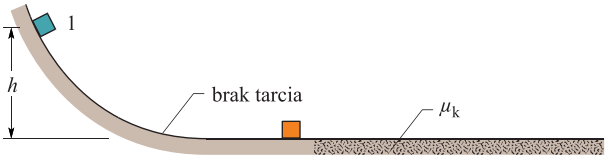
••65 ssm Ciało o masie 2 kg zderza się z innym ciałem, które przed zderzeniem znajdowało się w spoczynku i po zderzeniu porusza się w tym samym kierunku z prędkością czterokrotnie mniejszą od swej prędkości początkowej. a) Wyznacz masę drugiego ciała. b) Wyznacz prędkość środka masy tych ciał, jeśli prędkość początkowa ciała o masie 2 kg wynosi 4 m/s.

••66 Klocek 1, o masie m_1 i prędkości 4 m/s, ślizga się bez tarcia po podłodze i doznaje zderzenia sprężystego w jednym wymiarze z nieruchomym początkowo klockiem 2, o masie $m_2 = 0{,}4m_1$. Oba klocki docierają potem do obszarów, w których współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0,5 i w końcu się zatrzymują. Jaką drogę przebywa w obszarze z tarciem a) klocek 1, b) klocek 2?

••67 Cząstka 1 o masie $m_1 = 0{,}3$ kg ślizga się bez tarcia po podłodze w prawo z prędkością 2 m/s (patrz rys. 9.66). W punkcie $x = 0$ zachodzi zderzenie w jednym wymiarze tej cząstki z nieruchomą początkowo cząstką 2 o masie $m_2 = 0{,}4$ kg. Zderzenie jest sprężyste. Cząstka 2 dociera następnie do ściany (w punkcie $x_w = 70$ cm), od której odbija się bez zmiany wartości swej prędkości. W którym punkcie osi x cząstka 2 zderzy się ponownie z cząstką 1?



Rys. 9.66. Zadanie 67

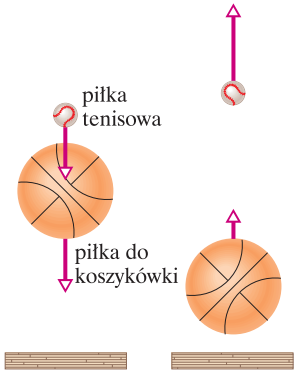


Rys. 9.67. Zadanie 68

••68 GO Jak pokazano na rysunku 9.67, klocek 1 o masie m_1 ześlizguje się bez tarcia i bez prędkości początkowej z wysokości $h = 2{,}5$ m po pewnym krzywoliniowym torze, a następ-

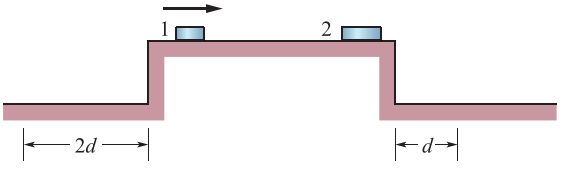
nie zderza się z nieruchomym początkowo klockiem 2 o masie $m_2 = 2m_1$. Po zderzeniu klocek 2 dociera do obszaru, w którym współczynnik tarcia kinetycznego μ_k jest równy 0,5 i zatrzymuje się po przebyciu w tym obszarze drogi d. Ile wynosi droga d, jeśli zderzenie klocków jest a) sprężyste, b) całkowicie niesprężyste?

•••69 GO Małą piłkę o masie m ustawiono nad większą piłką o masie $M = 0{,}63$ kg (w niewielkiej odległości od niej, jak na rysunku 9.68a), po czym obie piłki jednocześnie puszczono swobodnie z wysokości $h = 1{,}8$ m nad podłogą (wysokość ta jest znacznie większa od promieni obydwu piłek). a) Jaka musi być masa m, aby po zderzeniu sprężystym dużej piłki z podłogą, a następnie zderzeniu sprężystym obydwu piłek duża piłka miała prędkość równą zeru? b) Na jaką największą wysokość wzniesie się potem mniejsza piłka (rys. 9.68b)?



Rys. 9.68. Zadanie 69

•••70 GO Jak pokazano na rysunku 9.69, krążek 1 o masie $m_1 = 0{,}2$ kg ślizga się bez tarcia po ławie laboratoryjnej, po czym doznaje zderzenia sprężystego w jednym wymiarze z nieruchomym początkowo klockiem 2. Krążek 1 zmienia w wyniku zderzenia kierunek ruchu, spada z ławy i ląduje na niższym poziomie w odległości $2d$ od brzegu ławy. Krążek 2 spada z ławy z prawej strony i ląduje w odległości d od brzegu ławy. Wyznacz masę klocka 2. *Wskazówka*: Uważaj na znaki.



Rys. 9.69. Zadanie 70

Podrozdział 9.8. Zderzenia w dwóch wymiarach

••71 ilw Dwie cząstki z rysunku 9.21 to cząstka α (cząstka 1 — pocisk) i jądro tlenu (cząstka 2 — tarcza). Cząstka α rozprasza się pod kątem $\theta_1 = 64°$, a jądro tlenu zostaje odrzucone pod kątem $\theta_2 = 51°$ z prędkością $1{,}2 \cdot 10^5$ m/s. Masa cząstki α wynosi — w atomowych jednostkach masy — 4 u, a masa jądra tlenu jest równa 16 u. Wyznacz a) początkową i b) końcową wartość prędkości cząstki α.

••72 Kula B, poruszająca się w dodatnim kierunku osi x z prędkością v, zderza się w początku układu współrzędnych z nieruchomą początkowo kulą B. Kule A i B mają różne masy. Po zderzeniu kula B porusza się w ujemnym kierunku osi y z prędkością $v/2$. a) W jakim kierunku porusza się po zderzeniu kula A? b) Wykaż, że dane zadania nie pozwalają wyznaczyć prędkości kuli A.

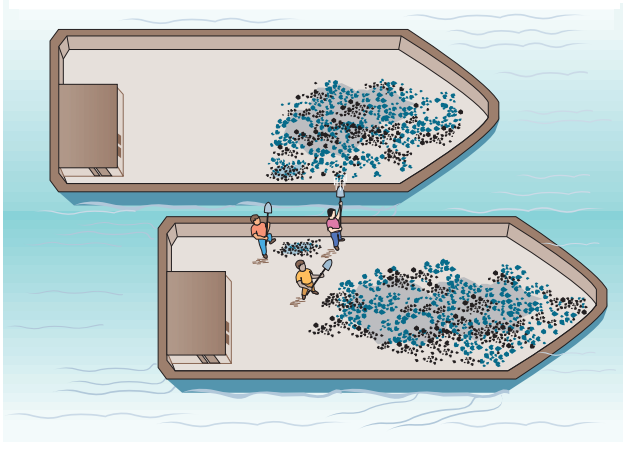
••73 Stwierdzono, że dwa ciała o jednakowych masach i jednakowych wartościach prędkości początkowej poruszają się po ich całkowicie niesprężystym zderzeniu z prędkością o wartości równej połowie wartości ich prędkości przed zderzeniem. Wyznacz kąt między wektorami prędkości tych ciał przed zderzeniem.

••74 Dwa ciała A i B o jednakowych masach równych 2 kg zderzają się ze sobą. Ich prędkości przed zderzeniem wynoszą: $\vec{v}_A = (15\hat{i} + 30\hat{j})$ m/s i $\vec{v}_B = (-10\hat{i} + 5\hat{j})$ m/s. Po zderzeniu: $\vec{v}'_A = (-5\hat{i} + 20\hat{j})$ m/s. a) Wyznacz prędkość końcową ciała B. b) Wyznacz zysk lub stratę energii kinetycznej w tym zderzeniu.

••75 GO Proton o prędkości 500 m/s zderza się sprężyście z innym protonem, pozostającym początkowo w spoczynku. Tory protonów po zderzeniu są prostopadłe do siebie, a tor protonu, który przed zderzeniem się poruszał, tworzy kąt 60° z kierunkiem jego prędkości początkowej. Jaką wartość ma po zderzeniu prędkość: a) protonu, który był przed zderzeniem nieruchomy, b) protonu, który był przed zderzeniem w ruchu?

Podrozdział 9.9. Układ o zmiennej masie: rakieta

•76 Silnik sondy kosmicznej o masie 6090 kg lecącej w kierunku Jowisza dziobem do przodu, z prędkością względem Słońca o wartości 105 m/s, zostaje włączony, przy czym gazy spalinowe o masie 80 kg zostają wyrzucone z prędkością 253 m/s względem sondy. Ile wynosi końcowa prędkość sondy?



Rys. 9.70. Zadanie 77

•77 ssm Jak pokazano na rysunku 9.70, dwie długie barki płyną w tę samą stronę po spokojnej wodzie, jedna z prędkością 10 km/h, a druga z prędkością 20 km/h. Gdy jedna z nich

wyprzedza drugą, z wolniejszej na szybszą przesypywany jest węgiel z szybkością 1000 kg/min. O ile musi wzrosnąć siła wytwarzana przez silnik: a) szybszej, b) wolniejszej barki, jeśli prędkość każdej z nich ma pozostać niezmieniona? Załóż, że węgiel jest przesypywany dokładnie w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu barek oraz że siła tarcia między barką a wodą nie zależy od masy barki.

•78 Przeanalizuj rakietę znajdującą się daleko w przestrzeni kosmicznej i pozostającą w spoczynku względem inercjalnego układu odniesienia. Silnik tej rakiety ma zostać uruchomiony na pewien czas. Ile musi wynosić stosunek masy rakiety na początku i na końcu okresu działania silnika, jeśli końcowa prędkość rakiety względem inercjalnego układu odniesienia ma być: a) równa prędkości spalin względem rakiety, b) dwukrotnie większa od prędkości spalin?

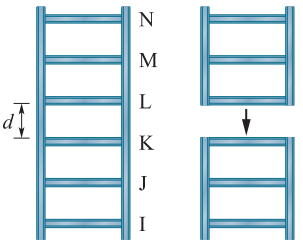
•79 ssm ilw Rakieta znajdująca się daleko w przestrzeni kosmicznej i pozostająca początkowo w spoczynku względem inercjalnego układu odniesienia ma masę równą $2{,}55 \cdot 10^5$ kg, z czego $1{,}81 \cdot 10^5$ kg stanowi paliwo. W pewnej chwili silnik rakiety zostaje włączony na czas 250 s, w którym to czasie paliwo jest spalane z szybkością 480 kg/s. Spaliny są wyrzucane z prędkością 3,27 km/s względem rakiety. a) Ile wynosi siła ciągu silnika rakiety? Ile wynosi: b) masa, c) prędkość rakiety po 250 s pracy jej silnika?

Zadania dodatkowe

80 Stwierdzono, że wektor położenia przedmiotu, wyznaczony za pomocą radaru, jest dany wyrażeniem $\vec{r} = (3500 - 160t)\hat{\mathrm{i}} + 2700\hat{\mathrm{j}} + 300\hat{\mathrm{k}}$, przy czym $\vec{r}$ jest wyrażone w metrach, a t w sekundach. Oś x skierowana jest na wschód, oś y — na północ, a oś z — pionowo do góry. Okazało się, że przedmiotem tym jest sonda meteorologiczna o masie 250 kg. a) Ile wynosi pęd sondy? b) Jaki jest kierunek ruchu sondy? c) Ile wynosi wypadkowa działających na nią sił?

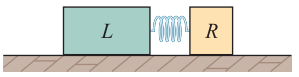
81 Ostatni stopień rakiety, poruszającej się z prędkością 7600 m/s, składa się z dwóch połączonych ze sobą części — osłony rakiety o masie 290 kg i pojemnika na ładunek o masie 150 kg. Gdy łącznik zostaje zwolniony, ściśnięta sprężyna odpycha od siebie obie części z prędkością względną 910 m/s. Wyznacz prędkość a) osłony rakiety i b) pojemnika na ładunek, po ich rozłączeniu. Przyjmij, że wszystkie prędkości są skierowane wzdłuż tej samej prostej. Wyznacz całkowitą energię kinetyczną obu części a) przed i b) po ich rozłączeniu. Wyjaśnij, dlaczego te wartości nie są jednakowe.

82 *Katastrofy postępujące wysokich budynków*. Na rysunku 9.71a przedstawiono schemat konstrukcji wysokiego budynku. Infrastruktura każdej kondygnacji K musi utrzymać ciężar W wszystkich kondygnacji wyższych. Budując wysokie budynki zakłada się współczynnik bezpieczeństwa s i tworzy projekt tak, by każda kondygnacja wytrzymywała działanie siły sW. Jeśli jednak ścianki między kolejnymi kondygnacjami K i L zostaną uszkodzone, to wszystkie wyższe kondygnacje spadną swobodnie na poziom K (patrz rys. 9.71b) i siła działająca podczas ich zderzenia może przekroczyć sW, co spowoduje zawalenie się poziomu K, potem J, potem I i tak dalej, aż do ziemi (stąd nazwa katastrofa postępująca). Załóż, że odległość pięter wynosi $d = 4$ m, a ich masa jest taka sama. Przyjmij również, że jeśli wszystkie kondygnacje ponad poziomem K spadają swobodnie na K, ich zderzenie trwa 1,5 ms. Ile powinien (przynajmniej) wynosić współczynnik bezpieczeństwa s, aby — w zgodzie z tym uproszczonym modelem — uniemożliwić katastrofę postępującą budynku?



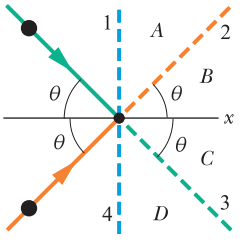
Rys. 9.71. Zadanie 82

83 *„Względem" to ważne słowo*. Na rysunku 9.72 przedstawiono klocek L o masie $m_L = 1$ kg i klocek R o masie $m_R = 0{,}5$ kg, między którymi ściśnięta jest sprężyna. Gdy klocki zostaną puszczone swobodnie, sprężyna wprawi je w ruch ślizgowy po podłożu, na którym nie występuje tarcie. Sprężyna ma znikomo małą masę i po odepchnięciu klocków od siebie spada na podłoże. a) Jaką drogę pokona klocek R w ciągu 0,8 s od początku ruchu, jeśli sprężyna nada klockowi L prędkość 1,2 m/s *względem* podłoża? b) Jaką drogę pokona klocek R w ciągu 0,8 s od początku ruchu, jeśli sprężyna nada klockowi L prędkość 1,2 m/s *względem* klocka R?



Rys. 9.72. Zadanie 83

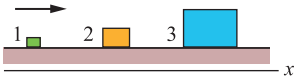
84 Na rysunku 9.73 przedstawiono widok z góry dwóch cząstek poruszających się bez tarcia po podłożu ze stałą prędkością. Cząstki mają taką samą masę oraz taką samą wartość prędkości początkowej $v = 4$ m/s i zderzają się ze sobą, gdy ich tory się przecinają. Oś x wybieramy wzdłuż dwusiecznej kąta tworzonego przez tory cząstek przed zderzeniem, a kąt θ wynosi 40°. Na rysunku oznaczono literami cztery obszary, a cyframi oznaczono cztery półproste. W którym z obszarów lub wzdłuż której półprostej pobiegną cząstki po zderzeniu, jeśli będzie ono: a) całkowicie niesprężyste, b) sprężyste, c) niesprężyste? Wyznacz końcowe prędkości cząstek, jeśli zderzenie było: d) całkowicie niesprężyste, e) sprężyste.



Rys. 9.73. Zadanie 84

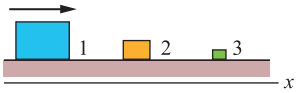
85 *Osłabiacz prędkości*. Jak pokazano na rysunku 9.74, klocek 1 o masie m_1 ślizga się bez tarcia wzdłuż osi x po podłożu z prędkością 4 m/s. Zderza się on w jednym wymiarze ze spoczywającym początkowo klockiem 2 o masie

$m_2 = 2m_1$. Zderzenie jest sprężyste. Klocek 2 zderza się później w jednym wymiarze ze spoczywającym początkowo klockiem 3 o masie $m_3 = 2m_2$. Zderzenie jest sprężyste. a) Ile wynosi prędkość klocka 3 po zderzeniu? Czy b) prędkość, c) energia kinetyczna i d) pęd klocka 3 mają wartości większe, mniejsze, czy takie same, jak odpowiednie wielkości dla klocka 1 przed zderzeniami?



Rys. 9.74. Zadanie 85

86 *Wzmacniacz prędkości*. Jak pokazano na rysunku 9.75, klocek 1 o masie m_1 ślizga się bez tarcia wzdłuż osi x po podłożu z prędkością 4 m/s. Zderza się on w jednym wymiarze ze spoczywającym początkowo klockiem 2 o masie $m_2 = 0{,}5m_1$. Zderzenie jest sprężyste. Klocek 2 zderza się później w jednym wymiarze ze spoczywającym początkowo klockiem 3 o masie $m_3 = 0{,}5m_2$. Zderzenie jest sprężyste. a) Ile wynosi prędkość klocka 3 po zderzeniu? Czy b) prędkość, c) energia kinetyczna i d) pęd klocka 3 mają wartości większe, mniejsze, czy takie same, jak odpowiednie wielkości dla klocka 1 przed zderzeniami?



Rys. 9.75. Zadanie 86

87 Piłka o masie 150 g uderza w ścianę z prędkością 5,2 m/s, a po odbiciu od ściany ma energię kinetyczną stanowiącą tylko 50% swej początkowej energii kinetycznej. a) Jaka jest wartość prędkości piłki tuż po odbiciu? b) Jaka jest wartość popędu siły działającej na ścianę ze strony piłki? c) Jaką średnią siłą działała piłka na ścianę w czasie odbicia, jeśli stykały się one przez 7,6 ms?

88 Pojazd kosmiczny rozpada się na dwie części w wyniku odpalenia materiału wybuchowego zawartego w łączących je sworzniach. Masy części wynoszą 1200 kg i 1800 kg, a popęd siły, jaką sworznie działają na każdą z nich, jest równy 300 N · s. Z jaką względną prędkością oddalają się od siebie części po wybuchu?

89 ssm Samochód o masie 1400 kg jedzie z prędkością 5,3 m/s. Początkowo kieruje się na północ, czyli w dodatnim kierunku osi y. Następnie pokonuje zakręt pod kątem prostym (90°) w prawo, co zajmuje mu 4,6 s, po czym kierunek jego ruchu jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi x. Niedługo potem nieostrożny kierowca wpada na drzewo, które zatrzymuje pojazd w czasie 350 ms. Wyznacz popęd siły działającej na samochód: a) podczas pokonywania zakrętu, b) w czasie zderzenia z drzewem, wyrażając je za pomocą wektorów jednostkowych. Wyznacz średnią wartość siły działającej na pojazd: c) podczas pokonywania zakrętu, d) w czasie zderzenia. e) Jaki kąt tworzy z dodatnim kierunkiem osi x średnia siła, o której mowa w pytaniu (c)?

90 ilw Pewne jądro promieniotwórcze zamienia się w inne jądro, wysyłając elektron i neutrino. Przyjmij, że przed rozpadem jądro znajduje się w spoczynku w początku układu współrzędnych x, y. Po rozpadzie pęd elektronu wynosi $(-1{,}2 \cdot 10^{-22}\ \text{kg} \cdot \text{m/s})\hat{\mathbf{i}}$, a pęd neutrina jest równy $(-6{,}4 \cdot 10^{-23}\ \text{kg} \cdot \text{m/s})\hat{\mathbf{j}}$. Wyznacz a) wartość i b) kierunek pędu jądra końcowego. c) Ile wynosi energia kinetyczna tego jądra, jeśli jego masa jest równa $5{,}8 \cdot 10^{-26}$ kg?

91 Człowiek o masie 75 kg jedzie wózkiem o masie 39 kg poruszającym się z prędkością 2,3 m/s. W pewnej chwili wyskakuje z wózka, przy czym składowa pozioma jego prędkości względem ziemi jest równa zeru. Jak zmienia się przy tym prędkość wózka (co do wartości i co do kierunku)?

92 Dwa klocki o masach 1 kg i 3 kg są połączone sprężyną i znajdują się w spoczynku na powierzchni, po której mogą poruszać się bez tarcia. Obydwa klocki zostają następnie wprawione w ruch ku sobie, przy czym klocek o masie 1 kg porusza się w chwili początkowej z prędkością 1,7 m/s w kierunku ich środka masy, który nie zmienia swego położenia. Ile wynosi w chwili początkowej prędkość drugiego klocka?

93 ssm Wagon towarowy o masie $3{,}18 \cdot 10^4$ kg zderza się ze znajdującym się początkowo w spoczynku wagonem mieszkalnym. Po zderzeniu poruszają się one razem, a 27% początkowej energii kinetycznej zamienia się na energię termiczną, akustyczną, ruchu drgającego itp. Wyznacz masę wagonu mieszkalnego.

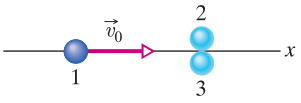
94 Stary Chrysler o masie 2400 kg jedzie po prostym odcinku drogi z prędkością 80 km/h, a za nim jedzie Ford o masie 1600 kg, którego prędkość wynosi 60 km/h. Z jaką prędkością przemieszcza się przy tym środek masy obydwu samochodów?

95 Kula bilardowa nr 1 poruszająca się z prędkością 2,2 m/s zderza się niecentralnie z taką samą kulą nr 2, która jest początkowo nieruchoma (patrz rys. 9.21). Po zderzeniu kula nr 2 porusza się z prędkością 1,1 m/s w kierunku tworzącym kąt $\theta_2 = 60°$ z kierunkiem ruchu pierwszej kuli przed zderzeniem. Wyznacz a) wartość i b) kierunek prędkości kuli nr 1 po zderzeniu. c) Czy dane tego zadania wskazują na to, że zderzenie było sprężyste, czy też niesprężyste?

96 Rakieta opuszczająca Układ Słoneczny ma prędkość $6 \cdot 10^3$ m/s. Jej silnik pracuje i wyrzuca gazy spalinowe z prędkością $3 \cdot 10^3$ m/s względem rakiety. W pewnej chwili masa rakiety wynosi $4 \cdot 10^4$ kg, a jej przyspieszenie jest równe 2 m/s^2. a) Ile wynosi siła ciągu silnika rakiety? b) Z jaką szybkością (w kilogramach na sekundę) z silnika rakiety wyrzucane są gazy spalinowe?

97 Jak pokazano na rysunku 9.76, kula 1 poruszająca się z prędkością o wartości $v_0 = 10$ m/s zderza się sprężyście z dwiema nieruchomymi kulami 2 i 3, których środki leżą na prostej prostopadłej do kierunku ruchu kuli 1. Kule 2 i 3 stykają się ze sobą w punkcie leżącym na prostej, wzdłuż której porusza się kula 1. Wszystkie kule są jednakowe, a ich

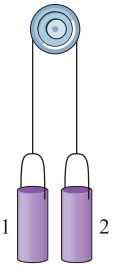
ruch odbywa się bez tarcia. Wyznacz: a) wartość i b) kierunek prędkości kuli 2, c) wartość i d) kierunek prędkości kuli 3 oraz e) wartość i f) kierunek prędkości kuli 1, po zderzeniu tych kul. *Wskazówka:* Ponieważ nie ma tarcia, więc wszystkie popędy sił są skierowane wzdłuż prostych łączących środki zderzających się kul, przechodzących w chwili zderzenia przez punkty zetknięcia się kul.



Rys. 9.76. Zadanie 97

98 Piłka o masie 0,15 kg uderza w ścianę z prędkością $(5\text{ m/s})\hat{i} + (6{,}5\text{ m/s})\hat{j} + (4\text{ m/s})\hat{k}$, a po odbiciu się od ściany jej prędkość jest równa $(2\text{ m/s})\hat{i} + (3{,}5\text{ m/s})\hat{j} + (-3{,}2\text{ m/s})\hat{k}$. Ile wynosi: a) zmiana pędu piłki, b) popęd siły działającej na piłkę, c) popęd siły działającej na ścianę?

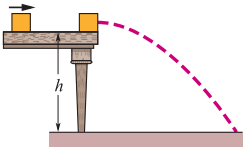
99 Dwa jednakowe naczynia z cukrem połączone są linką o znikomo małej masie, przełożoną przez bloczek o średnicy 50 mm (rys. 9.77), o którym zakładamy, że jego masa jest znikomo mała i może się on obracać bez tarcia. W chwili początkowej naczynia znajdują się na tym samym poziomie i każde z nich ma masę 500 g. a) Jaka jest wówczas odległość w poziomie środka naczynia 1 i środka masy obu naczyń? W pewnej chwili przenosimy 20 g cukru z naczynia 1 do naczynia 2. b) Jaka jest wówczas odległość z punktu (a)? Następnie puszczamy naczynia, pozwalając im się poruszać. c) W jakim kierunku porusza się środek masy naczyń z cukrem? d) Ile wynosi wartość jego przyspieszenia?



Rys. 9.77. Zadanie 99

100 Kula bilardowa uderzona kijem przez gracza zderza się następnie z inną kulą o takiej samej masie, pozostającą początkowo w bezruchu. Pierwsza kula porusza się po zderzeniu z prędkością 3,5 m/s w kierunku tworzącym kąt 22° z kierunkiem jej ruchu przed zderzeniem, a druga kula ma prędkość 2 m/s. a) Jaki kąt tworzy kierunek ruchu drugiej kuli z kierunkiem ruchu pierwszej kuli przed zderzeniem? b) Jaką prędkość miała pierwsza kula przed zderzeniem? c) Czy energia kinetyczna (środka masy układu tych kul — nie rozważaj ruchu obrotowego kul) jest zachowana w tym zderzeniu?

101 Jak pokazano na rysunku 9.78, pudło z butami do biegania, mające masę 3,2 kg, ślizga się bez tarcia po poziomym blacie stołu i zderza się z pudłem z baletkami, mającym masę 2 kg i leżącym na skraju blatu. Wysokość stołu wynosi $h = 0{,}4$ m. Tuż przed zderzeniem pudło o masie 3,2 kg ma prędkość 3 m/s. Załóż, że pudła sklejają się ze sobą, gdyż są owinięte taśmą klejącą. Oblicz energię kinetyczną pudeł w chwili ich upadku na podłogę.



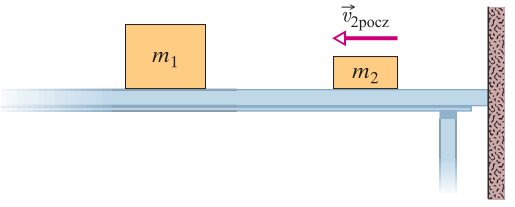
Rys. 9.78. Zadanie 101

102 Człowiek o masie 80 kg trzyma się drabinki sznurowej, zwisającej z gondoli balonu o całkowitej masie (także pasażera balonu) 320 kg — patrz rysunek 9.79. Balon pozostaje w spoczynku względem ziemi. a) W jakim kierunku i b) z jaką prędkością (względem ziemi) będzie poruszać się balon, gdy człowiek zacznie wspinać się po drabince z prędkością 2,5 m/s (w stosunku do drabiny)? b) Jaka będzie prędkość balonu, gdy człowiek przestanie się wspinać?



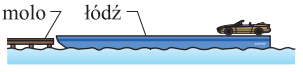
Rys. 9.79. Zadanie 102

103 Jak pokazano na rysunku 9.80, klocek 1 o masie $m_1 = 6{,}6$ kg pozostaje w spoczynku na długim stole, na końcu którego znajduje się pionowa ściana. Między tym klockiem a ścianą umieszczono drugi klocek o masie m_2, który następnie wprawiono w ruch w lewą stronę, tzn. w kierunku klocka 1, ze stałą prędkością $v_{2\text{pocz}}$. Jaka musi być masa m_2, aby po jednym zderzeniu klocka 2 z klockiem 1 i jego jednym zderzeniu ze ścianą obydwa klocki poruszały się z taką samą prędkością? Załóż, że obydwa klocki ślizgają się po stole bez tarcia, a wszystkie zderzenia są sprężyste (zderzenie ze ścianą nie zmienia wartości prędkości klocka 2).



Rys. 9.80. Zadanie 103

104 Scenariusz pewnego filmu akcji przewiduje, by mały samochód wyścigowy (o masie 1500 kg i długości 3 m) rozpędził się na drodze z jednego końca płaskiej łodzi (o masie 4000 kg i długości 14 m) na drugi i przeskoczył z łodzi na położone nieco niżej molo. Wyobraź sobie, że jesteś doradcą technicznym producenta tego filmu. Początkowo łódź i molo stykają się ze sobą (jak na rys. 9.81). Łódź może się ślizgać po wodzie praktycznie bez oporu. Samochód i łódź mają w przybliżeniu stałą gęstość. Ile będzie wynosić odległość łodzi od mola, gdy samochód będzie musiał wykonać skok?



Rys. 9.81. Zadanie 104

105 ssm Ciało o masie 3 kg, poruszające się z prędkością 8 m/s w dodatnim kierunku osi x, doznaje całkowicie sprężystego zderzenia w jednym wymiarze z pozostającym początkowo w spoczynku ciałem o masie M. Po zderzeniu ciało o masie M porusza się w dodatnim kierunku osi x z prędkością 6 m/s. Oblicz masę M tego ciała.

106 Wagon towarowy o masie 2140 kg, który może się toczyć po szynach praktycznie bez tarcia, stoi nieruchomo przy rampie. Zapaśnik sumo o masie 242 kg biegnie po rampie w kierunku równoległym do szyn z prędkością 5,3 m/s i w pewnej chwili wskakuje na platformę wagonu. Wyznacz prędkość wagonu przy założeniu, że zapaśnik: a) stoi nieruchomo na platformie wagonu, b) biegnie po niej z prędkością 5,3 m/s względem platformy w tym samym kierunku, w którym biegł po rampie, c) zawraca i biegnie po platformie z prędkością 5,3 m/s względem wagonu w kierunku przeciwnym do tego, w którym biegł po rampie.

107 ssm Rakieta o masie 6100 kg ma być wystrzelona pionowo z powierzchni Ziemi. Silnik rakiety wyrzuca gazy spalinowe z prędkością 1200 m/s. Jaka musi być masa spalin wyrzucanych z silnika rakiety w ciągu 1 sekundy, jeśli siła ciągu rakiety ma: a) być równa wartości działającej na rakietę siły ciężkości, b) umożliwić rakiecie uzyskanie skierowanego w górę przyspieszenia początkowego o wartości 21 m/s^2?

108 Moduł ładunkowy o masie 500 kg jest dołączony do rakiety manewrowej o masie 400 kg poruszającej się z prędkością 1000 m/s względem ich nieruchomego statku macierzystego. W pewnej chwili niewielki wybuch powoduje ruch modułu z prędkością 100 m/s względem rakiety. Ten manewr jest śledzony przez obserwatora na statku głównym. Ile wynosi zmierzony przez tego obserwatora procentowy wzrost energii kinetycznej układu moduł–rakieta w wyniku wybuchu?

109 a) Jak daleko od środka Ziemi znajduje się środek masy układu Ziemia–Księżyc (odległość Ziemi i Księżyca oraz ich masy znajdziesz w dodatku C)? b) Jaka to część promienia Ziemi R_Z?

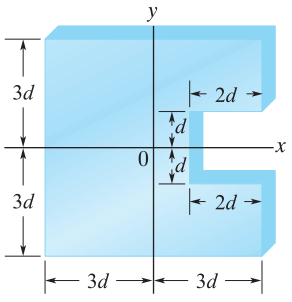
110 Piłka o masie 140 g mająca prędkość 7,8 m/s uderza prostopadle w ścianę i odbija się od niej bez zmiany wartości swej prędkości. Zderzenie trwa 3,8 ms. Ile wynosi wartość a) popędu siły i b) średniej siły działającej na ścianę ze strony piłki podczas tego zderzenia sprężystego?

111 ssm Sanie rakietowe o masie 2900 kg poruszają się po szynach z prędkością o wartości 250 m/s. W pewnym miejscu toru łopatka sań zanurza się w wodzie znajdującej się między szynami i zaczyna nabierać wodę do pustego zbiornika sań. Korzystając z zasady zachowania pędu, wyznacz prędkość sań po nabraniu do zbiornika wody o masie 920 kg. Pomiń wszelkie siły hamujące działające na łopatkę.

112 ssm Strzelba śrutówka wystrzeliwuje w ciągu 1 s 10 ziaren śrutu o masie 2 g każde, nadając im prędkość 500 m/s. Śrut grzęźnie w sztywnej ścianie. Wyznacz: a) pęd, b) energię kinetyczną każdego ziarna, c) średnią wartość siły działającej na ścianę ze strony strumienia tych ziaren. d) Załóż, że czas zatrzymania każdego ziarna w ścianie wynosi 0,6 ms i wyznacz średnią wartość siły działającej na ścianę ze strony ziarna w czasie jego zatrzymania. e) Dlaczego ta średnia wartość siły jest tak bardzo różna od średniej wartości siły otrzymanej w punkcie (c)?

113 Wagon towarowy przejeżdża pod wylotem elewatora zbożowego ze stałą prędkością 3,2 m/s. Ziarno sypie się do wagonu z szybkością 540 kg/min. Wyznacz wartość siły potrzebnej do utrzymania stałej prędkości ruchu wagonu, zakładając, że tarcie kół wagonu o szyny można pominąć.

114 Z jednorodnej płyty kwadratowej o boku $6d = 6$ m wycięto kwadrat o boku $2d$ m (jak na rys. 9.82). Wyznacz: a) współrzędną x, b) współrzędną y środka masy części płyty, jaka pozostała po wycięciu kwadratu.



Rys. 9.82. Zadanie 114

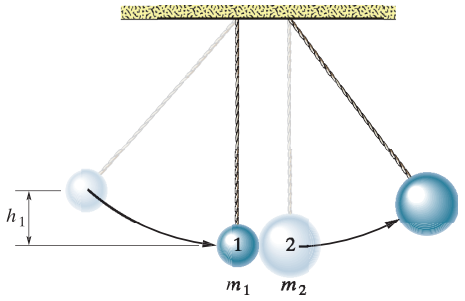
115 ssm W chwili $t = 0$ na dwie nieruchome cząstki zaczynają działać siły: $\vec{F}_1 = (-4\hat{i} + 5\hat{j})$ N na cząstkę 1 o masie $2 \cdot 10^{-3}$ kg i $\vec{F}_2 = (2\hat{i} - 4\hat{j})$ N na cząstkę 2 o masie $4 \cdot 10^{-3}$ kg. Wyznacz a) wartość i b) kierunek (podaj kąt względem dodatniego kierunku osi x) przemieszczenia środka masy układu tych dwóch cząstek od chwili $t = 0$ do chwili $t = 2$ ms. c) Wyznacz energię kinetyczną tego środka masy w chwili $t = 2$ ms.

116 Dwie cząstki P i Q zostały puszczone swobodnie, gdy pozostawały w spoczynku w odległości 1 m od siebie. Cząstka P ma masę 0,1 kg, a cząstka Q — masę 0,3 kg. Cząstki te przyciągają się ze stałą siłą 0,01 N. Na cząstki nie działają żadne siły zewnętrzne. a) Ile wynosi prędkość środka masy tych cząstek, gdy są one od siebie odległe o 0,5 m? b) W jakiej odległości od początkowego położenia cząstki P cząstki się zderzają?

117 Dochodzi do zderzenia cząstki o masie 2 kg i prędkości $\vec{v}_1 = (-4 \text{ m/s})\hat{i} + (-5 \text{ m/s})\hat{j}$ z cząstką o masie 4 kg i prędkości $\vec{v}_2 = (6 \text{ m/s})\hat{i} + (-2 \text{ m/s})\hat{j}$. Po zderzeniu cząstki poruszają się razem. Wyznacz ich prędkość po zderzeniu, wyrażając ją a) w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych oraz za pomocą jej b) wartości i c) kąta (względem dodatniego kierunku osi x).

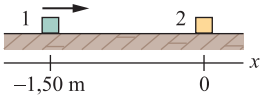
118 Dwie kule metalowe, zawieszone na pionowych linach, w chwili początkowej ledwie się ze sobą stykają, jak pokazano na rysunku 9.83. Kula 1, o masie $m_1 = 50$ g, zostaje odchylona w lewo, przy czym wznosi się w pionie na wysokość $h_1 = 9$ cm, a następnie zostaje puszczona swobodnie. Po powrocie do położenia początkowego zderza się ona sprężyście z kulą 2 o masie $m_2 = 85$ g. Wyznacz największą wy-

sokość po zderzeniu: a) kuli 1, b) kuli 2. Następnie wyznacz największą wysokość: c) kuli 1, d) kuli 2 po ich kolejnym zderzeniu sprężystym. *Wskazówka:* Nie zaokrąglaj otrzymanych wartości.



Rys. 9.83. Zadanie 118

119 Jak pokazano na rysunku 9.84, klocek 1 ślizga się bez tarcia po podłożu wzdłuż osi x z prędkością 0,75 m/s. W chwili, gdy dociera do nieruchomego początkowo klocka 2, zachodzi między nimi zderzenie sprężyste. W tabelce podano masy i długości klocków (które mają stałą gęstość) i położenie ich środków w chwili $t = 0$. Wyznacz położenie środka masy tych klocków: a) w chwili $t = 0$, b) gdy stykają się ze sobą po raz pierwszy i c) w chwili $t = 4$ s.



Rys. 9.84. Zadanie 119

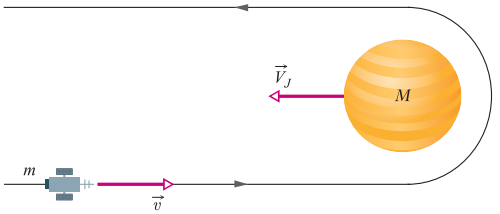
klocek	masa [kg]	długość [cm]	położenie środka w chwili $t = 0$
1	0,25	5	$x = -1{,}5$ m
2	0,5	6	$x = 0$

120 Pewne ciało porusza się z prędkością 2 m/s w dodatnim kierunku osi x i nie działa na nie żadna siła zewnętrzna. W pewnej chwili ciało wybucha i dzieli się na dwie części o masie 4 kg każda, czemu towarzyszy wzrost ich łącznej energii kinetycznej o 16 J. Część znajdująca się z przodu (o większej współrzędnej x) porusza się w dodatnim kierunku osi x. Wyznacz wartości prędkości a) części znajdującej się z tyłu, b) części znajdującej się z przodu.

121 Elektron doznaje zderzenia sprężystego w jednym wymiarze z nieruchomym początkowo atomem wodoru. Jaki procent początkowej energii kinetycznej elektronu zostaje zamieniony na energię kinetyczną atomu wodoru (masa atomu wodoru jest 1840 razy większa od masy elektronu)?

122 Człowiek o ciężarze 915 N stoi na podłodze długiego wagonu towarowego o ciężarze 2415 N, toczącego się po torze bez tarcia w dodatnim kierunku osi x z prędkością 18,2 m/s. W pewnej chwili człowiek zaczyna biec po podłodze wagonu w ujemnym kierunku osi x z prędkością 4 m/s względem wagonu. O ile wzrasta przy tym prędkość wagonu?

123 Bezzałogowy pojazd kosmiczny (o masie m i prędkości v względem Słońca) zbliża się do Jowisza (o masie m_J i prędkości V_J względem Słońca), jak pokazano na rysunku 9.85. Pojazd okrąża planetę i oddala się od niej w kierunku, z którego nadleciał. Wyznacz prędkość pojazdu (względem Słońca) po tym manewrze, który można rozpatrywać jako zderzenie. Przyjmij, że $v = 10{,}5$ km/s, a $V_J = 13$ km/s (prędkość orbitalna Jowisza). Masa Jowisza jest znacznie większa od masy pojazdu ($m_J \gg m$).



Rys. 9.85. Zadanie 122

124 Piłka o masie 0,55 kg spada pionowo na betonową podłogę. W chwili dotarcia do podłogi ma prędkość 12 m/s, a tuż po utracie kontaktu z podłogą ma prędkość 3 m/s, skierowaną pionowo w górę. W zapisie z użyciem wektorów jednostkowych podaj: a) zmianę pędu piłki, b) popęd działającej na nią siły i c) popęd siły działającej na podłogę.

125 Jądro atomowe, znajdujące się początkowo w spoczynku w początku układu współrzędnych x, y, ulega rozpadowi na trzy cząstki. Wiemy, że cząstka 1 ma masę $16{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg, a jej prędkość po rozpadzie jądra wynosi $(6 \cdot 10^6 \text{ m/s})\hat{\mathbf{i}}$ oraz że cząstka 2 ma masę $8{,}35 \cdot 10^{-27}$ kg, a jej prędkość po rozpadzie jądra wynosi $(-8 \cdot 10^6 \text{ m/s})\hat{\mathbf{j}}$. a) Wyznacz pęd trzeciej cząstki, której masa wynosi $11{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg, podając odpowiedź w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych. b) Ile wynosi energia kinetyczna powstała w tej przemianie jądrowej?

126 Cząstka 1 o masie 200 g i prędkości 3 m/s doznaje w jednym wymiarze zderzenia z nieruchomą początkowo cząstką 2 o masie 400 g. Wyznacz wartość popędu siły działającej w tym zderzeniu na cząstkę 1 przy założeniu, że zderzenie jest a) sprężyste, b) całkowicie niesprężyste.

127 W celu skorygowania toru statku kosmicznego lecącego w pobliże Księżyca z prędkością 400 m/s względem Księżyca należy zwiększyć jego prędkość o 2,2 m/s. Prędkość wyrzucanych z silnika spalin wynosi 1000 m/s względem statku. Jaka część początkowej masy statku musi być spalona i wyrzucona ze statku w postaci spalin, aby uzyskać założony wzrost jego prędkości?

128 Spoczywająca początkowo bila zostaje uderzona kijem bilardowym, który działa na nią średnią siłą o wartości 32 N w czasie 14 ms. Prędkość o jakiej wartości zostaje nadana bili, jeśli jej masa wynosi 0,2 kg?

ROZDZIAŁ 10

Obroty

10.1. ZMIENNE OBROTOWE

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

10.01 wyjaśnić, że jeśli wszystkie części ciała wykonują ruch obrotowy wokół ustalonej osi, nie zmieniając swych położeń względnych, to ciało nazywamy sztywnym (w tym rozdziale badamy ruch takich właśnie ciał);

10.02 wyjaśnić, że położenie kątowe obracającego się ciała to kąt tworzony przez linię odniesienia związaną z ciałem i ustaloną, zewnętrzną linię odniesienia;

10.03 wykorzystać związek między przemieszczeniem kątowym ciała a jego początkowym i końcowym położeniem kątowym;

10.04 wykorzystać związek między średnią prędkością kątową, przemieszczeniem kątowym i przedziałem czasu, w jakim to przemieszczenie zaszło;

10.05 wykorzystać związek między średnim przyspieszeniem kątowym, zmianą prędkości kątowej i przedziałem czasu, w jakim zaszła ta zmiana prędkości;

10.06 wyjaśnić, że ruch obrotowy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara uważamy za dodatni, a ruch obrotowy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara uważamy za ujemny;

10.07 obliczyć chwilową prędkość kątową w dowolnej chwili oraz średnią prędkość kątową w dowolnym przedziale czasu, znając położenie kątowe ciała *jako funkcję czasu*;

10.08 obliczyć chwilową prędkość kątową w dowolnej chwili oraz średnią prędkość kątową w dowolnym przedziale czasu, znając *wykres* zależności położenia kątowego ciała od czasu;

10.09 wyjaśnić, że prędkość kątowa jest wektorem, a zatem ma wartość bezwzględną oraz kierunek wyznaczony przez regułę prawej dłoni;

10.10 obliczyć chwilowe przyspieszenie kątowe w dowolnej chwili oraz średnie przyspieszenie kątowe w dowolnym przedziale czasu, znając prędkość kątową ciała *jako funkcję czasu*;

10.11 obliczyć chwilowe przyspieszenie kątowe w dowolnej chwili oraz średnie przyspieszenie kątowe w dowolnym przedziale czasu, znając *wykres* zależności prędkości kątowej ciała od czasu;

10.12 obliczyć zmianę prędkości kątowej ciała jako całkę z jego przyspieszenia kątowego względem czasu;

10.13 obliczyć zmianę położenia kątowego ciała jako całkę z jego prędkości kątowej względem czasu.

Podstawowe fakty

• Aby opisać ruch obrotowy ciała wokół ustalonej osi, nazywanej osią obrotu, wybieramy linię odniesienia prostopadłą do osi obrotu, związaną z ciałem i obracającą się wraz z nim. Położeniem kątowym ciała nazywamy kąt θ, jaki tworzy ta linia z pewnym stałym kierunkiem. Gdy kąt ten jest wyrażony w radianach, jest on równy

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(miara łukowa kąta)},$$

gdzie s jest odpowiadającą kątowi θ długością łuku okręgu o promieniu r.

• Radian jest jednostką miary łukowej kąta, przy czym

$$1 \text{ pełny obrót} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}.$$

• Jeśli ciało obróci się wokół osi obrotu, przy czym jego położenie kątowe zmieni się z θ_1 na θ_2, to przemieszczenie kątowe ciała wyniesie

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Przesunięcie kątowe $\Delta\theta$ jest dodatnie, jeśli obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a jest ujemne, jeśli obrót zachodzi w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

• Jeśli w przedziale czasu Δt zachodzi przemieszczenie kątowe ciała $\Delta\theta$, to średnia prędkość kątowa ciała $\omega_{śr}$ wynosi

$$\omega_{śr} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Prędkość kątowa (chwilowa) ciała ω jest równa

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

Wielkości $\omega_{śr}$ i ω są wektorami, a ich kierunek jest wyznaczony przez regułę prawej dłoni. Są one jest dodatnie, jeśli obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a ujemne, jeśli obrót zachodzi w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

- Jeśli w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$ zachodzi zmiana prędkości kątowej ciała z ω_1 na ω_2, to średnie przyspieszenie kątowe ciała $\alpha_{śr}$ wynosi

$$\alpha_{śr} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Przyspieszenie kątowe (chwilowe) ciała α jest równe

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

Wielkości $\alpha_{śr}$ i α są wektorami.

O fizyce

Jak już pisaliśmy, jednym z celów fizyki jest badanie ruchu ciał. Dotychczas zajmowaliśmy się przede wszystkim **ruchem postępowym** wzdłuż linii prostej lub zakrzywionej, jak ruch łyżwiarki z rysunku 10.1a. W tym rozdziale będziemy mówić o **ruch obrotowym**, jak ruch łyżwiarki z rysunku 10.1b.



Rys. 10.1. a) Łyżwiarka figurowa Carolina Kostner (Włochy), poruszająca się ruchem postępowym wzdłuż stałego kierunku (fot. testing/Shutterstock), b) Mao Asada (Japonia) — ruchem obrotowym wokół osi pionowej (fot. Olga Bessnard/Shutterstock)

Ruch obrotowy możesz dostrzec w niemal każdej maszynie, korzystasz z niego za każdym razem, gdy otwierasz puszkę z napojem, a w wesołym miasteczku nawet płacisz za to, by go doznać. Obrót jest kluczowym elementem wielu sportów — stosują go golfiści, gdy chcą posłać piłkę daleko (gdy piłka się obraca, powietrze może dłużej utrzymywać ją w locie), a także baseballiści, gdy chcą, by lot piłki miał zakrzywienie w lewo lub w prawo (gdy piłka się obraca, powietrze może ją skierować w lewo lub w prawo). O obrotach trzeba też pamiętać w bardzo poważnych analizach

dotyczących na przykład zmęczenia materiałów w nieco już zużytych samolotach.

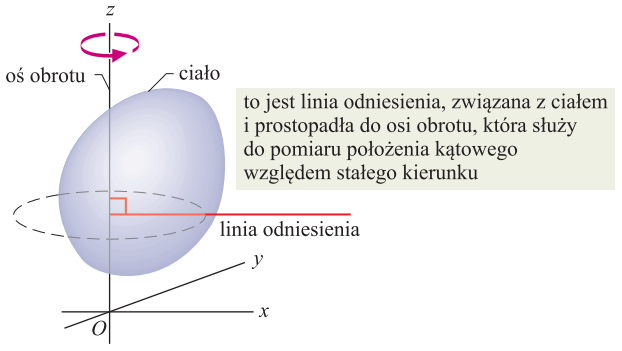
Badanie ruchu obrotowego zaczniemy od zdefiniowania zmiennych służących do badania tego ruchu, podobnie jak postąpiliśmy w przypadku ruchu postępowego w rozdziale 2. Jak się przekonamy, zmienne obrotowe są analogiczne do zmiennych, których używaliśmy do opisu ruchu w jednym wymiarze. Podobnie jak w rozdziale 2, zajmiemy się dokładnie ważnym przypadkiem szczególnym ruchu ze stałym przyspieszeniem (teraz — przyspieszeniem kątowym). Zobaczymy, że do ruchu obrotowego można też zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona, wprowadzając nową wielkość — *moment siły* — która jest przyczyną ruchu obrotowego. Zbadamy również pracę i energię kinetyczną w ruchu obrotowym, wprowadzając inną nową wielkość — *moment bezwładności* — odgrywającą w ruchu obrotowym rolę masy. Krótko mówiąc, opis ruchu obrotowego okaże się w większości podobny do opisu ruchu postępowego, z kilkoma tylko koniecznymi zmianami.

Uwaga. Mimo tych podobieństw (pojęć i praw dotyczących ruchu postępowego i obrotowego) wielu studentów uważa ten i następny rozdział za bardzo trudne. Wykładowcy mogą podać wiele przyczyn takiego stanu rzeczy, lecz dwie są najważniejsze. Po pierwsze, mamy tu wiele nowych oznaczeń (nieraz są nimi litery greckie), które się studentom mylą. Po drugie, ruch postępowy spotykamy na co dzień (przechodząc przez pokój lub idąc wzdłuż ulicy), a z ruchem obrotowym mamy do czynienia rzadziej (między innymi dlatego jesteśmy gotowi płacić za przejażdżki ruchem obrotowym w wesołym miasteczku). Jeśli zadanie domowe wyda ci się napisane językiem, którego nie znasz, spróbuj dostrzec analogie z ruchem postępowym po linii prostej z rozdziału 2 — to może ci pomóc zrozumieć zadanie. Gdy masz na przykład wyznaczyć przemieszczenie *kątowe*, opuść początkowo słowo *kątowe* i zobacz, czy potrafisz rozwiązać takie zadanie, korzystając z zapisu i pojęć z rozdziału 2.

Zmienne obrotowe

Chcemy opisać obrót ciała sztywnego wokół stałej osi. **Ciało sztywne** to ciało, które obraca się w taki sposób, że wszystkie jego części są związane ze sobą, dzięki czemu kształt ciała nie ulega zmianie. Termin **stała oś** oznacza, że obrót zachodzi wokół osi, której położenie nie zmienia się w czasie ruchu ciała. Nie będziemy zatem badać ruchu takich ciał jak Słońce, którego części (Słońce jest kulą gazu) nie obracają się razem. Nie będziemy się też zajmować na przykład ruchem kuli do kręgli w czasie jej ruchu wzdłuż toru kręgielni, gdyż obraca się ona wokół osi, która zmienia swoje położenie (ruch kuli do kręgli jest złożeniem ruchu obrotowego i postępowego).

Na rysunku 10.2 przedstawiono ciało sztywne o dowolnym kształcie, obracające się wokół stałej osi, którą będziemy nazywać **osią obrotu**. Każdy punkt tego ciała porusza się po okręgu, którego środek leży na osi obrotu i każdy punkt zakreśla w ustalonym czasie taki sam kąt. W ruchu postępowym każdy punkt ciała porusza się po linii prostej i doznaje w ustalonym czasie takiego samego *przemieszczenia liniowego*.



Rys. 10.2. Ciało sztywne o dowolnym kształcie, obracające się wokół osi z układu współrzędnych. *Linia odniesienia* została wybrana w obrębie ciała dowolnie, z tym że jest prostopadła do osi obrotu. Jest ona związana z ciałem i obraca się wraz z nim

Omówimy teraz po kolei odpowiedniki wielkości związanych z ruchem postępowym — położenia, przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia – służące do opisu ruchu obrotowego.

Położenie kątowe

Na rysunku 10.2 pokazano *linię odniesienia* prostopadłą do osi obrotu, związaną z ciałem i obracającą się wraz z nim. **Położeniem kątowym** tej linii nazywamy kąt, jaki tworzy ona z pewnym stałym kierunkiem, wybranym za kierunek o **zerowym położeniu kątowym**. Na rysunku 10.3 położenie kątowe θ jest mierzone względem dodatniego kierunku osi x. Wiemy z geometrii, że:

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(miara łukowa kąta).} \qquad (10.1)$$

We wzorze tym s jest długością łuku okręgu zawartego między osią x (wyznaczającą zerowe położenie kątowe) a linią odniesienia; r jest promieniem okręgu.

Kąt jest tu mierzony w **radianach** (rad), a nie w stopniach, czy liczbie pełnych obrotów. Radian jest równy stosunkowi dwóch wielkości o wymiarze długości, jest zatem liczbą bezwymiarową. Obwód okręgu o promieniu r jest równy $2\pi r$, więc kąt pełny ma 2π radianów:

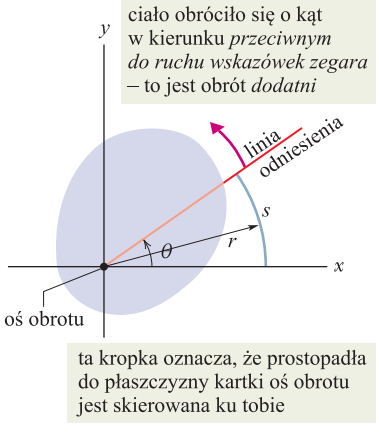
$$1 \text{ pełny obrót} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}, \qquad (10.2)$$

czyli

$$1 \text{ rad} = 57{,}3^\circ = 0{,}159 \text{ pełnego obrotu}. \qquad (10.3)$$

Kąt θ *nie przybiera* znów wartości zero po każdym pełnym obrocie linii odniesienia wokół osi obrotu. Mówimy, że po dwóch pełnych obrotach linii odniesienia, od zerowego położenia kątowego, położenie kątowe θ jest równe $\theta = 4\pi$ rad.

W przypadku ruchu postępowego wzdłuż osi x wiedzieliśmy wszystko o ruchu ciała, jeśli znaliśmy funkcję $x(t)$ wyrażającą zależność położenia ciała od czasu. Podobnie w przypadku ruchu obrotowego pełna informacja o ruchu ciała jest zawarta w funkcji $\theta(t)$, czyli zależności położenia kątowego linii odniesienia ciała od czasu.



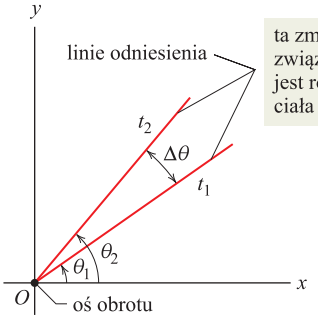
Rys. 10.3. Przekrój płaszczyzną xy obracającego się ciała z rysunku 10.2 (czyli jego „widok z góry"). Płaszczyzna przekroju jest prostopadła do osi obrotu, która jest teraz skierowana prostopadle do kartki, w twoim kierunku. Położenie ciała jest określone przez kąt θ, jaki tworzy linia odniesienia z osią x

Przemieszczenie kątowe

Jeśli ciało z rysunku 10.3 obróci się wokół osi obrotu, jak na rysunku 10.4, czyli położenie kątowe jego linii odniesienia zmieni się z θ_1 na θ_2, to **przemieszczenie kątowe** ciała $\Delta\theta$ wyniesie

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \qquad (10.4)$$

Ta definicja przemieszczenia kątowego odnosi się równie dobrze do ciała sztywnego jako całości, jak i do *każdej cząstki tego ciała*.



ta zmiana położenia kątowego związanej z ciałem linii odniesienia jest równa przemieszczeniu kątowemu ciała w podanym przedziale czasu

Rys. 10.4. Linia odniesienia ciała sztywnego z rysunków 10.2 i 10.3 ma w chwili t_1 położenie kątowe θ_1, a w pewnej późniejszej chwili t_2 położenie kątowe θ_2. Wielkość $\Delta\theta$ ($= \theta_2 - \theta_1$) jest przemieszczeniem kątowym ciała w przedziale czasu Δt ($= t_2 - t_1$). Samo ciało sztywne nie zostało narysowane

Kierunek obrotu. W przypadku ruchu postępowego ciała wzdłuż osi x jego przemieszczenie Δx może być dodatnie lub ujemne, w zależności od tego, czy ciało porusza się w dodatnim, czy ujemnym kierunku osi. Podobnie przemieszczenie kątowe ciała może być dodatnie lub ujemne w zależności od tego, w którą stronę zachodzi jego obrót.

Przesunięcie kątowe jest dodatnie, jeśli obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a jest ujemne, jeśli obrót zachodzi w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Stwierdzenie, że „zegar jest ujemny", może ci pomóc w skutecznym zapamiętaniu tej reguły.

Sprawdzian 1

Krążek może się obracać wokół osi przechodzącej przez jego środek jak platforma karuzeli. Które z podanych niżej par wartości jego kątowego położenia początkowego i końcowego odpowiadają ujemnemu przemieszczeniu kątowemu: a) −3 rad, +5 rad, b) −3 rad, −7 rad, c) 7 rad, −3 rad?

Prędkość kątowa

Załóżmy (patrz rys. 10.4), że położenie kątowe ciała w chwili t_1 wynosi θ_1, a w chwili t_2 wynosi ono θ_2. **Średnią prędkość kątową** ciała w przedziale czasu Δt od t_1 do t_2 definiujemy jako

$$\omega_{śr} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \qquad (10.5)$$

przy czym $\Delta\theta$ jest przemieszczeniem kątowym ciała w przedziale czasu Δt (ω to mała litera grecka omega).

Prędkość kątowa ω (**chwilowa**), która będzie nam najbardziej przydatna, jest określona jako granica ilorazu w równaniu (10.5), przy Δt dążącym do zera. Zatem mamy

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \qquad (10.6)$$

Jeśli znamy funkcję $\theta(t)$, to prędkość kątową ω możemy obliczyć jako pochodną tej funkcji.

Wzory (10.5) i (10.6) odnoszą się zarówno do obracającego się ciała sztywnego jako całości, jak i do *każdej cząstki tego ciała*, gdyż te cząstki są ze sobą sztywno związane. Najczęściej stosowanymi jednostkami prędkości kątowej są radian na sekundę (rad/s) i obrót na sekundę. Jeszcze innej jednostki prędkości kątowej używano przez ponad trzydzieści lat istnienia muzyki rockowej: muzykę zapisywano wówczas na płytach winylowych, a do ich odtwarzania stosowano gramofony (adaptery), których talerz obracał się z prędkością „$33\frac{1}{3}$ rpm" lub „45 rpm", co oznacza $33\frac{1}{3}$ lub 45 obrotów na minutę.

W przypadku ruchu postępowego cząstki wzdłuż osi x jej prędkość liniowa v może być dodatnia lub ujemna, w zależności od tego, czy cząstka ta porusza się w dodatnim, czy ujemnym kierunku osi. Podobnie prędkość kątowa ω obracającego się ciała sztywnego może być dodatnia lub ujemna w zależności od tego, czy obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (wtedy jest dodatnia), czy w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (wtedy jest ujemna — jak poprzednio: „zegar jest ujemny"). Wartość bezwzględną prędkości kątowej oznaczamy także literą ω.

Przyspieszenie kątowe

Jeśli prędkość kątowa obracającego się ciała nie jest stała, to ciało ma przyspieszenie kątowe. Załóżmy, że prędkość kątowa ciała wynosi ω_1 w chwili t_1 i ω_2 w chwili t_2. **Średnie przyspieszenie kątowe** obracającego się ciała, w przedziale czasu od t_1 do t_2, jest zdefiniowane jako

$$\alpha_{śr} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (10.7)$$

przy czym $\Delta\omega$ jest zmianą prędkości kątowej ciała w przedziale czasu Δt. **Przyspieszenie kątowe** α (**chwilowe**), które będzie nam najbardziej przydatne, jest określone jako granica ilorazu w równaniu (10.7) przy Δt dążącym do zera. Zatem mamy

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (10.8)$$

Jak wskazuje sama nazwa, jest to przyspieszenie kątowe ciała w danej chwili. Wzory (10.7) i (10.8) odnoszą się zarówno do obracającego się ciała sztywnego jako całości, jak i do *każdej cząstki tego ciała*. Najczęściej stosowanymi jednostkami przyspieszenia kątowego są radian na sekundę kwadrat (rad/s^2) i obrót na sekundę kwadrat.

Przykład 10.01. Od położenia kątowego do prędkości kątowej

Krążek przedstawiony na rysunku 10.5a obraca się jak karuzela wokół osi przechodzącej przez jego środek. Położenie kątowe $\theta(t)$ jego linii odniesienia zależy od czasu zgodnie z wyrażeniem

$$\theta = -1 - 0{,}6t + 0{,}25t^2, \qquad (10.9)$$

przy czym t jest wyrażone w sekundach, θ — w radianach, a zerowe położenie kątowe pokazano na rysunku. (Jeśli chcesz, możesz na razie rozpatrzeć analogiczne zadania dotyczące ruchu postępowego z rozdziału 2. W tym celu opuść słowo „kątowe" i zastąp symbol θ symbolem x, co da ci równanie na położenie ciała jako funkcji czasu dla ruchu prostoliniowego z rozdziału 2).

a) Sporządź wykres zależności położenia kątowego krążka od czasu w przedziale czasu od $t = -3$ s do $t = 5{,}4$ s. Naszkicuj krążek i położenie kątowe jego linii odniesienia w chwilach $t = -2$ s, 0 s i 4 s oraz w chwilach, dla których otrzymana krzywa przecina oś t.

PODSTAWOWE FAKTY

Położenie kątowe krążka jest to położenie kątowe jego linii odniesienia $\theta(t)$, które zależy od czasu zgodnie z równaniem (10.9). Wobec tego musimy sporządzić wykres funkcji danej równaniem (10.9). Wynik przedstawiono na rysunku 10.5b.

Obliczenia: Aby sporządzić rysunki krążka i jego linii odniesienia w określonej chwili, musimy wyznaczyć wartość θ w tej chwili. w tym celu podstawiamy do wzoru (10.9) odpowiednią wartość czasu. Dla $t = -2$ s otrzymujemy

$$\theta(t) = -1 - (0{,}6)(-2) + (0{,}25)(-2)^2 = 1{,}2 \text{ rad}$$
$$= 1{,}2 \text{ rad}\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 69^\circ.$$

Wynik ten oznacza, że w chwili $t = -2$ s linia odniesienia krążka jest obrócona w stosunku do kierunku zerowego położenia kątowego o 1,2 rad, czyli 69°, w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (przeciwnym, gdyż θ jest dodatnie). To położenie kątowe linii odniesienia przedstawiono na szkicu 1 z rysunku 10.5b.

W taki sam sposób dla $t = 0$ otrzymujemy $\theta = -1$ rad $= -57^\circ$, co oznacza, że linia odniesienia krążka jest obrócona w stosunku do zerowego położenia kątowego o 1 rad, czyli 57°, w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, co przedstawiono na szkicu 3. Dla $t = 4$ s otrzymujemy $\theta = 0{,}6$ rad $= 34^\circ$ (szkic 5). Wykonanie rysunków dla punktów przecięcia krzywej z osią t jest łatwe, bo wtedy $\theta = 0$, a więc w takiej chwili linia odniesienia pokrywa się chwilowo z kierunkiem zerowego położenia kątowego (szkice 2 i 4).

b) W jakiej chwili, którą oznaczymy przez t_{min}, funkcja $\theta(t)$ przybiera wartość minimalną widoczną na rysunku 10.5b? Ile wynosi ta najmniejsza wartość θ?

PODSTAWOWE FAKTY

Aby wyznaczyć ekstremum funkcji (w naszym przypadku minimum), należy obliczyć pierwszą pochodną tej funkcji i przyrównać ją do zera.

Obliczenia: Pierwsza pochodna $\theta(t)$ jest równa

$$\frac{d\theta}{dt} = -0{,}6 + 0{,}5t. \qquad (10.10)$$

Przyrównując ją do zera i rozwiązując otrzymane równanie względem t, znajdujemy czas odpowiadający minimum $\theta(t)$

$$t_{min} = 1{,}2 \text{ s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Aby wyznaczyć minimalną wartość θ, podstawiamy t_{min} do równania (10.9) i otrzymujemy

$$\theta = -1{,}36 \text{ rad} \approx -77{,}9^\circ \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Ta *minimalna* wartość $\theta(t)$ (najniższy punkt krzywej z rys. 10.5b) odpowiada *maksymalnemu* obrotowi krążka *w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara* względem zerowego położenia kątowego, nieco większemu niż na szkicu 3.

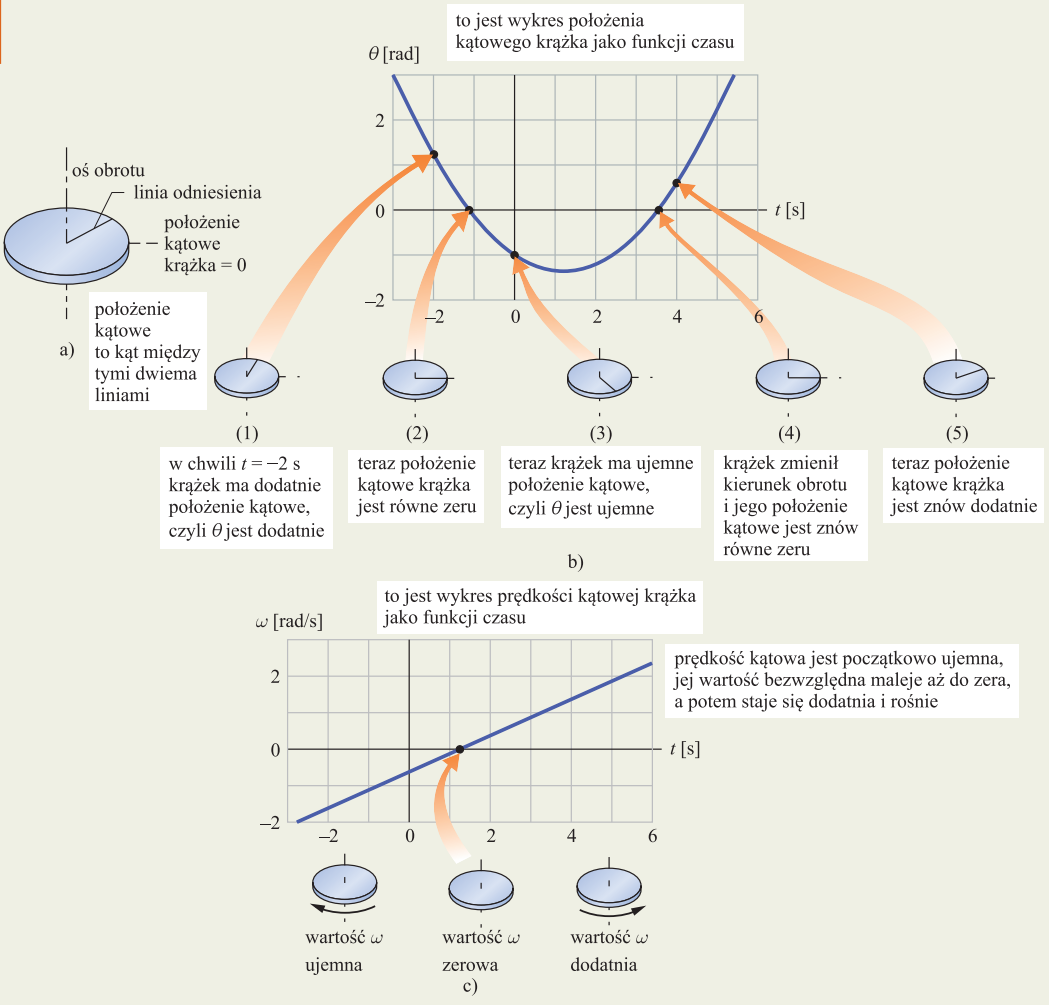
c) Sporządź wykres prędkości kątowej krążka ω, jako funkcji czasu, w przedziale czasu od $t = -3$ s do $t = 6$ s. Naszkicuj krążek i wskaż kierunek jego obrotu oraz znak ω w chwilach $t = -2$ s i 4 s oraz w chwili t_{min}.

PODSTAWOWE FAKTY

Prędkość kątowa ω jest równa $d\theta/dt$. Dla zależności $\theta(t)$ danej wzorem (10.6) obliczyliśmy już tę pochodną w równaniu (10.10). Mamy zatem

$$\omega = -0{,}6 + 0{,}5t. \qquad (10.11)$$

Wykres funkcji $\omega(t)$ przedstawiono na rysunku 10.5c.



Rys. 10.5. a) Obracający się krążek. b) Wykres $\theta(t)$ — położenia kątowego krążka jako funkcji czasu. Na pięciu małych rysuneczkach przedstawiono położenie kątowe linii odniesienia krążka dla pięciu punktów krzywej $\theta(t)$. c) Wykres $\omega(t)$ — prędkości kątowej krążka jako funkcji czasu. Dodatnia wartość ω odpowiada obrotowi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a jej wartość ujemna — obrotowi w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara

Jest to funkcja liniowa, więc jej wykresem jest prosta. Ma ona nachylenie (współczynnik kierunkowy) 0,5 rad/s^2 i przecina oś pionową w (niezaznaczonym na rysunku) punkcie o współrzędnej −0,6 rad/s.

Obliczenia: Aby naszkicować krążek w chwili $t = -2$ s, podstawiamy tę wartość do wzoru (10.11) i otrzymujemy

$$\omega = -1{,}6 \text{ rad/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Znak minus oznacza, że w chwili $t = -2$ s krążek obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, co zaznaczyliśmy na rysunku 10.5c na lewym szkicu.

Podstawiając do wzoru (10.11) $t = 4$ s, otrzymujemy

$$\omega = 1{,}4 \text{ rad/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Jest to prędkość dodatnia, a zatem w chwili $t = 4$ s krążek obraca się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (prawy szkic na rys. 11.5c).

Wiemy już, że w chwili t_{min} mamy $d\theta/dt = 0$, skąd wynika, że $\omega = 0$. Zatem w tej chwili, w której linia odniesienia krążka osiąga położenie odpowiadające najmniejszej wartości θ na rysunku 10.5b, prędkość kątowa krążka przybiera wartość zero, co pokazano na środkowym szkicu na rysunku 10.5c. Na wykresie ω jako funkcji t z rysunku 10.5c punkt odpowiadający prędkości kątowej równej zeru to punkt przecięcia wykresu z osią poziomą, gdy zachodzi zmiana kierunku ruchu obrotowego z ujemnego (zgodnego z kierunkiem ruchu wskazówek zegara) na dodatni (przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara).

d) Korzystając z uzyskanych dotąd informacji, opisz ruch krążka w przedziale czasu od $t = -3$ s do $t = 6$ s.

Opis: W pierwszej chwili, w której badamy ruch krążka, tzn. w chwili $t = -3$ s, położenie kątowe krążka jest dodatnie i obraca się on w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, lecz z coraz mniejszą prędkością. W chwili, gdy jego położenie kątowe jest równe $\theta = -1{,}36$ rad, prędkość kątowa krążka przybiera wartość zero, a następnie zaczyna się on obracać w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a jego położenie kątowe staje się po pewnym czasie ponownie dodatnie.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 10.02. Od przyspieszenia kątowego do prędkości kątowej

Bąk (popularna zabawka) obraca się z przyspieszeniem kątowym danym wzorem

$$\alpha = 5t^3 - 4t,$$

gdzie t jest wyrażone w sekundach, a α w radianach na sekundę kwadrat. w chwili $t = 0$ bąk ma prędkość kątową 5 rad/s, a położenie kątowe linii odniesienia wynosi $\theta = 2$ rad.

a) Znajdź wyrażenie opisujące prędkość kątową bąka jako funkcję czasu, $\omega(t)$, innymi słowy zależność prędkości kątowej bąka od czasu. (Prędkość kątowa bąka musi się zmieniać z upływem czasu, bo występuje przyspieszenie kątowe).

PODSTAWOWE FAKTY

Z definicji przyspieszenia kątowego wiemy, że $\alpha(t)$ jest pochodną $\omega(t)$ względem czasu. Wobec tego $\omega(t)$ jest całką funkcji $\alpha(t)$ względem czasu.

Obliczenia: Z równania (10.8) wynika, że

$$d\omega = \alpha dt,$$

a zatem

$$\int d\omega = \int \alpha dt.$$

Dostajemy więc

$$\omega = \int (5t^3 - 4t)dt = \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Aby wyznaczyć stałą całkowania C, korzystamy z faktu, że w chwili $t = 0$ prędkość kątowa $\omega = 5$ rad/s, co daje

$$5 \text{ rad/s} = 0 - 0 + C,$$

a zatem $C = 5$ rad/s. Wobec tego

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Znajdź wyrażenie opisujące położenie kątowe bąka jako funkcję czasu, $\theta(t)$.

PODSTAWOWE FAKTY

Z definicji prędkości kątowej wiemy, że $\omega(t)$ jest pochodną $\theta(t)$ względem czasu. Wobec tego $\theta(t)$ jest całką funkcji $\omega(t)$ względem czasu.

Obliczenia: Z równania (10.6) wynika, że

$$d\theta = \omega dt,$$

a zatem

$$\theta = \int \omega dt = \int (\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5)dt = \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C'$$
$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2 \qquad \text{(odpowiedź)},$$

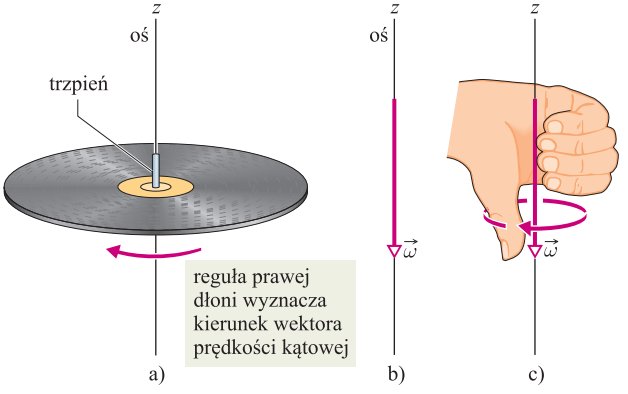
gdzie stałą C' obliczono, zauważając, że w chwili $t = 0$ położenie kątowe $\theta = 2$ rad.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Czy wielkości kątowe są wektorami?

Przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie pojedynczej cząstki można opisać za pomocą wektorów. Jeśli jednak cząstka porusza się po linii prostej, to zapis wektorowy nie jest nam naprawdę potrzebny. Taka cząstka ma bowiem do wyboru jedynie dwa kierunki ruchu, do których rozróżnienia wystarczą nam znaki plus i minus.

Podobnie ciało sztywne obracające się wokół stałej osi może obracać się względem tej osi jedynie w kierunku zgodnym lub przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a te kierunki możemy znów rozróżnić, korzystając ze znaków plus i minus. Nasuwa się jednak pytanie: czy przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie kątowe obracającego się ciała sztywnego można opisać za pomocą wektorów? Odpowiedź brzmi: tak, choć z jednym zastrzeżeniem, o którym powiemy za chwilę, gdy dojdziemy do przemieszczeń kątowych.



Rys. 10.6. a) Płyta obracająca się wokół osi pionowej zgodnej z kierunkiem trzpienia talerza gramofonu. b) Prędkość kątową obracającej się płyty można opisać za pomocą wektora $\vec{\omega}$ leżącego na osi obrotu i skierowanego w dół, jak na rysunku. c) Ustaliliśmy, że kierunek wektora prędkości kątowej to kierunek w dół, korzystając z reguły prawej dłoni. Gdy palce zwiniętej prawej dłoni otaczają oś obrotu tak, że końce palców wskazują kierunek obrotu, odchylony kciuk wskazuje kierunek wektora $\vec{\omega}$

Prędkość kątowa. Rozważmy najpierw prędkość kątową. Na rysunku 10.6a przedstawiono płytę gramofonową obracającą się na talerzu adaptera. Ma ona stałą prędkość kątową ω ($= 33\frac{1}{3}$ obrotów na minutę) o kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Tej prędkości kątowej możemy przypisać wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$, skierowany wzdłuż osi obrotu, jak na rysunku 10.6b. Robimy to tak: ustalamy długość wektora w pewnej dogodnej skali, na przykład przyjmując, że 1 cm odpowiada 10 obrotom na minutę, a następnie ustalamy kierunek wektora $\vec{\omega}$, korzystając z **reguły prawej dłoni**. W tym celu, jak pokazano na rysunku 10.6c, otaczamy palcami prawej ręki oś obrotu płyty tak, aby końce palców wskazywały *kierunek obrotu*. Odchylony kciuk wskazuje wówczas kierunek wektora prędkości kątowej. Gdyby płyta obracała się w przeciwną stronę, reguła prawej dłoni wskazałaby, że wektor prędkości kątowej powinien być skierowany przeciwnie.

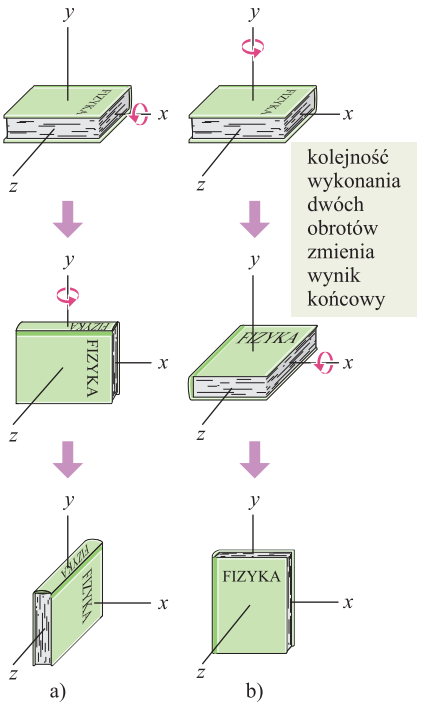
Nie jest łatwo przyzwyczaić się do faktu, że wielkości kątowe są wektorami. Instynktownie czujemy, że coś powinno się poruszać *w kierunku* wektora. W tym przypadku nic takiego nie zachodzi. Natomiast coś (ciało sztywne) obraca się *wokół* kierunku wektora. W czystym ruchu obrotowym wektor definiuje oś obrotu, a nie kierunek, w którym coś się porusza. Niemniej jednak wektor ten daje informacje o ruchu obracającego się ciała. Ponadto spełnia on wszystkie prawa działań na wektorach omówione w roz-

dziale 3. Przyspieszenie kątowe $\vec{\alpha}$ też jest wektorem i też spełnia te prawa działań.

W tym rozdziale będziemy zajmować się jedynie obrotami wokół stałej osi. W tych warunkach wielkości wektorowe nie będą nam potrzebne. Do oznaczenia kierunku prędkości kątowej ω i przyspieszenia kątowego α wystarczy nam ich znak: plus dla kierunku przeciwnego do kierunku ruchu wskazówek zegara oraz minus dla kierunku zgodnego z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Przemieszczenie kątowe. A teraz zastrzeżenie, o którym wspomnieliśmy na początku tego paragrafu: *przemieszczeniom* kątowym (o ile nie są bardzo małe) *nie można* przypisać wektorów. Dlaczego? Przecież bez trudu możemy im przypisać wartość i kierunek, tak samo jak określiliśmy wektor prędkości kątowej na rysunku 10.6. To jednak nie wystarczy — aby pewną wielkość można było uważać za wektor, muszą być dla niej *ponadto* spełnione prawa działań na wektorach, które między innymi mówią, że suma dwóch wektorów nie zależy od kolejności, w jakiej je do siebie dodajemy. Przemieszczenia kątowe nie spełniają tego kryterium.

Pokażemy to na przykładzie przedstawionym na rysunku 10.7. Książka, która jest początkowo w pozycji poziomej zostaje poddana dwóm przemieszczeniom kątowym o 90°, najpierw w kolejności z rysunku 10.7a, a następnie w kolejności z rysunku 10.7b. Choć przemieszczenia kątowe są w obydwu przypadkach takie same, to ich kolejność jest inna i ustawienia końcowe książki są różne. I jeszcze inny przykład. Opuść prawe ramię w dół z dłonią w stronę uda. Nie obracając ręki w nadgarstku, wykonaj następujące ruchy: 1) podnieś ramię w przód do położenia poziomego, 2) obróć je w poziomie aż będzie skierowane w prawo, 3) opuść ramię do położenia pionowego w dół. Dłoń jest skierowana do przodu. Sprawdź, jak skierowana będzie dłoń, jeśli wykonasz obroty ramienia w odwrotnej kolejności (do położenia poziomego w prawo, w poziomie do przodu, w dół). Z obydwu przykładów wynika, że suma przemieszczeń kątowych zależy od kolejności ich dodawania, a więc te przemieszczenia nie mogą być uznane za wektory.



Rys. 10.7. a) Książka zostaje poddana dwóm kolejnym obrotom o 90°, najpierw wokół osi x (poziomej), a potem wokół osi y (pionowej). b) Książka zostaje poddana tym samym dwóm obrotom, lecz w odwrotnej kolejności

10.2. OBRÓT ZE STAŁYM PRZYSPIESZENIEM KĄTOWYM

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

10.14 wykorzystać zależności między położeniem kątowym, przemieszczeniem kątowym, prędkością kątową, przyspieszeniem kątowym i czasem w przypadku ruchu obrotowego ze stałym przyspieszeniem kątowym (tab. 10.1).

Podstawowe fakty

- Ruch obrotowy ze stałym przyspieszeniem kątowym ($\alpha = \text{const}$) to ważny przypadek szczególny ruchu obrotowego. Obowiązują wtedy następujące równania kinematyczne:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$
$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2,$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0),$$
$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t,$$
$$\theta - \theta_0 = \omega t - \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Obrót ze stałym przyspieszeniem kątowym

Przy omawianiu ruchu postępowego ruch *ze stałym przyspieszeniem liniowym* (np. ruch spadającego ciała) traktowaliśmy jako ważny przypadek szczególny. W tabeli 2.1 przedstawiliśmy równania opisujące taki ruch.

Podobnie postąpimy, omawiając ruch wyłącznie obrotowy: obrót *ze stałym przyspieszeniem kątowym* jest też ważnym przypadkiem szczególnym opisywanym przez analogiczny zestaw równań. Nie będziemy ich tu wyprowadzać, lecz po prostu wypiszemy je przez analogię do odpowiednich równań dla ruchu postępowego, zastępując w nich wielkości liniowe wielkościami kątowymi. Wynik przedstawiono w tabeli 10.1, w której podano obydwa zestawy równań (równania (2.11) i (2.15)–(2.18) oraz (10.12)–(10.16)).

Przypomnij sobie, że równania (2.11) i (2.15) są podstawowymi równaniami ruchu postępowego ze stałym przyspieszeniem — pozostałe można z nich wyprowadzić. Podobnie równania (10.12) i (10.13) są podstawowymi równaniami ruchu obrotowego ze stałym przyspieszeniem kątowym — pozostałe można z nich wyprowadzić. Aby rozwiązać proste zadanie dotyczące ruchu ze stałym przyspieszeniem kątowym, wystarczy zwykle znaleźć stosowne równanie w zestawie z tabeli 10.1 (*jeśli* oczywiście jest ona pod ręką). Należy wybrać równanie, w którym jedyną wielkością nieznaną jest wielkość szukana w zadaniu. Jeszcze wygodniej jest pamiętać tylko równania (10.12) oraz (10.13) i rozwiązywać je jako układ równań, gdy zachodzi taka potrzeba.

Sprawdzian 2

Rozważ cztery przypadki, w których położenie kątowe obracającego się ciała jest dane wyrażeniami: a) $\theta = 3t - 4$, b) $\theta = -5t^3 + 4t^2 + 6$, c) $\theta = 2/t^2 - 4/t$, d) $\theta = 5t^2 - 3$. W którym z tych przypadków można zastosować równania dla wielkości kątowych z tabeli 10.1?

Tabela 10.1. Równania ruchu ze stałym przyspieszeniem liniowym oraz ze stałym przyspieszeniem kątowym

Numer równania	Równanie (ruch postępowy)	Brakująca wielkość		Równanie (ruch obrotowy)	Numer równania
(2.11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(10.12)
(2.15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10.13)
(2.16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(10.14)
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(10.15)
(2.18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10.16)

Przykład 10.03. Stałe przyspieszenie kątowe, tarcza szlifierska

Tarcza szlifierska (rys. 10.8) obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym $\alpha = 0{,}35$ rad/s^2. W chwili $t = 0$ jej prędkość kątowa wynosi $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s, a linia odniesienia jest pozioma, co odpowiada położeniu kątowemu $\theta_0 = 0$.

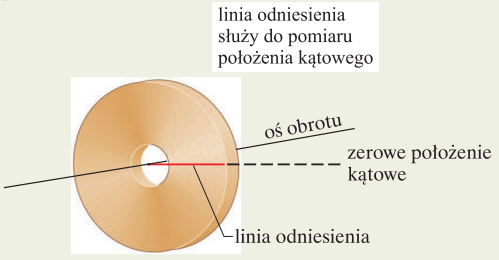
a) Po jakim czasie od chwili $t = 0$ linia odniesienia znajdzie się w położeniu θ, odpowiadającym 5 pełnym obrotom?

PODSTAWOWE FAKTY

Ruch tarczy odbywa się ze stałym przyspieszeniem kątowym, a zatem możemy skorzystać z równań ruchu obrotowego z tabeli 10.1. Wybieramy równanie (10.13)

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2,$$

gdyż jedyną wielkością niewiadomą jest w nim szukany przez nas czas t.



Rys. 10.8. Tarcza szlifierska. W chwili $t = 0$ linia odniesienia (którą zaznaczyliśmy w wyobraźni na tarczy) jest pozioma

Obliczenia: Podstawiając do tego równania wartości dane i przyjmując, że $\theta_0 = 0$ oraz $\theta = 5$ pełnych obrotów $= 10\pi$ rad, otrzymujemy

$$10\pi \text{ rad} = (-4{,}6 \text{ rad/s})t + \tfrac{1}{2}(0{,}35 \text{ rad/s}^2)t^2$$

(w celu uzyskania jednolitych jednostek zamieniliśmy 5 pełnych obrotów na 10π rad). Rozwiązaniem równania kwadratowego jest

$$t = 32 \text{ s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Czy to nie jest trochę dziwne? W chwili $t = 0$ tarcza miała położenie $\theta = 0$ i obracała się w kierunku ujemnym, a przed chwilą stwierdziliśmy, że 32 s później ma ona położenie dodatnie $\theta = 5$ pełnych obrotów. Co takiego zdarzyło się w tym czasie, że położenie kątowe tarczy zmieniło się na dodatnie?

b) Opisz ruch obrotowy tarczy od chwili $t = 0$ do chwili $t = 32$ s.

Opis: Tarcza obraca się w chwili początkowej w kierunku ujemnym (tzn. zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara), z prędkością kątową $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s, lecz jej przyspieszenie kątowe α jest dodatnie. W wyniku tego, że znaki prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego są przeciwne, tarcza porusza się w kierunku ujemnym coraz wolniej, aż do osiągnięcia prędkości kątowej równej zeru, po czym zaczyna obracać się w kierunku dodatnim. W pewnej chwili linia odniesienia przyjmuje znów położenie $\theta = 0$, a do chwili $t = 32$ s tarcza wykonuje jeszcze dalsze 5 obrotów w kierunku dodatnim.

c) W jakiej chwili t tarcza osiąga prędkość kątową równą zeru?

Obliczenia: Ponownie sięgamy do tabeli z równaniami dla ruchu ze stałym przyspieszeniem kątowym, aby wybrać z niej równanie, które nie zawiera jedynie wielkości szukanej. Musimy jednak pamiętać o tym, że równanie to powinno zawierać także zmienną ω, abyśmy mogli przyrównać ją do zera i rozwiązać otrzymane równanie względem t. Warunki te spełnia równanie (11.12), z którego otrzymujemy

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{(0) - (-4{,}6 \text{ rad/s})}{(0{,}35 \text{ rad/s}^2)} = 13 \text{ s}$$

(odpowiedź).

Przykład 10.04. Stałe przyspieszenie kątowe, jazda w rotorze

Wyobraź sobie, że jesteś operatorem rotora (dużego, pionowego, obracającego się pomieszczenia w kształcie walca, jakie można czasem spotkać w wesołym miasteczku) i spostrzegasz, że jeden z pasażerów zdradza oznaki paniki (wskazujące na to, że znacznie bardziej odpowiada mu ruch postępowy niż obrotowy). Wobec tego zmniejszasz prędkość kątową walca z 3,4 rad/s do 2 rad/s w ciągu 20 pełnych obrotów walca, w czasie których walec obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym.

a) Ile wynosi przyspieszenie kątowe podczas zmniejszania prędkości kątowej walca?

PODSTAWOWE FAKTY

Przyspieszenie kątowe jest stałe, a więc możemy powiązać przyspieszenie kątowe walca z jego prędkością kątową i przemieszczeniem kątowym za pomocą podstawowych równań ruchu obrotowego ze stałym przyspieszeniem kątowym, czyli równań (10.12) i (10.13).

Obliczenia: Sprawdźmy szybko, czy uda nam się rozwiązać równania podstawowe. Początkowa prędkość kątowa jest równa $\omega_0 = 3{,}4$ rad/s, przemieszczenie kątowe wynosi $\theta - \theta_0 = 20$ obrotów, a prędkość kątowa na końcu tego przemieszczenia jest $\omega = 2$ rad/s. Nie

znamy jednak przyspieszenia kątowego α ani czasu t, a obie te wielkości występują w obydwu podstawowych równaniach ruchu.

W celu wyeliminowania zmiennej t wyznaczamy ją z równania (10.12), co daje

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

a następnie podstawiamy to wyrażenie do wzoru (10.13). Otrzymujemy w ten sposób równanie

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2.$$

Rozwiązując je względem α, podstawiając wartości liczbowe danych i zamieniając 20 obrotów na 125,7 rad, dostajemy

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2\ \text{rad/s})^2 - (3{,}4\ \text{rad/s})^2}{2(125{,}7\ \text{rad})}$$
$$= -0{,}0301\ \text{rad/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Ile czasu trwało to zmniejszenie prędkości kątowej walca?

Obliczenia: Teraz, gdy znamy już wartość α, możemy wyznaczyć t z równania (10.12), co daje

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{(2\ \text{rad/s}) - (3{,}4\ \text{rad/s})}{(-0{,}0301\ \text{rad/s}^2)} = 46{,}5\ \text{s}$$
(odpowiedź).

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

10.3. ZWIĄZEK ZMIENNYCH LINIOWYCH Z KĄTOWYMI

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

10.15 powiązać zmienne kątowe ciała (położenie kątowe, prędkość kątową i przyspieszenie kątowe) ze zmiennymi liniowymi cząstek tego ciała (położeniem, prędkością i przyspieszeniem) oraz odległością od osi obrotu w przypadku ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi;

10.16 odróżnić od siebie przyspieszenie styczne i radialne oraz nanieść ich wektory na rysunek ciała obracającego się wokół osi i wybranej jego cząstki w przypadku rosnącej oraz malejącej prędkości kątowej.

Podstawowe fakty

- Punkt obracającego się ciała sztywnego odległy od osi obrotu o r porusza się po okręgu o promieniu r. Gdy ciało obraca się o kąt θ, punkt przebywa łuk okręgu o długości s, danej wzorem

$$s = \theta r \qquad \text{(miara łukowa)},$$

gdzie kąt θ musi tu być mierzony w radianach.

- Prędkość liniowa $\vec{v}$ tego punktu jest styczna do okręgu, a jej wartość bezwzględna v wynosi

$$v = \omega r \qquad \text{(miara łukowa)},$$

gdzie ω jest wartością bezwzględną prędkości kątowej (wyrażoną w radianach na sekundę) obracającego się ciała i każdego jego punktu.

- Przyspieszenie liniowe $\vec{a}$ tego punktu ma składowe styczną i radialną. Składowa styczna ma wartość

$$a_{st} = \alpha r \qquad \text{(miara łukowa)},$$

gdzie α jest wartością bezwzględną przyspieszenia kątowego ciała (wyrażoną w radianach na sekundę kwadrat). Składowa radialna wektora $\vec{a}$ ma wartość

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(miara łukowa)}.$$

- Jeśli punkt ciała porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, to okres obrotu T, odnoszący się zarówno do ruchu punktu, jak i do ciała sztywnego jako całości wynosi

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(miara łukowa)}.$$

Związek zmiennych liniowych z kątowymi

W podrozdziale 4.5 omówiliśmy ruch jednostajny po okręgu, w którym cząstka porusza się z prędkością o stałej wartości bezwzględnej v po okręgu, a więc wokół pewnej osi. Gdy ciało sztywne, na przykład karuzela, obraca się wokół osi, każda jego cząstka zatacza okrąg wokół tej osi. Ciało jest sztywne, a więc każda z tych cząstek dokonuje pełnego obiegu w takim samym czasie, tzn. każda porusza się z taką samą prędkością kątową ω.

Jednak im dalej cząstka jest od osi obrotu, tym większy jest obwód zakreślanego przez nią okręgu, a zatem tym większa musi być jej prędkość liniowa v. Możesz to łatwo zauważyć na karuzeli. Niezależnie od tego, jak daleko jesteś od osi obrotu, poruszasz się z taką samą prędkością kątową ω, lecz twoja prędkość liniowa v wyraźnie wzrasta, jeśli przesuwasz się w stronę zewnętrznego skraju karuzeli.

Często potrzebny jest związek wielkości liniowych s, v i a dla pewnego punktu obracającego się ciała z wielkościami kątowymi θ, ω i α dla ciała sztywnego jako całości. Te dwa zestawy zmiennych wiąże ze sobą wielkość r, czyli odległość punktu od osi obrotu. Ta odległość to długość odcinka prostopadłego do osi obrotu, łączącego dany punkt z osią. Jest to również promień okręgu r, po którym porusza się dany punkt przy obrocie ciała wokół tej osi.

Położenie

Gdy linia odniesienia ciała sztywnego obraca się o kąt θ, punkt tego ciała odległy od osi obrotu o r przebywa łuk okręgu o długości s danej wzorem (10.1):

$$s = \theta r \qquad \text{(miara łukowa)}. \tag{10.17}$$

Jest to pierwszy z poszukiwanych przez nas związków między wielkościami liniowymi i kątowymi. *Uwaga*: Kąt θ musi tu być mierzony w radianach — równanie (10.17) jest inną postacią definicji miary łukowej kąta (10.1).

Prędkość

Różniczkując równanie (10.17) względem czasu, otrzymujemy

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r,$$

ponieważ r nie zależy od czasu. Wielkość ds/dt nie jest niczym innym, jak wartością bezwzględną prędkości liniowej rozważanego punktu, a $d\theta/dt$ — prędkością kątową ω obracającego się ciała. Wobec tego

$$v = \omega r \qquad \text{(miara łukowa)}. \tag{10.18}$$

Uwaga: Prędkość kątowa ω musi odnosić się do kąta, który jest wyrażony w mierze łukowej.

Równanie (10.18) ilustruje fakt, że choć wszystkie punkty ciała sztywnego mają taką samą prędkość kątową ω, to punkty o większej odległości r od osi obrotu mają prędkość liniową v o większej wartości. Rysunek 10.9a

przypomina nam, że wektor prędkości liniowej jest zawsze styczny do toru cząstki, którym jest w naszym przypadku okrąg.

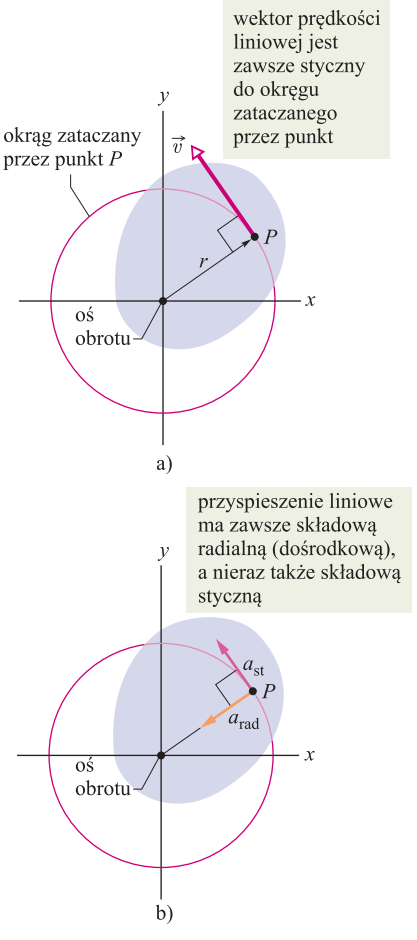
Z równania (10.18) wynika, że jeśli prędkość kątowa ω ciała sztywnego jest stała, to stała jest także prędkość liniowa v każdego punktu tego ciała. Każdy punkt ciała porusza się więc w tym przypadku ruchem jednostajnym po okręgu. Okres obrotu T, odnoszący się zarówno do ruchu każdego punktu ciała, jak i do ciała sztywnego jako całości, jest dany wzorem (4.35), tzn.

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \tag{10.19}$$

Równanie to ilustruje fakt, że czas pełnego obrotu ciała jest równy ilorazowi drogi przebytej przy tym przez dowolny punkt ciała, tzn. $2\pi r$, i prędkości v, z jaką ta droga została przebyta. Podstawiając do tego równania wyrażenie na v ze wzoru (10.18), otrzymujemy

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(miara łukowa)}, \tag{10.20}$$

gdyż r się skraca. Z równania tego wynika, że czas pełnego obrotu ciała jest także równy ilorazowi doznanego w tym czasie przez ciało przemieszczenia kątowego, tzn. 2π rad i prędkości kątowej ω (nazywanej również częstością kołową), z jaką odbywał się ruch obrotowy ciała.



Rys. 10.9. Widok z góry obracającego się ciała sztywnego z rysunku 10.2. Każdy punkt tego ciała, np. punkt P, porusza się wokół osi obrotu po okręgu. a) Wektor prędkości liniowej $\vec{v}$ każdego punktu ciała jest styczny do okręgu, po którym ten punkt się porusza. b) Przyspieszenie liniowe $\vec{a}$ dowolnego punktu ciała ma — w przypadku ogólnym — dwie składowe: składową styczną a_{st} i składową radialną a_{rad}

Przyspieszenie

Różniczkując równanie (10.18) względem czasu, otrzymujemy

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r, \tag{10.21}$$

ponieważ r — jak poprzednio — nie zależy od czasu. Tu jednak napotykamy pewną komplikację. Wielkość dv/dt, dana wzorem (10.21), stanowi tylko część przyspieszenia liniowego — tę część, która jest związana ze zmianą *wartości bezwzględnej* v wektora prędkości liniowej $\vec{v}$. Ta część (składowa) przyspieszenia liniowego jest — podobnie jak $\vec{v}$ — styczna do toru rozważanego punktu. Będziemy ją nazywać *składową styczną* przyspieszenia liniowego a_{st} punktu. Jest ona równa

$$a_{st} = \alpha r \qquad \text{(miara łukowa)}, \tag{10.22}$$

przy czym $\alpha = d\omega/dt$. *Uwaga:* Przyspieszenie kątowe α w równaniu (10.22) musi odnosić się do kąta wyrażonego w mierze łukowej.

Jest jednak i druga składowa przyspieszenia liniowego, gdyż — jak wiemy z równania (4.34) — cząstka poruszająca się po okręgu doznaje przyspieszenia skierowanego radialnie (tzn. wzdłuż promienia) do środka okręgu. Tę składową równą $a_{rad} = v^2/r$ nazywamy *składową radialną* przyspieszenia liniowego; powoduje ona zmianę *kierunku* wektora prędkości liniowej $\vec{v}$. Podstawiając do powyższego równania wyrażenie na v ze wzoru (10.18), otrzymujemy

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(miara łukowa)}. \tag{10.23}$$

Tak więc przyspieszenie liniowe dowolnego punktu obracającego się ciała sztywnego ma w przypadku ogólnym dwie składowe. Składowa skierowana do środka okręgu wzdłuż jego promienia (a_{rad} — równanie (10.23)) występuje zawsze wtedy, gdy prędkość kątowa ciała jest różna od zera. Składowa styczna do okręgu (a_{st} — równanie (10.22)) występuje zawsze wtedy, gdy przyspieszenie kątowe ciała jest różne od zera.

Sprawdzian 3

Na zewnętrznym skraju obracającej się karuzeli siedzi karaluch. Czy ten karaluch ma: a) przyspieszenie radialne, b) przyspieszenie styczne, jeśli prędkość kątowa układu karuzela–karaluch jest stała? Czy karaluch ma: c) przyspieszenie radialne, d) przyspieszenie styczne, jeśli ta prędkość kątowa się zmniejsza?

Przykład 10.05. Budujemy Superpierścień, wielką atrakcję w wesołym miasteczku

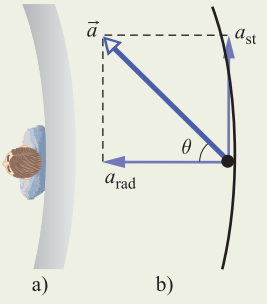
Powierzono nam zaprojektowanie dużego poziomego pierścienia, który ma obracać się wokół osi pionowej i mieć promień $r = 33{,}1$ m (zadanie niemal równie ambitne jak budowa największego na świecie diabelskiego młyna). Pasażerowie mają wchodzić drzwiami w zewnętrznej ścianie pierścienia i stawać przy tej ścianie (rys. 10.10a). Planujemy, aby w czasie od $t = 0$ do $t = 2{,}3$ s położenie kątowe pierścienia $\theta(t)$ zmieniało się z upływem czasu zgodnie ze wzorem

$$\theta = ct^3, \tag{10.24}$$

gdzie $c = 6{,}39 \cdot 10^{-2}$ rad/s^3. Od chwili $t = 2{,}3$ s prędkość kątowa pierścienia ma być stała do końca przejażdżki. Po osiągnięciu przez pierścień tej stałej prędkości podłoga opadnie, lecz pasażerowie nie spadną wraz z nią, gdyż będą przyciśnięci do ściany bocznej urządzenia. Wyznacz prędkość kątową ω, prędkość liniową v, przyspieszenie kątowe α, przyspieszenie styczne a_{st}, przyspieszenie radialne a_{rad} i całkowite przyspieszenie $\vec{a}$ pasażera pierścienia w chwili $t = 2{,}2$ s.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Prędkość kątowa ω jest dana wzorem (10.6) ($\omega = d\theta/dt$). 2) Prędkość liniowa v (wzdłuż kołowego toru) jest związana z prędkością kątową (wokół osi obrotu) wzorem (10.18) ($v = \omega r$). 3) Przyspieszenie kątowe α jest dane wzorem (10.8) ($\alpha = d\omega/dt$). 4) Przyspieszenie styczne a_{st} (wzdłuż kołowego toru) jest związane z przyspieszeniem kątowym (wokół osi obrotu) wzorem (10.22) ($a_{st} = \alpha r$). 5) Przyspieszenie radialne a_{rad} jest dane wzorem (10.23) ($a_{rad} = \omega^2 r$). 6) Przyspieszenie styczne i radialne są prostopadłymi do siebie składowymi całkowitego przyspieszenia $\vec{a}$.



Rys. 10.10. a) Widok z góry pasażera gotowego do przejażdżki Superpierścieniem. b) Przyspieszenie całkowite pasażera oraz jego składowe radialna i styczna

Obliczenia: Będziemy wyznaczali kolejne wielkości szukane jedną po drugiej. Najpierw znajdziemy prędkość kątową, wyznaczając pochodną zależności położenia kątowego od czasu i obliczając jej wartość w chwili $t = 2{,}2$ s, co daje:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(ct^3) = 3ct^2 \tag{10.25}$$
$$= 3(6{,}39 \cdot 10^{-2}\ \text{rad/s}^3)(2{,}2\ \text{s})^2$$
$$= 0{,}928\ \text{rad/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Z równania (10.18) możemy już teraz wyznaczyć prędkość liniową w chwili $t = 2{,}2$ s, która wynosi:

$$v = \omega r = 3ct^2 r \tag{10.26}$$
$$= 3(6{,}39 \cdot 10^{-2}\ \text{rad/s}^3)(2{,}2\ \text{s})^2(33{,}1\ \text{m})$$
$$= 30{,}7\ \text{m/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Jest to dość duża prędkość (111 km/h), lecz w wesołym miasteczku takie prędkości nie są rzadkością i nie są groźne dla amatorów rozrywki, gdyż — jak wspomnieliśmy w rozdziale 2 — nasze ciało reaguje na przyspieszenie, a nie na prędkość (jest „przyspieszeniomierzem", a nie szybkościomierzem). Jak widać z równania (10.26) prędkość liniowa rośnie proporcjonalnie do kwadratu czasu (lecz tylko do chwili $t = 2{,}3$ s).

Wyznaczymy teraz przyspieszenie kątowe jako pochodną prędkości kątowej z równania (10.25). Otrzymujemy

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(3ct^2) = 6ct$$
$$= 6(6{,}39 \cdot 10^{-2}\ \text{rad/s}^3)(2{,}2\ \text{s})$$
$$= 0{,}843\ \text{rad/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Następnie obliczamy przyspieszenie styczne z równania (10.22)

$$a_{st} = \alpha r = 6ctr \qquad (10.27)$$
$$= 6(6{,}39 \cdot 10^{-2}\ \text{rad/s}^3)(2{,}2\ \text{s})(33{,}1\ \text{m})$$
$$= 27{,}91\ \text{m/s}^2$$
$$\approx 27{,}9\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)},$$

czyli $2{,}8g$ (jest to spore przyspieszenie, co może być trochę podniecające dla pasażerów Superpierścienia). Z równania (10.27) wynika, że przyspieszenie styczne rośnie proporcjonalnie do czasu (lecz tylko do chwili $t = 2{,}3$ s). Przyspieszenie radialne wyznaczamy z równania (10.23), wykorzystując jego postać:

$$a_{rad} = \omega^2 r.$$

Podstawiamy do tego wzoru ω z równania (10.25) i otrzymujemy

$$a_{rad} = (3ct^2)^2 r = 9c^2t^4r \qquad (10.28)$$
$$= 9(6{,}39 \cdot 10^{-2}\ \text{rad/s}^3)^2(2{,}2\ \text{s})^4(33{,}1\ \text{m})$$
$$= 28{,}49\ \text{m/s}^2$$
$$\approx 28{,}5\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)},$$

czyli $2{,}9g$ (jest to znów spore przyspieszenie, co może być podniecające dla pasażerów Superpierścienia).

Przyspieszenie radialne i styczne to wektory do siebie prostopadłe, będące składowymi (wektorowymi) całkowitego przyspieszenia $\vec{a}$ pasażera Superpierścienia (patrz rys. 10.10b). Wartość bezwzględna wektora $\vec{a}$ jest równa

$$a = \sqrt{a_{rad}^2 + a_{st}^2} \qquad (10.29)$$
$$= \sqrt{(28{,}49\ \text{m/s}^2)^2 + (27{,}91\ \text{m/s}^2)^2}$$
$$\approx 39{,}9\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)},$$

czyli $4{,}1g$ (co już jest bardzo podniecające!). Wszystkie otrzymane wartości przyspieszenia są całkiem do przyjęcia.

Aby wyznaczyć kierunek wektora $\vec{a}$, obliczamy kąt θ z rysunku 10.10b, gdyż

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_{st}}{a_{rad}}.$$

Zamiast podstawiać do tego wzoru wartości liczbowe, lepiej wykorzystać wyrażenia z równań (10.27) i (10.28),

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{6ctr}{9c^2t^4r}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3ct^3}\right). \qquad (10.30)$$

Wielką zaletą takiego podejścia, tzn. korzystania z algebry, a nie podstawiania od razu wartości liczbowych, jest możliwość zbadania właściwości otrzymanego wyrażenia, czyli stwierdzenia, od czego i jak zależy wartość kąta θ. Jak widać z równania (10.30), kąt θ: 1) nie zależy od promienia pierścienia oraz 2) maleje, gdy t zmienia się od 0 do 2,2 s. Innymi słowy, wektor przyspieszenia $\vec{a}$ szybko zbliża się do kierunku promienia okręgu, gdyż przyspieszenie radialne (proporcjonalne do t^4) szybko rośnie w stosunku do przyspieszenia stycznego (proporcjonalnego zaledwie do t). W chwili $t = 2{,}2$ s, dla której wyznaczamy wszystkie wielkości, kąt θ wynosi

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{2}{3(6{,}39 \cdot 10^{-2}\ \text{rad/s}^3)(2{,}2\ \text{s})^3}$$
$$= 44{,}4^\circ \qquad \text{(odpowiedź)}.$$



Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

10.4. ENERGIA KINETYCZNA W RUCHU OBROTOWYM

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

10.17 wyznaczyć moment bezwładności cząstki względem danej osi;

10.18 wyznaczyć moment bezwładności układu wielu cząstek względem tej samej stałej osi;

10.19 wyznaczyć energię kinetyczną ruchu obrotowego w zależności od momentu bezwładności ciała i jego prędkości kątowej.

Podstawowe fakty

- Energia kinetyczna E_k ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi jest dana wzorem

$$E_k = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \qquad \text{(miara łukowa)},$$

gdzie I jest momentem bezwładności ciała zdefiniowanym wzorem

$$I = \sum m_i r_i^2,$$

dla układu wielu osobnych cząstek.

Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Szybko obracająca się tarcza stolarskiej piły stołowej z pewnością ma energię kinetyczną związaną ze swoim ruchem obrotowym. Jak ją jednak wyrazić? Nie możemy skorzystać ze znanego nam już wzoru $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, aby podać energię kinetyczną tarczy jako całości, gdyż odnosi się on jedynie do energii kinetycznej środka masy tarczy, a ta jest równa zeru.

Właściwym podejściem jest potraktowanie tarczy (i każdego innego obracającego się ciała sztywnego) jako zbioru cząstek o różnych prędkościach liniowych i dodanie do siebie energii kinetycznych tych wszystkich cząstek, co daje całkowitą energię kinetyczną ciała. Postępując w taki sposób, obliczamy energię kinetyczną obracającego się ciała jako

$$E_k = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots = \sum \tfrac{1}{2}m_i v_i^2, \qquad (10.31)$$

przy czym m_i jest masą i-tej cząstki, a v_i jej prędkością. Sumowanie dotyczy wszystkich cząstek, z jakich składa się ciało.

Kłopot z obliczeniem sumy w równaniu (10.31) polega na tym, że v_i nie jest takie samo dla wszystkich cząstek. Aby sobie z tym poradzić, podstawmy do tego równania v ze wzoru (10.18) ($v = \omega r$), co daje

$$E_k = \sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2, \qquad (10.32)$$

gdyż ω *jest jednakowe* dla wszystkich cząstek.

Wyrażenie w nawiasie po prawej stronie równania (10.32) informuje nas, jak rozłożona jest masa obracającego się ciała wokół osi jego obrotu. Wielkość tę nazywamy **momentem bezwładności** ciała względem danej osi obrotu i oznaczamy ją symbolem I. Jest to wielkość stała dla danego ciała sztywnego i określonej osi obrotu (oś tę musimy zawsze podać, gdy podajemy wartość momentu bezwładności ciała, gdyż inaczej wartość I na nic się nikomu nie przyda).

Możemy teraz napisać:

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad \text{(moment bezwładności)}, \qquad (10.33)$$

a następnie podstawić to wyrażenie do równania (10.32), co daje

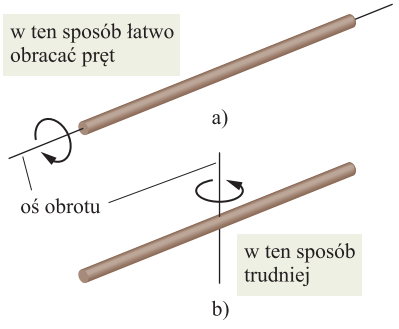
$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \text{(miara łukowa).} \qquad (10.34)$$

Jest to poszukiwane przez nas wyrażenie na energię kinetyczną. Przy wyprowadzeniu równania (10.34) korzystaliśmy ze związku $v = \omega r$, tak więc ω musimy tu wyrażać w radianach na sekundę. Jednostką momentu bezwładności I w układzie SI jest kilogram razy metr do kwadratu (kg · m^2).

Plan działania. Jeśli mamy kilka cząstek i ustaloną oś obrotu, to obliczamy mr^2 dla każdej cząstki, a następnie dodajemy obliczone wartości zgodnie z równaniem (10.33), co daje całkowity moment bezwładności I układu cząstek. W celu wyznaczenia energii kinetycznej podstawiamy obliczoną wartość I do wzoru (10.34). Sprawa jest więc prosta dla układu kilku cząstek, ale co zrobić, gdy mamy do czynienia z ciałem o olbrzymiej liczbie cząstek, na przykład metalowym prętem? W następnym podrozdziale przekonasz się, jak traktować takie *ciała rozciągłe*, by obliczyć ich momenty bezwładności w kilka minut.

Równanie (10.34) wyrażające energię kinetyczną ciała sztywnego, wykonującego wyłącznie ruch obrotowy jest kątowym odpowiednikiem równania $E_k = \frac{1}{2} m v_{ŚM}^2$, które opisuje energię kinetyczną ciała sztywnego wykonującego ruch wyłącznie postępowy. Obydwa wzory zawierają czynnnik $\frac{1}{2}$; odpowiednikiem masy m w jednym z nich jest I (zawierające informacje zarówno o masie, jak i o jej rozkładzie) w drugim; wreszcie, w każdym z nich występuje czynnik równy kwadratowi prędkości — ruchu postępowego w jednym, a obrotowego w drugim. Energia kinetyczna ruchu postępowego i ruchu obrotowego nie są różnymi rodzajami energii. Obie są energią kinetyczną, która jest po prostu wyrażona przez inne zmienne, stosownie do rozważanego rodzaju ruchu ciała.

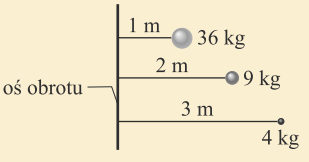
Jak już stwierdziliśmy, moment bezwładności zależy nie tylko od masy obracającego się ciała, lecz i od rozkładu tej masy. Oto przykład pokazujący, jak ten rozkład masy można odczuć dosłownie. Spróbuj wprawić długi i dość ciężki pręt (drąg, długą żerdź lub coś w tym rodzaju) w ruch obrotowy najpierw wzdłuż jego osi podłużnej (jak na rys. 10.11a), a potem wzdłuż osi prostopadłej do pręta, przechodzącej przez jego środek (jak na rys. 10.11b). W obydwu przypadkach obracasz przedmiot o tej samej masie, ale w pierwszym przypadku jest to znacznie łatwiejsze niż w drugim. Powodem tego jest różny rozkład masy ciała względem osi obrotu — w pierwszym przypadku masa jest znacznie bardziej skupiona w pobliżu osi niż w drugim. W rezultacie moment bezwładności pręta jest znacznie mniejszy w przypadku z rysunku 10.11a niż w przypadku z rysunku 10.11b. Jest to reguła ogólna — im mniejszy jest moment bezwładności ciała, tym łatwiej wprawić je w ruch obrotowy.



Rys. 10.11. Długi pręt znacznie łatwiej wprawić w ruch obrotowy wokół jego a) osi podłużnej niż wokół b) osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek, gdyż w przypadku (a) masa pręta jest skupiona znacznie bliżej osi obrotu niż w przypadku (b)

Sprawdzian 4

Na rysunku pokazano trzy niewielkie kule obracające się wokół osi pionowej. Dla każdej kuli podano jej masę i odległość jej środka od osi obrotu. Uszereguj te kule ze względu na ich moment bezwładności względem tej osi, od największego do najmniejszego.



10.5. JAK OBLICZYĆ MOMENT BEZWŁADNOŚCI?

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

10.20 znaleźć momenty bezwładności niektórych ciał w tabeli 10.2;

10.21 wyznaczyć moment bezwładności ciała, wykonując całkowanie po elementach masy tego ciała;

10.22 wykorzystać twierdzenie Steinera do wyznaczenia momentu bezwładności ciała względem osi obrotu równoległej do osi przechodzącej przez środek masy ciała.

Podstawowe fakty

- Moment bezwładności I jest zdefiniowany jako

$$I = \sum m_i r_i^2$$

dla układu osobnych cząstek oraz jako

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m$$

dla ciał o ciągłym rozkładzie masy. Wielkości r i r_i w tych wyrażeniach to odległości cząstek lub elementów masy od osi obrotu, a całkowanie obejmuje całe ciało, aby uwzględnić wszystkie elementy jego masy.

- Twierdzenie Steinera wiąże moment bezwładności I ciała względem dowolnej osi z momentem bezwładności względem równoległej do niej osi przechodzącej przez środek masy ciała:

$$I = I_{\text{ŚM}} + mh^2,$$

gdzie h jest odległością tych dwóch osi, a $I_{\text{ŚM}}$ momentem bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez jego środek masy. Możesz traktować h jako odległość, na jaką przesunięto równolegle oś przechodzącą przez środek masy.

Jak obliczyć moment bezwładności?

Jeśli ciało sztywne składa się z kilku cząstek, to jego moment bezwładności względem pewnej osi obrotu możemy obliczyć ze wzoru (10.33) ($I = \sum m_i r_i^2$), wyznaczając iloczyn mr^2 dla każdej cząstki, a następnie dodając te iloczyny do siebie (przypomnijmy, że r jest to odległość każdej z cząstek od danej osi obrotu).

Jeśli ciało sztywne składa się z wielu blisko siebie położonych cząstek (czyli jest ciałem *rozciągłym*, jak zabawka frisbee), to do obliczenia sumy we wzorze (10.33) potrzebny jest komputer. Można też postąpić inaczej — sumę w równaniu (10.33) zastąpić całką, tzn. zdefiniować moment bezwładności ciała jako

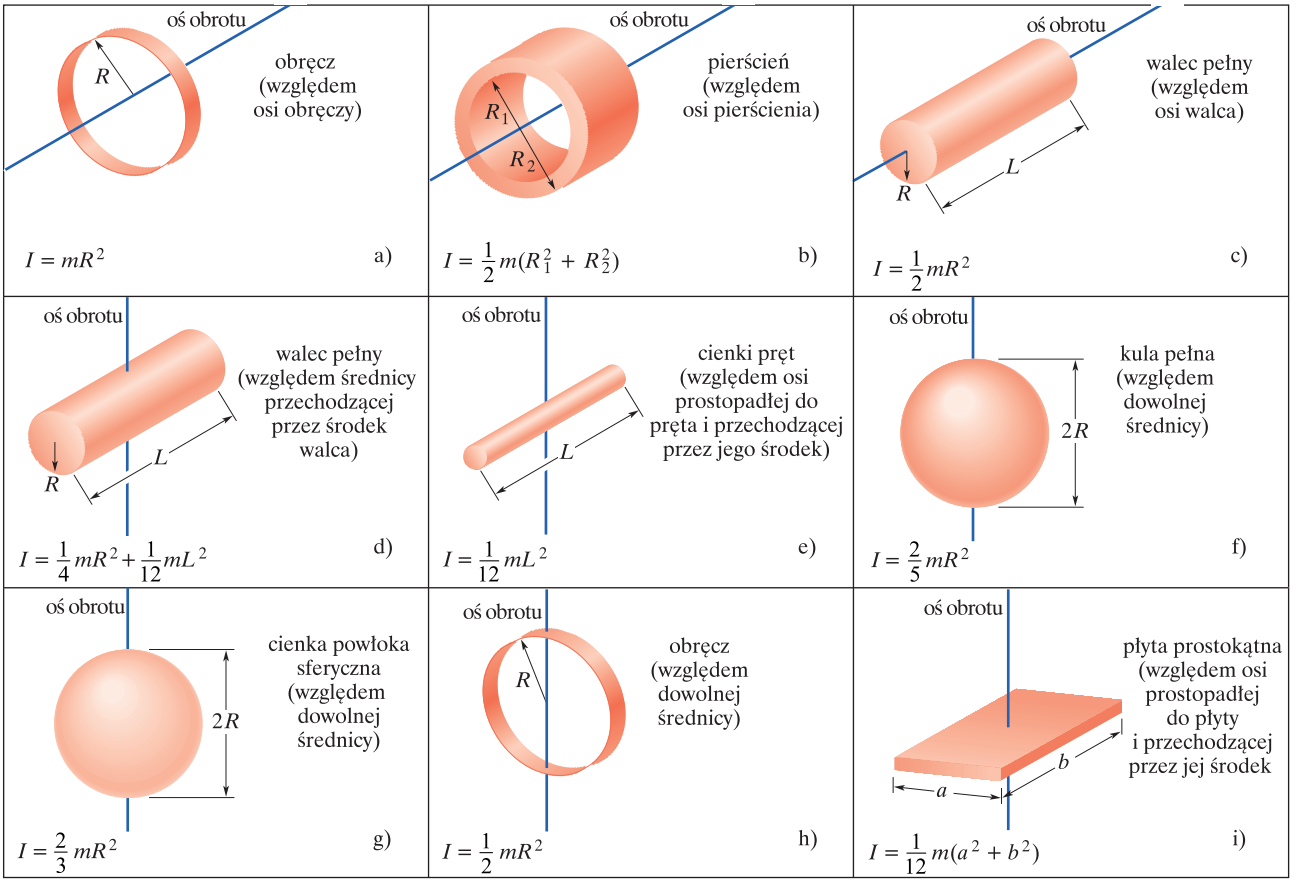
$$I = \int r^2 \mathrm{d}m \qquad \text{(moment bezwładności, ciało rozciągłe).} \qquad (10.35)$$

W tabeli 10.2 podano wynik, jaki otrzymuje się, obliczając tę całkę dla dziewięciu ciał o prostym kształcie i zaznaczonej na rysunkach osi obrotu.

Twierdzenie Steinera

Załóżmy, że chcemy wyznaczyć moment bezwładności I ciała o masie m względem pewnej osi. Oczywiście zawsze możemy obliczyć I na drodze całkowania zgodnie z równaniem (10.35). Możemy to jednak zrobić znacznie prościej, jeśli znamy moment bezwładności $I_{\text{ŚM}}$ tego ciała względem osi *równoległej* do danej osi i przechodzącej przez środek masy ciała.

Tabela 10.2. Momenty bezwładności niektórych ciał



Oznaczmy przez h odległość tych osi (tzn. osi danej i osi do niej równoległej przechodzącej przez środek masy). Moment bezwładności względem osi danej jest równy

$$I = I_{\text{ŚM}} + mh^2 \qquad \text{(twierdzenie Steinera).} \tag{10.36}$$

Możesz traktować h jako odległość, na jaką przesunięto równolegle oś przechodzącą przez środek masy. Równanie to ilustruje tak zwane **twierdzenie Steinera**, które udowodnimy za chwilę.

Dowód twierdzenia Steinera

Oznaczmy przez O środek masy ciała o dowolnym kształcie, pokazanego w przekroju na rysunku 10.12. Umieśćmy początek układu współrzędnych w punkcie O. Rozważmy oś przechodzącą przez punkt O i prostopadłą do płaszczyzny rysunku oraz inną oś przechodzącą przez punkt P i równoległą do pierwszej. Współrzędne x i y punktu P oznaczmy przez a i b.

Oznaczmy przez dm element masy ciała o współrzędnych x i y. Jak wynika z równania (10.35), moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez punkt P jest równy

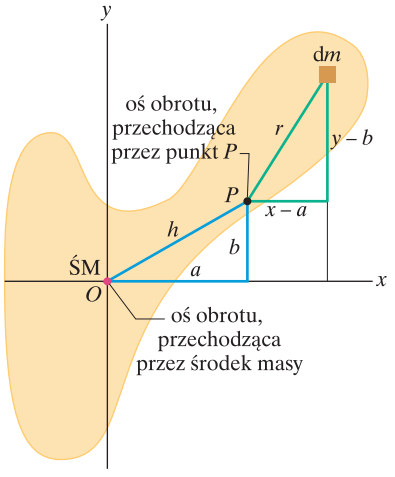
$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2]\mathrm{d}m.$$

Równanie to można przekształcić do postaci

$$I = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m - 2a \int x\mathrm{d}m - 2b \int y\mathrm{d}m + \int (a^2 + b^2)\mathrm{d}m. \quad (10.37)$$

Z definicji środka masy (równanie (9.9)) wynika, że druga i trzecia całka po prawej stronie równania (10.37) wyznaczają współrzędne środka masy ciała (pomnożone przez wartości stałe), a zatem są w naszym przypadku równe zeru. Ponieważ $x^2 + y^2$ jest równe R^2, gdzie R jest odległością elementu dm od punktu O, zatem pierwsza całka jest po prostu równa $I_{\text{ŚM}}$, tzn. momentowi bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy ciała. Z rysunku 10.12 widać, że ostatnia całka po prawej stronie równania (10.37) jest równa mh^2, gdzie m jest całkowitą masą ciała. Równanie (10.37) sprowadza się zatem do równania (10.36), którego prawdziwość mieliśmy zamiar udowodnić.

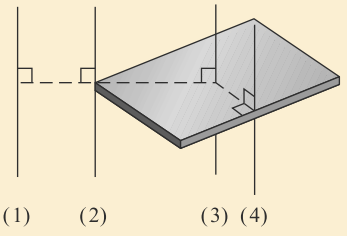
szukamy związku momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt P z momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy



Rys. 10.12. Przekrój ciała sztywnego o środku masy w punkcie O. Twierdzenie Steinera (równanie (10.36)) opisuje związek momentu bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez punkt O z momentem bezwładności tego ciała względem osi do niej równoległej, na przykład przechodzącej przez punkt P, odległej od pierwszej osi o h

Sprawdzian 5

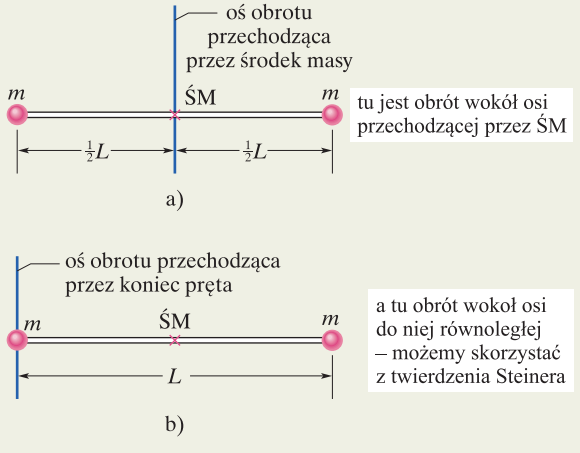
Na rysunku przedstawiono przedmiot w kształcie książki (jeden bok jest dłuższy niż drugi) i cztery możliwe osie jego obrotu, wszystkie prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Uszereguj te osie ze względu na moment bezwładności ciała względem każdej z nich, od największego do najmniejszego.



Przykład 10.06. Moment bezwładności, dwie cząstki

Na rysunku 10.13a przedstawiono ciało sztywne, złożone z dwóch cząstek o masie m połączonych prętem o długości L i znikomo małej masie.

a) Jaki jest moment bezwładności $I_{\text{ŚM}}$ tego ciała względem pokazanej na rysunku osi przechodzącej przez środek masy ciała i prostopadłej do pręta?



Rys 10.13. Ciało sztywne złożone z dwóch cząstek o masie m, połączonych prętem o znikomo małej masie

PODSTAWOWE FAKTY

Mamy tu tylko dwie cząstki, a więc wyznaczenie momentu bezwładności $I_{\text{ŚM}}$ nie wymaga całkowania, a jedynie skorzystania ze wzoru (10.33). Innymi słowy, wystarczy wyznaczyć momenty bezwładności cząstek i dodać je do siebie.

Obliczenia: Dla dwóch cząstek odległych od osi obrotu o $\frac{1}{2}L$ otrzymujemy

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{2}mL^2$$

(odpowiedź).

b) Jaki jest moment bezwładności I tego ciała względem osi przechodzącej przez lewy koniec pręta i równoległej do pierwszej osi (rys. 10.13b)?

PODSTAWOWE FAKTY

Rozważane ciało ma tak prostą budowę, że szukany moment bezwładności możemy obliczyć na dwa sposoby. Pierwszy z nich polega na zastosowaniu takiego samego podejścia, jak w punkcie (a). Drugi, bardziej ogólny, polega na wykorzystaniu twierdzenia Steinera.

Pierwsza metoda: Obliczamy moment bezwładności w taki sam sposób, jak w punkcie (a). Tym razem odległość jednej cząstki od osi obrotu jest równa zeru (cząstka lewa), a drugiej (prawej) — jest równa L. z równania (10.33) otrzymujemy zatem

$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Druga metoda: Znamy już moment bezwładności $I_{ŚM}$ względem osi przechodzącej przez środek masy i równoległej do danej osi, możemy więc zastosować twierdzenie Steinera (równanie (10.36)). Otrzymujemy z niego

$$I = I_{ŚM} + mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2 = mL^2$$
(odpowiedź).

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 10.07. Moment bezwładności pręta, całkowanie

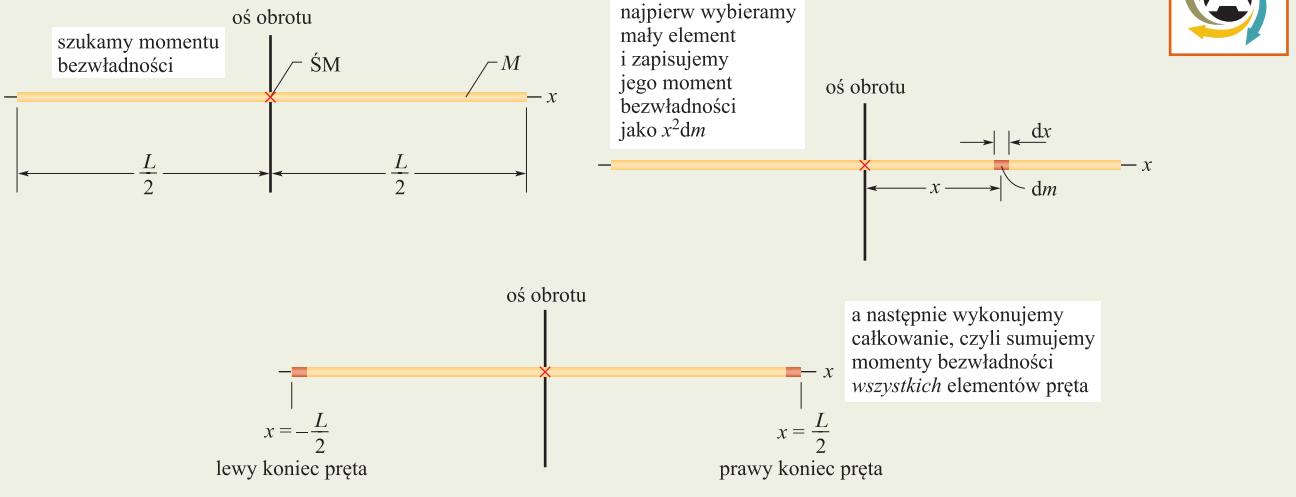
Na rysunku 10.14 przedstawiono cienki, jednorodny pręt o masie M i długości L. Oś układu współrzędnych wybrano tak, że jest skierowana wzdłuż pręta, a początek osi jest w środku pręta.

a) Wyznacz moment bezwładności pręta względem prostopadłej do niego osi przechodzącej przez środek pręta.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Pręt składa się z bardzo wielkiej liczby cząstek o wielu różnych odległościach od osi obrotu. Z pewnością nie chcemy obliczać sumy momentów bezwładności tych wszystkich cząstek wyraz po wyrazie. Wobec tego zapiszemy najpierw wyrażenie na moment bezwładności małego elementu pręta o masie dm odległego o r od osi obrotu: $r^2\mathrm{d}m$. 2) Sumowanie tych wszystkich momentów bezwładności wykonamy, obliczając całkę, zgodnie ze wzorem (10.35)

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m. \qquad (10.38)$$



Rys. 10.14. Jednorodny pręt o długości L i masie M. Pokazano też element masy dm i element długości dx tego pręta

3) Pręt jest jednorodny, a oś obrotu przechodzi przez jego środek, a zatem otrzymamy w ten sposób moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jego środek masy.

Obliczenia: Chcemy całkować po współrzędnej x, a nie po masie m występującej pod całką, musimy więc znaleźć związek masy elementu pręta dm z długością tego elementu dx (patrz rys. 10.14). Pręt jest jednorodny, a zatem stosunek masy do odległości jest taki sam dla wszystkich jego elementów i dla całego pręta. Możemy to zapisać w postaci

$$\frac{\text{masa elementu d}m}{\text{długość elementu d}x} = \frac{\text{masa pręta } M}{\text{długość pręta } L},$$

czyli

$$dm = \frac{M}{L}dx.$$

Podstawimy ten związek do równania (10.38), zastępując zmienną r zmienną x, a następnie obliczymy otrzymaną całkę w granicach od jednego końca pręta do drugiego, czyli od $x = -L/2$ do $x = +L/2$. Otrzymamy w ten sposób

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx = \frac{M}{3L}\left[x^3\right]_{x=-L/2}^{x=+L/2} \\ &= \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] \\ &= \tfrac{1}{12}ML^2 \qquad \text{(odpowiedź)}. \end{aligned}$$

b) Wyznacz moment bezwładności pręta względem prostopadłej do niego osi przechodzącej przez lewy koniec pręta.

PODSTAWOWE FAKTY

W celu wyznaczenia tego momentu bezwładności moglibyśmy przesunąć początek osi x do lewego końca pręta i obliczyć całkę w granicach od $x = 0$ do $x = L$. Wygodniej (i łatwiej) będzie jednak wykorzystać do tego celu twierdzenie Steinera (równanie (10.36)), co nie wymaga zmiany położenia początku osi.

Obliczenia: Prostopadła do pręta oś przechodząca przez jego koniec jest równoległa do osi przechodzącej przez środek masy pręta, względem której moment bezwładności wynosi — jak obliczyliśmy w punkcie (a) — $I_{\text{ŚM}} = \frac{1}{12}ML^2$. Możemy zatem zastosować twierdzenie Steinera (równanie (10.36)), podstawiając w nim odległość osi h równą $\frac{1}{2}L$. Dostajemy w ten sposób

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{ŚM}} + Mh^2 \\ &= \tfrac{1}{12}ML^2 + (M)(\tfrac{1}{2}L)^2 \\ &= \tfrac{1}{3}ML^2 \qquad \text{(odpowiedź)}. \end{aligned}$$

Oczywiście wynik ten jest słuszny dla każdej osi obrotu przechodzącej przez lewy lub prawy koniec pręta i prostopadłej do pręta.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 10.08. Energia kinetyczna ruchu obrotowego, wybuch podczas testu

Duże części maszyn przeznaczone do pracy w warunkach długotrwałego obracania się z dużą prędkością sprawdza się uprzednio w specjalnych wirówkach pod kątem możliwości wystąpienia ich awarii. Badana część rozpędzana jest do dużej prędkości obrotowej w zamkniętym pokrywą cylindrze stalowym, który w środku jest wyłożony okładziną ochronną i cegłami ołowianymi. Jeśli badana część nie wytrzymuje szybkiego obrotu i rozpada się, to jej kawałki wbijają się w miękkie cegły ołowiane, co umożliwia analizę sposobu rozerwania się badanego elementu.

Na początku 1985 roku w firmie Test Devices, Inc. (www.testdevices.com) badano stalowy wirnik w kształcie krążka o masie $m = 272$ kg i promieniu $R = 38$ cm. Po rozpędzeniu wirnika do prędkości kątowej ω równej 14 000 obrotów na minutę technicy usłyszeli głuchy łomot dochodzący od strony stanowiska testowego, znajdującego się piętro niżej, pod pomieszczeniem sąsiadującym z zajmowaną przez nich salą. Badając skutki wybuchu, stwierdzili, że cegły ołowiane porozrzucane są po całym korytarzu, drzwi od pomieszczenia testowego zostały wyrzucone na pobliski parking, jedna z cegieł ołowianych, wystrzelonych z budynku firmy wpadła przez ścianę do kuchni w sąsiednim domu, pręty nośne budynku zostały uszkodzone, strop betonowy pod stanowiskiem testowym obniżył się o około 0,5 cm, a po-

krywa o masie 900 kg została wystrzelona w górę i przebiła sufit, po czym spadła na stanowisko testowe. To, że żadne odłamki nie dostały się do sali, w której znajdowali się technicy nadzorujący badania można uznać za czyste zrządzenie losu.

Jak duża energia została wyzwolona przy wybuchu wirnika?



PODSTAWOWE FAKTY

Energia uwolniona w czasie wybuchu była równa energii kinetycznej ruchu obrotowego wirnika w chwili osiągnięcia przez wirówkę prędkości kątowej 14 000 obrotów na minutę.

Obliczenia: Aby wyznaczyć tę energię E_k, skorzystamy z równania (10.34) ($E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$), lecz najpierw musimy obliczyć moment bezwładności I. Wirnik miał kształt krążka, czyli walca pełnego, obracającego się jak karuzela, a więc jego moment bezwładności możemy obliczyć ze wzoru podanego w tabeli 10.2 (punkt (c)) ($I = \frac{1}{2}mR^2$). Mamy zatem

$$I = \tfrac{1}{2}mR^2 = \tfrac{1}{2}(272\text{ kg})(0{,}38\text{ m})^2 = 19{,}64\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Prędkość kątowa wirnika wynosiła

$$\omega = (14\,000\text{ obrotów/min})(2\pi\text{ rad/obrót})\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right) = 1{,}466\cdot 10^3\text{ rad/s}.$$

Teraz możemy skorzystać z równania (10.34), co daje

$$E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(19{,}64\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(1{,}466\cdot 10^3\text{ rad/s})^2 = 2{,}1\cdot 10^7\text{ J} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

To bardzo duża energia.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

10.6. MOMENT SIŁY

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

10.23 wyjaśnić, że moment siły działającej na ciało zależy od tej siły oraz od wektora położenia punktu przyłożenia siły względem osi obrotu;

10.24 wyznaczyć moment siły, wykorzystując: a) kąt między wektorem położenia i wektorem siły, b) kierunek działania siły i jej ramię, c) składową siły prostopadłą do wektora położenia;

10.25 wyjaśnić, że oś obrotu musi być ustalona zawsze, gdy mamy wyznaczyć moment siły;

10.26 ustalić znak momentu siły, który zależy od kierunku powodowanego przez ten moment obrotu: „zegar jest ujemny";

10.27 wykorzystać wypadkowy moment siły, gdy na ciało działa kilka momentów siły względem tej samej osi obrotu.

Podstawowe fakty

- Moment siły jest miarą zdolności siły $\vec{F}$ do wprawienia ciała w ruch obrotowy względem ustalonej osi obrotu. Jeśli siła $\vec{F}$ jest przyłożona do ciała w punkcie, którego wektor położenia względem osi obrotu jest równy $\vec{r}$, to wartość momentu siły wynosi

$$M = rF_{st} = r_\perp F = rF\sin\phi,$$

gdzie F_{st} jest składową wektora $\vec{F}$ prostopadłą do wektora $\vec{r}$, a ϕ — kątem między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{F}$. Wielkość $r_\perp$ to odległość prostej, wzdłuż której działa siła $\vec{F}$, od osi obrotu, nosząca nazwę ramienia siły $\vec{F}$ względem danej osi obrotu. Zgodnie z tym, ramieniem F_{st} jest r.

- Jednostką momentu siły w układzie SI jest niuton razy metr (N · m). Moment siły M jest dodatni, jeśli dąży do obrotu ciała w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a jest ujemny, jeśli dąży do obrotu ciała w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Moment siły

Nie bez powodu klamkę w drzwiach umieszcza się możliwie jak najdalej od linii zawiasów. Jeśli chcesz otworzyć ciężkie drzwi, to z pewnością musisz działać na nie siłą. Sama siła to jednak nie wszystko — ważne jest też, gdzie przyłożysz tę siłę i w jakim kierunku. Jeśli przyłożysz ją niezbyt

daleko od linii zawiasów i jeśli jej kierunek będzie tworzył z płaszczyzną drzwi kąt inny niż 90°, to będziesz musiał użyć większej siły niż w przypadku, gdy przyłożysz ją w pobliżu klamki i w kierunku prostopadłym do płaszczyzny drzwi.

Na rysunku 10.15a przedstawiono przekrój ciała, które może obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt O i prostopadłej do tego przekroju ciała. Siła $\vec{F}$ jest przyłożona do ciała w punkcie P, którego położenie względem punktu O jest dane przez wektor położenia $\vec{r}$. Kierunki wektorów $\vec{F}$ i $\vec{r}$ tworzą ze sobą kąt ϕ (dla prostoty rozważamy tylko siły, które nie mają składowej równoległej do osi obrotu; wektor $\vec{F}$ leży zatem w płaszczyźnie rysunku).

Aby stwierdzić, jaki obrót ciała wokół danej osi powoduje siła $\vec{F}$, rozkładamy $\vec{F}$ na dwie składowe (rys. 10.15b). Jedna z tych składowych, nazywana *składową radialną* F_{rad}, ma kierunek wektora $\vec{r}$. Nie powoduje ona obrotu ciała, gdyż działa wzdłuż prostej, na której leży punkt O (ciągnąc drzwi na zawiasach równolegle do ich płaszczyzny, nie obrócisz ich). Druga składowa wektora $\vec{F}$, nazywana *składową styczną* F_{st}, jest prostopadła do $\vec{r}$ i ma wartość bezwzględną równą $F_{\text{st}} = F \sin\phi$. Ta składowa *powoduje* obrót ciała (ciągnąc drzwi prostopadle do ich płaszczyzny możesz spowodować ich obrót).

Wyznaczenie momentu siły. Zdolność siły $\vec{F}$ do wprawiania ciała w ruch obrotowy zależy nie tylko od wartości jej składowej stycznej F_{st}, lecz także od tego, jak daleko od punktu O jest ona przyłożona. Aby uwzględnić obydwa te czynniki, definiujemy wielkość M zwaną **momentem siły**, jako iloczyn

$$M = (r)(F \sin\phi). \tag{10.39}$$

Do obliczenia momentu siły możemy także zastosować dwa równoważne sobie związki:

$$M = (r)(F \sin\phi) = r F_{\text{st}} \tag{10.40}$$

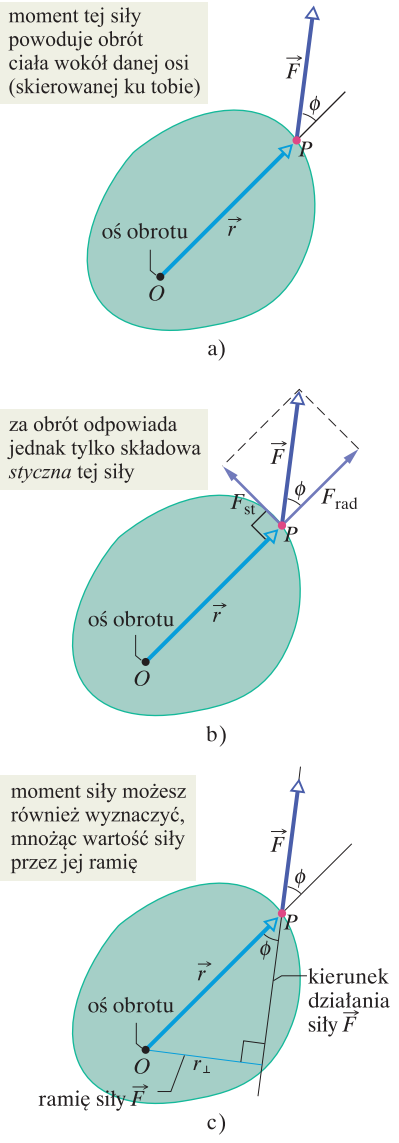
oraz

$$M = (r \sin\phi)(F) = r_{\perp} F, \tag{10.41}$$

przy czym $r_{\perp}$ jest odległością punktu O, przez który przechodzi oś obrotu, od prostej, wzdłuż której leży wektor $\vec{F}$ (rys. 10.15c). Kierunek tej prostej nazywamy **kierunkiem działania** siły $\vec{F}$, a $r_{\perp}$ — **ramieniem** tej siły. Jak widać z rysunku 10.15b, ramieniem siły składowej F_{st} jest wartość bezwzględna wektora $\vec{r}$, tzn. r.

Moment siły można rozumieć jako miarę zdolności siły $\vec{F}$ do skręcania ciała. Gdy za pomocą pewnego narzędzia — jak wkrętak lub klucz maszynowy — działasz na ciało siłą, aby je skręcić, przykładasz do tego ciała moment siły. Jednostką momentu siły w układzie SI jest niuton razy metr (N · m). *Uwaga:* Niuton razy metr jest również jednostką pracy; moment siły i praca są to jednak zupełnie różne wielkości, których nie wolno ze sobą mylić — pracę wyraża się często w dżulach (1 J = 1 N · m), czego nigdy nie robi się w odniesieniu do momentu siły.

Kierunek momentu siły. W rozdziale 11 przekonasz się, że w przypadku ogólnym moment siły należy uważać za wielkość wektorową. Teraz



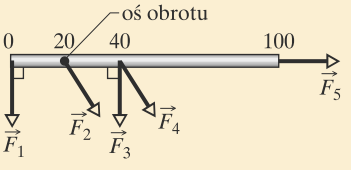
Rys. 10.15. Siła $\vec{F}$ działa w punkcie P ciała sztywnego, które może obracać się wokół prostopadłej do płaszczyzny rysunku osi przechodzącej przez punkt O. Moment tej siły jest równy a) $(r)(F \sin\phi)$. Można go także wyrazić jako b) $r F_{\text{st}}$, gdzie F_{st} jest składową styczną siły $\vec{F}$ oraz c) $r_{\perp} F$, gdzie $r_{\perp}$ jest ramieniem siły $\vec{F}$

jednak, gdy zajmujemy się tylko obrotami wokół jednej osi, nie musimy korzystać z zapisu wektorowego. Wystarczy, że będziemy uważali moment siły za dodatni lub ujemny, w zależności od tego, w jakim kierunku odbywa się pod jego wpływem obrót ciała pozostającego początkowo w spoczynku. Jeśli obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, to moment siły jest dodatni, a jeśli ciało obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchem wskazówek zegara, to moment siły jest ujemny (czyli nadal obowiązuje reguła „zegar jest ujemny" z podrozdziału 10.1).

Dla momentów sił spełniona jest zasada superpozycji, o której mówiliśmy w rozdziale 5 w odniesieniu do sił. Gdy na ciało działa kilka momentów siły, **wypadkowy moment siły**, oznaczany jako M_{wyp}, jest sumą poszczególnych momentów siły.

Sprawdzian 6

Na rysunku przedstawiono widok z góry pręta mierniczego o długości 1 m, mogącego obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt oznaczony kropką i symbolem 20 (od 20 cm). Wszystkie siły zaznaczone na rysunku mają takie same wartości bezwzględne i działają w poziomie. Uszereguj te siły w zależności od wartości momentu siły, jaki wywierają one na pręt, od wartości największej do najmniejszej.



10.7. DRUGA ZASADA DYNAMIKI NEWTONA DLA RUCHU OBROTOWEGO

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

10.28 wykorzystać drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego, czyli związek działającego na ciało wypadkowego momentu siły z momentem bezwładności i przyspieszeniem kątowym ciała, przy czym wszystkie te wielkości muszą dotyczyć tej samej osi obrotu.

Podstawowe fakty

- Odpowiednikiem drugiej zasady dynamiki Newtona jest dla ruchu obrotowego związek

$$M_{\text{wyp}} = I\alpha,$$

gdzie M_{wyp} jest wypadkowym momentem siły, jaki działa na cząstkę lub ciało sztywne, I — momentem bezwładności, a α — przyspieszeniem kątowym cząstki lub ciała względem ustalonej osi obrotu.

Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

Moment siły może spowodować obrót ciała sztywnego. Tak właśnie otwierasz drzwi. Chcemy teraz znaleźć związek wypadkowego momentu siły M_{wyp}, działającej na ciało sztywne, z wywoływanym przez ten mo-

ment przyspieszeniem kątowym ciała α. Skorzystamy z analogii do drugiej zasady dynamiki Newtona dla ruchu ciała wzdłuż linii prostej ($F_{wyp} = ma$), która wiąże przyspieszenie a ciała o masie m z działającą na to ciało siłą wypadkową F_{wyp}. Zastępując F_{wyp} przez M_{wyp}, m przez I, a a przez α, otrzymujemy

$$M_{wyp} = I\alpha \qquad \text{(druga zasada dynamiki — ruch obrotowy).} \qquad (10.42)$$

Uzasadnienie wzoru (10.42)

Aby wykazać słuszność wzoru (10.42), rozważmy na początek prostą sytuację przedstawioną na rysunku 10.16. Ciałem sztywnym jest tu cząstka o masie m, umocowana na jednym z końców pręta o długości r, którego masę można pominąć. Jedynym rodzajem ruchu pręta jest jego obrót wokół osi przechodzącej przez jego drugi koniec i prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Zatem cząstka może poruszać się tylko po torze kołowym, którego środkiem jest drugi koniec pręta.

Na cząstkę działa siła $\vec{F}$. Cząstka może poruszać się jedynie po okręgu, dlatego jej przyspieszenie wzdłuż toru pochodzi tylko od składowej stycznej F_{st} siły (tzn. składowej, która jest styczna do toru cząstki). Składowa F_{st} jest związana z przyspieszeniem a_{st} cząstki wzdłuż toru (przyspieszeniem stycznym), a związek ten opisuje druga zasada dynamiki Newtona, która w tym przypadku ma postać

$$F_{st} = ma_{st}.$$

Moment siły działającej na cząstkę jest dany wzorem (10.40)

$$M = F_{st}r = ma_{st}r.$$

Korzystając z równania (10.22) ($a_{st} = \alpha r$), możemy ten wzór zapisać jako

$$M = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha. \qquad (10.43)$$

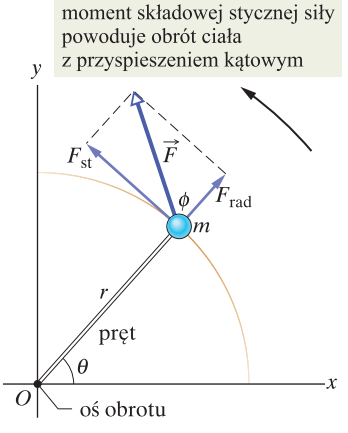
Wielkość w nawiasie po prawej stronie równania (10.43) jest to moment bezwładności cząstki względem danej osi obrotu (patrz równanie (10.33)). W przypadku ogólnym (gdy niekoniecznie chodzi o pojedynczą cząstkę) równanie (10.43) musimy więc zapisać w postaci

$$M = I\alpha \qquad \text{(miara łukowa).} \qquad (10.44)$$

Równanie (10.44) można uogólnić na przypadek, gdy na cząstkę działa więcej niż jedna siła. Otrzymujemy wtedy

$$M_{wyp} = I\alpha \qquad \text{(miara łukowa),} \qquad (10.45)$$

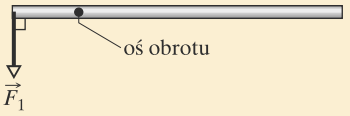
co zamierzaliśmy wykazać. Równanie to jest słuszne także dla dowolnego ciała sztywnego, obracającego się wokół stałej osi, gdyż każde takie ciało można uważać za zbiór pojedynczych cząstek.



Rys. 10.16. Proste ciało sztywne, które może obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt O, składa się z cząstki o masie m oraz pręta o długości r i znikomo małej masie, do którego końca cząstka jest przymocowana. Ruch obrotowy ciała odbywa się pod wpływem siły $\vec{F}$

Sprawdzian 7

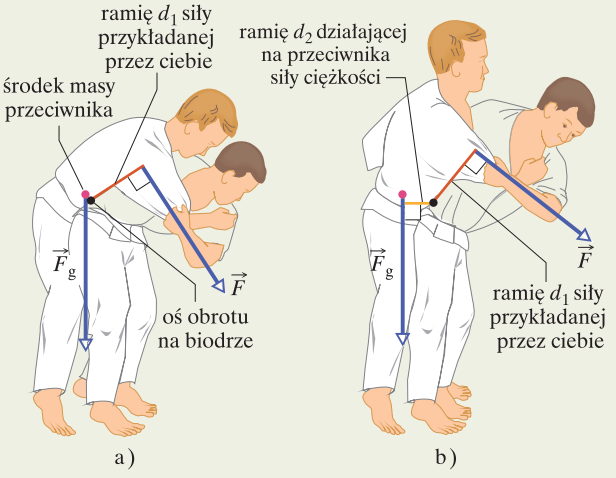
Na rysunku przedstawiono widziany z góry pręt mierniczy, który może obracać się wokół zaznaczonej na rysunku osi przecinającej pręt na lewo od jego środka. Na pręt działają dwie siły poziome $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Na rysunku pokazano tylko siłę $\vec{F}_1$. Siła $\vec{F}_2$ jest prostopadła do pręta i przyłożona do prawego końca pręta. Pręt nie porusza się. a) w jakim kierunku działa siła $\vec{F}_2$? b) Czy wartość siły 2 jest większa, mniejsza, czy równa wartości siły 1?



Przykład 10.09. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego, rzut przez biodro w dżudo

Jeżeli chcesz w walce dżudo przerzucić przeciwnika przez biodro, ciągniesz jego strój siłą $\vec{F}$ przyłożoną w odległości $d_1 = 0{,}3$ m od osi obrotu, czyli twojego prawego biodra (rys. 10.17). Chcesz obrócić go wokół tej osi z przyspieszeniem kątowym równym -6 rad/s^2, tzn. wykonać obrót *w kierunku ruchu wskazówek zegara* na tym rysunku. Przyjmij, że twój przeciwnik ma masę 80 kg i moment bezwładności względem wspomnianej osi równy 15 kg · m^2.

a) Jaka musi być wartość siły $\vec{F}$, jeśli przed rzutem przegiąłeś przeciwnika do przodu, tak aby jego środek masy zbliżyć do swojego biodra (jak na rysunku 10.17a)?



Rys. 10.17. Rzut przez biodro w walce judo wykonany: a) poprawnie, b) niepoprawnie

PODSTAWOWE FAKTY

Wartość siły $\vec{F}$, jaką musisz działać na przeciwnika, aby nadać mu określone przyspieszenie kątowe α jest związana z α, a związek ten opisuje druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego ($M_{wyp} = I\alpha$).

Obliczenia: Możemy przyjąć, że po utracie przez stopy przeciwnika kontaktu z matą działają na niego tylko trzy siły: siła $\vec{F}$, jaką ty go ciągniesz, siła normalna $\vec{F}_N$, jaką działasz na niego w punkcie, wokół którego go obracasz (tej siły nie zaznaczono na rysunku 10.17), oraz działająca na niego siła ciężkości $\vec{F}_g$. Aby móc skorzystać ze wzoru $M_{wyp} = I\alpha$, powinieneś wyznaczyć momenty tych trzech sił względem rozważanej osi obrotu.

Z równania (10.41) ($M = r_\perp F$) wynika, że moment siły $\vec{F}$ jest równy $-d_1 F$, gdzie d_1 jest ramieniem $r_\perp$, a znak wskazuje, że pod działaniem tego momentu siły zachodzi obrót w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Moment siły $\vec{F}_N$ jest równy zeru, gdyż działa ona w punkcie podparcia, a zatem ramię jej działania jest równe zeru, $r_\perp = 0$.

Aby wyznaczyć moment siły ciężkości $\vec{F}_g$, możemy przyjąć, że siła $\vec{F}_g$ działa na twojego przeciwnika w jego środku masy. Gdy ten środek masy leży na osi obrotu, ramię siły $\vec{F}_g$ wynosi $r_\perp = 0$, a zatem moment tej siły jest równy zeru. Tak więc jedynym momentem siły, jaki działa na twojego przeciwnika, jest moment siły $\vec{F}$, a zatem równanie $M_{wyp} = I\alpha$ możemy zapisać w postaci

$$-d_1 F = I\alpha.$$

Otrzymujemy stąd

$$F = \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(15\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(-6\ \text{rad/s}^2)}{(0{,}3\ \text{m})} = 300\ \text{N} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

b) Jaka musi być wartość siły $\vec{F}$, jeśli przed rzutem twój przeciwnik pozostaje w pozycji pionowej, tak że ramię siły $\vec{F}_g$ względem osi obrotu wynosi $d_2 = 0{,}12$ m (jak na rysunku 10.17b)?

PODSTAWOWE FAKTY

Obecnie ramię siły $\vec{F}_g$ nie jest już równe zeru. Zatem moment siły ciężkości przeciwnika wynosi d_2mg i jest dodatni, gdyż dąży on do obrócenia przeciwnika w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara.

Obliczenia: Równanie $M_{wyp} = I\alpha$ przybiera więc teraz postać

$$-d_1F + d_2mg = I\alpha,$$

z którego otrzymujemy

$$F = -\frac{I\alpha}{d_1} + \frac{d_2mg}{d_1}.$$

Z punktu (a) wiemy, że pierwszy wyraz po prawej stronie równania wynosi 300 N, wobec czego mamy

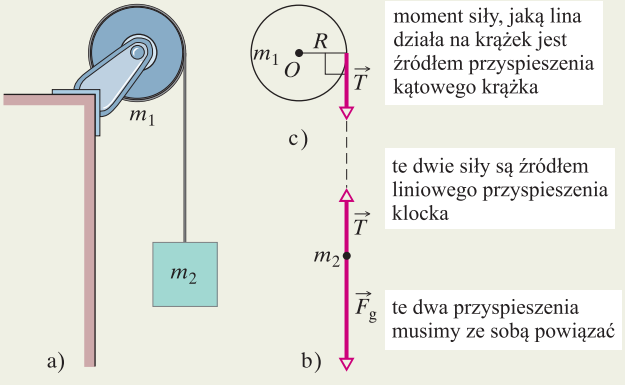
$$F = (300\text{ N}) + \frac{(0{,}12\text{ m})(80\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)}{(0{,}3\text{ m})}$$
$$= 613{,}6\text{ N} \approx 610\text{ N} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Wynik ten pokazuje, że jeśli nie przygniesz początkowo przeciwnika, tak aby przyciągnąć jego środek masy do swojego biodra, to będziesz musiał ciągnąć go ze znacznie większą siłą. Dobry dżudoka wie o tym z praw fizyki. Fizyka jest w istocie źródłem zasad większości sztuk walki, choć wykryto je metodą prób i błędów stosowaną cierpliwie przez całe stulecia.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 10.10. Druga zasada dynamiki Newtona, obrót krążka

Na rysunku 10.18a przedstawiono jednorodny krążek o masie $m_1 = 2{,}5$ kg i promieniu $R = 20$ cm, osadzony na stałej osi poziomej. Na obrzeże krążka nawinięta jest lina o znikomo małej masie, a na jej końcu jest zawieszony klocek o masie $m_2 = 1{,}2$ kg. Wyznacz przyspieszenie opadającego klocka, przyspieszenie kątowe krążka oraz naprężenie liny. Przyjmij, że lina nie ślizga się po obrzeżu krążka, a oś, na której osadzony jest krążek obraca się bez tarcia.



Rys. 10.18. a) Opadający klocek wprawia krążek w ruch obrotowy. b) Diagram sił działających na klocek. c) Niepełny diagram sił działających na krążek

PODSTAWOWE FAKTY

1) Ruch klocka jest postępowy. Przyspieszenie a klocka jest związane z działającymi na niego siłami, a związek ten opisuje druga zasada dynamiki Newtona ($\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$). 2) Ruch krążka jest obrotowy. Przyspieszenie kątowe α krążka jest związane z działającymi na niego momentami sił, a związek ten opisuje druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego ($M_{wyp} = I\alpha$). 3) Aby powiązać ze sobą ruch klocka i krążka, zauważmy, że liniowe przyspieszenie klocka a i styczne przyspieszenie liniowe punktów na obrzeżu krążka a_{st} są sobie równe. (Aby uniknąć kłopotów ze znakami, będziemy rozważać wartości przyspieszeń i pisać znaki przyspieszeń w postaci jawnej).

Siły działające na klocek: Siły działające na klocek przedstawione są na diagramie sił na rysunku 10.18b. Są to: siła ciężkości $\vec{F}_g$, której wartość wynosi m_2g i siła $\vec{T}$ działająca na klocek ze strony liny. Druga zasada dynamiki zapisana dla składowych wzdłuż osi pionowej y ($F_{wyp,y} = ma_y$) ma zatem postać

$$T - m_2g = m_2(-a), \qquad (10.46)$$

gdzie a jest wartością przyspieszenia (skierowanego w dół, czyli w ujemnym kierunku osi y). Z równania tego nie możemy jednak wyznaczyć a, gdyż zawiera ono także niewiadomą T.

Moment siły działającej na krążek: Poprzednio, gdy nie mogliśmy rozwiązać równania dla składowych y, pomocą mogło być zastosowanie równania dla składowych x. Obecnie pomoże nam rozważenie ruchu obrotowego krążka i wykorzystanie drugiej zasady dynamiki

Newtona dla ruchu obrotowego. Obliczając moment siły oraz moment bezwładności I, zauważ, że oś obrotu jest prostopadła do krążka i przechodzi przez jego środek, tzn. punkt O z rysunku 10.18c.

Moment siły jest dany wzorem (10.40) ($M = rF_{st}$). Działająca na krążek siła ciężkości oraz siła działająca na niego ze strony ośki, na której się obraca, są przyłożone do środka krążka, a zatem w odległości $r = 0$ od osi jego obrotu. Wobec tego związane z nimi momenty sił są równe zeru. Siła $\vec{T}$ działająca na krążek ze strony liny jest przyłożona w odległości $r = R$ od osi obrotu i jest styczna do obrzeża krążka. Związany z nią moment siły jest zatem równy $-RT$, przy czym znak minus oznacza, że jeśli krążek jest początkowo nieruchomy, to pod wpływem tego momentu siły obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, czyli ujemnym. Jak wynika z tabeli 10.2 (punkt (c)) moment bezwładności I krążka jest równy $\frac{1}{2}m_1R^2$. Równanie $M_{wyp} = I(-\alpha)$ możemy więc zapisać w postaci

$$-RT = \tfrac{1}{2}m_1R^2(-\alpha). \qquad (10.47)$$

To równanie również wygląda na nieużyteczne, gdyż zawiera dwie niewiadome α i T, a nie zawiera szukanej wielkości a. Z właściwym fizykom zacięciem nie załamujemy się, próbujemy dalej i dostrzegamy, że skoro lina nie ślizga się po krążku, to przyspieszenie liniowe a klocka oraz przyspieszenie liniowe a_{st} (styczne) obrzeża krążka muszą być sobie równe. Korzystając z równania (10.22) ($a_{st} = \alpha r$) wnioskujemy, że w naszym przypadku $\alpha = a/R$. Podstawiając ten związek do równania (10.47), mamy

$$T = \tfrac{1}{2}m_1a. \qquad (10.48)$$

Wynik łączny: Łącząc ze sobą równania (10.46) i (10.48), dostajemy

$$\begin{aligned} a &= g\frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} \\ &= (9{,}8\ \text{m/s}^2)\frac{(2)(1{,}2\ \text{kg})}{(2{,}5\ \text{kg}) + (2)(1{,}2\ \text{kg})} \\ &= 4{,}8\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}. \end{aligned}$$

Następnie z równania (10.48) wyznaczamy T:

$$T = \tfrac{1}{2}m_1a = \tfrac{1}{2}(2{,}5\ \text{kg})(4{,}8\ \text{m/s}^2) = 6\ \text{N}$$
(odpowiedź).

Zgodnie z tym, czego oczekujemy, przyspieszenie opadającego klocka jest mniejsze od g, a naprężenie liny (= 6 N) jest mniejsze od siły ciężkości działającej na klocek ($= m_2g = 11{,}8$ N). Widzimy też, że przyspieszenie klocka i naprężenie liny zależą od masy krążka, lecz nie od jego promienia.

Poprawność rozwiązania możemy dodatkowo sprawdzić, podstawiając do otrzymanych wzorów $m_1 = 0$, co odpowiada przypadkowi, gdy krążek ma znikomo małą masę. Wynik ($a = g$ i $T = 0$) jest zgodny z oczekiwaniem: klocek po prostu spada swobodnie, ciągnąc za sobą linę.

Przyspieszenie kątowe krążka obliczamy ze wzoru (10.22)

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{(4{,}8\ \text{m/s}^2)}{(0{,}2\ \text{m})} = 24\ \text{rad/s}^2 \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

10.8. PRACA I ENERGIA KINETYCZNA RUCHU OBROTOWEGO

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

10.29 obliczyć pracę wykonaną przez moment siły nad obracającym się ciałem jako całkę z momentu siły względem kąta obrotu;

10.30 wykorzystać związek pracy ze zmianą energii kinetycznej układu w przypadku, gdy praca jest wykonana przez moment siły, a zmianie ulega energia kinetyczna ruchu obrotowego;

10.31 wyznaczyć pracę wykonaną przez *stały* moment siły jako iloczyn momentu siły i zmiany położenia kątowego ciała;

10.32 obliczyć moc momentu siły jako szybkość, z jaką wykonywana jest praca;

10.33 obliczyć moc momentu siły w dowolnej chwili jako iloczyn momentu siły i prędkości kątowej ciała w tej chwili.

Podstawowe fakty

- Wzory na pracę i moc w ruchu obrotowym

$$W = \int_{\theta_{\text{pocz}}}^{\theta_{\text{końc}}} M\,\mathrm{d}\theta$$

i

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\omega$$

są analogiczne do wzorów dla ruchu postępowego.

- Gdy M jest stałe, wzór na pracę upraszcza się do postaci

$$W = M(\theta_{\text{końc}} - \theta_{\text{pocz}}).$$

- Związek pracy i zmiany energii kinetycznej w ruchu obrotowym jest następujący:

$$\Delta E_{\text{k}} = E_{\text{k końc}} - E_{\text{k pocz}} = \tfrac{1}{2} I\omega_{\text{końc}}^2 - \tfrac{1}{2} I\omega_{\text{pocz}}^2 = W.$$

Praca i energia kinetyczna ruchu obrotowego

W rozdziale 7 stwierdziliśmy, że gdy siła F nadaje ciału sztywnemu o masie m przyspieszenie wzdłuż pewnej prostej, wykonuje ona nad tym ciałem pracę W. W wyniku tego może ulec zmianie energia kinetyczna ciała ($E_{\text{k}} = \frac{1}{2}mv^2$). Załóżmy, że jest to jedyna postać energii, jaka może ulec zmianie. W tych warunkach związek zmiany energii kinetycznej ΔE_{k} ciała z pracą W wykonaną nad układem jest dany przez równanie (7.10), które w naszym przypadku ma postać

$$\Delta E_{\text{k}} = E_{\text{k końc}} - E_{\text{k pocz}} = \tfrac{1}{2}mv_{\text{końc}}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{\text{pocz}}^2 = W. \qquad (10.49)$$

Gdy ruch zachodzi jedynie wzdłuż osi x, pracę możemy obliczyć ze wzoru (7.32), co daje

$$W = \int_{x_{\text{pocz}}}^{x_{\text{końc}}} F\,\mathrm{d}x \qquad \text{(praca — ruch w jednym wymiarze).} \qquad (10.50)$$

Jeśli siła F jest stała, to powyższe równanie daje $W = Fd$, gdzie d jest przemieszczeniem ciała. Szybkość, z jaką jest wykonywana praca, jest to moc; zgodnie z równaniami (7.43) i (7.48) wynosi ona

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = Fv \qquad \text{(moc — ruch w jednym wymiarze).} \qquad (10.51)$$

Przeanalizujmy teraz podobną sytuację dla ruchu obrotowego. Gdy moment siły wprawia ciało sztywne w ruch obrotowy wokół stałej osi, wykonuje on nad ciałem pracę W. W związku z tym może zmieniać się energia kinetyczna związana z ruchem obrotowym ciała ($E_{\text{k}} = \frac{1}{2}I\alpha^2$). Załóżmy — jak poprzednio — że jest to jedyna postać energii, która może ulec zmianie. Związek zmiany energii kinetycznej ΔE_{k} ciała z pracą W, wykonaną nad układem, dotyczy teraz ruchu obrotowego i ma postać

$$\Delta E_{\text{k}} = E_{\text{k końc}} - E_{\text{k pocz}} = \tfrac{1}{2}I\omega_{\text{końc}}^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_{\text{pocz}}^2 = W, \qquad (10.52)$$

przy czym I jest momentem bezwładności ciała względem stałej osi, a przez ω_{pocz} i $\omega_{\text{końc}}$ oznaczyliśmy prędkości kątowe ciała przed wykonaniem pracy i po wykonaniu pracy nad układem.

Pracę możemy wyznaczyć z równania, które jest odpowiednikiem równania (10.50) dla ruchu obrotowego:

$$W = \int_{\theta_{\text{pocz}}}^{\theta_{\text{końc}}} M\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(praca — ruch obrotowy wokół stałej osi)}, \quad (10.53)$$

przy czym M jest momentem siły, który wykonuje pracę W, a przez θ_{pocz} i $\theta_{\text{końc}}$ oznaczyliśmy położenia kątowe ciała przed wykonaniem pracy i po wykonaniu pracy nad układem. Gdy M jest stałe, równanie (10.53) upraszcza się do postaci

$$W = M(\theta_{\text{końc}} - \theta_{\text{pocz}}) \qquad \text{(praca — stały moment siły)}. \quad (10.54)$$

Szybkość, z jaką wykonywana jest praca, czyli moc, jest teraz dana wzorem, który jest odpowiednikiem równania (10.51) dla ruchu obrotowego

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\omega \qquad \text{(moc — ruch obrotowy wokół stałej osi)}. \quad (10.55)$$

W tabeli 10.3 podano równania odnoszące się do ruchu obrotowego ciała sztywnego wokół stałej osi i ich odpowiedniki dla ruchu postępowego.

Tabela 10.3. Niektóre równania dla ruchu postępowego i obrotowego

Ruch postępowy (stały kierunek)		Ruch obrotowy (stała oś)	
położenie	x	położenie kątowe	θ
prędkość	$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}y$	prędkość kątowa	$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$
przyspieszenie	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	przyspieszenie kątowe	$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
masa	m	moment bezwładności	I
druga zasada dynamiki	$F_{\text{wyp}} = ma$	druga zasada dynamiki	$M_{\text{wyp}} = I\omega$
praca	$W = \int F\,\mathrm{d}x$	praca	$W = \int M\,\mathrm{d}\theta$
energia kinetyczna	$E_{\text{k}} = \frac{1}{2}mv^2$	energia kinetyczna	$E_{\text{k}} = \frac{1}{2}I\omega^2$
moc (stała siła)	$P = Fv$	moc (stały moment siły)	$P = M\omega$
związek pracy z energią	$W = \Delta E_{\text{k}}$	związek pracy z energią	$W = \Delta E_{\text{k}}$

Uzasadnienie równań (10.52)–(10.55)

Przeanalizujmy jeszcze raz sytuację z rysunku 10.16, w której siła $\vec{F}$ wprawia w ruch obrotowy ciało sztywne, złożone z pojedynczej cząstki o masie m i pręta o znikomo małej masie, do którego końca przymocowana jest ta cząstka. W czasie obrotu siła $\vec{F}$ wykonuje nad ciałem pracę. Załóżmy, że w wyniku działania siły zmienia się tylko jeden rodzaj energii ciała — jego energia kinetyczna. Związek pracy ze zmianą energii kinetycznej (równanie (10.49)) daje zatem

$$\Delta E_{\text{k}} = E_{\text{k końc}} - E_{\text{k pocz}} = W. \quad (10.56)$$

Korzystając ze związku $E_{\text{k}} = \frac{1}{2}mv^2$ oraz z równania (10.18) ($v = \omega r$), możemy zapisać równanie (10.56) jako

$$\Delta E_{\text{k}} = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_{\text{końc}}^2 - \tfrac{1}{2}mr^2\omega_{\text{pocz}}^2 = W. \quad (10.57)$$

Z równania (10.33) wynika, że moment bezwładności naszego ciała, skła-

dającego się tylko z jednej cząstki, wynosi $I = mr^2$. Podstawienie tego związku do równania (10.57) daje

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = \tfrac{1}{2} I \omega_{\mathrm{końc}}^2 - \tfrac{1}{2} I \omega_{\mathrm{pocz}}^2 = W,$$

czyli równanie (10.52). Wyprowadziliśmy je dla ciała sztywnego w postaci jednej cząstki, lecz jest ono słuszne dla dowolnego ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi.

Następnie znajdziemy związek między pracą W, wykonaną nad ciałem z rysunku 10.16, i momentem siły M, związanym z działaniem na to ciało siły $\vec{F}$. Gdy cząstka przebywa wzdłuż swego toru kołowego drogę ds, przyspieszenie jej ruchu wzdłuż tego toru pochodzi jedynie od składowej stycznej siły F_{st}. Zatem tylko ta składowa F_{st} wykonuje nad cząstką pracę. Tę pracę dW możemy zapisać jako $F_{\mathrm{st}}\mathrm{d}s$. Drogę d$s$ możemy jednak zastąpić przez $r\mathrm{d}\theta$, gdzie dθ jest kątem zakreślonym przez cząstkę. Mamy wobec tego

$$\mathrm{d}W = F_{\mathrm{st}} r \mathrm{d}\theta. \tag{10.58}$$

Z równania (10.40) wynika, że iloczyn $F_{\mathrm{st}}r$ jest równy momentowi siły M, a zatem równanie (11.50) możemy zapisać jako

$$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta. \tag{10.59}$$

Praca wykonana przy skończonym przemieszczeniu kątowym od θ_{pocz} do $\theta_{\mathrm{końc}}$ wynosi wobec tego

$$W = \int_{\theta_{\mathrm{pocz}}}^{\theta_{\mathrm{końc}}} M\mathrm{d}\theta,$$

a to jest równanie (10.53). Jest ono prawdziwe dla dowolnego ciała sztywnego, obracającego się wokół stałej osi. Równanie (10.54) wynika natychmiast z równania (10.53).

Z równania (10.59) możemy również wyznaczyć moc P w ruchu obrotowym:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega,$$

otrzymując równanie (10.55).

Przykład 10.11. Praca, energia kinetyczna, klocek, krążek

Przypuśćmy, że krążek z rysunku 10.18 zaczyna obracać się w chwili $t = 0$, przy czym do tej chwili znajdował się w spoczynku. Siła naprężenia linki wynosi 6 N, a przyspieszenie kątowe krążka -24 rad/s. Ile będzie wynosiła energia kinetyczna ruchu obrotowego E_{k} krążka w chwili $t = 2{,}5$ s?

PODSTAWOWE FAKTY

Energię kinetyczną E_{k} możemy wyznaczyć ze wzoru (10.34) ($E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} I\omega^2$). Wiemy już, że I jest równe $\frac{1}{2}mR^2$, ale nie znamy wartości ω w chwili $t = 2{,}5$ s. Wiemy jednak, że przyspieszenie kątowe α ma wartość stałą, równą -24 rad/s^2, a zatem możemy skorzystać z równań ruchu ze stałym przyspieszeniem kątowym z tabeli 10.1.

Obliczenia: Szukamy wartości ω, znamy α i ω_0 ($= 0$), dlatego zastosujemy równanie (10.12), co daje

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t.$$

Podstawiając do równania (10.34) związki $\omega = \alpha t$ oraz $I = \frac{1}{2}mR^2$, otrzymamy

$$E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mR^2)(\alpha t)^2 = \tfrac{1}{4}m(R\alpha t)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(2{,}5\text{ kg})[(0{,}2\text{ m})(-24\text{ rad/s}^2)(2{,}5\text{ s})]^2$$
$$= 90\text{ J} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

PODSTAWOWE FAKTY

Wynik ten mogliśmy też otrzymać w inny sposób. Energię kinetyczną krążka można wyznaczyć z pracy wykonanej nad krążkiem.

Obliczenia: Jak wiemy z równania (10.52) ($E_{k\,końc} - E_{k\,pocz} = W$) *zmiana* energii kinetycznej krążka jest równa całkowitej pracy W wykonanej nad krążkiem. Podstawiając E_k za $E_{k\,końc}$ oraz 0 za $E_{k\,pocz}$, otrzymujemy

$$E_k = E_{kpocz} + W = 0 + W = W. \qquad (10.60)$$

Musimy teraz znaleźć pracę W. Korzystając z równań (10.53) i (10.54), możemy ją powiązać z działającym na krążek momentem siły. Jedyny moment siły, który powoduje przyspieszenie kątowe krążka, a więc wykonuje nad nim pracę, to moment siły $\vec{T}$ działającej na krążek ze strony liny, który jest równy $-TR$. Skoro α jest stałe, to moment ten też musi być stały. Możemy zatem skorzystać z równania (10.54) i napisać

$$W = M(\theta_{końc} - \theta_{pocz}) = -TR(\theta_{końc} - \theta_{pocz}). \qquad (10.61)$$

Ponieważ α jest stałe, to do wyznaczenia $\theta_{końc} - \theta_{pocz}$ może nam posłużyć wzór (10.13). Podstawiając w nim $\omega_{pocz} = 0$, dostajemy

$$\theta_{końc} - \theta_{pocz} = \omega_{pocz}t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Tę wartość podstawiamy do równania (10.61), a otrzymany wynik wstawiamy do równania (10.60). Korzystając z tego, że $T = 6$ N, a $\alpha = -24$ rad/s^2, otrzymujemy ostatecznie

$$E_k = W = -TR(\theta_{końc} - \theta_{pocz}) = -TR(\tfrac{1}{2}\alpha t^2)$$
$$= -\tfrac{1}{2}TR\alpha t^2$$
$$= -\tfrac{1}{2}(6\text{ N})(0{,}2\text{ m})(-24\text{ rad/s}^2)(2{,}5\text{ s})^2$$
$$= 90\text{ J} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Podsumowanie

Położenie kątowe Aby opisać ruch obrotowy ciała sztywnego wokół ustalonej osi zwanej **osią obrotu**, wyobrażamy sobie pewną **linię odniesienia** związaną z ciałem, która jest prostopadła do osi obrotu i obraca się wraz z nim. **Położeniem kątowym** ciała θ nazywamy kąt, jaki tworzy linia odniesienia z pewnym stałym kierunkiem. Jeśli ten kąt jest wyrażony w mierze łukowej (tzn. w radianach), to

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(miara łukowa)}, \qquad (10.1)$$

przy czym s jest długością odpowiadającego kątowi θ łuku okręgu o promieniu r. Różne jednostki kąta wiążą się ze sobą w następujący sposób:

$$1\text{ pełny obrót} = 360^\circ = 2\pi\text{ rad}. \qquad (10.2)$$

Przemieszczenie kątowe Jeśli ciało obracające się wokół osi zmienia swoje położenie kątowe z θ_1 na θ_2, to doznaje ono **przemieszczenia kątowego**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \qquad (10.4)$$

przy czym $\Delta\theta$ jest dodatnie, jeśli obrót odbywa się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a ujemne, jeśli obrót zachodzi w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Prędkość kątowa Jeśli ciało doznaje przemieszczenia kątowego $\Delta\theta$ w przedziale czasu Δt, to jego **średnia prędkość kątowa** $\omega_{śr}$ wynosi

$$\omega_{śr} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \qquad (10.5)$$

Prędkość kątowa (chwilowa) ω tego ciała jest równa

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \qquad (10.6)$$

Obie te wielkości $\omega_{śr}$ i ω są wektorami, których kierunek jest wyznaczony z **reguły prawej dłoni** przedstawionej na rysunku 10.6. Jest on dodatni, gdy obrót odbywa się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, oraz ujemny, gdy obrót zachodzi w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Przyspieszenie kątowe Jeśli prędkość kątowa ciała zmienia się z ω_1 na ω_2 w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$, to **średnie przyspieszenie kątowe** $\alpha_{śr}$ tego ciała wynosi

$$\alpha_{śr} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (10.7)$$

Przyspieszenie kątowe (chwilowe) α ciała jest równe

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (10.8)$$

Obie te wielkości $\alpha_{śr}$ i α są wektorami.

Ruch obrotowy ze stałym przyspieszeniem kątowym Przypadek, gdy ciało obraca się ze *stałym przyspieszeniem kątowym* ($\alpha = \text{const}$), jest ważnym przypadkiem szczególnym ruchu obrotowego. Obowiązują w nim równania podane w tabeli 10.1:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \tag{10.12}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \tag{10.13}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0), \tag{10.14}$$

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t, \tag{10.15}$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \tfrac{1}{2}\alpha t^2. \tag{10.16}$$

Związek zmiennych liniowych z kątowymi Punkt obracającego się ciała sztywnego, znajdujący się w odległości r od osi obrotu, porusza się po okręgu o promieniu r. Przy obrocie ciała o kąt θ zatacza on łuk o długości s równej

$$s = \theta r \qquad \text{(miara łukowa)}, \tag{10.17}$$

przy czym θ jest wyrażone w radianach.

Prędkość liniowa $\vec{v}$ tego punktu jest styczna do łuku, po którym porusza się punkt, a jej wartość v wynosi

$$v = \omega r \qquad \text{(miara łukowa)}, \tag{10.18}$$

przy czym ω jest wartością prędkości kątowej ciała (wyrażoną w radianach na sekundę).

Przyspieszenie liniowe $\vec{a}$ punktu ciała sztywnego ma składową *styczną* i *radialną*. Składowa styczna jest równa

$$a_{\text{st}} = \alpha r \qquad \text{(miara łukowa)}, \tag{10.22}$$

przy czym α jest wartością przyspieszenia kątowego ciała (w radianach na sekundę do kwadratu). Składowa radialna $\vec{a}$ wynosi

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(miara łukowa)}. \tag{10.23}$$

Jeśli punkt ciała porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, to okres ruchu (punktu i całego ciała sztywnego) wynosi

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(miara łukowa)}. \tag{10.19, 10.20}$$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego i moment bezwładności Energia kinetyczna E_{k} ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi jest równa

$$E_{\text{k}} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 \qquad \text{(miara łukowa)}, \tag{10.34}$$

przy czym I jest to **moment bezwładności** ciała. Jest on zdefiniowany jako

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{10.33}$$

dla układu oddzielnych cząstek oraz jako

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m \tag{10.35}$$

dla ciała o ciągłym rozkładzie masy. Wielkości r i r_i są odległościami elementów ciała od osi obrotu, a całkowanie dotyczy całego ciała, tak by uwzględnić wszystkie elementy jego masy.

Twierdzenie Steinera *Twierdzenie Steinera* podaje związek między momentem bezwładności I ciała względem dowolnej osi a jego momentem bezwładności względem osi równoległej do danej i przechodzącej przez środek masy ciała:

$$I = I_{\text{ŚM}} + mh^2, \tag{10.36}$$

przy czym h jest odległością tych dwóch osi, a $I_{\text{ŚM}}$ jest momentem bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez jego środek masy. Możesz traktować h jako odległość, na jaką przesunięto równolegle oś przechodzącą przez środek masy.

Moment siły *Moment siły* jest to wielkość odpowiedzialna za obrót lub skręcenie ciała wokół pewnej osi obrotu, gdy na to ciało działa siła $\vec{F}$. Jeśli ta siła jest przyłożona w punkcie, którego położenie względem osi jest dane przez wektor położenia $\vec{r}$, to wartość momentu siły wynosi

$$M = rF_{\text{st}} = r_\perp F = rF\sin\phi, \tag{10.40, 10.41, 10.39}$$

przy czym F_{st} jest składową $\vec{F}$ prostopadłą do $\vec{r}$, ϕ — kątem między $\vec{F}$ a $\vec{r}$, a $r_\perp$ — odległością osi obrotu od prostej, wzdłuż której leży wektor $\vec{F}$. Kierunek tej prostej nazywamy **kierunkiem działania** siły $\vec{F}$, a $r_\perp$ — **ramieniem** tej siły. Ramieniem siły składowej F_{st} jest r. Jednostką momentu siły w układzie SI jest niuton razy metr (N · m). Jeśli obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, to moment siły jest dodatni, a jeśli ciało obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, to moment siły jest ujemny.

Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego Odpowiednikiem drugiej zasady dynamiki Newtona, odnoszącym się do ruchu obrotowego, jest związek

$$M_{\text{wyp}} = I\alpha, \tag{11.37}$$

gdzie M_{wyp} jest wypadkowym momentem siły działającym na ciało sztywne, I — momentem bezwładności ciała względem osi obrotu, a α — przyspieszeniem kątowym ruchu obrotowego ciała wokół tej osi.

Praca i energia kinetyczna ruchu obrotowego Wzory, z których można obliczyć pracę i moc w ruchu obrotowym, są analogiczne do odpowiednich równań dla ruchu postępowego

$$W = \int_{\theta_{\text{pocz}}}^{\theta_{\text{końc}}} M\,\mathrm{d}\theta, \tag{10.53}$$

oraz

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\omega. \tag{10.55}$$

Gdy M jest stałe, równanie (10.53) upraszcza się do postaci

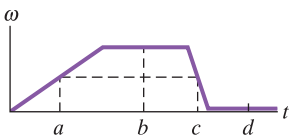
$$W = M(\theta_{\text{końc}} - \theta_{\text{pocz}}). \tag{10.54}$$

Związek pracy ze zmianą energii kinetycznej obracającego się ciała jest następujący:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{k}} &= E_{\text{k końc}} - E_{\text{kpocz}} \\ &= \tfrac{1}{2} I\omega_{\text{końc}}^2 - \tfrac{1}{2} I\omega_{\text{pocz}}^2 = W.\end{aligned} \tag{10.52}$$

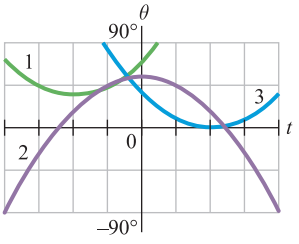
Pytania

1 Na rysunku 10.19 przedstawiono wykres zależności prędkości kątowej obracającego się jak karuzela krążka od czasu. Uszereguj chwile a, b, c i d w zależności od wartości: a) przyspieszenia stycznego, b) przyspieszenia radialnego punktu na obrzeżu krążka, od największej do najmniejszej.



Rys. 10.19. Pytanie 1

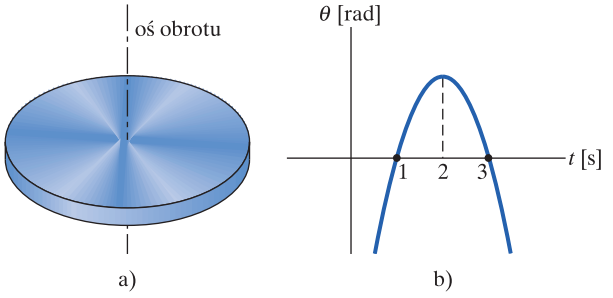
2 Na rysunku 10.20 przedstawiono wykresy zależności położenia kątowego θ od czasu t dla trzech krążków obracających się wokół swych osi (jak karuzela). Dla każdego z nich kierunek obrotu się zmienia przy pewnej wartości położenia kątowego — oznaczmy tę wartość przez θ_{zm}. a) Odpowiedz, dla każdego krążka, czy kąt θ_{zm} jest dodatni, ujemny, czy też równy zeru. b) Odpowiedz, dla każdego krążka, czy ω jest równe zeru w pewnej chwili ujemnej ($t < 0$), dodatniej ($t > 0$), czy też w chwili $t = 0$. c) Odpowiedz, dla każdego krążka, czy α jest dodatnie, ujemne, czy też równe zeru.



Rys. 10.20. Pytanie 2

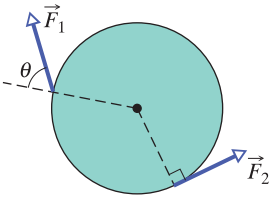
3 Do skraju krążka obracającego się jak karuzela przyłożono pewną siłę, aby zmienić jego prędkość kątową. W czterech przypadkach początkowa i końcowa prędkość kątowa krążka wynosiły odpowiednio: a) -2 rad/s i 5 rad/s, b) 2 rad/s i 5 rad/s, c) -2 rad/s i -5 rad/s, d) 2 rad/s i -5 rad/s. Uszereguj te przypadki w zależności od pracy wykonanej nad krążkiem, od największej do najmniejszej.

4 Na rysunku 10.21b przedstawiono wykres zależności położenia kątowego obracającego się krążka z rysunku 10.21a od czasu. Czy prędkość kątowa krążka jest dodatnia, ujemna, czy równa zeru w chwili: a) $t = 1$ s, b) $t = 2$ s, c) $t = 3$ s? d) Czy przyspieszenie kątowe krążka jest dodatnie, czy ujemne?



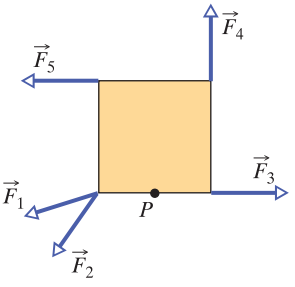
Rys. 10.21. Pytanie 4

5 Jak pokazano na rysunku 10.22, na krążek działają dwie siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Krążek obraca się jak karuzela — wokół osi przechodzącej przez jego środek — w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Prędkość obrotu jest stała, a siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ działają przez cały czas na krążek pod kątami wskazanymi na rysunku. Z jakiegoś powodu musimy jednak zmniejszyć kąt θ bez zmiany wartości siły $\vec{F}_1$. a) Czy wartość siły $\vec{F}_2$ musimy zwiększyć, zmniejszyć, czy pozostawić bez zmiany, jeśli chcemy, aby prędkość kątowa krążka pozostała taka sama, jak poprzednio? Czy siły b) $\vec{F}_1$ i c) $\vec{F}_2$, działając z osobna, powodują obrót krążka w kierunku zgodnym, czy przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara?



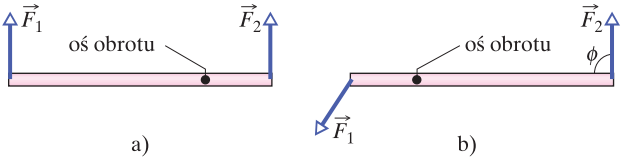
Rys. 10.22. Pytanie 5

6 Na rysunku 10.23 przedstawiono widok z góry na karuzelę dla prawdziwych dziwaków — ma ona kształt kwadratu obracającego się wokół osi przechodzącej przez środek P jednego z boków tego kwadratu. Na karuzelę może działać pięć sił o jednakowych wartościach, których kierunki i punkty przyłożenia pokazano na rysunku. Uszereguj te siły w zależności od wartości momentu siły, jaki wytwarzają one względem wskazanej osi, od największej do najmniejszej.



Rys. 10.23. Pytanie 6

7 Na rysunku 10.24a przedstawiono widok z góry na poziomy pręt mogący się obracać wokół wskazanej osi. Na końce pręta działają dwie siły poziome, lecz pozostaje on w spoczynku. Wyobraź sobie, że kąt utworzony z prętem przez siłę $\vec{F}_2$ zostaje zmniejszony w stosunku do pokazanej na rysunku wartości 90°. Czy wartość siły $\vec{F}_2$ trzeba zwiększyć, zmniejszyć, czy pozostawić bez zmiany, jeśli pręt ma się nadal nie obracać?

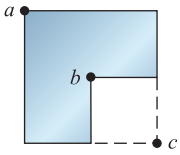


Rys. 10.24. Pytania 7 i 8

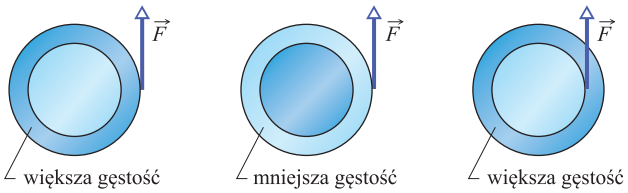
8 Na rysunku 10.24b przedstawiono widok z góry na poziomy pręt obracający się wokół wskazanej osi w wyniku działania na jego końce dwóch sił poziomych $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Siła $\vec{F}_2$ działa w kierunku tworzącym z prętem kąt ϕ. Rozważ

przypadki, gdy ϕ jest równe 90°, 70° i 110° oraz uszereguj je pod względem wartości przyspieszenia kątowego pręta, od największej do najmniejszej.

9 Na rysunku 10.25 przedstawiono jednorodną płytę metalową, która była kwadratem przed wycięciem z niej jednej ćwiartki. Wyobraź sobie, że płyta może się obracać kolejno wokół osi prostopadłych do płaszczyzny rysunku przechodzących przez punkty oznaczone na rysunku literami. Uszereguj te osie w zależności od momentu bezwładności płyty względem tej osi, od największych do najmniejszych wartości I.



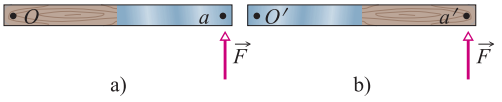
Rys. 10.25. Pytanie 9



Rys. 10.26. Pytanie 10

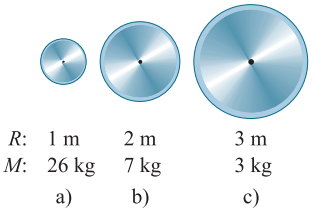
10 Na rysunku 10.26 przedstawiono trzy płaskie krążki o takim samym promieniu, mogące się obracać wokół swych osi (jak karuzela). Każdy z nich wykonano z tych samych dwóch materiałów o różnych gęstościach (czyli masach jednostkowej objętości). Krążki 1 i 3 mają materiał o większej gęstości w części zewnętrznej, a krążek 2 — w części środkowej. Do każdego z krążków przyłożono siłę o takiej samej wartości, stycznie do krążka (lub jego części) na obrzeżu krążka lub na granicy materiałów, jak na rysunku. Uszereguj krążki w zależności od: a) momentu siły względem środka krążka, b) momentu bezwładności względem środka krążka oraz c) przyspieszenia kątowego krążka, od wartości największych do najmniejszych.

11 Połowa przymiaru metrowego jest wykonana z drewna, a druga połowa – ze stali. Na rysunku 10.27a przedstawiono przypadek, w którym oś jego obrotu znajduje się przy końcu drewnianym, w punkcie O, a na koniec stalowy działa siła $\vec{F}$ przyłożona w punkcie a. Na rysunku 10.27b przedstawiono przypadek, w którym — po odwróceniu przymiaru — oś jego obrotu znajduje się przy końcu stalowym, w punkcie O', a na koniec drewniany działa taka sama jak poprzednio siła $\vec{F}$ przyłożona w punkcie a'. Czy przyspieszenie kątowe przymiaru jest w przypadku z rysunku 10.27a większe, mniejsze, czy takie samo jak w przypadku z rysunku 10.27b?



Rys. 10.27. Pytanie 11

12 Na rysunku 10.28 przedstawiono trzy jednorodne krążki oraz podano ich promienie R i masy M. Uszereguj te krążki w zależności od ich momentu bezwładności względem osi krążka, od największej do najmniejszej wartości.



Rys. 10.28. Pytanie 12

Zadania

GO Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

•–••• Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

Podrozdział 10.1. Zmienne obrotowe

•1 Dobry baseballista potrafi rzucić piłkę z prędkością 85 mil na godzinę, wprawiając ją jednocześnie w ruch obrotowy z prędkością 1800 obrotów/min. Ile obrotów wykona piłka na drodze 60 stóp? Przyjmij dla uproszczenia, że tor piłki jest linią prostą.

•2 Ile wynosi prędkość kątowa wskazówki: a) sekundowej, b) minutowej, c) godzinowej zegara analogowego o ciągłym ruchu wskazówek? Podaj odpowiedź w radianach na sekundę.

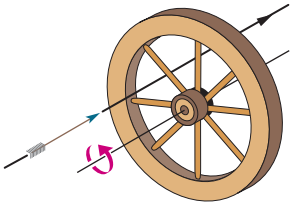
••3 Kromka chleba z masłem spada strącona przypadkowo ze stołu i w locie w kierunku podłogi się obraca. Wysokość stołu wynosi 76 cm, a kromka wykonuje przed dotarciem do podłogi mniej niż jeden pełny obrót. Wyznacz a) najmniejszą i b) największą wartość prędkości kątowej kromki, dla których kromka uderza w podłogę stroną posmarowaną masłem.

••4 Położenie kątowe pewnego punktu obracającego się koła jest dane wyrażeniem $\theta = 2+4t^2+2t^3$, gdzie θ jest wyrażone w radianach, a t w sekundach. Ile wynosi: a) położenie kątowe, b) prędkość kątowa tego punktu w chwili $t = 0$? c) Ile wynosi jego prędkość kątowa w chwili $t = 4$ s? d) Oblicz przyspieszenie kątowe tego punktu w chwili $t = 2$ s. e) Czy przyspieszenie kątowe tego punktu jest stałe?

••5 ilw Skoczek do wody wykonuje podczas skoku z trampoliny, położonej 10 m nad wodą, 2,5 obrotu w powietrzu. Wyznacz średnią prędkość kątową skoczka podczas tego skoku, zakładając, że w chwili początkowej ma on prędkość pionową równą zeru.

••6 Położenie kątowe punktu na obrzeżu obracającego się koła jest dane wyrażeniem: $\theta = 4t - 3t^2 + t^3$, gdzie θ jest wyrażone w radianach, a t w sekundach. Ile wynosi prędkość kątowa tego koła w chwili: a) $t = 2$ s, b) $t = 4$ s? c) Ile wynosi średnie przyspieszenie kątowe koła w przedziale czasu od $t = 2$ s do $t = 4$ s? Ile wynosi chwilowe przyspieszenie kątowe koła: d) na początku, e) na końcu tego przedziału czasu?

•••7 Na rysunku 10.29 przedstawiono koło o promieniu 30 cm, które ma osiem równo od siebie odległych szprych. Koło obraca się na osi z szybkością 2,5 obrotów na sekundę. Wyobraź sobie, że masz wystrzelić strzałę o długości 20 cm, równolegle do osi obrotu koła, tak aby przeszła ona przez nie i nie dotknęła żadnej ze szprych. a) Jaką minimalną prędkość musi mieć strzała, aby ci się to udało? b) Czy ma znaczenie, w które miejsce między osią a obręczą będziesz celował? Jeśli tak, to gdzie najlepiej celować? Przyjmij, że strzała i szprychy są bardzo cienkie.



Rys. 10.29. Zadanie 7

•••8 Przyspieszenie kątowe koła zmienia się z upływem czasu zgodnie ze wzorem $\alpha = 6t^4 - 4t^2$, gdzie α jest wyrażone w radianach na sekundę kwadrat, a t w sekundach. W chwili $t = 0$ koło ma prędkość kątową +2 rad/s i położenie kątowe +1 rad. Podaj wyrażenia opisujące zależność a) prędkości kątowej (w radianach na sekundę) i b) położenia kątowego (w radianach) tego koła od czasu t (w sekundach).

Podrozdział 10.2. Obrót ze stałym przyspieszeniem kątowym

•9 Bęben obraca się wokół swej osi symetrii z prędkością kątową 12,6 rad/s. W pewnej chwili (np. $t = 0$) bęben zaczyna zwalniać, przy czym jego prędkość kątowa maleje w tempie 4,2 rad/s^2. a) Po jakim czasie bęben przestanie się obracać? b) O jaki kąt się w tym czasie obróci?

•10 Nieruchomy początkowo krążek zaczyna obracać się wokół swej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym. W ciągu pierwszych 5 s ruchu krążek obraca się o 25 rad. Wyznacz wartość: a) przyspieszenia kątowego, b) średniej prędkości kątowej krążka w tym czasie. c) Ile wynosi chwilowa prędkość kątowa krążka po 5 s? d) O jaki kąt obróci się krążek w ciągu następnych 5 s, jeśli będzie się nadal poruszał z takim samym przyspieszeniem kątowym?

•11 Krążek, obracający się początkowo z prędkością 120 rad/s, w pewnej chwili zaczyna zwalniać ze stałym przyspieszeniem kątowym o wartości 4 rad/s^2. a) Po jakim czasie krążek się zatrzyma? b) O jaki kąt obróci się on w tym czasie?

•12 Prędkość kątowa silnika samochodu wzrasta ze stałą szybkością od wartości 1200 obrotów/min do 3000 obrotów na minutę w czasie 12 s. a) Ile wynosi jego przyspieszenie kątowe w obrotach na minutę do kwadratu? b) Ile obrotów wykona silnik w czasie tych 12 sekund?

••13 ilw Koło zamachowe zaczyna zwalniać w chwili, gdy obraca się z prędkością kątową równą 1,5 rad/s i zatrzymuje się po wykonaniu 40 obrotów. a) Wyznacz czas, w jakim wykonało ono 40 obrotów, zakładając, że ruch odbywał się ze stałym przyspieszeniem kątowym. b) Ile wynosiło to przyspieszenie kątowe? c) W jakim czasie koło wykonało pierwsze 20 z tych 40 obrotów?

••14 GO Nieruchomy początkowo krążek zaczyna obracać się wokół swej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym. W pewnej chwili jego prędkość kątowa wynosi 10 obrotów/s, a po wykonaniu przez krążek dalszych 60 obrotów jest równa 15 obrotów/s. Oblicz: a) przyspieszenie kątowe krążka, b) czas, w jakim wykonał on wspomniane 60 obrotów, c) czas, w jakim krążek osiągnął prędkość kątową równą 10 obrotów/s, d) liczbę obrotów, jakie wykonał krążek od początku ruchu do chwili, gdy osiągnął prędkość kątową równą 10 obrotów/s.

••15 ssm Nieruchome początkowo koło zaczyna w pewnej chwili ($t = 0$) obracać się ze stałym przyspieszeniem kątowym $\alpha = 3$ rad/s^2. W pewnym przedziale czasu — od t_1 do t_2, przy czym $t_2 - t_1 = 4$ s — koło obraca się o 120 rad. Ile wynosi t_1?

••16 Nieruchoma początkowo karuzela zaczyna w pewnej chwili obracać się ze stałym przyspieszeniem kątowym 1,5 rad/s^2. Ile czasu zajmie jej wykonanie a) dwóch pierwszych pełnych obrotów i b) dwóch następnych pełnych obrotów?

••17 W chwili $t = 0$ koło zamachowe ma prędkość kątową równą 4,7 rad/s i przyspieszenie kątowe wynoszące $-0{,}25$ rad/s^2, a jego linia odniesienia wskazuje kąt $\theta_0 = 0$. a) O jaki maksymalny kąt θ_{max} obróci się linia odniesienia koła w dodatnim kierunku obrotu? W jakiej chwili linia odniesienia zajmie położenie kątowe $\theta = \frac{1}{2}\theta_{max}$: b) po raz pierwszy, c) po raz drugi? W jakiej chwili linia odniesienia zajmie położenie kątowe $\theta = 10{,}5$ rad: d) dla t dodatniego, e) dla t ujemnego? f) Sporządź wykres θ jako funkcji t i wskaż na nim odpowiedzi na pytania (a)–(e).

•••18 Pulsar to bardzo szybko wirująca gwiazda neutronowa, która wysyła fale radiowe tak, jak latarnia morska wysyła światło. Na Ziemi odbieramy jeden impuls radiowy podczas każdego obrotu gwiazdy. Okres obrotu T pulsara wyznaczamy, mierząc odstęp w czasie między kolejnymi impulsami. Pulsar w mgławicy Kraba ma okres obrotu $T = 0{,}033$ s, rosnący w czasie z szybkością $1{,}26 \cdot 10^{-5}$ sekundy na rok. a) Ile wynosi przyspieszenie kątowe pulsara? b) Jeśli to przyspieszenie kątowe będzie stałe, to po ilu latach od chwili obecnej pulsar przestanie się obracać? c) Pulsar ten powstał w wyniku wybuchu supernowej obserwowanej z Ziemi w 1054 roku. Jaki był początkowy okres obrotu pulsara (załóż, że przyspieszenie kątowe pulsara było stałe przez cały czas od jego powstania)?

Podrozdział 10.3. Związek zmiennych liniowych z kątowymi

•19 Statek kosmiczny porusza się po łuku okręgu o promieniu 3220 km, poruszając się z prędkością 29 000 km/h. Jaka jest wartość jego: a) prędkości kątowej, b) przyspieszenia radialnego, c) przyspieszenia stycznego?

•20 Pewne ciało obraca się wokół stałej osi, przy czym położenie kątowe jego linii odniesienia jest dane zależnością $\theta = 0{,}4e^{2t}$, w której θ jest wyrażone w radianach, a t w sekundach. Rozważ punkt tego ciała znajdujący się w odległości 4 cm od osi obrotu. Jaka jest wartość: a) składowej stycznej, b) składowej radialnej przyspieszenia tego punktu w chwili $t = 0$?

•21 W okresie od 1911 do 1990 roku wierzchołek krzywej wieży w Pizie przemieszczał się na południe ze średnią prędkością 1,2 mm/rok. Wysokość wieży wynosi 55 m. Oblicz średnią prędkość kątową wierzchołka wieży względem jej podstawy, wyrażając ją w radianach na sekundę.

•22 Astronauta odbywa trening na wirówce o promieniu 10 m, której ruch odbywa się zgodnie z równaniem $\theta = 0{,}3t^2$, gdzie t jest wyrażone w sekundach, a θ w radianach. Wyznacz wartość: a) prędkości kątowej, b) prędkości liniowej, c) przyspieszenia stycznego, d) przyspieszenia radialnego astronauty w chwili $t = 5$ s.

•23 ssm www Koło zamachowe o średnicy 1,2 m obraca się z prędkością kątową równą 200 obrotów/min. a) Ile wynosi prędkość kątowa koła w radianach na sekundę? b) Ile wynosi prędkość liniowa punktu na obrzeżu koła? c) Jakie stałe przyspieszenie kątowe należy nadać temu kołu, aby zwiększyć jego prędkość kątową do wartości 1000 obrotów na minutę w czasie 60 s? Podaj odpowiedź w obrotach na minutę do kwadratu. d) Ile obrotów wykona koło w czasie 60 sekund?

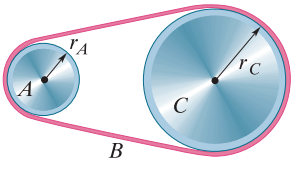
•24 Płyta winylowa obraca się na talerzu gramofonu, przy czym niemal kołowy rowek przesuwa się pod igłą gramofonu. Igła wpada od czasu do czasu w rysy, jakie powstały na płycie w trakcie jej użytkowania, co ją wprawia w drgania. Układ gramofonu przekształca te drgania na sygnały elektryczne i w końcu na dźwięki. Płyta obraca się z prędkością kątową $33\frac{1}{3}$ obrotów/min. Przyjmij, że w pewnej chwili igła jest w odległości 10 cm od osi talerza, a rysy w odległości średnio 1,75 mm od siebie. Z jaką częstotliwością igła gramofonu dociera do kolejnych rys na płycie (podaj wynik w liczbie rys na sekundę)?

••25 ssm Ziemia obraca się wokół osi łączącej jej bieguny. a) Ile wynosi przy tym prędkość kątowa ω punktu na powierzchni Ziemi, na szerokości geograficznej 40° N? b) Ile wynosi prędkość liniowa v tego punktu? Ile wynoszą wartości: c) ω, d) v dla punktu na równiku?

••26 Koło zamachowe silnika parowego obraca się ze stałą prędkością kątową równą 150 obrotów/min. Po zamknięciu strumienia pary tarcie w łożyskach koła oraz opór powietrza powodują zatrzymanie się koła po upływie 2,2 h. a) Ile wynosi przy tym stałe przyspieszenie kątowe koła, w obrotach na minutę do kwadratu? b) Ile obrotów wykona to koło od chwili odcięcia dopływu pary do zatrzymania się koła? c) Ile wynosi składowa styczna przyspieszenia liniowego punktu koła, znajdującego się w odległości 50 cm od osi obrotu w chwili, gdy koło obraca się z prędkością kątową równą 75 obrotów/min? d) Ile wynosi wówczas wartość całkowitego (wypadkowego) przyspieszenia liniowego tego punktu?

••27 Talerz gramofonu obraca się z prędkością $33\frac{1}{3}$ obrotów/min. Na talerzu, w odległości 6 cm od osi obrotu, znajduje się pestka arbuza. a) Oblicz przyspieszenie pestki, zakładając, że nie ześlizguje się ona po talerzu. b) Ile wynosi minimalna wartość współczynnika tarcia statycznego między pestką a talerzem, przy której pestka nie ślizga się po talerzu? c) Przyjmij, że talerz uzyskuje swoją stałą prędkość kątową po 0,25 s od chwili włączenia silniczka, obracając się w tym czasie ze stałym przyspieszeniem kątowym. Oblicz minimalną wartość współczynnika tarcia statycznego, przy której pestka nie ślizga się po talerzu podczas jego rozpędzania.

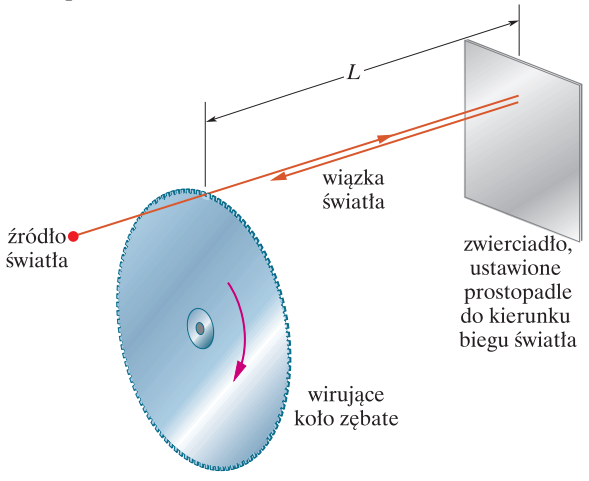
••28 Jak pokazano na rysunku 10.30, koło A o promieniu $r_A = 10$ cm jest połączone za pomocą pasa B z kołem C o promieniu $r_C = 25$ cm. Prędkość kątowa koła A, równa zeru w chwili początkowej, wzrasta ze stałą szybkością równą 1,6 rad/s^2. Po jakim czasie (od początku ruchu) prędkość kątowa koła C osiągnie wartość 100 obrotów/min? Załóż, że pas porusza się bez poślizgu. *Wskazówka:* Jeśli pas się nie ślizga, to prędkości liniowe punktów na obrzeżach obydwu kół muszą być sobie równe.



Rys. 10.30. Zadanie 28

••29 Jedna z dawniejszych metod pomiaru prędkości światła polega na zastosowaniu wirującego koła zębatego. Wiązka

światła przechodzi przez wycięcie na skraju koła, jak pokazano na rysunku 10.31, biegnie do zwierciadła, umieszczonego w dużej odległości od koła, a po odbiciu od tego zwierciadła dociera do koła w chwili, w której może przejść przez następne wycięcie na jego brzegu. W jednym z takich doświadczeń użyto koła zębatego o promieniu 5 cm, mającego na brzegu 500 wycięć, a zwierciadło umieszczono w odległości $L = 500$ m od koła. Zmierzona wartość prędkości światła była równa $3 \cdot 10^5$ km/h. a) Z jaką (stałą) prędkością kątową obracało się koło zębate? b) Ile wynosiła przy tym prędkość liniowa punktów na obrzeżu koła?



Rys. 10.31. Zadanie 29

••30 Znajdujące się początkowo w spoczynku koło zamachowe żyroskopu o promieniu 2,83 cm jest rozpędzane z przyspieszeniem kątowym 14,2 rad/s^2, aż do osiągnięcia prędkości kątowej 2760 obrotów/min. a) Ile wynosi w tym czasie przyspieszenie styczne punktu znajdującego się na obrzeżu koła? b) Ile wynosi przyspieszenie radialne tego punktu po osiągnięciu przez koło pełnej prędkości obrotu? c) Jaką drogę przebywa punkt na obrzeżu koła podczas jego rozpędzania?

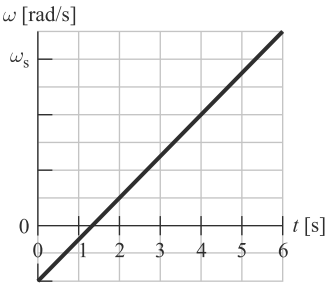
••31 GO Krążek o promieniu 0,25 m ma obrócić się wokół swej osi symetrii o 800 rad w następujący sposób: będąc w chwili początkowej w spoczynku, ma najpierw zwiększać swą prędkość kątową ze stałą szybkością α_1, aż do chwili, gdy wykona obrót o 400 rad, po czym ma zmniejszać swą prędkość kątową ze stałą szybkością $-\alpha_1$, aż do chwili, gdy się przestanie obracać. Wartość przyspieszenia dośrodkowego jakiejkolwiek części krążka nie może być większa niż 400 m/s^2. a) Jaki musi być co najmniej czas wykonania przez krążek całkowitego opisanego obrotu? b) Jakiej odpowiada to wartości α_1?

••32 Samochód znajduje się początkowo w spoczynku, a następnie zaczyna się poruszać po kołowym torze o promieniu 30 m, przy czym wartość jego prędkości wzrasta ze stałą szybkością równą 0,5 m/s^2. a) Oblicz wartość *całkowitego* przyspieszenia liniowego samochodu po upływie 15 s od początku jego ruchu. b) Oblicz kąt, jaki tworzy w tej chwili wektor całkowitego przyspieszenia samochodu z wektorem jego prędkości.

Podrozdział 10.4. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym

•33 ssm Oblicz moment bezwładności koła, które ma energię kinetyczną równą 24 400 J, gdy obraca się z prędkością kątową 602 obrotów/min.

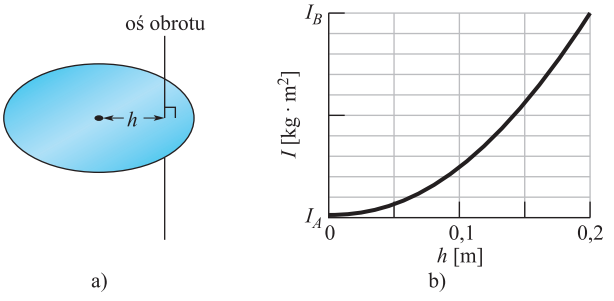
•34 Na rysunku 10.32 przedstawiono zależność prędkości kątowej od czasu dla cienkiego pręta obracającego się wokół osi przechodzącej przez jeden z jego końców (prostopadłej do pręta). Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $\omega_s = 6$ rad/s. a) Ile wynosi wartość przyspieszenia kątowego pręta? b) Ile wynosiła energia kinetyczna pręta w chwili $t = 0$, jeśli w chwili $t = 4$ s wynosi ona 1,6 J?



Rys. 10.32. Zadanie 34

Podrozdział 10.5. Jak obliczyć moment bezwładności?

•35 ssm Dwa jednorodne walce o takich samych masach, równych 1,25 kg, lecz o różnych promieniach podstawy, zostały wprawione — każdy z osobna — w ruch obrotowy wokół swej osi z prędkością kątową 235 rad/s. Ile wynosi energia kinetyczna ruchu obrotowego: a) walca o mniejszym promieniu podstawy równym 0,25 m, b) walca o większym promieniu podstawy równym 0,75 m?

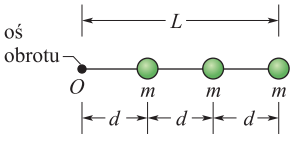


Rys. 10.33. Zadanie 36

•36 Na rysunku 10.33a przedstawiono krążek, który może się obracać wokół dowolnej osi prostopadłej do powierzchni krążka i przechodzącej przez punkt krążka odległy od jego środka o h. Na rysunku 10.33b pokazano wykres zależności momentu bezwładności krążka I względem tej osi od h w zakresie od środka krążka aż do jego brzegu. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędne punktów $I_A = 0{,}05$ kg · m^2 i $I_B = 0{,}15$ kg · m^2. Wyznacz masę krążka.

•37 Oblicz moment bezwładności przymiaru metrowego o masie 0,56 kg względem osi prostopadłej do przymiaru i przechodzącej przez kreskę oznaczoną jako 20 cm (przyjmij, że przymiar można uważać za cienki pręt).

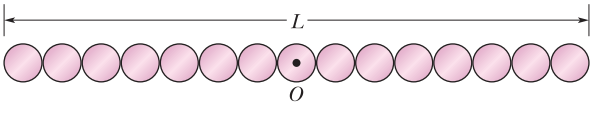
•38 Na rysunku 10.34 przedstawiono trzy kulki o masie 0,01 kg, które przyklejono do pręta o długości $L = 6$ cm i znikomo małej masie. Ten układ może się obracać wokół osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez punkt O, czyli jego lewy koniec. Wyobraź sobie. że usuwamy jedną z kulek (czyli 33% masy układu). O ile zmniejszy się przy tym procentowo moment bezwładności układu względem danej osi obrotu, jeśli usuniemy kulkę: a) najbliższą osi, b) najdalszą od osi?



Rys. 10.34. Zadania 38 i 62

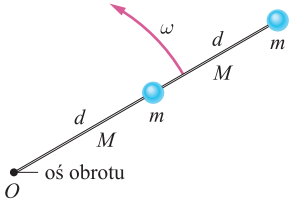
••39 Do napędu pojazdów można używać energii ruchu obrotowego koła zamachowego. Za pomocą silnika elektrycznego rozpędza się koło zamachowe do jego maksymalnej prędkości kątowej 200π rad/s. Jednym z takich kół zamachowych był jednorodny walec o masie 500 kg i promieniu podstawy 1 m. a) Jaką energię kinetyczną miało takie koło po jego rozpędzeniu? b) Jak długo mógł być w ruchu taki pojazd, jeśli jego średnia moc robocza wynosiła 8 kW?

••40 Na rysunku 10.35 przedstawiono układ 15 jednakowych krążków sklejonych ze sobą tak, że układ ma z grubsza kształt pręta o długości $L = 1$ m i masie (łącznej) $M = 100$ mg. Krążki są jednorodne, a ich układ może się obracać wokół osi prostopadłej do powierzchni krążków i przechodzącej przez środek krążka środkowego (punkt O na rysunku). a) Oblicz moment bezwładności układu krążków względem danej osi. Wyobraź sobie, że przybliżoną wartość momentu bezwładności układu postanowiliśmy obliczyć, traktując układ jako jednorodny pręt o masie M i długości L oraz korzystając ze wzoru z tabeli 10.2 (punkt (e)). b) Jaki błąd względny (procentowy) popełniamy w ten sposób?



Rys. 10.35. Zadanie 40

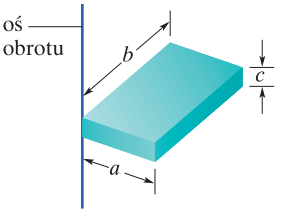
••41 GO Na rysunku 10.36 przedstawiono dwie cząstki o masach $m = 0{,}85$ kg każda, połączone cienkim prętem o długości $d = 5{,}6$ cm i masie $M = 1{,}2$ kg. Drugi taki sam pręt łączy jedną z cząstek z punktem O. Układ obraca się z prędkością kątową $\omega = 0{,}3$ rad/s wokół osi przechodzącej przez punkt O i prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Wyznacz: a) moment bezwładności układu względem tej osi, b) energię kinetyczną ruchu obrotowego układu.



Rys. 10.36. Zadanie 41

••42 Przeanalizuj układ czterech cząstek o następujących masach i współrzędnych: 50 g, $x = 2$ cm, $y = 2$ cm; 25 g, $x = 0$, $y = 4$ cm; 25 g, $x = -3$ cm, $y = -3$ cm; 30 g, $x = -2$ cm, $y = 4$ cm. Wyznacz moment bezwładności tego układu względem osi: a) x, b) y, c) z. d) Oznacz wyniki otrzymane w punktach (a) i (b) przez A i B. Jak wyraża się wynik otrzymany w punkcie (c) przez wartości A i B?

••43 ssm www Jednorodna płyta w kształcie prostopadłościanu przedstawiona na rysunku 10.37 ma masę 0,172 kg oraz długości krawędzi $a = 3{,}5$ cm, $b = 8{,}4$ cm i $c = 1{,}4$ cm. Oblicz moment bezwładności tej płyty względem osi przechodzącej przez jej wierzchołek i prostopadłej do dwóch dłuższych krawędzi.

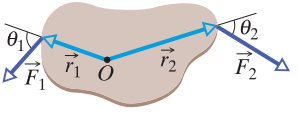


Rys. 10.37. Zadanie 43

••44 Cztery jednakowe cząstki o masie 0,5 kg każda umieszczono w wierzchołkach kwadratu o boku 2 m i połączono je czterema prętami o znikomo małych masach, tworzącymi boki tego kwadratu. Wyznacz moment bezwładności utworzonego w ten sposób ciała względem osi: a) leżącej w płaszczyźnie kwadratu i przechodzącej przez środki jego przeciwległych boków, b) prostopadłej do płaszczyzny kwadratu i przechodzącej przez środek jednego z boków, c) leżącej w płaszczyźnie kwadratu i przechodzącej przez dwa jego przeciwległe wierzchołki.

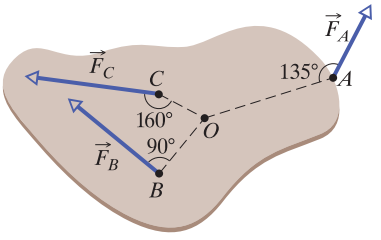
Podrozdział 10.6. Moment siły

•45 ssm ilw Ciało przedstawione na rysunku 10.38 może obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt O. Na to ciało działają dwie siły, jak pokazano na rysunku. a) Podaj wyrażenie na wypadkowy moment siły działający na to ciało. b) Ile wynosi moment siły, zakładając, że $r_1 = 1{,}30$ m, $r_2 = 2{,}15$ m, $F_1 = 4{,}2$ N, $F_2 = 4{,}9$ N, $\theta_1 = 75°$, a $\theta_2 = 60°$?



Rys. 10.38. Zadanie 45

•46 Ciało przedstawione na rysunku 10.39 może obracać się wokół osi przechodzącej przez punkt O. Na to ciało działają trzy siły, których kierunki pokazano na rysunku; siła $F_A = 10$ N



Rys. 10.39. Zadanie 46

jest przyłożona w punkcie A, odległym od O o 8 m, siła $F_B = 16$ N jest przyłożona w punkcie B, odległym od O o 4 m, a siła $F_C = 19$ N jest przyłożona w punkcie C, odległym od O o 3 m. Ile wynosi działający na to ciało wypadkowy moment siły względem punktu O?

•47 ssm Niewielką kulkę o masie 0,75 kg przymocowano do końca pręta o długości 1,25 m i znikomo małej masie, a drugi koniec pręta zawieszono na osi. Wyznacz moment siły działający na utworzone w ten sposób wahadło, gdy jest ono odchylone od pionu o kąt 30°.

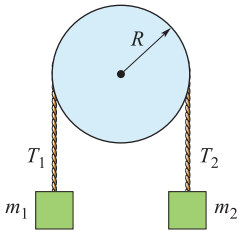
•48 Ramię pedału roweru ma długość 0,152 m, a rowerzysta działa na pedał skierowaną pionowo w dół siłą o wartości 111 N. Jaką wartość ma moment siły działający na pedał, gdy ramię tworzy z pionem kąt: a) 30°, b) 90°, c) 180°?

Podrozdział 10.7. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

•49 ssm ilw Podczas odbicia się skoczka od trampoliny prędkość kątowa jego obrotu wokół środka masy wzrasta od zera do 6,2 rad/s w czasie 220 ms. Wyznacz wartość: a) średniego przyspieszenia kątowego skoczka, b) średniego momentu siły, działającego na niego ze strony trampoliny, jeśli moment bezwładności skoczka względem jego środka masy wynosi 12 kg · m^2.

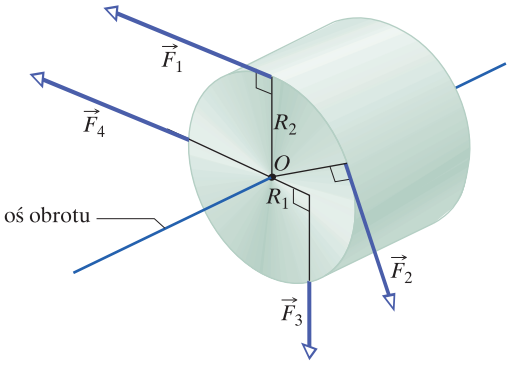
•50 Moment siły o wartości 32 N · m nadaje pewnemu kołu przyspieszenie kątowe równe 25 rad/s. Ile wynosi moment bezwładności tego koła?

••51 GO Jak widać na rysunku 10.40, dwa klocki, o masach $m_1 = 460$ g oraz $m_2 = 500$ g, połączono linką, którą owinięto wokół jednorodnego krążka o promieniu $R = 5$ cm. Krążek może się obracać bez tarcia wokół osi poziomej przechodzącej przez jego środek, a linka się po nim nie ślizga. Gdy nieruchome początkowo klocki puszczono swobodnie, klocek 2 opadł o 75 cm w czasie 5 s. Wyznacz: a) wartość przyspieszenia klocków, b) naprężenie T_2 prawej części linki, c) naprężenie T_1 lewej części linki. Wyznacz d) wartość przyspieszenia kątowego krążka i e) jego moment bezwładności.



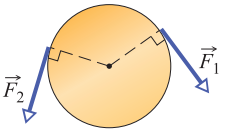
Rys. 10.40. Zadania 51 i 83

••52 GO Jak pokazano na rysunku 10.41, walec o masie 2 kg może obracać się wokół swej osi. Wartości działających na walec sił są równe: $F_1 = 6$ N, $F_2 = 4$ N, $F_3 = 2$ N i $F_4 = 5$ N, a zaznaczone na rysunku odcinki wynoszą $R_1 = 5$ cm oraz $R_2 = 12$ cm. Wyznacz a) wartość i b) kierunek przyspieszenia kątowego walca (załóż, że w czasie obrotu kierunki sił względem walca się nie zmieniają).

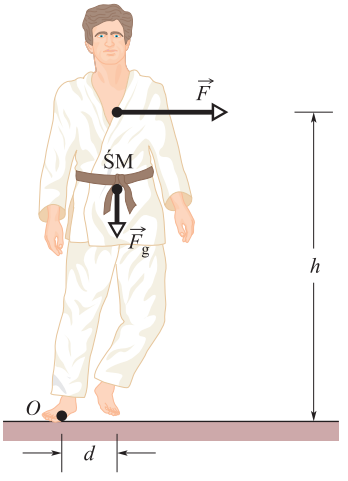


Rys. 10.41. Zadanie 52

••53 GO Na rysunku 10.42 pokazano jednorodny krążek, który może się obracać wokół swej osi symetrii (jak karuzela). Ma on promień 2 cm i masę 20 g, a początkowo pozostaje w spoczynku. W chwili $t = 0$ zaczynają na niego działać dwie siły przyłożone stycznie do obrzeża krążka, jak pokazano na rysunku. W chwili $t = 1{,}25$ s krążek ma prędkość kątową o wartości 250 rad/s i obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Siła $\vec{F}_1$ ma wartość 0,1 N. Wyznacz wartość siły $\vec{F}_2$.



Rys. 10.42. Zadanie 53

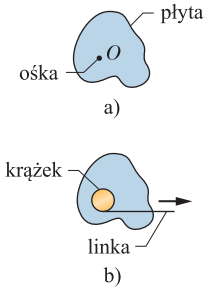


Rys. 10.43. Zadanie 54

••54 Jedną z technik walki w dżudo jest podcięcie stopy, w trakcie którego uderzasz swoją stopą lewą stopę przeciwnika, by oderwać ją od maty, a jednocześnie ciągniesz go za jego strój w jego lewą stronę. Ma to doprowadzić do obrotu zawodnika wokół jego prawej stopy i upadku na matę. Na rysunku 10.43 przedstawiono twojego przeciwnika, gdy podcinasz mu lewą stopę, stojąc naprzeciw niego. Oś obrotu przechodzi przez punkt O. Siła ciężkości $\vec{F}_g$ działa w środku

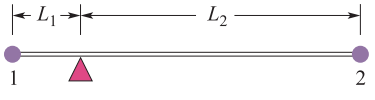
masy zawodnika, a jej ramię wynosi $d = 28$ cm względem punktu O. Masa zawodnika wynosi 70 kg, a jego moment bezwładności względem punktu O jest równy 65 kg · m^2. Oblicz wartość początkowego przyspieszenia kątowego zawodnika przy obrocie wokół osi przechodzącej przez punkt O, jeśli siła $\vec{F}$, jaką ciągniesz jego strój jest: a) zaniedbywalnie mała, b) pozioma, o wartości 300 N, przyłożona na wysokości $h = 1{,}4$ m nad matą.

••55 GO Jak pokazano na rysunku 10.44a, plastikowa płyta o nieregularnym kształcie, stałej gubości i stałej gęstości (masie jednostkowej objętości) ma się obracać na ośce prostopadłej do powierzchni płyty i przechodzącej przez punkt O. Moment bezwładności płyty względem ośki można zmierzyć w następujący sposób. Do płyty przyklejamy krążek o masie 0,5 kg i promieniu 2 cm tak, że jego środek wypada w punkcie O (rys. 10.44b). Na obrzeże krążka nawijamy linkę (jak na bąka wprawianego w ruch za pomocą linki). Ciągniemy linkę, działając na nią siłą 0,4 N i stwierdzamy, że po 5 s od przyłożenia tej siły prędkość kątowa układu wynosi 114 rad/s. Ile wynosi moment bezwładności płyty względem ośki?



Rys. 10.44. Zadanie 55

••56 GO Na rysunku 10.45 pokazano dwie cząstki, każda o masie m, przymocowane do dwóch końców sztywnego pręta o znikomo małej masie oraz długości $L_1 + L_2$, przy czym $L_1 = 20$ cm, a $L_2 = 80$ cm. Pręt podtrzymano w położeniu poziomym, a następnie puszczono swobodnie. Jaka była początkowa wartość przyspieszenia: a) cząstki 1, b) cząstki 2?



Rys. 10.45. Zadanie 56

•••57 GO Na krążek o promieniu 10 cm i momencie bezwładności względem osi równym $1 \cdot 10^{-3}$ kg · m^2 działa siła przyłożona stycznie do obwodu krążka. Wartość tej siły zmienia się w czasie zgodnie z równaniem $F = 0{,}5t + 0{,}3t^2$, w którym F jest wyrażone w niutonach, a t w sekundach. W chwili początkowej krążek się nie porusza. Ile wynosi: a) przyspieszenie kątowe, b) prędkość kątowa krążka w chwili $t = 3$ s?

Podrozdział 10.8. Praca i energia kinetyczna ruchu obrotowego

•58 Klocek z rysunku 10.18 został przytrzymany, a następnie puszczony swobodnie. a) Wyznacz jego prędkość po przebyciu drogi 50 cm, zakładając, że $R = 12$ cm, $m_1 = 400$ g oraz $m_2 = 50$ g. Rozwiąż zadanie, korzystając z zasady zachowania energii. b) Powtórz obliczenia dla $R = 5$ cm.

•59 Wał korbowy samochodu przenosi energię z silnika na oś z szybkością 100 KM (= 74,6 kW), obracając się z prędkością 1800 obrotów/min. Jakim momentem siły (w niutonach razy metr) działa on na oś?

•60 Cienki pręt o długości 0,75 m i masie 0,42 kg zawieszono swobodnie na jednym z jego końców. Drugi koniec odchylono w bok, po czym puszczono, umożliwiając prętowi ruch wahadłowy. Pręt przechodzi przez położenie pionowe z prędkością kątową 4 rad/s. Wyznacz: a) energię kinetyczną pręta w położeniu pionowym, b) maksymalne wzniesienie środka masy pręta. Pomiń tarcie i opór powietrza.

•61 Koło o masie 32 kg, które można uważać za cienką obręcz o promieniu 1,2 m, obraca się z prędkością 280 obrotów/min. Trzeba je zatrzymać w czasie 15 s. a) Jaką pracę należy przy tym wykonać? b) Jaka średnia moc jest do tego potrzebna?

••62 Na rysunku 10.34 przedstawiono trzy kulki o masie 0,01 kg, które przyklejono do pręta o długości $L = 6$ cm i znikomo małej masie. Ten układ może się obracać wokół osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez punkt O, czyli jego lewy koniec. Wyznacz pracę potrzebną do zmiany prędkości obrotu: a) od zera do 20 rad/s, b) od 20 rad/s do 40 rad/s, c) od 40 rad/s do 60 rad/s. d) Wyznacz nachylenie wykresu zależności energii kinetycznej układu (w dżulach) od kwadratu jego prędkości kątowej (w radianach kwadrat na sekundę kwadrat).

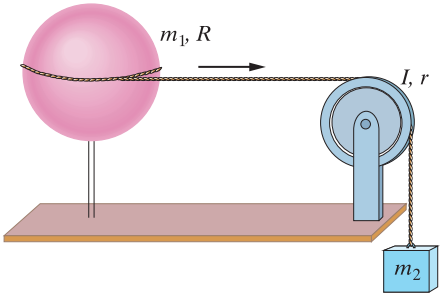
••63 ssm ilw Przymiar metrowy ustawiono pionowo, z jednym końcem opartym o podłogę, a następnie umożliwiono mu upadek. Wyznacz prędkość drugiego końca przymiaru w chwili, gdy dociera on do podłogi. Załóż, że koniec oparty o podłogę nie ślizga się po niej. *Wskazówka:* Potraktuj przymiar jak cienki pręt i skorzystaj z zasady zachowania energii.

••64 Jednorodny walec o promieniu 10 cm i masie 20 kg umocowano tak, aby mógł się obracać swobodnie wokół osi poziomej, która jest równoległa do osi walca i odległa od niej o 5 cm. a) Ile wynosi moment bezwładności walca względem takiej osi? b) Wyobraź sobie, że walec ustawiono w takim położeniu, że oś walca znajduje się na tej samej wysokości, co podana oś obrotu, a następnie puszczono go swobodnie. Jaka będzie prędkość kątowa walca, gdy jego środek masy będzie miał najniższe położenie?

•••65 GO Wysoki, cylindryczny komin przewraca się z powodu pęknięcia u podstawy. Uznaj komin za cienki pręt o długości 55 m. W pewnej chwili przewracający się komin tworzy z pionem kąt 35°. Ile wynoszą w tej chwili: a) przyspieszenie radialne górnego końca komina, b) przyspieszenie styczne tego końca? *Wskazówka:* Nie obliczaj momentu siły,

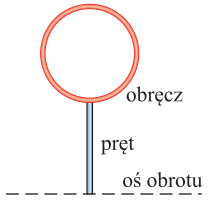
lecz skorzystaj z zasady zachowania energii. c) Dla jakiej wartości kąta θ (tworzonego przez komin z pionem) to przyspieszenie styczne jest równe g?

•••66 GO Jednorodna powłoka sferyczna o masie $m_1 = 4{,}5$ kg i promieniu $R = 8{,}5$ cm obraca się na łożyskach bez tarcia wokół swej osi pionowej (rys. 10.46). Linka o znikomo małej masie jest owinięta wokół powłoki w jej płaszczyźnie równikowej, a następnie przełożona przez krążek o momencie bezwładności $I = 3 \cdot 10^{-3}$ kg · m^2 oraz promieniu $r = 5$ cm i przymocowana do obciążnika o masie $m_2 = 0{,}6$ kg. Krążek może obracać się bez tarcia, a linka nie ślizga się po krążku. Obciążnik przytrzymujemy, a potem puszczamy swobodnie. Jaka będzie prędkość obciążnika po przebyciu drogi 82 cm? Skorzystaj z zasady zachowania energii.



Rys. 10.46. Zadanie 66

•••67 GO Na rysunku 10.47 przedstawiono sztywną konstrukcję zbudowaną z cienkiej obręczy (o masie m i promieniu $R = 0{,}15$ m) oraz cienkiego pręta (o masie m i długości $L = 2R$). Konstrukcję ustawiono pionowo, lecz wystarczy ją lekko trącić, by wprawić ją w ruch obrotowy wokół osi poziomej prostopadłej do płaszczyzny konstrukcji przechodzącej przez dolny koniec pręta. Załóż, że energia przekazana układowi przy wprawieniu go w ruch jest znikomo mała, i wyznacz prędkość kątową konstrukcji w chwili, gdy obracając się wokół danej osi obrotu, znajdzie się w położeniu pionowym, lecz z obręczą pod prętem („do góry nogami").

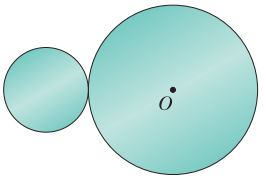


Rys. 10.47. Zadanie 67

Zadania dodatkowe

68 Dwie jednorodne (pełne) kule mają jednakową masę, równą 1,65 kg, lecz różne promienie: promień jednej wynosi 0,226 m, a drugiej 0,854 m. Każda z nich może się obracać wokół osi przechodzącej przez jej środek. a) Wyznacz wartość M momentu siły potrzebnego do nadania mniejszej kuli, znajdującej się początkowo w spoczynku, prędkości kątowej o wartości 317 rad/s w ciągu 15,5 s. b) Wyznacz wartość F siły, która daje taki moment siły po przyłożeniu jej stycznie do kuli na jej równiku. Ile wynoszą analogiczne wartości c) M, d) F dla większej kuli?

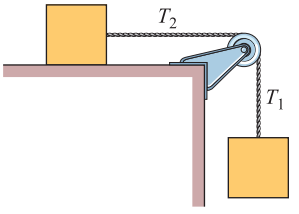
69 Jak pokazano na rysunku 10.48, duży krążek o promieniu $R = 4$ cm i mały krążek o promieniu $r = 2$ cm sklejono ze sobą na ich obrzeżach tak, że krążki leżą w jednej płaszczyźnie. Mogą się one obracać wokół prostopadłej do tej płaszczyzny osi przechodzącej przez punkt O, czyli środek większego krążka. Oba krążki mają stałą gęstość (masę jednostkowej objętości) równą $1{,}4 \cdot 10^3$ kg/m^3 i stałą grubość 5 mm. Ile wynosi moment bezwładności tego układu krążków wokół osi obrotu przechodzącej przez punkt O?



Rys. 10.48. Zadanie 69

70 Nieruchome początkowo koło zaczyna obracać się ze stałym przyspieszeniem kątowym, równym 2 rad/s^2. W pewnym przedziale czasu o długości 3 s obróciło się ono o 90 rad. a) Ile czasu upłynęło od początku ruchu koła do początku wspomnianego przedziału czasu o długości 3 s? b) Ile wynosiła prędkość kątowa koła na początku tego przedziału czasu o długości 3 s?

71 ssm Dwa jednakowe klocki, z których każdy ma masę 6,2 kg, połączono linką o znikomo małej masie, którą przełożono przez bloczek o promieniu 2,4 cm i momencie bezwładności równym $7{,}4 \cdot 10^{-4}$ kg · m^2 (rys. 10.49). Linka nie ślizga się po bloczku, a bloczek obraca się bez tarcia, natomiast nie wiadomo, czy występuje tarcie między stołem a ślizgającym się po nim klockiem. Początkowo układ utrzymujemy w spoczynku, a w chwili $t = 0$ pozwalamy mu się poruszać. Przyspieszenie klocków jest stałe, a bloczek obraca się w czasie 91 ms o kąt 0,13 rad. Wyznacz: a) wartość przyspieszenia kątowego bloczka, b) wartość przyspieszenia klocków, c) naprężenie linki T_1 i d) naprężenie linki T_2.



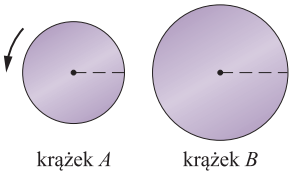
Rys. 10.49. Zadanie 71

72 Do każdego z końców stalowego pręta o długości 1,2 m i masie 6,4 kg przymocowano małą kulkę o masie 1,06 kg. Pręt może się obracać w płaszczyźnie poziomej wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek. W pewnej chwili pręt obraca się z prędkością kątową 39 obrotów/s, a następnie pod wpływem tarcia zwalnia aż do zatrzymania się w ciągu 32 s. Załóż, że moment siły tarcia jest stały i oblicz: a) przyspieszenie kątowe pręta, b) moment siły tarcia, który spowalnia jego ruch, c) całkowitą energię zamienioną przy tym z energii mechanicznej w energią termiczną, d) liczbę obrotów, jaką wykona pręt w czasie tych 32 s. e) Przyjmij z kolei, że wiadomo, iż moment siły tarcia nie jest stały. Czy któreś z wielkości, o które pytano w punktach a, b, c i d, można wy-

znaczyć w tym przypadku bez dodatkowych informacji? Jeśli któreś można, to oblicz ich wartości.

73 Jednorodna łopata śmigła helikoptera, o długości 7,8 m i masie 110 kg, jest przymocowana do osi wirnika jednym wkrętem. a) Oblicz wartość siły działającej na wkręt ze strony osi, gdy wirnik obraca się z prędkością 320 obrotów na minutę. (*Wskazówka*: W tym przypadku możesz przyjąć, że cała masa łopaty jest skupiona w jej środku masy. Czy wiesz, dlaczego?). b) Oblicz moment siły, jaki trzeba przyłożyć do wirnika, by rozpędzić go w ciągu 6,7 s od stanu spoczynku do podanej prędkości kątowej. Pomiń opór powietrza. (W tym przypadku nie możesz założyć, że cała masa łopaty jest skupiona w jej środku masy. Dlaczego? Przyjmij, że łopatę można uważać za jednorodny, cienki pręt). c) Oblicz pracę, jaką musi wykonać działający na łopatę moment siły, aby rozpędzić ją do prędkości 320 obrotów/min.

74 *Wyścig krążków*. Na rysunku 10.50 przedstawiono dwa krążki, które mogą się obracać wokół swoich osi symetrii. W chwili $t = 0$ linie odniesienia obu krążków mają takie samo ustawienie. Krążek A już się obraca i ma w tej chwili stałą prędkość kątową 9,5 rad/s. Krążek B, dotychczas pozostający w spoczynku, właśnie zaczyna się obracać ze stałym przyspieszeniem kątowym 2,2 rad/s^2. a) W jakiej chwili t linie odniesienia obu krążków będą miały chwilowo takie samo przemieszczenie kątowe θ? b) Czy kiedykolwiek wcześniej (ale później niż w chwili $t = 0$) linie odniesienia obu krążków były chwilowo tak samo ustawione?



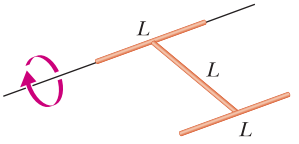
Rys. 10.50. Zadanie 74

75 Linoskoczek cały czas stara się utrzymywać swój środek masy nad liną. Pomaga mu w tym długa tyczka: gdy przechyla się w jedną stronę (czyli przemieszcza w tę stronę swój środek masy) i grozi mu obrót wokół liny, przesuwa tyczkę (a więc i środek masy siebie z tyczką) w drugą stronę, dzięki czemu zmniejsza prędkość kątową, co daje mu czas na poprawę swej równowagi na linie. Przyjmij, że linoskoczek ma masę 70 kg i moment bezwładności 15 kg · m^2 względem liny. Wyznacz wartość przyspieszenia kątowego linoskoczka względem liny, jeśli jego środek masy jest o 5 cm na prawo od liny, a linoskoczek: a) nie ma tyczki, b) ma tyczkę o masie 14 kg i trzyma ją tak, że środek masy tyczki jest o 10 cm na lewo od liny.

76 Koło jest początkowo nieruchome, a w chwili $t = 0$ zaczyna się obracać ze stałym przyspieszeniem kątowym. W chwili $t = 2$ s jego prędkość kątowa jest równa 5 rad/s. Ruch przyspieszony koła trwa do chwili $t = 20$ s, w której przyspieszenie koła gwałtownie maleje do zera. Ile wynosi kąt, o jako obróci się koło od chwili $t = 0$ do chwili $t = 40$ s?

77 Talerz gramofonu obracającego się normalnie z prędkością kątową $33\frac{1}{3}$ obrotów/min zwalnia i zatrzymuje się po 30 s od wyłączenia silniczka. a) Wyznacz przyspieszenie kątowe talerza w tym czasie. Przyjmij, że jest ono stałe i podaj wynik w obrotach na minutę do kwadratu. b) Ile obrotów wykona talerz w tym czasie?

78 Ciało sztywne tworzą trzy jednakowe, cienkie pręty, każdy o długości $L = 0{,}6$ m, połączone w kształt litery H (rys. 10.51). Ciało to może się obracać wokół osi poziomej, na której leży jeden z równoległych prętów. Ciało jest podtrzymane tak, że leży w płaszczyźnie poziomej, po czym zostaje puszczone swobodnie. Ile wynosi jego prędkość kątowa w chwili, gdy ciało znajduje się w płaszczyźnie pionowej?



Rys. 10.51. Zadanie 78

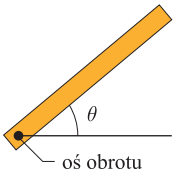
79 a) Wykaż, że moment bezwładności walca o masie M i promieniu podstawy R względem jego osi jest równy momentowi bezwładności cienkiej obręczy o masie M i promieniu $R/\sqrt{2}$ względem jej osi. b) Wykaż, że moment bezwładności I dowolnego ciała o masie M względem dowolnej osi jest równy momentowi bezwładności obręczy o masie M i promieniu

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

względem tej osi. Promień tej obręczy nazywa się *ramieniem bezwładności* danego ciała.

80 Krążek obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym. Jego położenie kątowe zmienia się z $\theta_1 = 10$ rad w $\theta_2 = 70$ rad w czasie 6 s. W chwili, gdy położenie kątowe krążka jest równe θ_2, ma on prędkość kątową 15 rad/s. a) Ile wynosi prędkość kątowa krążka, gdy jego położenie kątowe krążka jest równe θ_1? b) Ile wynosi przyspieszenie kątowe krążka? c) Jakie było położenie kątowe krążka, gdy znajdował się on początkowo w spoczynku? d) Sporządź wykres zależności θ od czasu t oraz prędkości kątowej ω od t dla tego krążka od początku jego ruchu (przyjmij, że wtedy $t = 0$).

81 Cienki, jednorodny pręt o masie 1,5 kg i długości 2 m może się obracać bez tarcia wokół osi poziomej przechodzącej przez jeden z jego końców (rys. 10.52). Początkowo utrzymujemy pręt w spoczynku w położeniu, w którym tworzy on z poziomem kąt $\theta = 40°$, a następnie pozwalamy mu się poruszać. Korzystając z zasady zachowania energii, wyznacz prędkość kątową pręta w chwili, w której przechodzi on przez położenie poziome.



Rys. 10.52. Zadanie 81

82 George Washington Gale Ferris Jr., inżynier budownictwa, absolwent uczelni Rensselaer Polytechnic Institute,

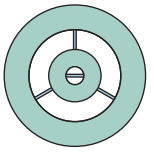
zbudował pierwszy diabelski młyn w 1893 roku na Wystawę Światową w Chicago. Urządzenie to, którego konstrukcja była w owym czasie niezwykłym osiągnięciem budowlanym, zawierało 36 drewnianych wagoników, z których każdy mógł pomieścić aż 60 pasażerów i poruszał się po okręgu o średnicy 76 m. Pasażerowie wsiadali jednocześnie do 6 wagoników, a po zapełnieniu wszystkich 36 wagoników koło wprawiano w ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową, podczas którego wykonywało ono pełny obrót w czasie około 2 minut. Oszacuj pracę, którą musiał wykonywać silnik urządzenia, aby zapewnić ruch obrotowy samych pasażerów.

83 Jak pokazano na rysunku 10.40, dwa klocki, o masach $m_1 = 400$ g i $m_2 = 600$ g, połączono linką o znikomo małej masie, którą owinięto wokół jednorodnego krążka o masie $M = 500$ g i promieniu $R = 12$ cm. Krążek może się obracać bez tarcia wokół osi poziomej przechodzącej przez jego środek, a linka się po nim nie ślizga. Wyznacz: a) wartość przyspieszenia klocków, b) naprężenie T_1 lewej części linki, c) naprężenie T_2 prawej części linki.

84 30 czerwca 1908 roku o godzinie 7.30 nad odległym zakątkiem środkowej Syberii, na 61° szerokości geograficznej północnej i 102° długości wschodniej wydarzył się gigantyczny wybuch, któremu towarzyszyła kula ognista stanowiąca najjaśniejszy błysk, jaki ktokolwiek mógł zobaczyć przed zbudowaniem bomby atomowej. Zjawisko to, według jednego ze świadków, „obejmujące olbrzymią część nieba" było najprawdopodobniej eksplozją *meteoroidu skalnego* o średnicy około 140 m, którego pozostałości nazwano *meteorytem tunguskim*. a) Biorąc pod uwagę jedynie ruch obrotowy Ziemi, oblicz, o ile później musiałby dotrzeć do Ziemi ten meteoroid, aby wybuch nastąpił nad Helsinkami, tzn. na 25° długości geograficznej wschodniej. Wybuch taki starłby z powierzchni Ziemi całe to miasto. b) Gdyby ten meteoroid nie był skalny, lecz *metaliczny*, to mógłby nie wybuchnąć w atmosferze, lecz dotrzeć w całości do powierzchni Ziemi. Oblicz, o ile później musiałby on dotrzeć do Ziemi, aby wpaść do Oceanu Atlantyckiego na 20° długości geograficznej zachodniej. Powstałe przy tym fale tsunami (jak te, które są skutkiem podwodnych trzęsień Ziemi i wybuchów wulkanów) zniszczyłyby zapewne wszelkie ślady cywilizacji w rejonach przybrzeżnych po obydwu stronach Oceanu Atlantyckiego.

85 Piłkę golfową wybito w powietrze pod kątem 20° do poziomu, z prędkością początkową o wartości 60 m/s oraz prędkością kątową ruchu obrotowego 90 rad/s. Pomiń opór powietrza i wyznacz liczbę pełnych obrotów piłki od jej wybicia do osiągnięcia przez nią największej wysokości.

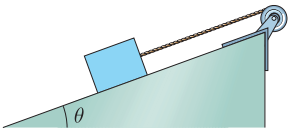
86 GO Na rysunku 10.53 przedstawiono płaską konstrukcję zbudowaną z dwóch pierścieni o wspólnym środku, połączonych trzema prętami o znikomo małej masie. Układ, pozostający początkowo w spoczynku, może się obracać wokół osi przechodzącej przez wspólny środek pierścieni, gdzie umieszczono inny pręt o znikomo małej masie. Masy oraz wewnętrzne i zewnętrzne promienie pierścieni podano w tabelce. Stycznie do zewnętrznego obrzeża zewnętrznego pierścienia przyłożono na czas 0,3 s siłę o wartości 12 N. Ile wynosi zmiana prędkości kątowej układu w tym przedziale czasu?



Rys. 10.53. Zadanie 86

Pierścień	Masa [kg]	Promień wewnętrzny [m]	Promień zewnętrzny [m]
1	0,12	0,016	0,045
2	0,24	0,09	0,14

87 GO Jak pokazano na rysunku 10.54, koło o promieniu 0,2 m umocowano bez tarcia na osi poziomej. Na koło nawinięto linkę o znikomo małej masie, a jej koniec połączono z pudłem o masie 2 kg ślizgającym się bez tarcia po równi pochyłej tworzącej z poziomem kąt $\theta = 20°$. Pudło porusza się w dół po równi z przyspieszeniem równym 2 m/s^2. Ile wynosi moment bezwładności koła względem osi, wokół której się obraca?



Rys. 10.54. Zadanie 87

88 Cienka powłoka sferyczna ma promień równy 1,9 m. Zewnętrzny moment siły o wartości 960 N · m nadaje tej powłoce przyspieszenie kątowe 6,2 rad/s^2 wokół osi przechodzącej przez środek powłoki. Wyznacz: a) moment bezwładności powłoki względem tej osi, b) masę powłoki.

89 Rowerzysta o masie 70 kg pokonuje wzniesienie, przy czym balansuje ciałem tak, że w czasie ruchu każdego pedału w dół środek masy rowerzysty znajduje się wprost nad tym pedałem. Średnica okręgu, po jakim poruszają się pedały, wynosi 0,4 m. Wyznacz maksymalną wartość momentu siły, jakim działa rowerzysta na pedały.

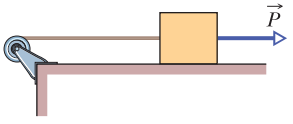
90 Koło zamachowe silnika obraca się z prędkością 25 rad/s. W pewnej chwili silnik wyłączamy, po czym koło obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym i zatrzymuje się po upływie 20 s. Oblicz: a) przyspieszenie kątowe koła, b) kąt, o jaki obróci się koło, zanim się zatrzyma, c) liczbę obrotów, jaką wykona koło, zanim się zatrzyma.

91 ssm Krążek z rysunku 10.18a o promieniu 0,2 m umieszczono na osi poziomej, na której może się obracać bez tarcia. Moment bezwładności krążka względem tej osi wynosi 0,4 kg · m^2. Na obrzeże krążka nawinięto linkę o znikomo małej masie i zawieszono na niej klocek o masie 6 kg. Układ, który początkowo pozostawał w spoczynku, puszczono swobodne. W pewnej chwili energia kinetyczna klocka wynosi 6 J. Ile wynosi a) energia kinetyczna ruchu obrotowego

krążka w tej chwili i b) droga przebyta do tej chwili przez klocek?

92 Nasze Słońce znajduje się w odległości $2{,}3 \cdot 10^4$ lat świetlnych od środka Drogi Mlecznej (czyli naszej Galaktyki) i porusza się wokół tego środka po okręgu z prędkością 250 km/s. a) Ile czasu zajmuje Słońcu wykonanie pełnego obiegu środka Drogi Mlecznej? b) Ile takich obrotów wykonało już Słońce od chwili, gdy powstało około $4{,}5 \cdot 10^9$ lat temu?

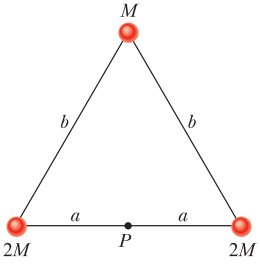
93 ssm Koło o promieniu 0,2 m zamocowano na poziomej osi, wokół której może się ono obracać bez tarcia. Moment bezwładności koła względem tej osi jest równy $0{,}05\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Na koło nawinięto linę o znikomo małej masie, a jej koniec połączono z klockiem o masie 2 kg ślizgającym się bez tarcia po powierzchni poziomej. Do klocka przyłożono poziomo siłę o wartości $P = 3$ N (rys. 10.55). Wyznacz wartość przyspieszenia kątowego koła. Przyjmij, że lina nie ślizga się po powierzchni koła.



Rys. 10.55. Zadanie 93

94 Samolot leci z prędkością o wartości 480 km/h względem Ziemi, a jego śmigło obraca się z prędkością 2000 obrotów na minutę. Oblicz wartość prędkości punktu na końcu łopatki śmigła, odległego od osi obrotu śmigła o 1,5 m, w układzie odniesienia związanym z: a) pilotem, b) obserwatorem na ziemi. Wektor prędkości samolotu ma kierunek osi obrotu śmigła.

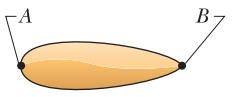
95 Na rysunku 10.56 pokazano ciało sztywne złożone z trzech kulek połączonych prętami o znikomo małej masie. Ma się ono obracać wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt P. Oblicz pracę potrzebną do nadania temu ciału, pozostającemu początkowo w spoczynku, prędkości kątowej równej 5 rad/s, wiedząc, że $M = 0{,}4$ kg, $a = 30$ cm, a $b = 50$ cm.



Rys. 10.56. Zadanie 95

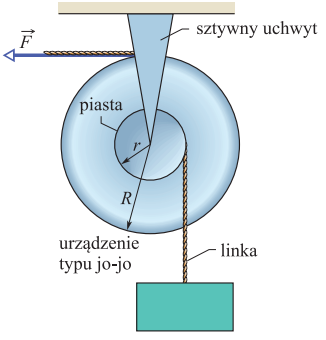
96 *Inżynieria puszki do napojów*. Wprowadzenie zawleczki do otwierania aluminiowej puszki stanowiło znaczny postęp w inżynierii pojemników na napoje. Zawleczka może się obracać na sworzniu w wieczku puszki. Gdy pociągasz jeden koniec zawleczki w górę, drugi jej koniec naciska puszkę w miejscu, gdzie jest ona lekko nacięta. Jaka jest wartość siły działającej na nacięte wieczko puszki, jeśli ty pociągasz drugi jej koniec w górę siłą 10 N? (Być może powinieneś się bliżej przyjrzeć takiej puszce).

97 Na rysunku 10.57 przedstawiono łopatę śmigła, która obraca się z prędkością 2000 obrotów na minutę wokół prostopadłej do niej osi przechodzącej przez punkt B. Punkt A na drugim końcu łopaty jest odległy od osi obrotu o 1,5 m. a) Wyznacz różnicę wartości a przyspieszenia dośrodkowego punktu A i punktu łopaty odległego od osi obrotu o 0,15 m. b) Wyznacz nachylenie wykresu a jako funkcji odległości punktu łopaty od osi obrotu.



Rys. 10.57. Zadanie 97

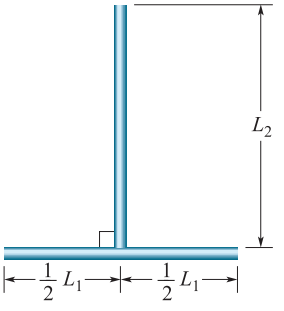
98 Na rysunku 10.58 przedstawiono urządzenie podobne do jo-jo, osadzone na osi poziomej, wokół której może się obracać bez tarcia. Przedstawione na rysunku urządzenie ma promień zewnętrzny $R = 0{,}5$ m oraz promień piasty $r = 0{,}2$ m i jest wykorzystywane do podnoszenia pudła o masie 30 kg. Gdy do linki nawiniętej na zewnętrzne obrzeże urządzenia przyłożono poziomo stałą siłę $\vec{F}$ o wartości 140 N, pudło, zawieszone na lince nawiniętej na piastę, poruszało się w górę z przyspieszeniem o wartości $0{,}8\ \text{m/s}^2$. Ile wynosi moment bezwładności urządzenia względem jego osi obrotu?



Rys. 10.58. Zadanie 98

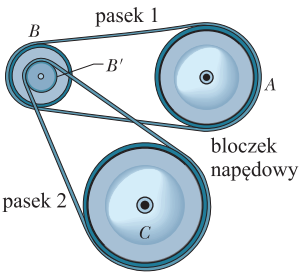
99 Małą kulkę o masie 1,3 kg umocowano na końcu pręta o długości 0,78 m i znikomo małej masie. Układ obraca się z prędkością 5010 obrotów/min w płaszczyźnie poziomej wokół osi przechodzącej przez drugi koniec pręta. a) Oblicz moment bezwładności układu względem tej osi obrotu. b) Przyjmij, że na kulkę działa siła oporu powietrza o wartości $2{,}3 \cdot 10^{-2}$ N, skierowana przeciwnie do kierunku jej ruchu. Oblicz moment siły, jaki musi działać na układ, aby utrzymać go w ruchu ze stałą prędkością kątową.

100 Dwa cienkie pręty, z których każdy ma masę 0,2 kg, połączono ze sobą w sposób pokazany na rysunku 10.59, tworząc z nich ciało sztywne. Jeden z prętów ma długość $L_1 = 0{,}4$ m, a drugi $L_2 = 0{,}5$ m. Oblicz moment bezwładności utworzonego ciała względem: a) osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek krótszego pręta, b) osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek dłuższego pręta.



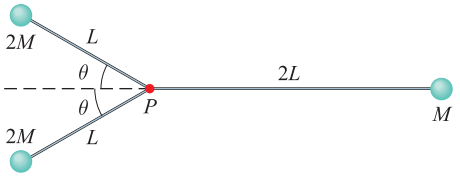
Rys. 10.59. Zadanie 100

101 Jak pokazano na rysunku 10.60, cztery bloczki połączono dwoma paskami. Bloczek A (o promieniu 15 cm) jest bloczkiem napędowym i obraca się z prędkością kątową 10 rad/s. Bloczek B (o promieniu 10 cm) jest połączony z bloczkiem A paskiem 1. Bloczek B' (o promieniu 5 cm) jest umocowany na tej samej osi, co bloczek B, i sztywno z nim połączony. Bloczek C (o promieniu 25 cm) jest połączony paskiem 2 z bloczkiem B'. Oblicz: a) prędkość liniową paska 1, b) prędkość kątową bloczka B, c) prędkość kątową bloczka B', d) prędkość liniową paska 2 oraz e) prędkość kątową bloczka C. *Wskazówka*: Jeśli pasek łączący dwa bloczki się nie ślizga, to prędkości liniowe punktów na ich obrzeżach muszą być sobie równe.



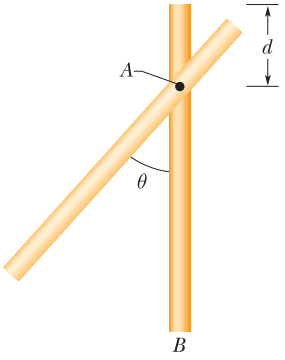
Rys. 10.60. Zadanie 101

102 Ciało sztywne przedstawione na rysunku 10.61 składa się z trzech kulek i trzech prętów, przy czym $M = 1{,}6$ kg, $L = 0{,}6$ m, a $\theta = 30°$. Kulki można traktować jak cząstki, a masa prętów jest znikomo mała. Wyznacz energię kinetyczną ruchu obrotowego tego ciała, gdy obraca się ono z prędkością kątową o wartości 1,2 rad/s wokół: a) osi przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do płaszczyzny rysunku, b) osi przechodzącej przez punkt P, leżącej w płaszczyźnie rysunku i prostopadłej do pręta o długości $2L$.



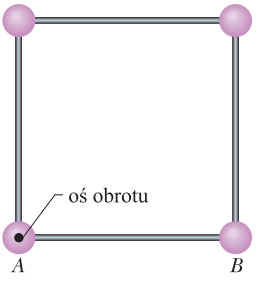
Rys. 10.61. Zadanie 102

103 Jak pokazano na rysunku 10.62, cienki, jednorodny pręt (o masie 3 kg i długości 4 m) obraca się swobodnie wokół osi poziomej A, która jest prostopadła do pręta i przechodzi przez punkt odległy o $d = 1$ m od końca pręta. Energia kinetyczna pręta wynosi 20 J, gdy przechodzi on przez położenie pionowe. a) Ile wynosi moment bezwładności pręta względem osi A? b) Ile wynosi prędkość liniowa końca pręta B, gdy pręt przechodzi przez położenie pionowe? c) Dla jakiej wartości kąta θ pręt będzie miał chwilowo prędkość równą zeru?



Rys. 10.62. Zadanie 103

104 Cztery cząstki, z których każda ma masę 0,2 kg, umieszczono w wierzchołkach kwadratu o boku 0,5 m i połączono je prętami o znikomo małej masie (jak na rys. 10.63). Otrzymane w ten sposób ciało sztywne może się obracać w płaszczyźnie pionowej wokół osi poziomej A przechodzącej przez jedną z cząstek. Początkowo ciało utrzymujemy w spoczynku w położeniu pokazanym na rysunku 10.63 (pręt AB jest poziomy), a następnie pozwalamy mu się poruszać. a) Ile wynosi moment bezwładności ciała względem osi A? b) Ile wynosi prędkość kątowa ciała względem osi A w chwili, gdy pręt AB przechodzi przez położenie pionowe?



Rys. 10.63. Zadanie 104

105 Jak stwierdzili obserwatorzy jadący samochodem terenowym obok biegnącego geparda, może on osiągnąć w pełnym biegu imponującą prędkość 114 km/h. Wyobraź sobie, że starasz się zmierzyć prędkość geparda, jadąc jeepem równo z biegnącym zwierzęciem i obserwując wskazania szybkościomierza. Jedziesz w stałej odległości od geparda, równej 8 m, lecz hałas silnika płoszy zwierzę, które przez cały czas stara się oddalić od samochodu, w wyniku czego biegnie po torze kołowym o promieniu 92 m. Ty wobec tego poruszasz się po okręgu o promieniu 100 m. Załóż, że szybkościomierz wskazuje prędkość 114 km/h i oblicz: a) prędkość kątową geparda i twojego samochodu, b) prędkość liniową geparda wzdłuż jego toru. Jeśli nie wziąłbyś pod uwagę, że gepard biegnie po torze kołowym, mógłbyś dojść do wniosku — błędnego — że prędkość geparda wynosi 114 km/h; taki właśnie błąd popełnili autorzy tych obserwacji, publikując swój wynik.

106 Punkt na obrzeżu tarczy szlifierskiej o średnicy 0,75 m ma prędkość, której wartość zmienia się jednostajnie od 12 m/s do 25 m/s w czasie 6,2 s. Ile wynosi średnie przyspieszenie kątowe tarczy?

107 Na koło bloczka, które ma średnicę 8 cm, nawinięto linkę o długości 5,6 m. Bloczek pozostawał początkowo w spoczynku, a w pewnej chwili zaczął się obracać ze stałym przyspieszeniem kątowym o wartości 1,5 rad/s^2. a) Ile wynosi kąt, o jaki obróci się bloczek do chwili całkowitego rozwinięcia się linki? b) W jakim czasie to nastąpi?

108 Płyta gramofonowa obraca się na talerzu gramofonu z prędkością $33\frac{1}{3}$ obrotów/min. a) Ile wynosi prędkość kątowa płyty w radianach na sekundę? Ile wynosi prędkość liniowa punktu płyty, który znajduje się w odległości: b) 15 cm, c) 7,4 cm od osi talerza?

ROZDZIAŁ 11

Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

11.1. TOCZENIE JAKO ZŁOŻENIE RUCHU OBROTOWEGO I POSTĘPOWEGO

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

11.01 wyjaśnić, że toczenie się ciał bez poślizgu można uważać za złożenie ruchu czysto postępowego i ruchu czysto obrotowego;

11.02 zastosować związek prędkości środka masy i prędkości kątowej ciała w przypadku toczenia się ciała bez poślizgu.

Podstawowe fakty

- Dla koła toczącego się bez poślizgu zachodzi związek

$$v_{\text{ŚM}} = \omega R,$$

gdzie $v_{\text{ŚM}}$ jest prędkością liniową środka masy koła, a ω — prędkością kątową koła względem jego środka.

- Można też uważać, że toczące się koło obraca się w każdej chwili wokół punktu styku koła z podłożem. Prędkość kątowa koła względem tego punktu jest taka sama jak prędkość kątowa koła względem jego środka.

O fizyce

Jak widzieliśmy w rozdziale 10, fizyka zajmuje się także badaniem ruchu obrotowego. Zapewne najważniejszym zastosowaniem tych zagadnień jest opis toczenia się ciał, zwłaszcza kół i ciał do nich podobnych. Zastosowania fizyki mają bardzo długą historię. Na przykład prehistoryczni mieszkańcy Wyspy Wielkanocnej przetransportowali swe gigantyczne postacie kamienne z odległych kamieniołomów na brzeg oceanu, wykorzystując jako rolki pnie wyciętych drzew. Znacznie później, XIX-wieczni osadnicy przemieszczali się na zachód Ameryki wraz ze swym dobytkiem najpierw wozami, a potem pociągami. Dziś, czy to lubimy, czy nie, świat jest pełen różnego rodzaju pojazdów na kołach: samochodów, motocykli, rowerów itd.

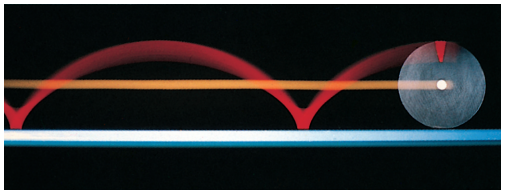
Fizycy i inżynierowie badają prawa i technikę ruchu tocznego od tak dawna, że — jak się wydaje — nie da się w tej dziedzinie wymyślić nic nowego. Jednak całkiem niedawno wymyślono i zbudowano deskorolki i łyżworolki, które odniosły wielki sukces finansowy. Sanki uliczne są coraz bardziej popularne, a kierowany ruchami ciała pojazd segway (rys. 11.1) może zmienić sposób przemieszczania się ludzi w wielkich miastach. Fizyka związana z toczeniem się ciał może więc wciąż być źródłem niespodzianek i osiągnięć. Badanie fizyki tych zjawisk zaczniemy od opisu toczenia się ciał w możliwie prostym ujęciu.



Rys. 11.1. Kierowany ruchami ciała pojazd segway (fot. Scigelova/Shutterstock)

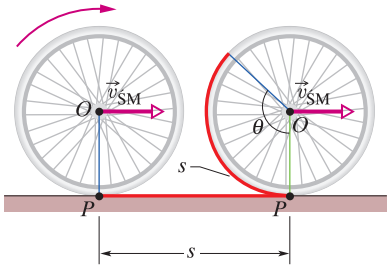
Toczenie jako złożenie ruchu obrotowego i postępowego

Zajmiemy się tutaj jedynie ciałami *toczącymi się bez poślizgu* po podłożu, czyli ciałami, które nie doznają na podłożu poślizgów ani podskoków. Na rysunku 11.2 możesz zobaczyć, jak skomplikowane może być toczenie się bez poślizgu — środek masy ciała porusza się po linii prostej, równoległej do podłoża, lecz punkt bliski brzegu koła ma tor znacznie bardziej złożony. Ruch ten można jednak opisać jako połączenie ruchu prostoliniowego środka masy i ruchu obrotowego wszystkich innych punktów ciała wokół środka masy.



Rys. 11.2. Zdjęcie toczącego się krążka, wykonane dla długiego czasu naświetlania. Do krążka przymocowano dwie lampki, jedną w jego środku, a drugą na obrzeżu. Krzywa zakreślana przez punkt znajdujący się na skraju krążka nosi nazwę *cykloidy* (for. Richard Megna/Fundamental Photographs)

Aby zobaczyć, jak to należy zrobić, wyobraź sobie, że patrzysz na koło roweru przejeżdżającego obok ciebie po ulicy ze stałą prędkością i *niedoznającego poślizgu*. Jak pokazano na rysunku 11.3, środek masy koła O przemieszcza się do przodu ze stałą prędkością $v_{\text{ŚM}}$. Punkt P, w którym koło styka się z jezdnią, również przemieszcza się do przodu z prędkością $v_{\text{ŚM}}$, tak że zawsze znajduje się dokładnie pod punktem O.



Rys. 11.3. Środek masy O toczącego się koła porusza się z prędkością $\vec{v}_{\text{ŚM}}$ i pokonuje drogę s w czasie, gdy koło obraca się o kąt θ. Punkt P, w którym koło styka się z podłożem, także przebywa w tym czasie drogę s

Obserwując koło przez pewien czas t, stwierdzisz, że obydwa te punkty O i P przemieściły się do przodu, pokonując jednakową drogę s. Rowerzysta widzi zaś, że koło obróciło się w tym czasie wokół swej osi o kąt θ, a punkt na oponie, w którym koło stykało się początkowo z jezdnią zakreślił łuk o długości s. Ta długość łuku s jest związana z kątem obrotu θ, a związek ten opisuje równanie (10.17)

$$s = \theta R, \tag{11.1}$$

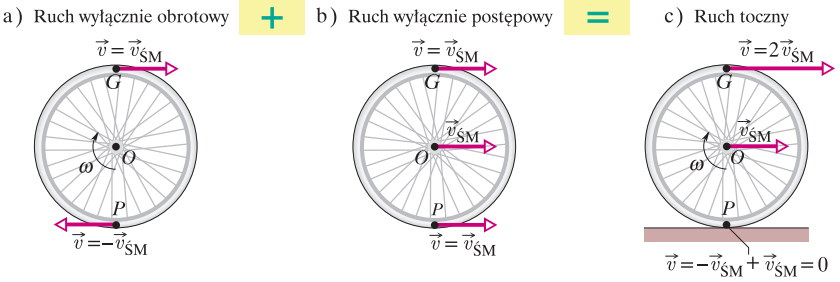
w którym R jest promieniem koła. Prędkość liniowa $v_{\text{ŚM}}$ środka koła (tzn. środka jego masy, o ile koło jest jednorodne) jest równa ds/dt. Prędkość kątowa ω koła wokół jego osi wynosi $d\theta/dt$. Różniczkując równanie (11.1) względem czasu, otrzymujemy (R jest stałe)

$$v_{\text{ŚM}} = \omega R \qquad \text{(toczenie się bez poślizgu).} \tag{11.2}$$

Złożenie ruchów. Jak widać z rysunku 11.4, toczenie się koła można uważać za połączenie ruchu wyłącznie postępowego i ruchu wyłącznie obrotowego. Na rysunku 11.4a przedstawiono sam ruch obrotowy (jak gdyby koło obracało się jedynie wokół swej osi) — każdy punkt koła wykonuje ruch obrotowy wokół osi koła, z prędkością kątową ω (takim właśnie ruchem zajmowaliśmy się w rozdziale 10). Każdy punkt na obrzeżu koła porusza się z prędkością liniową, o wartości bezwzględnej $v_{\text{ŚM}}$, danej równaniem (11.2). Na rysunku 11.4b pokazano sam ruch postępowy koła (jak gdyby koło w ogóle się nie obracało). Każdy punkt koła porusza się przy tym w prawo z prędkością $v_{\text{ŚM}}$.

Połączenie ruchów z rysunków 11.4a i 11.4b daje rzeczywisty ruch toczącego się koła, jak na rysunku 11.4c. Zauważ, że w tym łącznym ruchu

punkt znajdujący się na dole koła (punkt P) ma prędkość liniową równą zeru, a punkt znajdujący się na górze (punkt G) porusza się z prędkością liniową $2v_{\text{ŚM}}$, czyli najszybciej spośród wszystkich punktów koła. Widać to na rysunku 11.5, na którym przedstawiono zdjęcie toczącego się koła, wykonane dla długiego czasu naświetlania — obraz szprych jest znacznie bardziej rozmyty na górze niż na dole koła, co świadczy o tym, że górna część koła porusza się szybciej niż dolna.



Rys. 11.4. Toczenie się koła jako złożenie ruchu wyłącznie obrotowego i ruchu wyłącznie postępowego. a) Ruch wyłącznie obrotowy: wszystkie punkty koła wykonują ruch obrotowy z jednakową prędkością kątową ω. Wszystkie punkty na obrzeżu koła poruszają się z prędkością liniową o takiej samej wartości bezwzględnej $v = v_{\text{ŚM}}$. Na rysunku zaznaczono wektory prędkości liniowej $\vec{v}$ dwóch takich punktów — znajdujących się na górze (G) i na dole (P) koła. b) Ruch wyłącznie postępowy: wszystkie punkty koła poruszają się w prawo, z taką samą prędkością jak jego środek masy, tzn. $\vec{v}_{\text{ŚM}}$. c) Ruch koła przy jego toczeniu się jest złożeniem ruchów z rysunków (a) i (b)

Ruch każdego ciała okrągłego, toczącego się po podłożu bez poślizgu, można rozłożyć na ruch wyłącznie obrotowy i ruch wyłącznie postępowy, tak jak na rysunkach 11.4a i 11.4b.

Toczenie się jako sam ruch obrotowy

Na rysunku 11.6 przedstawiono inny obraz ruchu toczącego się koła, w którym rozważany jest on jako ruch wyłącznie obrotowy wokół osi przechodzącej w każdej chwili przez punkt styczności koła z podłożem. Jest to oś przechodząca przez punkt P z rysunku 11.4c i prostopadła do płaszczyzny rysunku. Wektory zaznaczone na rysunku 11.6 są to wektory prędkości chwilowej różnych punktów koła.

Pytanie: Ile wynosi prędkość kątowa koła wokół tej nowej osi, rejestrowana przez nieruchomego obserwatora?

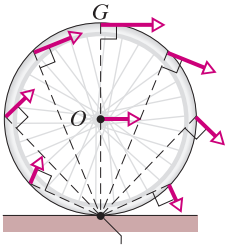
Odpowiedź: Jest to ta sama prędkość kątowa ω, którą rejestruje rowerzysta, obserwując obrót koła wokół osi przechodzącej przez jego środek masy.

Aby przekonać się, że ta odpowiedź jest poprawna, obliczmy prędkość liniową najwyższego punktu toczącego się koła, rejestrowaną przez nieruchomego obserwatora. Promień koła oznaczyliśmy przez R, dlatego najwyższy punkt koła jest odległy od osi obrotu, przechodzącej przez punkt P, o $2R$ (patrz rys. 11.6), a zatem prędkość liniowa punktu na górze koła wynosi (jak wynika z równania (11.2))

$$v_G = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_{\text{ŚM}},$$



Rys. 11.5. Zdjęcie toczącego się koła rowerowego. Obraz szprych jest bardziej rozmyty w górnej części niż w dolnej, gdyż górna część koła porusza się szybciej niż dolna, jak wynika z rysunku 11.4c (fot. Alex Emanuel Koch/Shutterstock)



oś obrotu przechodząca przez punkt P

Rys. 11.6. Toczenie się można uważać za ruch wyłącznie obrotowy, z prędkością kątową ω wokół osi, która w każdej chwili przechodzi przez punkt P. Wektory zaznaczone na rysunku są to wektory chwilowej prędkości liniowej kilku punktów toczącego się koła. Można je wyznaczyć, dokonując złożenia ruchu postępowego i obrotowego, jak na rysunku 11.4

co jest w pełni zgodne z rysunkiem 11.4c. W ten sam sposób możesz sprawdzić, że prędkości liniowe punktów O i P z rysunku 11.4c są takie, jak pokazano na tym rysunku.

Sprawdzian 1

Tylne koło roweru klauna ma promień dwukrotnie większy niż przednie. a) Czy w czasie jazdy tego roweru prędkość liniowa górnego punktu tylnego koła jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak prędkość górnego punktu koła przedniego? b) Czy prędkość kątowa tylnego koła jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak prędkość kątowa koła przedniego?

11.2. SIŁY I ENERGIA KINETYCZNA W RUCHU TOCZNYM

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

11.03 obliczyć energię kinetyczną ciała toczącego się bez poślizgu jako sumę energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy ciała i energii kinetycznej ruchu obrotowego ciała względem jego środka masy;

11.04 wykorzystać związek pracy wykonanej nad ciałem toczącym się bez poślizgu i zmiany energii kinetycznej tego ciała;

11.05 zastosować zasadę zachowania energii mechanicznej w przypadku ciała toczącego się bez poślizgu, czyli zapisać równość początkowej i końcowej energii mechanicznej takiego ciała;

11.06 narysować diagram sił działających na ciało toczące się bez poślizgu po powierzchni poziomej, a także w dół lub w górę po równi pochyłej;

11.07 wykorzystać związek przyspieszenia środka masy i przyspieszenia kątowego toczącego się ciała;

11.08 zastosować związek przyspieszenia, momentu bezwładności i kąta nachylenia równi w przypadku ciała toczącego się bez poślizgu w dół lub w górę po równi pochyłej.

Podstawowe fakty

- Energia kinetyczna koła toczącego się bez poślizgu wynosi

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_{ŚM} \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_{ŚM}^2,$$

gdzie $I_{ŚM}$ jest momentem bezwładności koła względem jego środka masy, a m jest masą koła.

- Jeśli koło porusza się ruchem przyspieszonym, lecz nadal bez poślizgu, to związek przyspieszenia jego środka masy $\vec{a}_{ŚM}$ i przyspieszenia kątowego α koła względem jego środka masy ma postać

$$a_{ŚM} = \alpha R.$$

- Jeśli ciało toczy się bez poślizgu w dół po równi pochyłej o kącie nachylenia θ, to jego przyspieszenie wzdłuż osi x skierowanej wzdłuż równi w górę wynosi

$$a_{ŚM,x} = -\frac{g \sin\theta}{1 + I_{ŚM}/mR^2}.$$

Energia kinetyczna ruchu tocznego

Obliczmy teraz energię kinetyczną toczącego się koła, rejestrowaną przez nieruchomego obserwatora. Jeśli potraktujemy ruch koła jako ruch wyłącznie obrotowy wokół osi przechodzącej przez punkt P, jak na rysunku 11.6, to z równania (10.34) otrzymamy

$$E_k = \tfrac{1}{2} I_P \omega^2, \tag{11.3}$$

przy czym ω jest prędkością kątową koła, a I_P — momentem bezwładności koła względem osi przechodzącej przez punkt P. Z twierdzenia Steinera,

czyli równania (10.36) ($I = I_{\text{ŚM}} + mh^2$), dostajemy

$$I_P = I_{\text{ŚM}} + mR^2, \tag{11.4}$$

gdzie m jest masą koła, $I_{\text{ŚM}}$ — jego momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy koła, a R (promień koła) jest odległością tych dwóch osi obrotu (h). Podstawiając I_P z równania (11.4) do wzoru (11.3), otrzymujemy

$$E_{\text{k}} = \tfrac{1}{2} I_{\text{ŚM}} \omega^2 + \tfrac{1}{2} m R^2 \omega^2.$$

Korzystając następnie ze związku $v_{\text{ŚM}} = \omega R$ (równanie (11.2)), dostajemy

$$E_{\text{k}} = \tfrac{1}{2} I_{\text{ŚM}} \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_{\text{ŚM}}^2. \tag{11.5}$$

Wyraz $\frac{1}{2} I_{\text{ŚM}} \omega^2$ możemy interpretować jako energię kinetyczną ruchu obrotowego koła wokół osi przechodzącej przez jego środek masy (rys. 11.4a), a wyraz $\frac{1}{2} m v_{\text{ŚM}}^2$ — jako energię kinetyczną ruchu postępowego środka masy koła (rys. 11.4b). Otrzymujemy zatem następującą zasadę:

Toczące się ciało ma dwa rodzaje energii kinetycznej: energię kinetyczną ruchu obrotowego ($\frac{1}{2} I_{\text{ŚM}} \omega^2$) związaną z jego ruchem obrotowym wokół osi przechodzącej przez środek masy oraz energię kinetyczną ruchu postępowego ($\frac{1}{2} m v_{\text{ŚM}}^2$) związaną z ruchem postępowym środka masy.

Siły działające przy toczeniu

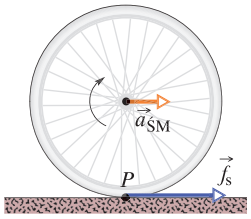
Tarcie a toczenie się ciał

Gdy koło toczy się ze stałą prędkością, jak na rysunku 11.3, nie ma żadnego powodu, aby w punkcie jego zetknięcia się z podłożem P miał następować poślizg, a zatem nie działa w tym punkcie siła tarcia. Jeśli jednak na to koło działa jakaś siła wypadkowa, dzięki której koło przyspiesza lub zwalnia, to skutkiem jej działania jest przyspieszenie $\vec{a}_{\text{ŚM}}$ środka masy koła, mające kierunek ruchu koła. Towarzyszy temu przyspieszenie lub spowolnienie ruchu obrotowego koła, a więc pojawienie się przyspieszenia kątowego α tego ruchu. Istnienie obydwu tych przyspieszeń jest powodem skłonności koła do poślizgu w punkcie P. Musi zatem wystąpić w tym punkcie siła tarcia przeciwdziałająca temu poślizgowi.

Jeśli koło *nie ślizga się* jednak, to siłą tą jest siła tarcia *statycznego* $\vec{f}_{\text{s}}$ i koło toczy się bez poślizgu. Aby otrzymać związek wartości przyspieszenia liniowego $\vec{a}_{\text{ŚM}}$ i przyspieszenia kątowego α, zróżniczkujmy stronami równanie (11.2) względem czasu (R jest stałe). Po lewej stronie dostajemy $\mathrm{d}v_{\text{ŚM}}/\mathrm{d}t$, czyli $a_{\text{ŚM}}$, a po prawej — $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$, czyli α. Zatem w ruchu tocznym bez poślizgu

$$a_{\text{ŚM}} = \alpha R \qquad \text{(toczenie się bez poślizgu)}. \tag{11.6}$$

Jeśli koło *ślizga się* pod wpływem działania na nie siły wypadkowej, to siła tarcia działająca na nie w punkcie P (rys. 11.3) jest siłą tarcia *kinetycznego* $\vec{f}_{\text{k}}$. Koło toczy się z poślizgiem, przy czym równanie (11.6) nie jest spełnione. W tym rozdziale będziemy zajmować się tylko toczeniem się ciał bez poślizgu.



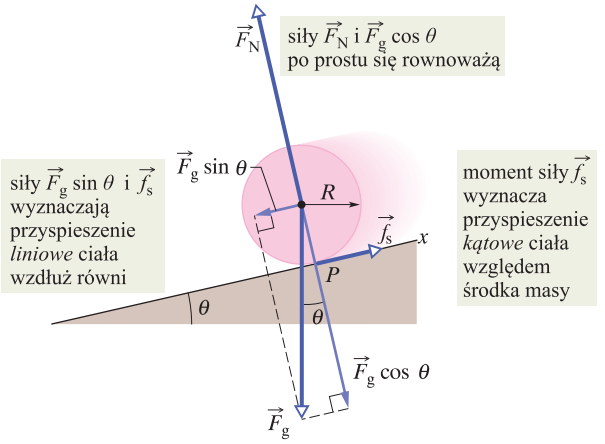
Rys. 11.7. Koło toczy się poziomo bez poślizgu, z przyspieszeniem liniowym $\vec{a}_{\text{ŚM}}$ środka masy. W punkcie P działa wtedy na koło siła tarcia statycznego $\vec{f}_s$ przeciwdziałająca jego poślizgowi

Na rysunku 11.7 przedstawiono koło toczące się po płaskim podłożu i zmuszane do obracania się coraz szybciej, jak koło roweru na starcie wyścigu. Zwiększanie szybkości obrotu powoduje skłonność dolnej części koła do poślizgu, w lewo, w punkcie P. Działająca w tym punkcie siła tarcia przeciwdziałająca poślizgowi jest zatem skierowana w prawo. Jeśli koło nie ślizga się, to jest to siła tarcia statycznego $\vec{f}_s$ (zaznaczona na rysunku) i koło toczy się bez poślizgu, a zatem obowiązuje równanie (11.6). Na marginesie: gdyby tej siły tarcia nie było, roweru nie można byłoby przyspieszyć, a zatem wyścigi kolarskie nie byłyby zbyt ciekawe.

Gdyby koło z rysunku 11.7 obracało się coraz wolniej, jak koło roweru zwalniającego, musielibyśmy dokonać dwóch zmian na tym rysunku: wektory przyspieszenia $\vec{a}_{\text{ŚM}}$ środka masy i siły tarcia $\vec{f}_s$ działającej w punkcie P skierowane byłyby w lewo.

Toczenie się po równi pochyłej

Na rysunku 11.8 przedstawiono jednorodne ciało okrągłe o masie m i promieniu R, staczające się bez poślizgu po równi pochyłej wzdłuż osi x tworzącej kąt θ z poziomem. Chcemy wyznaczyć przyspieszenie $a_{\text{ŚM},x}$ ruchu ciała wzdłuż równi. W tym celu skorzystamy z drugiej zasady dynamiki Newtona i to zarówno dla ruchu postępowego ($F_{\text{wyp}} = ma$), jak i dla ruchu obrotowego ($M_{\text{wyp}} = I\alpha$).



Rys. 11.8. Jednorodne ciało okrągłe o promieniu R stacza się po równi pochyłej. Na ciało to działają: siła ciężkości $\vec{F}_g$, siła normalna $\vec{F}_N$ oraz siła tarcia $\vec{f}_s$, skierowana wzdłuż równi w górę. Dla przejrzystości rysunku wektor $\vec{F}_N$ przesunięto wzdłuż jego kierunku, tak aby jego początek znajdował się w środku masy ciała

Przede wszystkim narysujmy siły działające na to ciało, jak na rysunku 11.8. Są to:

1. Działająca na ciało siła ciężkości $\vec{F}_g$, skierowana pionowo w dół. Koniec jej wektora umieszczamy w środku masy ciała. Jej składowa wzdłuż równi wynosi $F_g \sin\theta$, czyli $mg \sin\theta$.
2. Siła normalna $\vec{F}_N$, działająca prostopadle do równi. Działa ona na ciało w punkcie jego styczności z podłożem P, lecz na rysunku 11.8 przesunięto jej wektor wzdłuż jego kierunku, tak aby jego początek znajdował się w środku masy ciała.

3. Siła tarcia statycznego $\vec{f}_s$, która działa na ciało w punkcie styczności z podłożem P i jest skierowana wzdłuż równi w górę. (Czy rozumiesz, dlaczego ma ona właśnie ten kierunek? Gdyby ciało ślizgało się w punkcie P, to ześlizgiwałoby się *w dół* równi — zatem przeciwdziałająca poślizgowi siła tarcia musi być skierowana wzdłuż równi *w górę*).

Zapiszmy teraz drugą zasadę dynamiki dla składowych wzdłuż osi x z rysunku 11.8 ($F_{\text{wyp},x} = ma_x$) w postaci

$$f_s - mg\sin\theta = ma_{\text{ŚM},x}. \tag{11.7}$$

Równanie to zawiera dwie niewiadome: f_s i $a_{\text{ŚM},x}$. (Zauważ, że *nie zakładamy* tu, iż f_s przybiera swą wartość maksymalną $f_{s,\max}$ — o wartości siły f_s wiemy tylko tyle, że jest ona taka, iż ciało stacza się po równi bez poślizgu).

Następnie zapiszemy drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego ciała wokół osi przechodzącej przez jego środek masy. Skorzystamy w tym celu z równania (10.41) ($M = r_\perp F$) wyznaczającego moment siły działający na ciało w tym punkcie. Ramię siły tarcia $\vec{f}_s$ wynosi R, co daje moment siły o wartości Rf_s; jest on dodatni, bo dąży do obrotu ciała w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara (spójrz na rys. 11.8). Ramiona sił $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_N$ względem środka masy są równe zeru, a zatem nie są z nimi związane żadne momenty siły. Drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego ($M_{\text{wyp}} = I\alpha$) możemy zatem zapisać dla ruchu wokół osi przechodzącej przez środek masy ciała w postaci

$$Rf_s = I_{\text{ŚM}}\alpha. \tag{11.8}$$

To równanie także zawiera dwie niewiadome: f_s i α.

Ciało toczy się bez poślizgu, a więc możemy skorzystać z równania (11.6) ($a_{\text{ŚM}} = \alpha R$) wiążącego ze sobą niewiadome $a_{\text{ŚM},x}$ i α. Musimy tu zachować ostrożność, ponieważ $a_{\text{ŚM},x}$ jest ujemne (wektor przyspieszenia ma kierunek ujemny osi x), a α jest dodatnie (obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Zatem w równaniu (11.8) za α musimy podstawić $-a_{\text{ŚM},x}/R$. Rozwiązując następnie to równanie względem f_s, otrzymujemy

$$f_s = -I_{\text{ŚM}}\frac{a_{\text{ŚM},x}}{R^2}. \tag{11.9}$$

Podstawiając potem za f_s w równaniu (11.7) prawą stronę równania (11.9), dostajemy ostatecznie

$$a_{\text{ŚM},x} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{\text{ŚM}}/mR^2}. \tag{11.10}$$

Z równania tego możemy obliczyć przyspieszenie liniowe $a_{\text{ŚM},x}$ każdego ciała staczającego się po równi pochyłej, nachylonej pod kątem θ do poziomu.

Zauważ, że ruch ciała w dół równi powoduje siła ciężkości, lecz obrót ciała, a więc i jego toczenie się po równi, jest skutkiem działania siły tarcia. Gdybyśmy usunęli siłę tarcia (na przykład, pokrywając równię lodem lub smarem) lub w inny sposób spowodowali, że $mg\sin\theta$ byłoby większe niż $f_{s,\max}$, to ciało by się nie toczyło, lecz ześlizgiwało po równi.

Sprawdzian 2

Dwa jednakowe krążki A i B toczą się po poziomym podłożu z jednakowymi prędkościami. Krążek A wtacza się następnie wzdłuż równi pochyłej, osiągając maksymalne wzniesienie h, a krążek B napotyka równię o takim samym nachyleniu, lecz tak gładką, że ruchowi po niej nie towarzyszy tarcie. Czy maksymalne wzniesienie krążka B będzie większe, mniejsze, czy równe h?

Przykład 11.01. Kula stacza się po równi

Jednorodna kula o masie $m = 6$ kg i promieniu R stacza się bez poślizgu wzdłuż równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem $\theta = 30°$ (patrz rys. 11.8). W chwili początkowej kula była nieruchoma.

a) Punkt, z którego kula zaczęła się staczać, jest wzniesiony w pionie o $h = 1{,}2$ m nad poziom końca równi. Ile wynosi prędkość kuli na dole równi?

PODSTAWOWE FAKTY

W czasie staczania się kuli po równi energia mechaniczna układu kula–Ziemia jest zachowana. Dzieje się tak dlatego, że siła ciężkości, która jest jedyną siłą wykonującą pracę nad kulą, jest siłą zachowawczą. Siła normalna, która działa na kulę ze strony równi, jest prostopadła do kierunku ruchu kuli, a zatem nie wykonuje nad nią pracy. Siła tarcia, która też działa na kulę ze strony równi, nie przekazuje kuli żadnej energii, gdyż kula toczy się po równi bez poślizgu.

Zasada zachowania energii mechanicznej ($E_{\text{mech końc}} = E_{\text{mech pocz}}$) ma postać

$$E_{\text{k końc}} + E_{\text{p końc}} = E_{\text{k pocz}} + E_{\text{p pocz}}, \qquad (11.11)$$

przy czym wskaźniki końc i pocz odnoszą się do chwili, gdy kula jest na dole równi, i do chwili początkowej, gdy kula zaczyna się poruszać. Grawitacyjna energia potencjalna wynosi w chwili początkowej $E_{\text{p pocz}} = mgh$ (m — masa kuli), a w chwili końcowej $E_{\text{p końc}} = 0$. Energia kinetyczna kuli w chwili początkowej jest równa zeru, $E_{\text{k pocz}} = 0$. Aby wyznaczyć energię kinetyczną w chwili końcowej $E_{\text{k końc}}$, musimy skorzystać z jeszcze jednego ważnego spostrzeżenia: ponieważ kula się toczy, ma ona energię kinetyczną zarówno ruchu postępowego, jak i obrotowego, a zatem musimy je obie uwzględnić. Możemy to zrobić, korzystając z równania (11.5).

Obliczenia: Podstawiając te wszystkie wartości do równania (11.11), otrzymujemy

$$(\tfrac{1}{2} I_{\text{ŚM}} \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_{\text{ŚM}}^2) + 0 = 0 + mgh, \qquad (11.12)$$

przy czym $I_{\text{ŚM}}$ jest momentem bezwładności kuli względem osi przechodzącej przez jej środek masy, $v_{\text{ŚM}}$ — szukaną prędkością kuli, a ω — jej prędkością kątową na końcu równi.

Kula toczy się bez poślizgu, a zatem możemy skorzystać ze wzoru (11.2) i podstawić $v_{\text{ŚM}}/R$ za ω w równaniu (11.12), co zmniejsza liczbę niewiadomych w tym równaniu. Podstawiając następnie $\frac{2}{5}mR^2$ za $I_{\text{ŚM}}$ (na podstawie tabeli 10.2, punkt (f)) oraz rozwiązując równanie względem $v_{\text{ŚM}}$, otrzymujemy

$$v_{\text{ŚM}} = \sqrt{(\tfrac{10}{7})gh} = \sqrt{(\tfrac{10}{7})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}2\ \text{m})} = 4{,}1\ \text{m/s}$$

(odpowiedź).

Zauważ, że wynik nie zależy ani od masy m kuli, ani od jej promienia R.

b) Jaka jest wartość i kierunek siły tarcia działającej na kulę podczas jej staczania się równi?

PODSTAWOWE FAKTY

Kula stacza się z równi bez poślizgu, zatem działająca na nią siła tarcia jest dana wzorem (11.9).

Obliczenia: Aby ją wyznaczyć, musimy jednak najpierw obliczyć przyspieszenie $a_{\text{ŚM},x}$ kuli z równania (11.10), co daje

$$a_{\text{ŚM},x} = -\frac{g \sin\theta}{1 + I_{\text{ŚM}}/mR^2} = -\frac{g \sin\theta}{1 + \frac{2}{5}mR^2/mR^2}$$

$$= -\frac{(9{,}8\ \text{m/s}^2)\sin 30°}{1 + \frac{2}{5}} = -3{,}5\ \text{m/s}^2.$$

Zauważ, że do wyznaczenia $a_{\text{ŚM},x}$ znów nie potrzebowaliśmy znać ani masy m, ani promienia R. Wobec tego każda jednorodna kula porusza się po równi, nachylonej

do poziomu pod kątem 30°, z przyspieszeniem o takiej wartości pod warunkiem, że toczy się bez poślizgu.

Teraz możemy już rozwiązać równanie (11.9). Otrzymujemy

$$f_s = -I_{\text{ŚM}}\frac{a_{\text{ŚM},x}}{R^2} = -\tfrac{2}{5}mR^2\frac{a_{\text{ŚM},x}}{R^2} = -\tfrac{2}{5}ma_{\text{ŚM},x}$$
$$= -\tfrac{2}{5}(6\text{ kg})(-3{,}5\text{ m/s}^2) = 8{,}4\text{ N} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

Zauważ, że aby otrzymać tę wartość potrzebowaliśmy znać masę m kuli, lecz nie jej promień R. Wobec tego na każdą — dowolnej wielkości — jednorodną kulę o masie 6 kg staczającą się bez poślizgu po równi, nachylonej do poziomu pod kątem 30°, działa siła tarcia o wartości 8,4 N (dla kuli o większej masie ta siła byłaby oczywiście większa).

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

11.3. JO-JO

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

11.09 narysować diagram sił dla kółka zabawki jo-jo poruszającego się po sznurku w dół lub w górę;

11.10 wyjaśnić, że kółko zabawki jo-jo można uważać za ciało, które toczy się bez poślizgu w dół lub w górę po równi nachylonej do poziomu pod kątem 90°;

11.11 wykorzystać zależność przyspieszenia jo-jo od jego momentu bezwładności do opisu ruchu kółka zabawki po sznurku w dół lub w górę;

11.12 wyznaczyć naprężenie sznurka zabawki jo-jo, gdy kółko zabawki porusza się po sznurku w dół lub w górę.

Podstawowe fakty

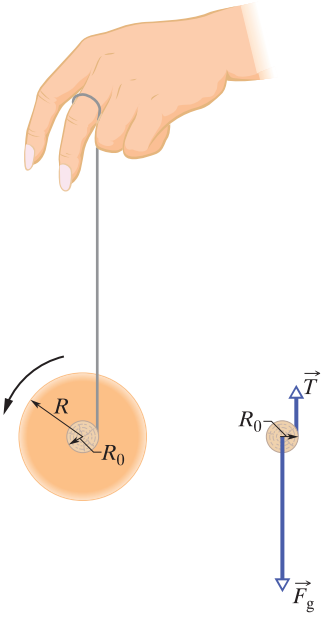
- Kółko zabawki jo-jo poruszające się po sznurku w dół lub w górę można uważać za ciało, które toczy się bez poślizgu w dół lub w górę po równi nachylonej do poziomu pod kątem 90°.

Jo-jo

Zabawka jo-jo to małe laboratorium fizyczne, które możesz zmieścić w kieszeni. Gdy jo-jo opuszcza się na sznurku o odcinek o długości h, traci energię potencjalną o wartości mhg, a zyskuje energię kinetyczną zarówno ruchu postępowego ($\frac{1}{2}mv_{\text{ŚM}}^2$), jak i obrotowego ($\frac{1}{2}I_{\text{ŚM}}\omega^2$). Gdy wspina się potem w górę po sznurku, traci energię kinetyczną, a zyskuje potencjalną.

W produkowanych obecnie zabawkach jo-jo sznurek nie jest przywiązany do osi kółka, lecz ma na końcu pętelkę, przez którą ta oś jest przełożona. Gdy kółko dociera do końca sznurka, siła działająca na oś ze strony sznurka uniemożliwia dalszy ruch kółka w dół. Kółko obraca się wówczas, mając tylko energię kinetyczną ruchu obrotowego, a jego oś obraca się w pętli sznurka. Jo-jo obraca się tak (jakby „uśpione"), dopóki nie „obudzisz" go, szarpnąwszy w górę za sznurek. Sznurek owija się wtedy wokół osi i kółko zaczyna się wspinać po sznurku. Energię kinetyczną ruchu obrotowego kółka na dole sznurka (a zatem i czas, jaki może ono przetrwać w stanie uśpienia) można znacznie zwiększyć, rzucając jo-jo w dół, tak aby ruch w dół nie rozpoczynał się od stanu spoczynku kółka, lecz miał różne od zera prędkości początkowe $v_{\text{ŚM}}$ i ω.

Aby wyznaczyć przyspieszenie liniowe $a_{\text{ŚM}}$ kółka podczas jego ruchu w dół po sznurku, skorzystamy z drugiej zasady dynamiki, postępując tak



samo, jak przy wyznaczaniu przyspieszenia ciała staczającego się po równi pochyłej z rysunku 11.8. Różnice między tymi dwoma przypadkami są następujące:

1. Jo-jo nie stacza się po równi nachylonej do poziomu pod kątem θ, lecz toczy się po sznurku tworzącym z poziomem kąt $\theta = 90°$.
2. Kółko zabawki jo-jo nie toczy się na swej zewnętrznej powierzchni o promieniu R, lecz na ośce o promieniu R_0 (rys. 11.9a).
3. Ruch kółka nie jest spowalniany przez siłę tarcia $\vec{f}_s$, lecz przez siłę $\vec{T}$ działającą na nie ze strony sznurka (rys. 11.9b).

Postępując jak poprzednio, otrzymujemy znów równanie (11.10). Zmieniając w nim niektóre oznaczenia i podstawiając $\theta = 90°$, dostajemy

$$a_{\text{ŚM}} = -\frac{g}{1 + I_{\text{ŚM}}/mR_0^2}, \tag{11.13}$$

przy czym $I_{\text{ŚM}}$ jest momentem bezwładności kółka względem jego osi, a m — masą zabawki. Gdy kółko wspina się po sznurku, ma ono takie samo przyspieszenie, również skierowane w dół (gdyż i wówczas działają na nie siły przedstawione na rys. 11.9b).

Rys. 11.9. a) Przekrój zabawki jo-jo. Wokół ośki o promieniu R_0 nawinięty jest sznurek, którego grubość pomijamy. b) Diagram sił działających na opadające kółko (pokazano tylko jego ośkę)

11.4. MOMENT SIŁY RAZ JESZCZE

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

11.13 wyjaśnić, że moment siły to wielkość wektorowa;

11.14 wyjaśnić, że moment siły oblicza się względem jakiegoś punktu, który musi być zawsze podany;

11.15 obliczyć moment siły działającej na cząstkę jako iloczyn wektorowy wektora położenia cząstki i wektora siły, wykorzystując zapis wektorów przy użyciu wektorów jednostkowych lub w postaci wartości i kierunku (kąta) wektora;

11.16 wykorzystać regułę prawej dłoni do wyznaczenia kierunku wektora momentu siły.

Podstawowe fakty

- W przestrzeni trójwymiarowej moment siły $\vec{M}$ jest wielkością wektorową zdefiniowaną względem pewnego punktu (zwykle początku układu współrzędnych) jako

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

gdzie $\vec{F}$ jest działającą na cząstkę siłą, a $\vec{r}$ jest wektorem położenia cząstki względem ustalonego punktu.

- Wartość bezwzględna wektora $\vec{M}$ wynosi

$$M = rF\sin\phi = rF_\perp = r_\perp F,$$

przy czym ϕ jest kątem tworzonym przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$, $F_\perp$ jest składową wektora $\vec{F}$ w kierunku prostopadłym do kierunku wektora $\vec{r}$, a $r_\perp$ jest ramieniem siły $\vec{F}$.

- Kierunek wektora $\vec{M}$ wynika z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego.

Moment siły raz jeszcze

W rozdziale 10 zdefiniowaliśmy moment siły M dla ciała sztywnego, które obraca się wokół pewnej stałej osi. Obecnie rozszerzymy definicję momentu siły na przypadek pojedynczej cząstki poruszającej się po dowol-

nym torze względem pewnego ustalonego *punktu* (a nieustalonej osi). Nie będziemy zakładać, że tor cząstki jest kołowy, a zatem wektor momentu siły $\vec{M}$ będzie mógł przybrać dowolny kierunek. Wartość tego wektora będziemy obliczać ze wzoru, a do wyznaczenia jego kierunku wykorzystamy regułę prawej dłoni dla iloczynu wektorowego.

Na rysunku 11.10a przedstawiono taką cząstkę znajdującą się w punkcie A na płaszczyźnie xy. Działa na nią jedna siła $\vec{F}$ leżąca w tej płaszczyźnie, a położenie cząstki względem początku układu współrzędnych O jest wyznaczone przez wektor położenia $\vec{r}$. Działający na cząstkę moment siły $\vec{M}$ względem punktu O jest zdefiniowany jako

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(definicja momentu siły).} \qquad (11.14)$$

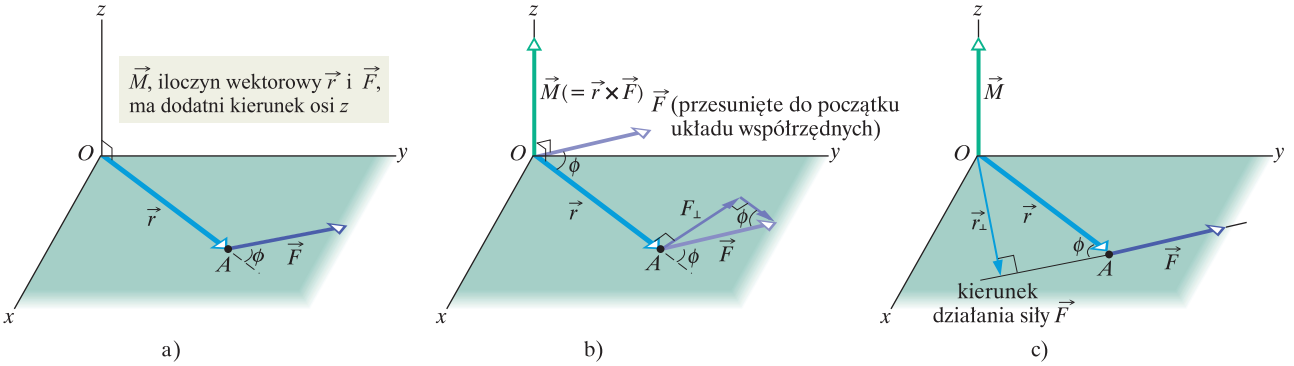
Aby wyznaczyć zawarty w tym równaniu iloczyn wektorowy, korzystamy z reguł podanych w podrozdziale 3.3. W celu wyznaczenia kierunku wektora $\vec{M}$ przesuwamy wektor $\vec{F}$ (bez zmiany jego kierunku) tak, aby jego początek znalazł się w początku układu współrzędnych, a zatem aby obydwa wektory, których iloczyn wektorowy mamy obliczyć, miały wspólny początek (rys. 11.10b). Możemy wtedy skorzystać z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego (porównaj rys. 3.19a), czyli ułożyć palce prawej dłoni wzdłuż łuku łączącego $\vec{r}$ (pierwszy wektor iloczynu) z $\vec{F}$ (drugim wektorem tego iloczynu). Odgięty kciuk wskaże wtedy kierunek wektora $\vec{M}$. W przypadku przedstawionym na rysunku 11.10b wektor $\vec{M}$ ma kierunek dodatni osi z.

Do wyznaczenia długości wektora $\vec{M}$ możemy zastosować ogólny związek (3.27) ($c = ab \sin\phi$), co w naszym przypadku daje

$$M = rF \sin\phi, \qquad (11.15)$$

przy czym ϕ jest mniejszym z kątów tworzonych przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$, gdy ustawimy je tak, że mają wspólny początek. Jak widać z rysunku 11.10b, równanie (11.15) można też zapisać w postaci

$$M = rF_\perp, \qquad (11.16)$$



Rys. 11.10. Definicja momentu siły. a) Siła $\vec{F}$, leżąca w płaszczyźnie xy, działa na cząstkę znajdującą się w punkcie A. b) Z siłą tą związany jest moment siły względem początku układu współrzędnych O, równy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Zgodnie z regułą prawej dłoni dla iloczynu wektorowego, wektor momentu siły ma kierunek dodatni osi z. Długość tego wektora można wyrazić jako $rF_\perp$ (b) lub jako $r_\perp F$ (c)

gdzie $F_\perp$ $(= F \sin\phi)$ jest składową wektora $\vec{F}$ w kierunku prostopadłym do kierunku wektora $\vec{r}$. Z rysunku 11.10c widać natomiast, że równanie (11.15) można zapisać jeszcze inaczej:

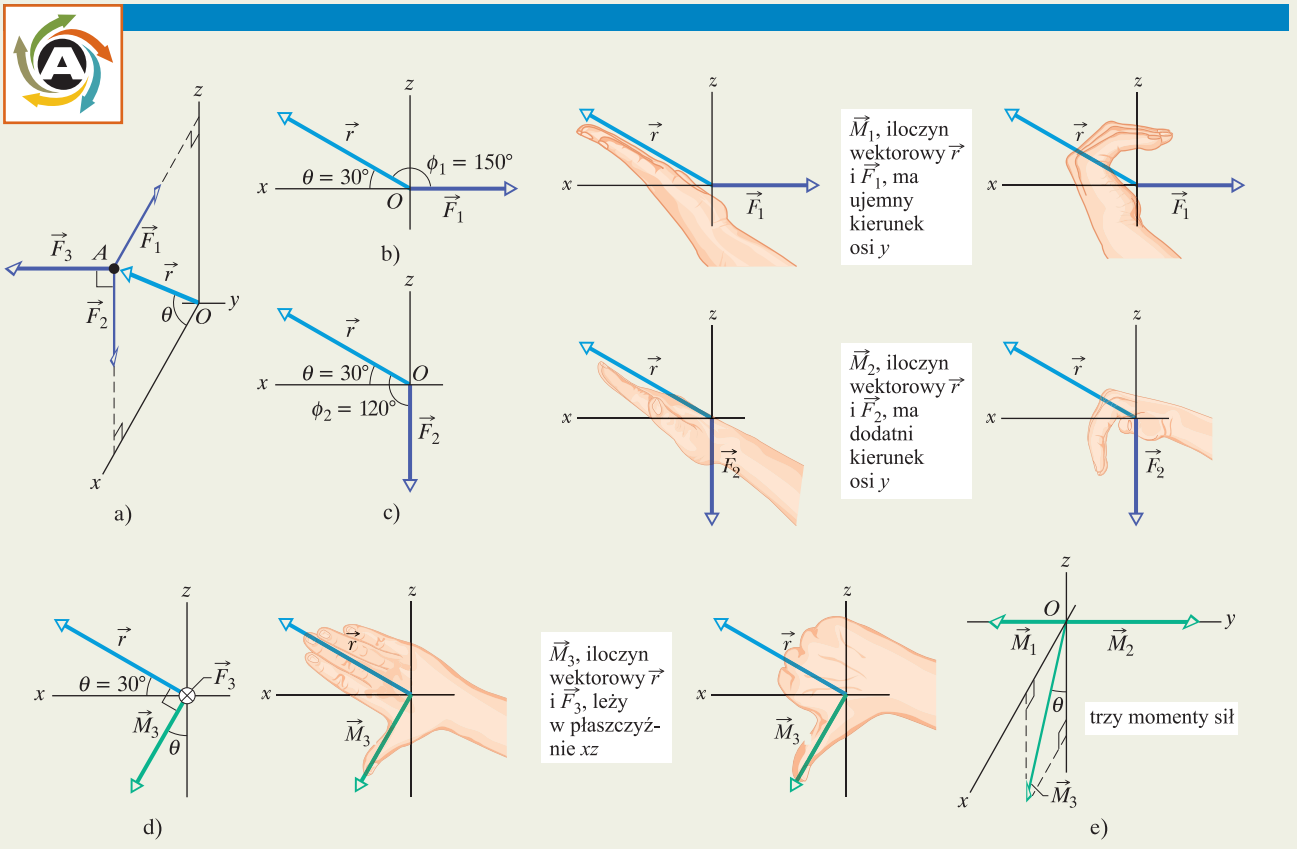
$$M = r_\perp F, \tag{11.17}$$

przy czym $r_\perp$ $(= r \sin\phi)$ jest ramieniem siły $\vec{F}$, czyli odległością punktu O od prostej, wzdłuż której działa siła $\vec{F}$.

Sprawdzian 3

Wektor położenia $\vec{r}$ cząstki ma dodatni kierunek osi z. Jaki jest kierunek działającej na tę cząstkę siły, jeśli pochodzący od niej moment siły: a) jest równy zeru, b) jest skierowany w ujemnym kierunku osi x, c) jest skierowany w ujemnym kierunku osi y?

Przykład 11.02. Moment siły działającej na cząstkę



Rys. 11.11. a) Na cząstkę znajdującą się w punkcie A działają trzy siły, każda równoległa do innej osi układu współrzędnych. Kąt ϕ, potrzebny do wyznaczenia momentu siły, pokazano dla sił $\vec{F}_1$ (b) i $\vec{F}_2$ (c). d) Moment siły $\vec{M}_3$ jest prostopadły do wektorów $\vec{r}$ i $\vec{F}_3$ (siła $\vec{F}_3$ jest skierowana za kartkę). e) Działające na cząstkę momenty sił

Na rysunku 11.11a przedstawiono cząstkę, na którą działają trzy siły o wartości 2 N każda. Cząstka znajduje się w punkcie A, leżącym na płaszczyźnie xz, a wektor jej położenia $\vec{r}$ jest dany przez wartości $r = 3$ m i $\theta = 30°$. Wyznacz moment siły względem początku układu współrzędnych, pochodzący od każdej z tych sił.

PODSTAWOWE FAKTY

Trzy siły działające na cząstkę nie leżą w jednej płaszczyźnie. Musimy zatem skorzystać z definicji momentu siły jako iloczynu wektorowego, wyznaczając ich wartości z równania (11.15) ($M = rF\sin\phi$), a kierunki za pomocą reguły prawej dłoni.

Obliczenia: Mamy wyznaczyć momenty siły względem początku układu współrzędnych O, a zatem wektorem $\vec{r}$ występującym w definicji iloczynu wektorowego jest dany wektor położenia cząstki. Aby wyznaczyć kąt ϕ między kierunkiem wektora $\vec{r}$ a kierunkiem każdej z sił, przesuwamy po kolei wszystkie wektory sił z rysunku 11.11a do początku układu współrzędnych. Przesunięte w ten sposób wektory $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ przedstawiono na rysunkach 11.11b, c i d, na płaszczyźnie xz (zwróć uwagę na to, jak dobrze widoczne są teraz kąty między wektorem położenia cząstki a wektorami sił). Jak pokazano na rysunku 11.11d kąt między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{F}_3$ wynosi 90°; symbol $\otimes$ oznacza, że wektor $\vec{F}_3$ jest skierowany za kartkę (gdy wektor jest skierowany zza kartki, oznaczamy go symbolem $\odot$).

Korzystając z równania (11.15), możemy teraz wyznaczyć wartości momentów siły związanych z każdą z sił. Otrzymujemy:

$$M_1 = rF_1\sin\phi_1 = (3\text{ m})(2\text{ N})(\sin 150°) = 3\text{ N}\cdot\text{m},$$

$$M_2 = rF_2\sin\phi_2 = (3\text{ m})(2\text{ N})(\sin 120°) = 5{,}2\text{ N}\cdot\text{m}$$

oraz

$$M_3 = rF_3\sin\phi_3 = (3\text{ m})(2\text{ N})(\sin 90°) = 6\text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{(odpowiedź)}.$$

W celu wyznaczenia kierunków tych momentów sił korzystamy z reguły prawej dłoni, tzn. ustawiamy palce prawej ręki wzdłuż łuku, jaki trzeba zatoczyć, aby nałożyć wektor $\vec{r}$ na wektor $\vec{F}$, zakreślając przy tym *mniejszy* z dwóch kątów między ich kierunkami. Odgięty kciuk wskazuje wówczas kierunek wektora momentu siły. Moment siły $\vec{M}_1$ jest skierowany za kartkę na rysunku 11.11b, moment siły $\vec{M}_2$ jest skierowany zza kartki na rysunku 11.11c, a kierunek momentu siły $\vec{M}_3$ jest pokazany na rysunku 11.11d. Wszystkie te trzy wektory przedstawiono na rysunku 11.11e.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

11.5. MOMENT PĘDU

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

11.17 wyjaśnić, że moment pędu to wielkość wektorowa;

11.18 wyjaśnić, że moment pędu oblicza się względem jakiegoś punktu, który musi być zawsze podany;

11.19 obliczyć moment pędu cząstki jako iloczyn wektorowy wektora położenia cząstki i wektora jej pędu, wykorzystując zapis wektorów przy użyciu wektorów jednostkowych lub w postaci wartości i kierunku (kąta) wektora;

11.20 wykorzystać regułę prawej dłoni do wyznaczenia kierunku wektora momentu pędu.

Podstawowe fakty

- Moment pędu $\vec{\ell}$ cząstki o pędzie $\vec{p}$, masie m i prędkości liniowej $\vec{v}$ jest wielkością wektorową zdefiniowaną względem pewnego punktu (zwykle początku układu współrzędnych) jako

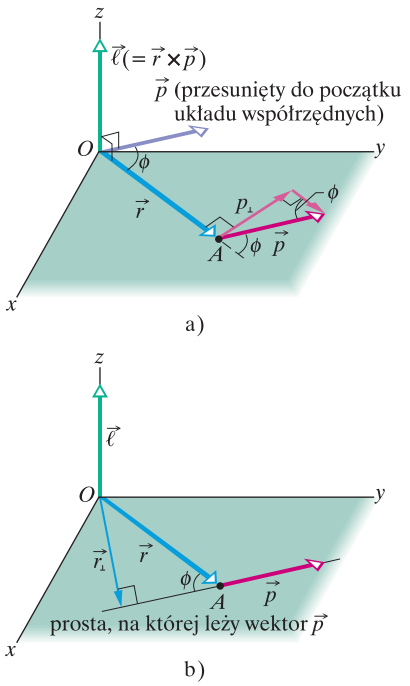
$$\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p} = m(\vec{r}\times\vec{v}).$$

- Wartość bezwzględna wektora $\vec{\ell}$ wynosi

$$\ell = rmv\sin\phi = rp_\perp = rmv_\perp = r_\perp p = r_\perp mv,$$

gdzie ϕ jest kątem tworzonym przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{p}$, $p_\perp$ i $v_\perp$ są składowymi wektorów $\vec{p}$ i $\vec{v}$ w kierunku prostopadłym do kierunku wektora $\vec{r}$, a $r_\perp$ jest odległością punktu, względem którego obliczamy moment pędu, od kierunku $\vec{p}$.

- Kierunek wektora $\vec{\ell}$ wynika z reguły prawej dłoni: ustaw jej palce wzdłuż łuku, jaki trzeba zatoczyć, aby nałożyć wektor $\vec{r}$ na wektor $\vec{p}$, a odgięty kciuk wskaże kierunek wektora $\vec{\ell}$.



Rys. 11.12. Definicja momentu pędu. Cząstka znajdująca się w danej chwili w punkcie A ma pęd $\vec{p}$ $(= m\vec{v})$, przy czym wektor $\vec{p}$ leży w płaszczyźnie xy. Cząstka ta ma moment pędu $\vec{\ell}$ $(= \vec{r} \times \vec{p})$ względem początku układu współrzędnych O. Zgodnie z regułą prawej dłoni wektor momentu pędu ma dodatni kierunek osi z. a) Długość wektora $\vec{\ell}$ wynosi $\ell = rp_\perp = rmv_\perp$. b) Długość wektora $\vec{\ell}$ można również wyrazić jako $\ell = r_\perp p = r_\perp mv$

Moment pędu

Przekonaliśmy się już — co warto teraz przypomnieć — że pojęcie pędu $\vec{p}$ oraz zasada zachowania pędu są bardzo skutecznymi narzędziami do badania ruchu ciał. Umożliwiły nam one na przykład przewidywanie wyniku zderzenia dwóch samochodów bez wchodzenia w szczegóły samego zderzenia. Wprowadzimy teraz wielkość, która jest odpowiednikiem pędu dla ruchu obrotowego, a w końcowej części rozdziału (w podrozdziale 11.8) zajmiemy się zasadą zachowania, która jest dla ruchu obrotowego odpowiednikiem zasady zachowania pędu. Ta zasada wyjaśnia piękne (czasem graniczące z cudem) ewolucje na przykład tancerzy, skoczków do wody czy łyżwiarzy figurowych.

Na rysunku 11.12 przedstawiono cząstkę o masie m i pędzie $\vec{p}$ $(= m\vec{v})$, znajdującą się w danej chwili w punkcie A na płaszczyźnie xy. **Moment pędu** $\vec{\ell}$ tej cząstki względem początku układu współrzędnych jest wielkością wektorową, zdefiniowaną jako

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad \text{(definicja momentu pędu)}, \qquad (11.18)$$

przy czym $\vec{r}$ jest wektorem położenia cząstki względem punktu O. Gdy cząstka porusza się względem punktu O — w kierunku wyznaczonym przez kierunek jej pędu $\vec{p}$ $(= m\vec{v})$ — wektor $\vec{r}$ obraca się wokół punktu O. Zwróć uwagę na to, że aby cząstka miała moment pędu względem punktu O, wcale *nie potrzeba*, aby sama cząstka poruszała się ruchem obrotowym względem tego punktu. Porównując ze sobą równania (11.14) i (11.18), można się przekonać, że moment pędu tak się wiąże z pędem, jak moment siły z siłą. Jednostką momentu pędu w układzie SI jest kilogram razy metr do kwadratu na sekundę (kg · m^2/s), co jest równoważne iloczynowi dżula i sekundy (J · s).

Kierunek. Aby wyznaczyć kierunek wektora momentu pędu $\vec{\ell}$ na rysunku 11.12, przesuwamy wektor $\vec{p}$ tak, aby jego początek znalazł się w początku układu współrzędnych O. Następnie korzystamy z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego, ustawiając jej palce tak, aby wskazywały od $\vec{r}$ do $\vec{p}$. Odgięty kciuk wskazuje wówczas kierunek wektora $\vec{\ell}$, zgodny w naszym przypadku z dodatnim kierunkiem osi x (patrz rys. 11.12). Ten dodatni kierunek jest zgodny z tym, czego powinniśmy oczekiwać na podstawie kierunku obrotu wektora położenia $\vec{r}$ cząstki wokół osi z, w czasie ruchu cząstki — jest on przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara (przy obrocie $\vec{r}$ wokół osi z zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara powinniśmy otrzymać ujemny kierunek wektora $\vec{\ell}$).

Wartość bezwzględna. W celu wyznaczenia długości wektora $\vec{\ell}$ korzystamy ze wzoru (3.27), co daje

$$\ell = rmv \sin\phi, \qquad (11.19)$$

gdzie ϕ jest mniejszym kątem między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{p}$, gdy są one ustawione tak, że mają wspólny początek. Na podstawie rysunku 11.12a możemy stwierdzić, że równanie (11.19) można przekształcić do postaci

$$\ell = rp_\perp = rmv_\perp, \qquad (11.20)$$

przy czym $p_\perp$ jest składową $\vec{p}$ prostopadłą do $\vec{r}$, a $v_\perp$ jest składową $\vec{v}$ prostopadłą do $\vec{r}$. Natomiast z rysunku 11.12b widać, że równanie (12.19)

można także zapisać jako

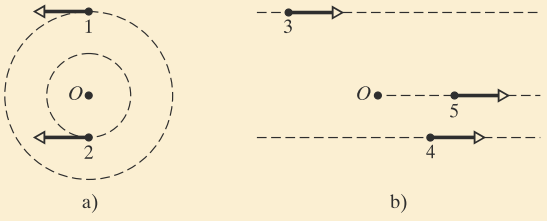
$$\ell = r_\perp p = r_\perp m v, \tag{11.21}$$

gdzie $r_\perp$ jest odległością punktu O od prostej, na której leży wektor $\vec{p}$.

Uwaga. Pamiętaj, że: 1) moment pędu ma znaczenie tylko wtedy, gdy wiadomo, względem którego punktu jest wyznaczony, a ponadto 2) wektor momentu pędu jest zawsze prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory położenia i pędu cząstki, $\vec{r}$ i $\vec{p}$.

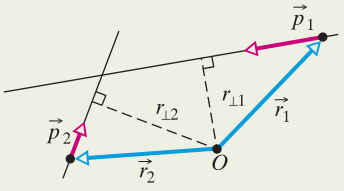
Sprawdzian 4

Na rysunku (a) przedstawiono dwie cząstki, 1 i 2, okrążające punkt O w przeciwnych kierunkach po okręgach o promieniach 2 m i 4 m. Na rysunku (b) pokazano cząstki 3 i 4, poruszające się w tym samym kierunku po liniach prostych odległych od punktu O o 4 m i 2 m. Cząstka 5 porusza się wzdłuż prostej przechodzącej przez punkt O. Wszystkie te cząstki mają jednakowe masy i takie same wartości prędkości, które są stałe. a) Uszereguj te cząstki w zależności od wartości bezwzględnej ich momentu pędu względem punktu O, od największej do najmniejszej. b) Dla których cząstek moment pędu względem punktu O jest ujemny?



Przykład 11.03. Moment pędu układu dwóch cząstek

Na rysunku 11.13 przedstawiono widok z góry dwóch cząstek poruszających się ze stałym pędem po poziomych torach. Cząstka 1, która ma pęd o wartości $p_1 = 5\ \mathrm{kg \cdot m/s}$ i wektor położenia $\vec{r}_1$, porusza się wzdłuż prostej odległej od punktu O o 2 m. Cząstka 2, która ma pęd o wartości $p_2 = 2\ \mathrm{kg \cdot m/s}$ i wektor położenia $\vec{r}_2$, porusza się wzdłuż prostej odległej od punktu O o 4 m. Wyznacz wartość i kierunek całkowitego momentu pędu $\vec{L}$ układu tych dwóch cząstek względem punktu O.



Rys. 11.13. Dwie cząstki przemieszczają się w pobliżu punktu O

PODSTAWOWE FAKTY

Aby wyznaczyć wektor $\vec{L}$, wyznaczymy najpierw momenty pędu obydwu cząstek $\vec{\ell}_1$ i $\vec{\ell}_2$, a następnie dodamy je do siebie. Aby obliczyć długości tych wektorów, możemy skorzystać z dowolnego z równań (11.18)–(11.21). Najłatwiej jednak będzie zastosować równanie (11.21), gdyż znamy odległości $r_{\perp 1}$ (= 2 m) i $r_{\perp 2}$ (= 4 m) oraz wartości pędów cząstek p_1 i p_2.

Obliczenia: Z równania (11.21) otrzymujemy dla cząstki 1

$$\ell_1 = r_{\perp 1} p_1 = (2\ \mathrm{m})(5\ \mathrm{kg \cdot m/s}) = 10\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}.$$

W celu wyznaczenia kierunku wektora $\vec{\ell}_1$ skorzystamy z równania (11.18) oraz z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego. Iloczyn $\vec{r}_1 \times \vec{p}_1$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny rysunku 11.13 i jest skierowany zza kartki. Jest to kierunek dodatni, gdyż w czasie ruchu cząstki 1 jej wektor położenia $\vec{r}_1$ obraca się wokół punktu O w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Moment pędu cząstki 1 wynosi zatem

$$\ell_1 = +10\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}.$$

W taki sam sposób wyznaczamy długość wektora $\vec{\ell}_2$:

$$\ell_2 = r_{\perp 2} p_2 = (4\ \mathrm{m})(2\ \mathrm{kg \cdot m/s}) = 8\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}.$$

Iloczyn $\vec{r}_2 \times \vec{p}_2$ jest wektorem skierowanym za kartkę, co jest kierunkiem ujemnym, gdyż w czasie ruchu cząstki 2 wektor $\vec{r}_2$ obraca się wokół punktu O w kie-

runku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Moment pędu cząstki 2 wynosi zatem

$$\ell_2 = -8\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Całkowity moment pędu układu tych dwóch cząstek wynosi wobec tego

$$L = \ell_1 + \ell_2 = +10\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} + (-8\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$$
$$= +2\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Znak plus oznacza, że całkowity moment pędu układu względem punktu O jest skierowany zza kartki.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

11.6. DRUGA ZASADA DYNAMIKI NEWTONA DLA RUCHU OBROTOWEGO

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

11.21 zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego, czyli powiązać moment siły działającej na cząstkę ze zmianą jej momentu pędu względem tego samego punktu.

Podstawowe fakty

- Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego cząstki może być zapisana w postaci

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt},$$

gdzie $\vec{M}_{\text{wyp}}$ jest wypadkowym momentem siły, jaki działa na cząstkę, a $\vec{\ell}$ jest momentem pędu tej cząstki.

Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

Druga zasada dynamiki Newtona, zapisana w postaci

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{(pojedyncza cząstka)}, \qquad (11.22)$$

wyraża związek siły z pędem dla pojedynczej cząstki. Spotkaliśmy już tak wiele analogii między wielkościami liniowymi i kątowymi, że jesteśmy całkiem pewni, iż musi istnieć podobny związek między momentem siły i momentem pędu. Patrząc na równanie (11.22), możemy nawet zgadnąć, że ma on postać

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \qquad \text{(pojedyncza cząstka)}. \qquad (11.23)$$

Równanie (11.23) jest istotnie zapisem drugiej zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego:

> Suma (wektorowa) wszystkich momentów siły działających na cząstkę jest równa szybkości zmiany momentu pędu tej cząstki.

Równanie (11.23) jest oczywiście słuszne tylko wtedy, gdy moment siły $\vec{M}$ i moment pędu $\vec{\ell}$ są wyznaczone względem tego samego punktu odniesienia, zwykle początku układu współrzędnych.

Uzasadnienie wzoru (11.23)

Wyjdziemy od równania (11.18), czyli od definicji momentu pędu cząstki:

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v}),$$

w którym $\vec{r}$ jest wektorem położenia cząstki, a $\vec{v}$ — jej prędkością. Różniczkując to równanie stronami[1] względem t, otrzymujemy

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right). \tag{11.24}$$

Zauważ jednak, że $d\vec{v}/dt$ to przyspieszenie $\vec{a}$ cząstki, a $d\vec{r}/dt$ to prędkość $\vec{v}$ cząstki. Równanie (11.24) można zatem zapisać w postaci

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}).$$

Ponieważ $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ (iloczyn wektorowy dowolnego wektora przez siebie jest równy zeru, gdyż w tym przypadku kąt między mnożonymi przez siebie wektorami jest zawsze równy zeru), otrzymujemy następnie

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}.$$

Korzystając z drugiej zasady dynamiki ($\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}$), do powyższego równania możemy wstawić za $m\vec{a}$ sumę wektorową wszystkich sił działających na cząstkę, co daje:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{wyp} = \sum(\vec{r} \times \vec{F}). \tag{11.25}$$

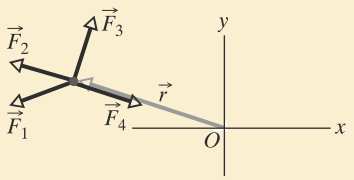
Symbol $\sum$ oznacza tu, że musimy dodać do siebie iloczyny wektorowe $\vec{r} \times \vec{F}$ dla wszystkich sił. Wiemy jednak z równania (11.24), że każdy z tych iloczynów wektorowych to związany z każdą z sił moment siły. Równanie (12.25) oznacza więc, że

$$\vec{M}_{wyp} = \frac{d\vec{\ell}}{dt},$$

a to jest właśnie równanie (11.23), które mieliśmy wyprowadzić.

Sprawdzian 5

Na rysunku przedstawiono wektor położenia $\vec{r}$ cząstki w pewnej chwili oraz kierunek siły, powodującej ruch przyspieszony cząstki, w czterech możliwych przypadkach. We wszystkich przypadkach siła ma taką samą wartość i leży w płaszczyźnie xy. a) Uszereguj te siły w zależności od wartości wywoływanych przez nie szybkości zmiany momentu pędu cząstki ($d\vec{\ell}/dt$) względem punktu O, od największej do najmniejszej. b) W których przypadkach ta szybkość zmiany jest ujemna?



[1] Różniczkując iloczyn wektorowy, musimy uważać, aby nie zmienić kolejności wektorów (tutaj wektorów $\vec{r}$ i $\vec{v}$), które są czynnikami tego iloczynu (patrz równanie (3.25)).

Przykład 11.04. Moment siły jako pochodna momentu pędu

Na rysunku 11.14a pokazano (w pewnej chwili podczas jej ruchu) cząstkę o masie 0,5 kg poruszającą się po linii prostej tak, że jej wektor położenia jest dany wzorem

$$\vec{r} = (-2t^2 - t)\hat{\mathrm{i}} + 5\hat{\mathrm{j}},$$

przy czym $\vec{r}$ jest wyrażone w metrach, a t w sekundach, w chwili początkowej zaś $t = 0$. Wektor położenia ma początek w początku układu współrzędnych. Wyznacz zależność od czasu momentu pędu cząstki $\vec{\ell}$ i działającego na nią momentu siły $\vec{M}$ względem początku układu współrzędnych. Podaj wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych. Uzasadnij znak otrzymanych wyrażeń, odnosząc się do ruchu cząstki.

PODSTAWOWE FAKTY

1) Musimy zawsze wiedzieć, względem jakiego punktu wyznaczamy moment pędu. Tutaj jest nim początek układu współrzędnych. 2) Moment pędu cząstki $\vec{\ell}$ jest dany wzorem (11.18) ($\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$). 3) Znak momentu pędu cząstki to znak obrotu wektora położenia cząstki (wokół osi obrotu) podczas ruchu cząstki: kierunek zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara oznacza obrót ujemny, a kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara oznacza obrót dodatni. 4) Jeśli działający na cząstkę moment siły i moment pędu tej cząstki są liczone względem *tego samego* punktu, to te momenty są ze sobą związane równaniem (11.23) ($\vec{M} = \mathrm{d}\vec{\ell}/\mathrm{d}t$).

Obliczenia: Aby móc wykorzystać równanie (11.18) do wyznaczenia momentu pędu, musimy najpierw wyznaczyć prędkość cząstki jako pochodną wektora położenia cząstki względem czasu. Zgodnie z równaniem (4.10) ($\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$) jest ona równa

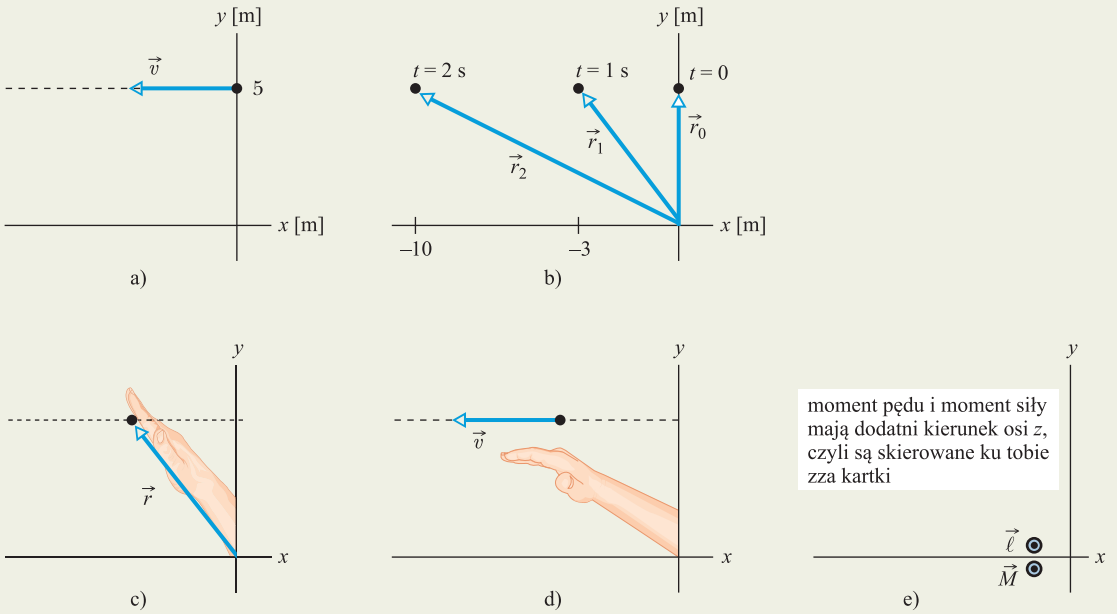
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((-2t^2 - t)\hat{\mathrm{i}} + 5\hat{\mathrm{j}}\right) = (-4t - 1)\hat{\mathrm{i}},$$

gdzie $\vec{v}$ jest wyrażone w metrach na sekundę.

Obliczmy następnie iloczyn wektorowy wektorów $\vec{r}$ i $\vec{v}$, korzystając ze wzoru (3.27):

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}}.$$

W naszym przypadku wektorem $\vec{a}$ jest $\vec{r}$, a wektorem



Rys. 11.14. a) Położenie cząstki poruszającej się wzdłuż linii prostej w chwili $t = 0$. b) Wektor położenia cząstki w chwilach $t = 0{,}1$ s i 2 s. Zastosowanie reguły prawej dłoni do ustalenia kierunku iloczynu wektorowego wektorów $\vec{r}$ i $\vec{v}$: c) pierwszy krok, d) drugi krok. e) Wektor momentu pędu i wektor momentu siły mają dodatni kierunek osi z, czyli są skierowane ku tobie zza kartki

$\vec{b}$ jest $\vec{v}$. Nie mając jednak ochoty na wykonanie większej pracy niż naprawdę potrzeba, przyjrzyjmy się bliżej wektorom, których iloczyn (wektorowy) mamy obliczyć. Wektor $\vec{r}$ ma składową z równą zeru, a wektor $\vec{v}$ ma równe zeru składowe y i z, wobec czego po prawej stronie poprzedniego wzoru różny od zera jest tylko składnik $(-b_x a_y)\hat{k}$. W istocie rzeczy otrzymujemy więc

$$\vec{r} \times \vec{v} = -(-4t - 1)(5)\hat{k}\ \mathrm{m^2/s} = (20t + 5)\hat{k}\ \mathrm{m^2/s}.$$

Zauważ, że — jak zawsze — iloczyn wektorowy jest wektorem prostopadłym do wektorów, które przez siebie mnożymy.

Korzystając jeszcze raz z równania (11.18), mnożymy otrzymane wyrażenie przez masę i dostajemy

$$\begin{aligned}\vec{\ell} &= (0{,}5\ \mathrm{kg})[(20t + 5)\hat{k}\ \mathrm{m^2/s}] \\ &= (10t + 2{,}5)\hat{k}\ \mathrm{kg{\cdot}m^2/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.\end{aligned}$$

Moment siły (względem początku układu współrzędnych) wyznaczamy natychmiast z równania (11.23)

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(10t + 2{,}5)\hat{k}\ \mathrm{kg \cdot m^2/s} \\ &= 10\hat{k}\ \mathrm{kg \cdot m^2/s} \\ &= 10\hat{k}\ \mathrm{N \cdot m} \qquad \text{(odpowiedź)}.\end{aligned}$$

Wektor ten ma dodatni kierunek osi z.

Z wyrażenia na $\vec{\ell}$, jakie otrzymaliśmy, wynika, że moment pędu ma dodatni kierunek osi z. Jest to zgodne z faktem, że wektor położenia wykonuje obrót w kierunku dodatnim. Aby się o tym przekonać, wystarczy wyznaczyć ten wektor w kilku różnych chwilach, na przykład:

$$\begin{aligned}t = 0 \qquad & \vec{r}_0[\mathrm{m}] = \quad 5\hat{j}, \\ t = 1\ \mathrm{s} \qquad & \vec{r}_1[\mathrm{m}] = -\ 3\hat{i} + 5\hat{j}, \\ t = 2\ \mathrm{s} \qquad & \vec{r}_2[\mathrm{m}] = -10\hat{i} + 5\hat{j}.\end{aligned}$$

Rysując te wektory (rys. 11.14b) przekonamy się z łatwością, że gdy cząstka się porusza, wektor $\vec{r}$ obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Taki obrót uważamy za dodatni. Tak więc, choć cząstka porusza się po linii prostej, jej wektor położenia obraca się względem początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a zatem cząstka ma względem tego punktu dodatni moment pędu.

Kierunek momentu pędu cząstki możemy też uzasadnić, stosując do iloczynu wektorowego $\vec{r} \times \vec{v}$ (lub — co na to samo wychodzi — $m\vec{r} \times \vec{v}$) regułę prawej dłoni dla iloczynu wektorowego. W dowolnej chwili podczas ruchu cząstki ustawmy palce prawej dłoni w kierunku pierwszego wektora iloczynu wektorowego (czyli wektora $\vec{r}$), jak pokazano na rysunku 11.14c. Niech dłoń będzie ustawiona tak, by palce można było obrócić w płaszczyźnie rysunku. Obróćmy zatem palce w stronę kierunku drugiego wektora iloczynu wektorowego (czyli wektora $\vec{v}$), jak pokazano na rysunku 11.14d. Odgięty kciuk wskazuje kierunek wektora, któremu jest równy iloczyn wektorowy. Jak wskazuje rysunek 11.14e, wektor ten ma kierunek dodatni osi z (czyli jest skierowany ku tobie zza kartki), co jest zgodne z poprzednim wnioskiem. Na rysunku 11.14e pokazano również kierunek wektora $\vec{M}$, którym jest także dodatni kierunek osi z, gdyż moment pędu ma właśnie taki kierunek, a jego wartość rośnie z upływem czasu.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

11.7. MOMENT PĘDU CIAŁA SZTYWNEGO

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

11.22 zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego do układu cząstek, czyli powiązać moment siły działającej na układ ze zmianą jego momentu pędu;

11.23 wykorzystać związek momentu pędu ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi z momentem bezwładności tego ciała i jego prędkością kątową względem tej samej osi;

11.24 obliczyć całkowity moment pędu dwóch ciał obracających się wokół tej samej osi.

Podstawowe fakty

- Moment pędu $\vec{L}$ układu cząstek jest sumą wektorową momentów pędu poszczególnych cząstek:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i.$$

- Szybkość, z jaką zmienia się moment pędu, jest równa wypadkowemu zewnętrznemu momentowi sił działających na układ, czyli sumie wektorowej wszystkich zewnętrznych momentów sił, działających na cząstki układu:

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \text{(układ cząstek)}.$$

- Dla ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi składowa jego momentu pędu równoległa do osi obrotu wynosi

$$L = I\omega \qquad \text{(ciało sztywne, stała oś obrotu)}.$$

Moment pędu układu cząstek

Obecnie zajmiemy się momentem pędu układu cząstek względem pewnego punktu. Całkowity moment pędu $\vec{L}$ układu jest równy sumie (wektorowej) momentów pędu $\vec{\ell}$ poszczególnych cząstek:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i, \tag{11.26}$$

gdzie wskaźnik i numeruje cząstki.

Momenty pędu poszczególnych cząstek mogą zmieniać się wraz z upływem czasu, co może zachodzić pod wpływem oddziaływań w obrębie układu (tzn. między jego cząstkami) lub w wyniku oddziaływań z ciałami spoza układu. Zmianę $\vec{L}$ pochodzącą od zmian momentów pędu cząstek możemy obliczyć, obliczając pochodną równania (11.26) względem czasu. Daje to

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}. \tag{11.27}$$

Jak wiemy z równania (11.23), $d\vec{\ell}_i/dt$ jest równe wypadkowemu momentowi siły $\vec{M}_{\text{wyp},i}$ działającemu na i-tą cząstkę. Wobec tego równanie (12.27) możemy zapisać jako

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{\text{wyp},i}. \tag{11.28}$$

Oznacza to, że szybkość zmiany momentu pędu $\vec{L}$ układu jest równa sumie wektorowej momentów sił działających na wszystkie cząstki. Wśród tych momentów siły są *momenty sił wewnętrzne* (pochodzące od sił działających między cząstkami) oraz *momenty sił zewnętrzne* (pochodzące od sił działających na cząstki ze strony ciał nienależących do układu). Siły działające między cząstkami układu występują jednak zawsze parami stanowiącymi pary akcja–reakcja (których dotyczy trzecia zasada dynamiki), a zatem suma związanych z nimi momentów sił jest równa zeru. Tak więc całkowity moment pędu $\vec{L}$ układu cząstek może ulegać zmianie jedynie w wyniku działania na układ zewnętrznych w stosunku do układu momentów sił.

Wypadkowy zewnętrzny moment sił. Oznaczmy przez $\vec{M}_{\text{wyp}}$ wypadkowy zewnętrzny moment sił, który jest sumą wektorową wszystkich zewnętrznych momentów sił działających na cząstki układu. Równanie (11.28) możemy teraz zapisać w postaci

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(układ cząstek).} \qquad (11.29)$$

To równanie wyraża drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego układu cząstek. Jej treść jest następująca:

Wypadkowy zewnętrzny moment siły $\vec{M}_{\text{wyp}}$ działający na układ cząstek jest równy szybkości zmiany całkowitego momentu pędu $\vec{L}$ układu.

Równanie (11.29) ma taką samą postać, jak równanie (9.27), $\vec{F}_{\text{wyp}} = d\vec{P}/dt$, lecz jego zastosowanie wymaga pewnej ostrożności. Momenty siły i moment pędu układu muszą być obliczone względem tego samego punktu. Jeśli środek masy układu nie porusza się ruchem przyspieszonym względem jakiegoś układu inercjalnego, to może nim być dowolny punkt. Jeśli jednak środek masy układu *porusza się ruchem przyspieszonym*, to punktem odniesienia może być tylko środek masy układu. Rozważmy jako przykład układ cząstek stanowiący koło. Jeśli koło obraca się wokół osi, która ma stałe położenie względem ziemi, to punktem odniesienia w równaniu (11.29) może być dowolny punkt, którego położenie względem ziemi jest stałe. Jeśli jednak koło obraca się wokół osi, która porusza się ruchem przyspieszonym (jak wtedy, gdy koło stacza się po równi pochyłej), to tym punktem odniesienia może być tylko środek masy koła.

Moment pędu ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi

Obliczymy teraz moment pędu układu cząstek stanowiącego ciało sztywne, obracające się wokół stałej osi. Takie ciało przedstawiono na rysunku 11.15a. Stałą osią jego obrotu jest oś z, a ciało obraca się wokół niej ze stałą prędkością kątową ω. Chcemy wyznaczyć moment pędu ciała związany z jego obrotem wokół tej osi.

Szukany moment pędu ciała możemy wyznaczyć, sumując składowe z momentów pędu poszczególnych elementów ciała. Na rysunku 11.15a zaznaczono przykładowy element ciała o masie Δm_i, poruszający się po torze kołowym wokół osi z. Jego wektor położenia względem początku układu współrzędnych oznaczono przez $\vec{r}_i$. Promień okręgu, po jakim porusza się ten element, jest równy jego odległości od osi z i wynosi $r_{\perp i}$.

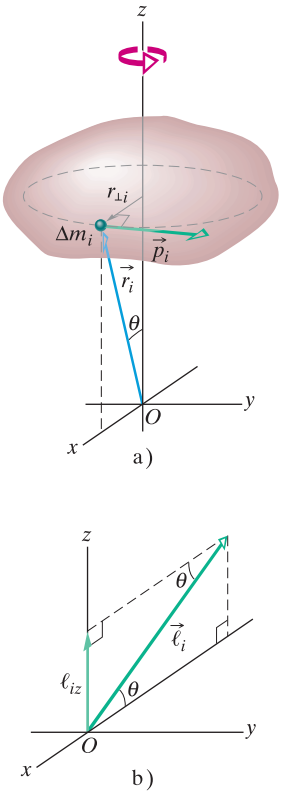
Długość wektora momentu pędu $\vec{\ell}_i$ elementu względem punktu O można otrzymać z równania (11.19)

$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(\Delta m_i\, v_i),$$

przy czym p_i jest wartością pędu tego elementu, a v_i — wartością jego prędkości; wzięto również pod uwagę, że wektory $\vec{r}_i$ i $\vec{p}_i$ tworzą ze sobą kąt równy 90°. Wektor momentu pędu $\vec{\ell}_i$ elementu masy z rysunku 11.15a przedstawiono na rysunku 11.15b; jest on oczywiście prostopadły do wektorów $\vec{r}_i$ i $\vec{p}_i$.

Składowe z. Interesuje nas składowa wektora $\vec{\ell}_i$ równoległa do osi obrotu, czyli do osi z. Ta składowa wynosi

$$\ell_{iz} = \ell_i \sin\theta = (r_i \sin\theta)(\Delta m_i\, v_i) = r_{\perp i}\Delta m_i\, v_i.$$



Rys. 11.15. a) Ciało sztywne obraca się wokół osi z z prędkością kątową ω. Element tego ciała o masie Δm_i zatacza przy tym wokół osi z okrąg o promieniu $r_{\perp i}$. Ten element masy ma pęd $\vec{p}_i$, a $\vec{r}_i$ jest jego wektorem położenia względem początku układu współrzędnych O. Rysunek odpowiada chwili, w której $r_{\perp i}$ ma kierunek osi x. b) Moment pędu $\vec{\ell}_i$ elementu masy z rysunku (a) względem punktu O. Na rysunku zaznaczono również jego składową ℓ_{iz} wzdłuż osi z

Składową z momentu pędu całego obracającego się ciała sztywnego wyznaczamy jako sumę wkładów pochodzących od wszystkich elementów masy tego ciała. Zauważając ponadto, że $v = \omega r_\perp$, otrzymujemy

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \ell_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \, v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_{\perp i} = \omega \Big(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \, r_{\perp i}^2 \Big). \tag{11.30}$$

Wielkość ω mogliśmy wynieść przed znak sumy, gdyż ma ona tę samą wartość dla wszystkich punktów ciała.

Występująca w równaniu (11.30) wielkość $\sum \Delta m_i r_{\perp i}^2$ jest momentem bezwładności I ciała względem stałej osi (patrz równanie (10.33)). Równanie (11.30) przybiera zatem postać

$$L = I\omega \qquad \text{(ciało sztywne, stała oś obrotu).} \tag{11.31}$$

W równaniu tym opuściliśmy wskaźnik z. Musisz jednak pamiętać, że moment pędu w równaniu (11.31) jest składową wzdłuż osi obrotu. Podobnie wielkość I w tym równaniu jest momentem bezwładności względem tej samej osi.

W tabeli 11.1, stanowiącej uzupełnienie tabeli 10.3, zebrano dalsze równania odnoszące się do ruchu obrotowego i ich odpowiedniki dla ruchu postępowego.

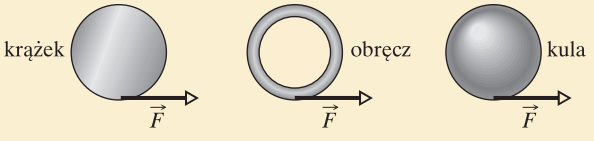
Tabela 11.1. Dalsze zmienne i równania dla ruchu postępowego i obrotowego[1]

Ruch postępowy		Ruch obrotowy	
siła	$\vec{F}$	moment siły	$\vec{M}\ (= \vec{r} \times \vec{F})$
pęd	$\vec{p}$	moment pędu	$\vec{\ell}\ (= \vec{r} \times \vec{p})$
pęd[2]	$\vec{P}\ (= \sum \vec{p}_i)$	moment pędu[2]	$\vec{L}\ (= \sum \vec{\ell}_i)$
pęd[2]	$\vec{P} = m_u \vec{v}_{\text{ŚM}}$	moment pędu[3]	$L = I\omega$
druga zasada dynamiki[2]	$\vec{F}_{\text{wyp}} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$	druga zasada dynamiki[2]	$\vec{M}_{\text{wyp}} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
zasada zachowania[4]	$\vec{P} = \text{const}$	zasada zachowania[4]	$\vec{L} = \text{const}$

[1] Patrz także tabela 10.3.
[2] Dla układu cząstek, a także ciała sztywnego.
[3] Dla ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi; L jest składową momentu pędu wzdłuż tej osi.
[4] Dla układu zamkniętego i izolowanego.

Sprawdzian 6

Na rysunku przedstawiono krążek, obręcz i kulę, wprawiane w ruch obrotowy wokół swej osi za pomocą linki, którą są owinięte (tak, jak wprawia się w ruch bąka). Wszystkie trzy ciała są początkowo w spoczynku, mają takie same masy i promienie oraz działa na nie taka sama siła styczna $\vec{F}$. Uszereguj te ciała pod względem ich: a) momentu pędu wzdłuż osi obrotu, b) prędkości kątowej, jakie mają po upływie pewnego czasu t od początku ciągnięcia za linkę, od największych do najmniejszych.



11.8. ZACHOWANIE MOMENTU PĘDU

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

11.25 zastosować zasadę zachowania momentu pędu, czyli powiązać moment pędu w chwili początkowej z jego wartością w dowolnej chwili późniejszej, gdy wypadkowy zewnętrzny moment siły działający na układ jest równy zeru (wszystkie momenty względem *tej samej* osi).

Podstawowe fakty

- Moment pędu układu $\vec{L}$ nie zmienia się, gdy wypadkowy zewnętrzny moment siły działający na układ jest równy zeru:

$$\vec{L} = \text{const} \qquad \text{(układ izolowany)},$$

czyli

$$\vec{L}_{\text{pocz}} = \vec{L}_{\text{końc}} \qquad \text{(układ izolowany)}.$$

Jest to zasada zachowania momentu pędu.

Zachowanie momentu pędu

Poznałeś dotąd dwie bardzo użyteczne zasady zachowania: zasadę zachowania energii i zasadę zachowania pędu. Teraz podamy trzecie prawo tego rodzaju, mianowicie zasadę zachowania momentu pędu. Wyjdziemy z równania (11.29) ($\vec{M}_{\text{wyp}} = d\vec{L}/dt$), które opisuje drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego. Jeśli na układ nie działa żaden wypadkowy moment siły, to równanie przybiera postać $d\vec{L}/dt = 0$, co oznacza, że

$$\vec{L} = \text{const} \qquad \text{(układ izolowany)}. \qquad (11.32)$$

Otrzymany wynik, noszący nazwę **zasady zachowania momentu pędu**, można też zapisać jako

$$\begin{pmatrix}\text{całkowity moment pędu}\\ \text{w pewnej chwili początkowej } t_{\text{pocz}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{całkowity moment pędu}\\ \text{w pewnej chwili końcowej } t_{\text{końc}}\end{pmatrix},$$

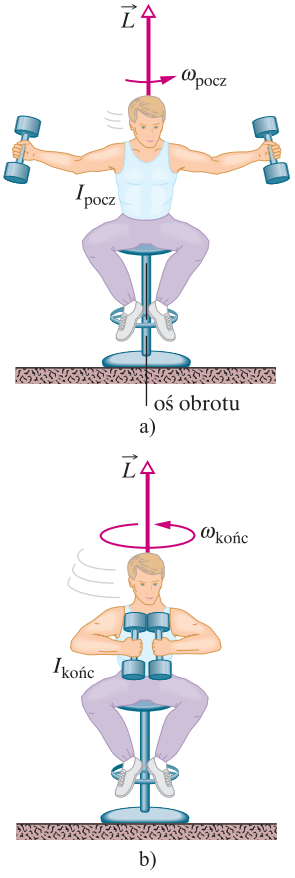
czyli

$$\vec{L}_{\text{pocz}} = \vec{L}_{\text{końc}} \qquad \text{(układ izolowany)}. \qquad (11.33)$$

Z równanań (11.32) i (11.33) wynika, że:

Jeśli działający na układ wypadkowy moment siły jest równy zeru, to całkowity moment pędu $\vec{L}$ układu nie zmienia się niezależnie od tego, jakim zmianom podlega układ.

Równania (11.32) i (11.33) są równaniami wektorowymi; są one wobec tego równoważne trzem równaniom dla składowych wektorów, stwierdzającym zachowanie momentu pędu w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach. W zależności od tego, jakie momenty siły działają na układ, moment pędu może być zachowany dla jednego lub dwóch kierunków, a nie być zachowany dla wszystkich trzech.



Rys. 11.16. a) Student ma stosunkowo duży moment bezwładności względem osi obrotu i stosunkowo małą prędkość kątową. b) Zmniejszając swój moment bezwładności, student zwiększa swą prędkość kątową. Moment pędu $\vec{L}$ obracającego się układu pozostaje bez zmiany

Jeśli wypadkowy *zewnętrzny* moment siły działający na układ ma składową wzdłuż pewnej osi równą zeru, to składowa całkowitego momentu pędu układu wzdłuż tej osi nie zmienia się niezależnie od tego, jakim zmianom podlega układ.

Jest to bardzo ważne stwierdzenie: w przypadku, o którym mowa, ważne są tylko stan początkowy i stan końcowy układu, a stany pośrednie nie muszą nas interesować.

Rozważmy tę zasadę w odniesieniu do izolowanego ciała z rysunku 11.15, obracającego się wokół osi z. Wyobraź sobie, że ciało, które jest początkowo sztywne, w jakiś sposób zmienia w czasie obrotu rozkład swej masy względem osi obrotu, przez co zmienia się jego moment bezwładności względem tej osi. Równania (11.32) i (11.33) wskazują, że moment pędu ciała nie może przy tym ulec zmianie. Podstawiając do równania (11.33) wyrażenie (11.31) na moment pędu ciała wzdłuż osi obrotu, otrzymujemy zasadę zachowania momentu pędu w postaci

$$I_{\text{pocz}}\omega_{\text{pocz}} = I_{\text{końc}}\omega_{\text{końc}}. \tag{11.34}$$

Wskaźniki w tym równaniu odnoszą się do wartości momentu bezwładności I oraz prędkości kątowej ω przed wspomnianą zmianą rozkładu masy ciała i po niej.

Podobnie jak dwie omówione wcześniej zasady zachowania, zasada zachowania momentu pędu, którą wyrażają równania (11.32) i (11.33), obowiązuje nie tylko w mechanice klasycznej. Jest ona słuszna także dla cząstek o prędkościach bliskich prędkości światła (dla których obowiązują prawa szczególnej teorii względności), a także w świecie cząstek mniejszych od atomów (do których stosują się prawa fizyki kwantowej). Nie stwierdzono dotychczas żadnych odstępstw od zasady zachowania momentu pędu.

Omówimy teraz cztery przypadki, w których ta zasada odgrywa ważną rolę.

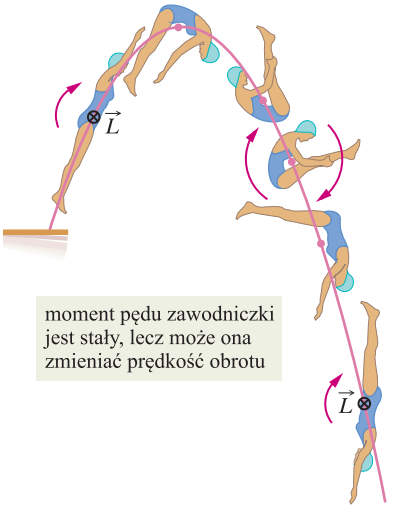
1. ***Ochotnik na karuzeli.*** Na rysunku 11.16 przedstawiono studenta siedzącego na stołku, który może obracać się wokół osi pionowej. Student, który trzyma hantle w wyciągniętych w bok rękach, zostaje wprawiony w ruch obrotowy z pewną niezbyt dużą prędkością kątową ω_{pocz}. Wektor jego momentu pędu $\vec{L}$ jest skierowany wzdłuż pionowej osi obrotu w górę.

   Wykładowca prosi teraz, aby student przyciągnął ramiona do siebie. Dzięki temu student zmniejsza swój moment bezwładności od pewnej wartości początkowej I_{pocz} do wartości końcowej $I_{\text{końc}}$, która jest mniejsza od tej pierwszej, gdyż część masy obracającego się ciała została zbliżona do osi obrotu. Towarzyszy temu bardzo widoczny wzrost prędkości kątowej, od wartości ω_{pocz} do wartości $\omega_{\text{końc}}$. Student może w każdej chwili znów zwolnić swój obrót, wyciągając ponownie ręce w bok.

   Na układ złożony ze studenta, hantli i stołka obrotowego nie działa żaden wypadkowy zewnętrzny moment siły. Wobec tego moment pędu układu wzdłuż osi obrotu musi pozostawać stały, niezależnie od tego,

gdzie znajdują się trzymane przez studenta hantle. W sytuacji przedstawionej na rysunku 11.16a prędkość kątowa studenta ω_{pocz} jest stosunkowo mała, a jego moment bezwładności I_{pocz} — stosunkowo duży. Zgodnie z równaniem (11.34) jego prędkość kątowa, w sytuacji przedstawionej na rysunku 11.16b, musi być większa niż ω_{pocz}, gdyż jego moment bezwładności się zmniejszył.

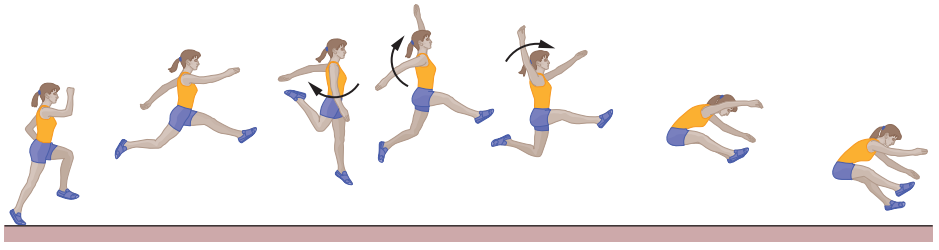
2. ***Skok z trampoliny.*** Na rysunku 11.17 przedstawiono zawodniczkę skaczącą do wody z trampoliny, która wykonuje w czasie skoku półtora salta w przód. Jak się zapewne spodziewasz, jej środek masy zakreśla przy tym parabolę. Po odbiciu się od trampoliny zawodniczka ma pewien moment pędu $\vec{L}$ względem swego środka masy, prostopadły do płaszczyzny rysunku 11.17 i skierowany za kartkę. Na zawodniczkę nie działa w czasie lotu żaden wypadkowy zewnętrzny moment siły względem jej środka masy, a zatem jej moment pędu względem środka masy się nie zmienia. Przyciągając nogi do tułowia, zawodniczka znacznie zmniejsza swój moment bezwładności względem osi obrotu, a więc — zgodnie z równaniem (11.34) — znacznie zwiększa swą prędkość kątową. Gdy w końcowej fazie skoku zawodniczka prostuje się, zwiększa moment bezwładności i zmniejsza prędkość kątową, dzięki czemu wpada do basenu bez znacznego rozprysku wody. Nawet podczas bardziej złożonych skoków, zawierających oprócz obrotów w przód lub w tył także obroty śrubowe ciała, moment pędu skoczka musi być zachowany zarówno co do wartości, *jak i co do kierunku*.



Rys. 11.17. Moment pędu $\vec{L}$ skoczka jest stały w czasie całego skoku. Jego kierunek oznaczono symbolem ⊗, co oznacza, że jest on prostopadły do płaszczyzny rysunku i skierowany za kartkę. Zauważ, że środek masy skoczka (oznaczony kropką) zakreśla w locie parabolę

3. ***Skok w dal.*** Gdy skoczek w dal odbija się od belki, siła, jaką działa belka na stopę, z której skoczek się odbija, nadaje mu pewien moment pędu, którego wynikiem jest obrót do przodu wokół osi poziomej. Taki obrót nie pozwala na odpowiednie lądowanie — wylądować trzeba z nogami złączonymi i skierowanymi w przód, by jak najdalej zostawić ślad buta na piasku. Po odbiciu od belki skoczek nie może już zmienić swego momentu pędu, który jest zachowany (bo w locie nie działają na skoczka zewnętrzne momenty siły). Może on jednak wykorzystać większość swego momentu pędu na ruch ramion, obracając je jak skrzydła wiatraka (patrz rys. 11.18). Dzięki temu ciało skoczka pozostaje wyprostowane i jest przygotowane do poprawnego lądowania.

4. ***Tour jeté.*** Gdy tancerz wykonuje jedną ze znanych figur baletu klasycznego: *tour jeté* (skok z obrotem), wyskakuje on w powietrze z niewielkim obrotem jednej nogi, drugą trzymając prostopadle do ciała (patrz



Rys. 11.18. Skoczek w dal obraca w locie ramiona jak skrzydła wiatraka, dzięki czemu ma ustawienie ciała odpowiednie do poprawnego lądowania

rys. 11.19a). Prędkość kątowa tancerza jest tak mała, że publiczność może jej nie dostrzec. Gdy skoczek wznosi się w górę, opuszcza nogę odgiętą, a drugą nogę lekko odgina, tak że w końcu są one razem i tworzą z tułowiem kąt θ (rys. 11.19b). Ruch ten ma w sobie wiele gracji, lecz służy również temu, by zwiększyć prędkość obrotu, zmniejszając moment bezwładności tancerza. W locie nie działają na tancerza zewnętrzne momenty sił, więc jego moment pędu nie może ulec zmianie. Zmniejszenie momentu bezwładności powoduje zatem wzrost prędkości kątowej tancerza. Gdy skok jest poprawnie wykonany, publiczność ma wrażenie, że tancerz zaczyna się nagle obracać i po obrocie o 180° ustawienie jego nóg jest odwrotne do początkowego, po czym tancerz ląduje. Gdy jedna z nóg jest ponownie odgięta, obrót ciała jest znów niedostrzegalny.



Rys. 11.19. a) Pierwsza faza skoku *tour jeté* — duży moment bezwładności i mała prędkość kątowa. b) Druga faza skoku — mniejszy moment bezwładności i większa prędkość kątowa

Sprawdzian 7

Na skraju niewielkiego krążka, obracającego się jak karuzela, siedzi żuczek. Wyobraź sobie, że w pewnej chwili żuczek zaczyna iść ku środkowi krążka. Czy przy tym podane niżej wielkości (obliczone względem osi krążka) wzrosną, zmaleją, czy pozostaną bez zmiany: a) moment bezwładności układu żuczek–krążek, b) moment pędu układu, c) prędkość kątowa żuczka i krążka?

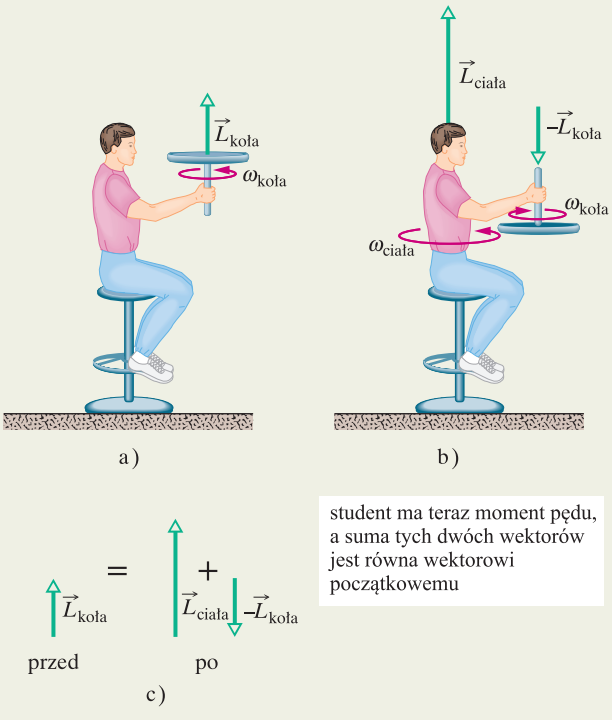
Przykład 11.05. Zachowanie momentu pędu, pokaz z obrotem wirującego koła

Na rysunku 11.20a przedstawiono studenta siedzącego — jak poprzednio — na stołku obrotowym. Student pozostaje w spoczynku, trzymając w ręku koło rowerowe, którego obręcz jest obciążona ołowiem (w celu zwiększenia momentu bezwładności koła) i ma moment bezwładności $I_{\text{koła}}$ względem swej osi równy 1,2 kg·m^2.

Koło obraca się z prędkością kątową $\omega_{\text{koła}}$ o wartości 3,9 obrotów/s; patrząc z góry, widzimy, że obrót zachodzi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Oś koła jest pionowa, a zatem moment pędu $\vec{L}_{\text{koła}}$ koła jest skierowany pionowo w górę.

W pewnej chwili student obraca koło (rys. 11.20b) tak, że teraz, patrząc z góry, widzimy, że koło obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Moment pędu koła jest teraz równy $-\vec{L}_{\text{koła}}$. W wyniku tego manewru student, stołek i środek masy

koła zaczynają się łącznie obracać wokół osi obrotu stołka; moment bezwładności tego ciała złożonego wynosi $I_{\text{ciała}} = 6{,}8\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. (Fakt, że koło obraca się ponadto wokół swej osi nie ma wpływu na rozkład masy ciała złożonego, a zatem wartość $I_{\text{ciała}}$ nie zależy od tego, czy koło się obraca, czy nie). Wyznacz prędkość kątową $\omega_{\text{ciała}}$ i kierunek obrotu ciała złożonego (tzn. studenta, stołka i środka masy koła) po obróceniu koła.



Rys. 11.20. a) Student trzyma koło rowerowe obracające się wokół osi pionowej. b) Student obraca koło, dzięki czemu sam zostaje wprawiony w ruch obrotowy. c) Całkowity moment pędu układu musi pozostać stały, mimo że koło zostało obrócone

PODSTAWOWE FAKTY

1) Szukana prędkość kątowa $\omega_{\text{ciała}}$ i moment pędu $\vec{L}_{\text{ciała}}$ ciała złożonego względem osi obrotu stołka (po obróceniu koła) są ze sobą związane równaniem (11.31) ($L = I\omega$). 2) Początkowa prędkość kątowa $\omega_{\text{koła}}$ koła i jego moment pędu $\vec{L}_{\text{koła}}$ względem osi koła są ze sobą związane tym samym równaniem. 3) Całkowity moment pędu $\vec{L}_{\text{całk}}$ układu zawierającego studenta, stołek i koło jest równy sumie wektorów $\vec{L}_{\text{ciała}}$ i $\vec{L}_{\text{koła}}$. 4) Gdy student obraca koło, na układ nie działa żaden wypadkowy *zewnętrzny* moment siły, który mógłby zmienić $\vec{L}_{\text{całk}}$ względem dowolnej osi pionowej (momenty siły, związane z siłami, działającymi w czasie manewru między studentem a kołem, są momentami siły, działającymi *wewnątrz* układu). Wobec tego całkowity moment pędu układu względem dowolnej osi pionowej, a więc i osi obrotu stołka, jest zachowany.

Obliczenia: Stałość (zachowanie) $\vec{L}_{\text{całk}}$ zilustrowano na rysunku 11.20c. Możemy ją także zapisać dla składowych wzdłuż osi pionowej

$$L_{\text{ciała, końc}} + L_{\text{koła, końc}} = L_{\text{ciała, pocz}} + L_{\text{koła, pocz}}, \tag{11.35}$$

przy czym wskaźniki pocz i końc odnoszą się do stanu początkowego (przed obróceniem koła) i końcowego (po jego obróceniu). Obrócenie koła spowodowało, że moment pędu obracającego się koła zmienił się na przeciwny, dlatego za $L_{\text{koła, końc}}$ możemy podstawić $-L_{\text{koła, pocz}}$. Biorąc ponadto $L_{\text{ciała, pocz}} = 0$ (gdyż początkowo student, stołek i środek masy koła pozostawały w spoczynku), otrzymujemy z równania (11.35)

$$L_{\text{ciała, końc}} = 2L_{\text{koła, pocz}}.$$

Korzystając z równania (11.31), podstawiamy następnie $I_{\text{ciała}}\omega_{\text{ciała}}$ zamiast $L_{\text{ciała, końc}}$ oraz $I_{\text{koła}}\omega_{\text{koła}}$ zamiast $L_{\text{koła, pocz}}$ i po rozwiązaniu otrzymanego równania względem $\omega_{\text{ciała}}$ mamy ostatecznie

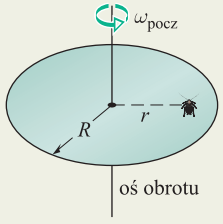
$$\begin{aligned}\omega_{\text{ciała}} &= \frac{2I_{\text{koła}}}{I_{\text{ciała}}}\omega_{\text{koła}} \\ &= \frac{(2)(1{,}2\ \text{kg} \cdot \text{m}^2)(3{,}9\ \text{obrotów/s})}{6{,}8\ \text{kg} \cdot \text{m}^2} \\ &= 1{,}4\ \text{obrotów/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy w wyniku wartość dodatnią, co oznacza, że student (widziany z góry) obraca się wokół osi obrotu stołka w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Jeśli chciałby się on zatrzymać, to wystarczy, aby ponownie obrócił koło.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 11.06. Zachowanie momentu pędu, prusak na karuzeli

Jak pokazano na rysunku 11.21, prusak o masie m obraca się wraz z krążkiem o masie $6m$ i promieniu R. Krążek obraca się wokół swej osi symetrii (jak karuzela) z prędkością kątową $\omega_{\text{pocz}} = 1{,}5$ rad/s. Prusak siedzi początkowo w punkcie odległym od osi obrotu o $r = 0{,}8R$, a potem przenosi się na brzeg krążka. Wyznacz prędkość kątową krążka po zmianie położenia przez prusaka (potraktuj go jak cząstkę).



Rys. 11.21. Prusak obracający się wraz z krążkiem

PODSTAWOWE FAKTY

1) Zmiana położenia prusaka powoduje zmianę rozkładu masy obracającego się układu krążek–prusak, a więc zmianę momentu bezwładności tego układu. 2) Moment pędu układu się nie zmienia, bo nie działają na niego żadne zewnętrzne momenty siły (siły i momenty sił związane z ruchem prusaka działają wewnątrz układu). 3) Wartość momentu pędu ciała sztywnego lub cząstki jest dana wzorem (11.31) ($L = I\omega$).

Obliczenia: Mamy wyznaczyć końcową prędkość kątową. Skorzystamy z zasady zachowania momentu pędu, czyli równości końcowej jego wartości $L_{\text{końc}}$ i jego wartości początkowej L_{pocz}, gdyż obie te wartości zależą od prędkości kątowej. Zależą one również od wartości momentu bezwładności I. Zaczniemy od wyznaczenia momentu bezwładności układu krążek–prusak przed i po zmianie położenia prusaka.

Moment bezwładności krążka obracającego się wokół swej osi symetrii znajdujemy w tabeli 10.2, punkt (c). Wynosi on $\frac{1}{2}MR^2$. Masa krążka wynosi $6m$, a zatem moment bezwładności krążka jest równy

$$I_{\text{k}} = 3mR^2 \tag{11.36}$$

(nie znamy wartości m ani R, ale w tej chwili nie zamierzamy się tym martwić).

Z równania (10.33) wiemy, że moment bezwładności prusaka (którego mamy traktować jak cząstkę) wynosi mr^2. W chwili początkowej prusak jest odległy od osi obrotu o $r = 0{,}8R$, a w chwili końcowej o $r = R$. Wobec tego jego moment bezwładności (względem osi obrotu, czyli osi symetrii krążka) w chwili początkowej wynosi

$$I_{\text{p, pocz}} = 0{,}64mR^2, \tag{11.37}$$

a w chwili końcowej jest równy

$$I_{\text{p, końc}} = mR^2. \tag{11.38}$$

Moment bezwładności układu krążek–prusak wynosi zatem w chwili początkowej

$$I_{\text{pocz}} = I_{\text{k}} + I_{\text{p,pocz}} = 3{,}64mR^2, \tag{11.39}$$

a w chwili końcowej jest równy

$$I_{\text{końc}} = I_{\text{k}} + I_{\text{p, końc}} = 4mR^2. \tag{11.40}$$

Wykorzystamy teraz równanie (11.31) ($L = I\omega$), aby wyrazić równość końcowego ($L_{\text{końc}}$) i początkowego (L_{pocz}) momentu pędu układu przez odpowiadające tym chwilom wartości momentu bezwładności i prędkości kątowej:

$$I_{\text{końc}}\omega_{\text{końc}} = I_{\text{pocz}}\omega_{\text{pocz}},$$

czyli

$$4mR^2\omega_{\text{końc}} = 3{,}64mR^2(1{,}5 \text{ rad/s}).$$

Niewiadome m i R skracają się i dostajemy ostatecznie

$$\omega_{\text{końc}} = 1{,}37 \text{ rad/s} \qquad \text{(odpowiedź)}.$$

Zauważ, że prędkość kątowa zmalała, bo część masy układu oddaliła się od osi obrotu, a zatem moment bezwładności układu wzrósł.

WILEY PLUS Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

11.9. PRECESJA ŻYROSKOPU

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

11.26 wyjaśnić, że działająca na wirujący żyroskop siła ciężkości powoduje obrót jego momentu pędu (i całego żyroskopu) wokół osi pionowej, noszący nazwę precesji;

11.27 obliczyć prędkość kątową precesji żyroskopu;

11.28 wyjaśnić, że prędkość kątowa precesji żyroskopu nie zależy od jego masy.

Podstawowe fakty

- Wirujący żyroskop wykonuje precesję wokół osi pionowej, przechodzącej przez punkt podparcia żyroskopu, z prędkością kątową

$$\Omega = \frac{mgr}{I\omega},$$

gdzie m jest masą żyroskopu, r — ramieniem siły ciężkości, I — momentem bezwładności, a ω — prędkością kątową koła żyroskopu.

Precesja żyroskopu

Prosty żyroskop składa się z koła osadzonego na ośce, mogącego się na tej ośce obracać wokół jej osi. Jeśli koniec ośki oprzemy na wsporniku, jak na rysunku 11.22a, a koło nie będzie się obracać i puścimy je swobodnie, to koło opadnie, obracając się w dół wokół osi poziomej przechodzącej przez punkt podparcia ośki na wsporniku. Ponieważ mowa o obrocie, więc musi być przy nim spełniona druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego, którą wyraża równanie (11.29)

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}. \tag{11.41}$$

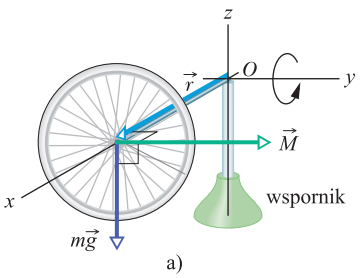
Wynika z niego, że moment siły, który jest źródłem obrotu w dół (czyli upadku koła), zmienia moment pędu żyroskopu $\vec{L}$, który początkowo był równy zeru. Moment siły $\vec{M}$ jest momentem siły ciężkości $m\vec{g}$, która działa na środek masy żyroskopu, za który możemy przyjąć środek koła. Momentem tej siły jest wektor $\vec{r}$ łączący punkt podparcia ośki, którym jest punkt O na rysunku 11.22a, ze środkiem koła. Długość wektora $\vec{M}$ wynosi

$$M = mgr\sin 90^\circ = mgr \tag{11.42}$$

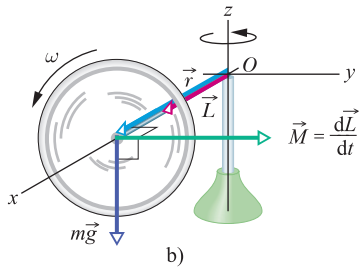
(ponieważ kąt między wektorami $m\vec{g}$ i $\vec{r}$ jest równy 90°), a jego kierunek zaznaczono na rysunku 11.22a.

Żyroskop, którego koło szybko się obraca, zachowuje się całkiem inaczej. Jeśli puścimy go swobodnie w chwili, w której ośka jest lekko skierowana w górę, to koło najpierw nieco opadnie, lecz zaraz potem, wciąż się obracając na ośce, zacznie się wraz z nią obracać w płaszczyźnie poziomej wokół osi pionowej przechodzącej przez punkt podparcia O. Ten ruch nazywamy **precesją**.

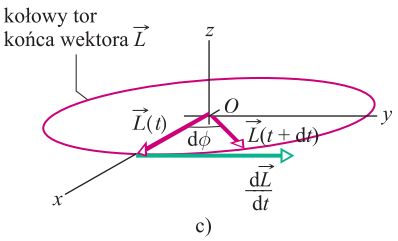
Dlaczego się po prostu nie przewraca? Dlaczego wirujący żyroskop (czyli taki, którego koło się obraca) pozostaje uniesiony nad podłożem, a nie przewraca się jak ten, który nie wiruje? Kluczem do wyjaśnienia



a)



b)



c)

Rys. 11.22. a) Żyroskop, którego koło się nie obraca, przewraca się, obracając się w płaszczyźnie yz pod wpływem momentu siły $\vec{M}$. b) Żyroskop, który szybko wiruje, mając moment pędu $\vec{L}$, wykonuje precesję wokół osi z, w płaszczyźnie xy. c) Zmiana momentu pędu $d\vec{L}/dt$ powoduje obrót wektora $\vec{L}$ wokół punktu O

sprawy jest stwierdzenie, że gdy puszczamy swobodnie żyroskop wirujący, moment siły $m\vec{g}$ zmienia różny od zera moment pędu związany z ruchem obrotowym koła, a nie — jak w przypadku żyroskopu, który nie wiruje — moment pędu, który jest początkowo równy zeru.

Aby zobaczyć, w jaki sposób prowadzi to do ruchu precesyjnego, rozważmy moment pędu $\vec{L}$ żyroskopu związany z ruchem obrotowym koła. Dla prostoty sytuacji załóżmy, że koło wiruje bardzo szybko, tak że $\vec{L}$ jest dużo większe niż moment pędu związany z precesją żyroskopu. Przyjmijmy też, że gdy precesja się zaczyna, oś żyroskopu jest pozioma, jak na rysunku 11.22b. Długość wektora $\vec{L}$ jest dana wzorem (11.31)

$$L = I\omega, \tag{11.43}$$

gdzie I jest momentem bezwładności żyroskopu względem jego osi, a ω jest prędkością kątową, z jaką koło wiruje na osce. Wektor $\vec{L}$ ma kierunek osi, jak na rysunku 11.22b. Ponieważ $\vec{L}$ jest równoległe do $\vec{r}$, to moment siły $\vec{M}$ musi być prostopadły do $\vec{L}$.

Zgodnie z równaniem (11.41) pod wpływem momentu siły $\vec{M}$ w małym przedziale czasu dt zachodzi mała zmiana $d\vec{L}$ momentu pędu żyroskopu, czyli

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \tag{11.44}$$

Ponieważ jednak żyroskop wiruje *bardzo szybko*, wartość wektora $\vec{L}$ jest cały czas wyznaczona równaniem (11.43). Moment siły jest w stanie zmienić tylko kierunek wektora $\vec{L}$, a nie jego wartość.

Z równania (11.44) widać, że wektor $d\vec{L}$ ma taki sam kierunek, jak wektor $\vec{M}$, czyli jest on prostopadły do wektora $\vec{L}$. Jeśli zmiana $\vec{L}$ ma mieć kierunek $\vec{M}$, a długość $\vec{L}$ ma się przy tym nie zmienić, to jedynym sposobem, aby tak było, jest obrót wektora $\vec{L}$ wokół osi z, jak pokazano na rysunku 11.22c. Wektor $\vec{L}$ nie zmienia długości, jego koniec zatacza kołowy tor, a wektor $\vec{M}$ jest zawsze styczny do tego toru. Ponieważ $\vec{L}$ ma zawsze kierunek osi, to oś, a zatem i cały żyroskop obraca się wokół osi z w kierunku wektora $\vec{M}$. To jest właśnie precesja. Dla wirującego żyroskopu musi też być spełniona druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego, wobec czego zmiany początkowego momentu pędu zmuszają żyroskop do ruchu precesyjnego i dlatego się on nie przewraca.

Precesja. Aby wyznaczyć **prędkość kątową precesji** Ω, korzystamy najpierw z równań (11.44) i (11.42), z których obliczamy długość wektora $d\vec{L}$:

$$dL = Mdt = mgrdt. \tag{11.45}$$

Gdy w małym przedziale czasu dt wektor $\vec{L}$ ulega niewielkiej zmianie, oś i wektor $\vec{L}$ zataczają mały kąt $d\phi$, gdy wykonują precesję wokół osi z (na rys. 11.22c dla jego jasności kąt $d\phi$ narysowano przesadnie duży). Wykorzystując równania (11.43) i (11.45), obliczamy $d\phi$:

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{mgrdt}{I\omega}.$$

Dzieląc to wyrażenie przez dt, stwierdzamy, że prędkość kątowa precesji $\Omega = d\phi/dt$ wynosi

$$\Omega = \frac{mgr}{I\omega} \qquad \text{(prędkość kątowa precesji).} \qquad (11.46)$$

Wynik ten jest słuszny, gdy prędkość kątowa koła żyroskopu ω jest bardzo duża. Zauważmy, że Ω maleje, gdy ω rośnie. Zauważmy też, że gdyby na żyroskop nie działała siła ciężkości $m\vec{g}$, to nie byłoby i jego precesji, ponieważ jednak moment bezwładności również zależy od m, to masa skraca się w równaniu (11.46) i prędkość kątowa Ω nie zależy w rzeczywistości od masy żyroskopu.

Równanie (11.46) jest także słuszne w przypadku, gdy oska wirującego żyroskopu tworzy pewien kąt z poziomem. Stosuję się nawet do ruchu wirującego bąka, który jest w istocie żyroskopem wirującym pod pewnym kątem do poziomu.



Podsumowanie

Toczenie się ciał Dla koła o promieniu R toczącego się bez poślizgu mamy

$$v_{\text{ŚM}} = \omega R, \qquad (11.2)$$

gdzie $v_{\text{ŚM}}$ jest prędkością liniową środka koła, a ω — prędkością kątową koła wokół osi przechodzącej przez jego środek. Ruch koła można również uważać za ruch obrotowy wokół osi przechodzącej przez punkt P, w którym koło styka się w danej chwili z podłożem. Prędkość kątowa koła względem tego punktu jest taka sama, jak prędkość kątowa koła względem jego środka. Energia kinetyczna toczącego się koła wynosi

$$E_{\text{k}} = \tfrac{1}{2} I_{\text{ŚM}} \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_{\text{ŚM}}^2, \qquad (11.5)$$

przy czym $I_{\text{ŚM}}$ jest momentem bezwładności koła względem jego środka, a m — masą koła. Jeśli ruch obrotowy koła jest przyspieszony, lecz odbywa się nadal bez poślizgu, to przyspieszenie $a_{\text{ŚM}}$ środka masy jest związane z przyspieszeniem kątowym α względem środka koła zależnością

$$a_{\text{ŚM}} = \alpha R. \qquad (11.6)$$

Gdy koło toczy się bez poślizgu po równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem θ, jego przyspieszenie wzdłuż równi (wzdłuż której wybieramy oś x) jest równe

$$a_{\text{ŚM},x} = -\frac{g \sin\theta}{1 + I_{\text{ŚM}}/mR^2}. \qquad (11.10)$$

Moment siły jako wektor W trzech wymiarach moment siły $\vec{M}$ jest wielkością wektorową definiowaną względem jakiegoś punktu odniesienia (zazwyczaj początku układu współrzędnych). Jest on równy

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (11.14)$$

przy czym $\vec{F}$ jest siłą przyłożoną do cząstki, a $\vec{r}$ — wektorem położenia cząstki względem punktu odniesienia. Długość wektora $\vec{M}$ wynosi

$$M = rF\sin\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F, \qquad (11.15, 11.16, 11.17)$$

gdzie ϕ jest kątem, jaki tworzą ze sobą wektory $\vec{F}$ i $\vec{r}$, $F_{\perp}$ — składową $\vec{F}$ prostopadłą do $\vec{r}$, a $r_{\perp}$ — ramieniem siły $\vec{F}$. Kierunek wektora $\vec{M}$ wyznaczamy z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego.

Moment pędu cząstki *Moment pędu* $\vec{\ell}$ cząstki o pędzie $\vec{p}$, masie m i prędkości liniowej $\vec{v}$ jest wielkością wektorową definiowaną względem pewnego punktu odniesienia (zwykle początku układu współrzędnych). Jest on równy

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \qquad (11.18)$$

Długość wektora $\vec{\ell}$ wynosi

$$\ell = rmv\sin\phi \qquad (11.19)$$

$$= rp_{\perp} = rmv_{\perp} \qquad (11.20)$$

$$= r_{\perp}p = r_{\perp}mv, \qquad (11.21)$$

gdzie ϕ jest kątem między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{p}$, $p_{\perp}$ i $v_{\perp}$ — składowymi $\vec{p}$ i $\vec{v}$, prostopadłymi do $\vec{r}$, a $r_{\perp}$ — odległością punktu odniesienia od prostej, na której leży wektor $\vec{p}$. Kierunek wektora $\vec{\ell}$ wyznaczamy za pomocą reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego.

Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego Druga zasada dynamiki Newtona dla cząstki poruszającej się ruchem obrotowym ma postać

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t}, \qquad (11.23)$$

gdzie $\vec{M}_{\text{wyp}}$ jest wypadkowym momentem siły działającym na tę cząstkę, a $\vec{\ell}$ — momentem pędu cząstki.

Moment pędu układu cząstek Moment pędu $\vec{L}$ układu cząstek jest równy sumie wektorowej momentów pędu poszczególnych cząstek układu:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \ldots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i. \qquad (11.26)$$

Szybkość, z jaką zmienia się ten moment pędu, jest równa wypadkowemu zewnętrznemu momentowi siły, jaki działa na układ (tzn. sumie wektorowej momentów siły, działających

na cząstki układu, w wyniku ich oddziaływania z cząstkami spoza układu):

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \text{(układ cząstek).} \qquad (11.29)$$

Moment pędu ciała sztywnego Składowa momentu pędu ciała sztywnego obracającego się wokół stałej osi, równoległa do osi obrotu, jest równa

$$L = I\omega \qquad \text{(ciało sztywne, stała oś obrotu).} \qquad (11.31)$$

Zachowanie momentu pędu Moment pędu $\vec{L}$ układu pozostaje stały, gdy wypadkowy zewnętrzny moment siły działający na układ jest równy zeru

$$\vec{L} = \text{const} \qquad \text{(układ izolowany),} \qquad (11.32)$$

czyli

$$\vec{L}_{\text{pocz}} = \vec{L}_{\text{końc}} \qquad \text{(układ izolowany).} \qquad (11.33)$$

Stwierdzenie to nazywamy **zasadą zachowania momentu pędu**.

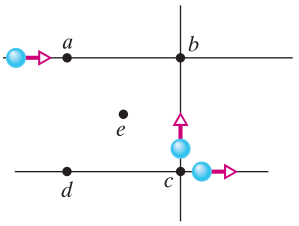
Precesja żyroskopu Wirujący żyroskop wykonuje precesję wokół osi pionowej, przechodzącej przez punkt podparcia żyroskopu, z prędkością kątową

$$\Omega = \frac{mgr}{I\omega}, \qquad (11.46)$$

gdzie m jest masą żyroskopu, r — ramieniem siły ciężkości, I — momentem bezwładności, a ω — prędkością kątową koła żyroskopu.

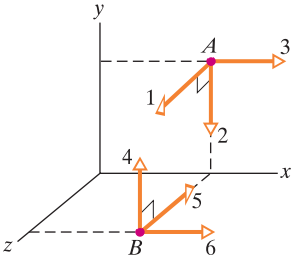
Pytania

1 Na rysunku 11.23 pokazano trzy cząstki, o jednakowych masach oraz prędkościach o takich samych stałych wartościach, poruszające się w kierunkach wskazanych przez wektory ich prędkości. Punkty a, b, c i d są wierzchołkami kwadratu, a punkt e jest środkiem tego kwadratu. Uszereguj punkty w zależności od wartości całkowitego momentu pędu układu cząstek względem każdego z nich, od największej do najmniejszej.



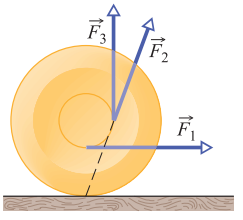
Rys. 11.23. Pytanie 1

2 Na rysunku 11.24 przedstawiono dwie cząstki A i B znajdujące się w punktach o współrzędnych xyz równych (1 m, 1 m, 0) oraz (1 m, 0, 1 m). Na każdą z cząstek działają trzy siły (oznaczone na rysunku cyframi), które mają jednakowe wartości i są równoległe do osi układu współrzędnych. a) Które z tych sił są źródłem równoległego do osi y momentu siły względem początku układu współrzędnych? b) Uszereguj te siły w zależności od wartości związanego z nimi momentu siły względem początku układu współrzędnych, działającego na cząstki, od największej do najmniejszej.



Rys. 11.24. Pytanie 2

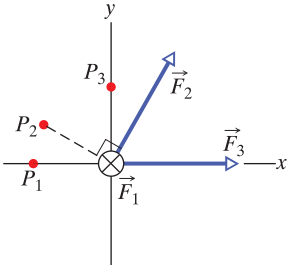
3 Zabawka jo-jo jest początkowo nieruchoma (patrz rys. 11.25). Co się z nią stanie, jeśli będziesz ciągnął za jej linkę siłą: a) $\vec{F}_2$ — skierowaną wzdłuż prostej przechodzącej przez punkt styczności kółka z podłożem, jak pokazano na rysunku, b) $\vec{F}_1$ — skierowaną wzdłuż prostej równoległej do podłoża, c) $\vec{F}_3$ — skierowaną wzdłuż prostej przecinającej podłoże na prawo od punktu styczności kółka z podłożem?



Rys. 11.25. Pytanie 3

4 Wektor położenia $\vec{r}$ cząstki względem pewnego punktu ma długość równą 3 m, a działająca na tę cząstkę siła $\vec{F}$ ma wartość 4 N. Ile wynosi kąt utworzony przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$, gdy wartość związanego z tą siłą momentu siły jest równa: a) zero, b) 12 N · m?

5 Na rysunku 11.26 pokazano trzy siły o jednakowych wartościach, przyłożone do cząstki znajdującej się w początku układu współrzędnych (siła $\vec{F}_1$ działa prostopadle do płaszczyzny rysunku i jest skierowana za kartkę). Uszereguj te siły w zależności od wartości związanego z nimi momentu siły względem: a) punktu P_1, b) punktu P_2, c) punktu P_3, od największej do najmniejszej.



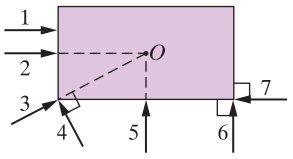
Rys. 11.26. Pytanie 5

6 W czterech przypadkach moment pędu cząstki $\ell(t)$ zależy od czasu zgodnie ze wzorem: 1) $\ell = 3t + 4$, 2) $\ell = -6t^2$, 3) $\ell = 2$, 4) $\ell = 4/t$. W którym (lub których) z tych przypadków działający na cząstkę moment siły jest: a) równy zeru, b) dodatni i stały, c) ujemny i rosnący co do wartości bezwzględnej (dla $t > 0$), d) ujemny i malejący co do wartości bezwzględnej (dla $t > 0$)?

7 Poziomy krążek obraca się wokół osi pionowej (jak karuzela) w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a na jego brzegu siedzi żuczek. Wyobraź sobie, że

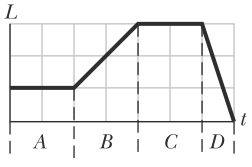
żuczek zaczyna iść wzdłuż brzegu krążka, w kierunku zgodnym z kierunkiem jego obrotu. Czy wartości: a) momentu pędu układu żuczek–krążek, b) momentu pędu i prędkości kątowej żuczka, c) momentu pędu i prędkości kątowej krążka wzrastają przy tym, maleją, czy pozostają bez zmiany? d) Jakie będą odpowiedzi na powyższe pytania, gdy żuczek będzie szedł wzdłuż brzegu krążka, w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu krążka?

8 Na rysunku 11.27 przedstawiono widok z góry prostokątnej płyty, która może obracać się w płaszczyźnie poziomej (jak karuzela) wokół osi przechodzącej przez jej środek O. Płyta znajduje się początkowo w spoczynku, lecz w pewnej chwili rzucamy w nią gumą do żucia, która przykleja się do brzegu płyty. Na rysunku przedstawiono siedem przypadków, różniących się kierunkiem, w którym rzucamy tę gumę (we wszystkich przypadkach masa i prędkość gumy są jednakowe). a) Uszereguj te przypadki w zależności od wartości prędkości kątowej, jaką uzyska płyta (i guma) po przyklejeniu się do niej gumy, od największej do najmniejszej. b) W których z tych przypadków moment pędu płyty (i gumy) względem punktu O (patrząc na układ, jak na rysunku 11.27) będzie ujemny?



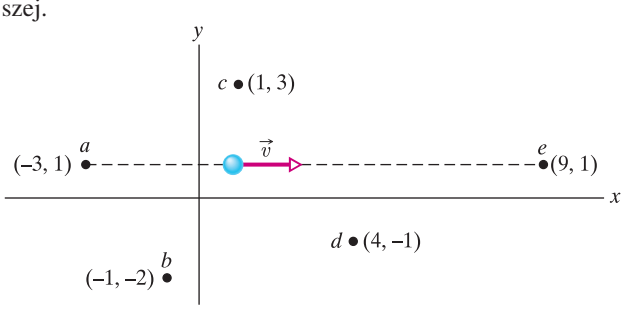
Rys. 11.27. Pytanie 8

9 Na rysunku 11.28 przedstawiono wartość momentu pędu koła L jako funkcję t. Uszereguj przedziały czasu, oznaczone na rysunku wielkimi literami, w zależności od wartości działającego na koło momentu siły, od największej do najmniejszej.



Rys. 11.28. Pytanie 9

10 Na rysunku 11.29 przedstawiono cząstkę poruszającą się ze stałą prędkością $\vec{v}$ oraz pięć punktów i ich współrzędne x i y. Uszereguj te punkty według wartości momentu pędu cząstki względem każdego z nich, od największej do najmniejszej.



Rys. 11.29. Pytanie 10

11 Kula armatnia i kulka szklana staczają się po równi bez poślizgu, przy czym ich prędkość początkowa jest równa zeru. a) Czy czas, w jakim kula armatnia dotrze do podstawy równi, będzie dłuższy, krótszy, czy taki sam jak czas, w jakim dotrze tam kulka szklana? b) Czy ułamek energii kinetycznej kuli armatniej, jaki jest związany z jej ruchem postępowym, jest większy, mniejszy, czy taki sam jak odpowiedni ułamek dla kulki szklanej?

12 Walec mosiężny i walec drewniany mają jednakową masę i jednakowy promień (co oznacza, że walec drewniany jest dłuższy). Oba staczają się po równi pochyłej bez prędkości początkowej, rozpoczynając ruch w tej samej chwili. a) Który z nich dotrze pierwszy do podstawy równi (a może dotrą tam jednocześnie)? b) Walec drewniany skrócono tak, by miał taką samą długość jak walec mosiężny, a potem walec mosiężny przewiercono wzdłuż osi tak, by miał taką samą masę jak walec drewniany. Który z nich wygra teraz wyścig po równi (a może dotrą do podstawy równi jednocześnie)?

Zadania

GO Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach *WileyPLUS* (https://www.wileyplus.com/WileyCDA/) oraz WebAssign (http://www.webassign.net/index.html)

•–••• Liczba kropek określa stopień trudności zadania

ssm Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*

www Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

ilw Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie http://www.wiley.com/college/halliday

Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie http://flyingcircusofphysics.com

Podrozdział 11.1. Toczenie jako złożenie ruchu obrotowego i postępowego

•**1** Samochód jedzie po prostej drodze w dodatnim kierunku osi x z prędkością 80 km/h. Każde koło pojazdu ma średnicę 66 cm.Wyznacz prędkość $\vec{v}$ (zapisz wynik, wykorzystując wektory jednostkowe): a) środka koła, b) punktu na górze koła i c) punktu na dole koła, względem kobiety prowadzą-

cej samochód. Wyznacz wartość a przyspieszenia: d) środka koła, e) punktu na górze koła i f) punktu na dole koła, względem kobiety prowadzącej samochód. Wyznacz prędkość $\vec{v}$ (zapisz wynik, wykorzystując wektory jednostkowe): g) środka koła, h) punktu na górze koła oraz i) punktu na dole koła, względem autostopowicza siedzącego przy drodze. Wyznacz wartość a przyspieszenia: j) środka koła, k) punktu na górze koła i l) punktu na dole koła, względem autostopowicza siedzącego przy drodze.

•2 Koła samochodu jadącego z prędkością 80 km/h mają średnicę 75 cm. a) Ile wynosi prędkość kątowa kół względem ich osi? Samochód ten hamuje następnie jednostajnie, bez poślizgu aż do zatrzymania się, przy czym koła wykonują 30 pełnych obrotów. b) Jaką wartość ma przyspieszenie kątowe kół? c) Jaką drogę przebywa samochód w czasie hamowania?

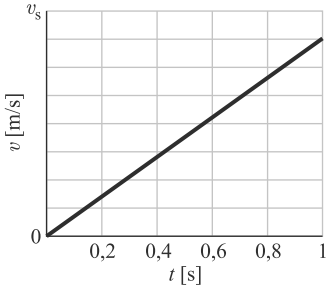
Podrozdział 11.2. Siły i energia kinetyczna w ruchu tocznym

•3 ssm Obręcz o masie 140 kg toczy się po poziomej podłodze tak, że jej środek masy porusza się z prędkością 0,15 m/s. Ile wynosi praca, potrzebna do zatrzymania tej obręczy?

•4 Po równi pochyłej stacza się jednorodna kula. a) Ile musi wynosić kąt nachylenia równi do poziomu, aby przyspieszenie liniowe środka kuli miało wartość równą $0{,}1g$? b) Wyobraź sobie, że puszczasz po tej równi klocek ślizgający się po niej bez tarcia. Czy wartość jego przyspieszenia będzie większa, mniejsza, czy równa $0{,}1g$? Dlaczego?

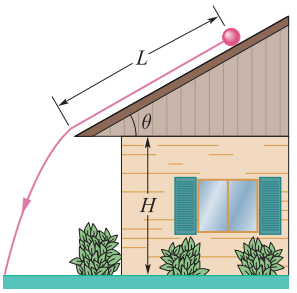
•5 ilw Samochód o masie 1000 kg ma cztery koła o masie 10 kg każde. Jaki ułamek całkowitej energii kinetycznej pojazdu stanowi energia kinetyczna ruchu obrotowego kół wokół ich osi? Przyjmij, że koła mają taki sam moment bezwładności, jak jednorodne krążki o takiej jak one masie i średnicy. Dlaczego wynik nie zależy od promienia kół?

••6 Na rysunku 11.30 przedstawiono zależność prędkości v od czasu t dla ciała o masie 0,5 kg i promieniu 6 cm, stączającego się bez poślizgu po równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem 30°. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $v_s = 4$ m/s. Wyznacz moment bezwładności ciała.



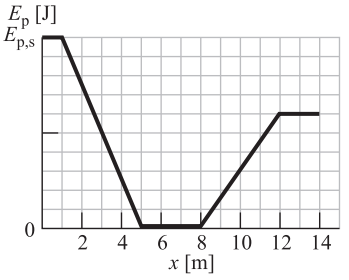
Rys. 11.30. Zadanie 6

••7 ilw Walec o promieniu 10 cm i masie 12 kg stacza się bez poślizgu wzdłuż dachu, nachylonego do poziomu pod kątem $\theta = 30°$ (patrz rys. 11.31). W chwili początkowej walec znajdował się w spoczynku, w odległości $L = 6$ m od skraju dachu. a) Ile wynosi prędkość kątowa walca względem jego osi, gdy spada on z dachu? b) Skraj dachu znajduje się na wysokości $H = 5$ m nad otaczającym dom trawnikiem. W jakiej odległości poziomej od skraju dachu walec spadnie na trawnik?



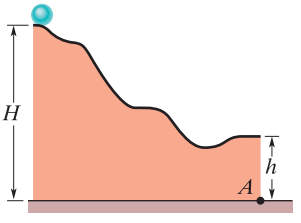
Rys. 11.31. Zadanie 7

••8 Na rysunku 11.32 przedstawiono energię potencjalną $E_p(x)$ jako funkcję położenia x dla sztywnej kuli toczącej się po osi x. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $E_{p,s} = 100$ J. Kula jest jednorodna, toczy się bez poślizgu, a jej masa wynosi 0,4 kg. Przyjmij, że w punkcie $x = 7$ m kula ma energię mechaniczną 75 J i porusza się w ujemnym kierunku osi x. a) Czy kula dotrze do punktu $x = 0$? Jeśli tak, to jaką będzie tam miała prędkość? Jeśli nie, to w którym punkcie zawróci? Załóż następnie, że kula ma nadal w punkcie $x = 7$ m energię mechaniczną 75 J, lecz porusza się w dodatnim kierunku osi x. b) Czy kula dotrze do punktu $x = 13$ m? Jeśli tak, to jaką będzie tam miała prędkość? Jeśli nie, to w którym punkcie zawróci?



Rys. 11.32. Zadanie 8

••9 GO Kulka rusza z prędkością początkową równą zeru po torze przedstawionym na rysunku 11.33 i toczy się wzdłuż niego bez poślizgu aż do chwili, gdy spada z toru na jego prawym końcu. Jak daleko w poziomie od punktu A spadnie kulka na podłogę, jeśli wiadomo, że $H = 6$ m, $h = 2$ m, a końcowy odcinek toru jest poziomy?

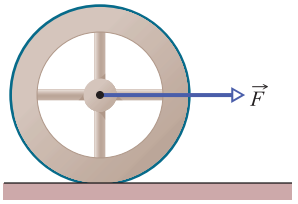


Rys. 11.33. Zadanie 9

••10 Sfera o promieniu 0,15 m i momencie bezwładności $I = 0{,}04\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ względem osi przechodzącej przez jej środek masy toczy się bez poślizgu w górę, po powierzchni nachylonej do poziomu pod kątem 30°. W pewnej chwili całkowita energia kinetyczna sfery jest równa 20 J. a) Ile z tej energii stanowi energia kinetyczna ruchu obrotowego sfery? b) Ile wynosi w tej chwili prędkość środka masy sfery? Ile będzie równa: c) całkowita energia kinetyczna sfery, d) prędkość jej środka masy w chwili, gdy sfera przebędzie po równi w górę drogę 1 m od położenia, którego dotyczą pytania (a) i (b)?

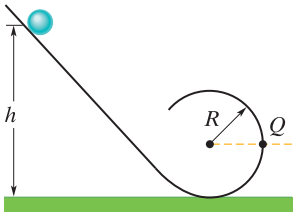
••11 Jak pokazano na rysunku 11.34, do koła o masie 10 kg i promieniu 0,3 m przyłożono poziomo stałą siłę $\vec{F}$ o wartoś-

ci 10 N. W wyniku tego koło toczy się bez poślizgu po poziomym podłożu, przy czym przyspieszenie jego środka masy ma wartość 0,6 m/s^2. a) Jaka jest wartość i kierunek działającej na koło siły tarcia? b) Ile wynosi moment bezwładności koła względem osi przechodzącej przez jego środek masy?



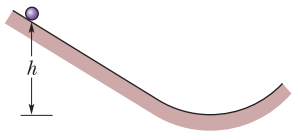
Rys. 11.34. Zadanie 11

••12 Mała kulka mosiężna o masie 0,28 g stacza się bez poślizgu po torze, zakończonym pętlą, pokazanym na rysunku 11.35. Kulka została puszczona swobodnie bez prędkości początkowej w pewnym punkcie prostoliniowego odcinka toru. Promień pętli wynosi $R = 14$ cm, promień kulki $r \ll R$. a) Chcemy, aby kulka dotarła do najwyższego punktu pętli. Z jakiej co najmniej wysokości h nad najniższym punktem toru należy ją puścić? Oblicz b) wartość i c) kierunek składowej poziomej siły działającej w punkcie Q na kulkę puszczoną z punktu na wysokości $6R$ nad najniższym punktem toru.



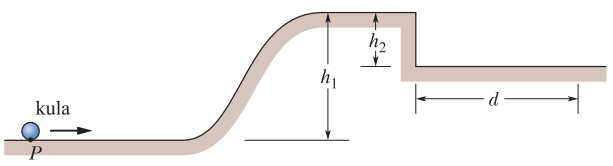
Rys. 11.35. Zadanie 12

•••13 *Niejednorodna kula.* Jak pokazano na rysunku 11.36, kula o masie M i promieniu R toczy się bez poślizgu po równi pochyłej, a następnie po kołowym łuku o promieniu 0,48 m. Na szczycie równi, czyli na wysokości $h = 0{,}36$ m nad najniższym punktem jej toru, kula ma prędkość równą zeru. W najniższym punkcie toru na kulę działa siła normalna o wartości $2Mg$. Kula składa się z zewnętrznej powłoki kulistej (o pewnej stałej gęstości) naklejonej na kulę wewnętrzną (o innej stałej gęstości). Moment bezwładności kuli można zapisać jako $I = \beta MR^2$, przy czym β nie jest równe 0,4, jak dla kuli o stałej gęstości. Wyznacz β.



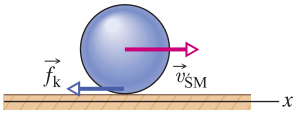
Rys. 11.36. Zadanie 13

•••14 Jak pokazano na rysunku 11.37, mała, sztywna, jednorodna kula ma być wprawiona w ruch w punkcie P tak, by — tocząc się bez poślizgu — przebiegła tor poziomy, wtoczyła się po równi pochyłej, dotarła do górnej płaszczyzny poziomej i spadła na znajdującą się nieco niżej deskę w odległości d od lewego brzegu deski. Zaznaczone na rysunku różnice poziomów wynoszą $h_1 = 5$ cm, a $h_2 = 1{,}6$ cm. Jaką prędkość trzeba nadać kuli w punkcie P, aby spadła na deskę w punkcie o $d = 6$ cm?



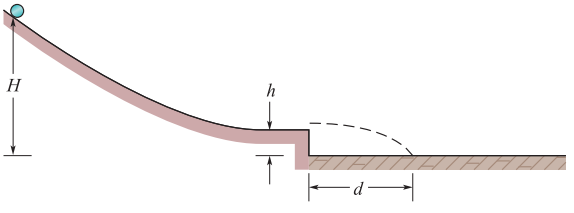
Rys. 11.37. Zadanie 14

•••15 Kula do kręgli o promieniu $R = 11$ cm zostaje rzucona przez zawodnika wzdłuż toru kręgielni. Kula ślizga się po podłodze, mając początkowo prędkość liniową $v_{\text{ŚM},0} = 8{,}5$ m/s i prędkość kątową $\omega_0 = 0$. Współczynnik tarcia kinetycznego między kulą a podłogą wynosi 0,21. Działająca na kulę siła tarcia kinetycznego $\vec{f}_k$ (rys. 11.38) jest źródłem przyspieszenia liniowego kuli oraz momentu siły nadającego kuli przyspieszenie kątowe. Gdy prędkość $v_{\text{ŚM}}$ dostatecznie zmaleje, a prędkość kątowa ω dostatecznie wzrośnie, kula przestanie ślizgać się po torze i zacznie się po nim toczyć bez poślizgu. a) Jaki będzie wówczas związek $v_{\text{ŚM}}$ z ω? Ile wynosi: b) przyspieszenie liniowe, c) przyspieszenie kątowe kuli w czasie, gdy ślizga się ona po torze? d) Jak długo ślizga się kula po torze? e) Jaką drogę przebędzie, ślizgając się wzdłuż toru? f) Ile wynosi prędkość kuli w chwili, gdy zaczyna się ona toczyć po torze bez poślizgu?



Rys. 11.38. Zadanie 15

•••16 *Niejednorodny walec.* Jak pokazano na rysunku 11.39, walec o masie M i promieniu R stacza się bez poślizgu z pochyłości, dociera do poziomego fragmentu toru i w końcu spada na płaszczyznę poziomą leżącą nieco niżej, lądując na niej w odległości $d = 0{,}506$ m od uskoku. Na szczycie równi, czyli na wysokości $H = 0{,}9$ m nad poziomą płaszczyzną, kula ma prędkość równą zeru. Uskok toru poziomego ma wysokość $h = 0{,}1$ m. Walec składa się z zewnętrznej powłoki walcowej (o pewnej stałej gęstości) naklejonej na walec wewnętrzny (o innej stałej gęstości). Moment bezwładności walca można zapisać jako $I = \beta MR^2$, przy czym β nie jest równe 0,5, jak dla walca o stałej gęstości. Wyznacz β.



Rys. 11.39. Zadanie 16

Podrozdział 11.3. Jo-jo

•17 ssm Zabawka jo-jo ma masę 120 g i moment bezwładności 950 g · cm^2. Promień oski jest równy 3,2 mm, a sznurek ma długość 120 cm. Puszczamy jo-jo z prędkością początkową równą zeru i kółko zjeżdża po sznurku, aż

do najniższego położenia. a) Ile wynosi wartość przyspieszenia liniowego kółka? b) Ile czasu trwa ruch kółka do dolnego końca sznurka? Ile wynosi: c) prędkość liniowa, d) energia kinetyczna ruchu postępowego, e) energia kinetyczna ruchu obrotowego oraz f) prędkość kątowa kółka w chwili, gdy dociera ono do dolnego końca sznurka?

•18 W roku 1980 nad zatoką San Francisco przeprowadzono doświadczenie, w którym z wysięgnika dźwigu wypuszczono sześć czy siedem razy wielkie kółko jo-jo o masie 116 kg. Składało się ono z dwóch jednorodnych krążków o promieniu 32 cm połączonych osią o promieniu 3,2 cm. Ile wynosiło przyspieszenie tego kółka w czasie jego ruchu: a) w dół, b) w górę? c) Ile wynosiło naprężenie liny, po której poruszało się kółko? d) Czy było ono bliskie naprężenia, przy którym lina się zrywa, wynoszącego 52 kN? Wyobraź sobie, że zbudowałeś jeszcze większe kółko jo-jo, o takim samym kształcie i z takiego samego materiału, lecz o większych wymiarach. e) Czy wartość przyspieszenia tego kółka w czasie jego ruchu w dół jest większa, mniejsza, czy taka sama jak kółka jo-jo z San Francisco? f) A naprężenie liny?

Podrozdział 11.4. Moment siły raz jeszcze

•19 Na pchłę znajdującą się w punkcie o współrzędnych $(0, -4\text{ m}, 5\text{ m})$ działają siły $\vec{F}_1 = (3\text{ N})\hat{k}$ i $\vec{F}_2 = (-2\text{ N})\hat{j}$. Ile wynosi całkowity moment siły względem początku układu współrzędnych, jaki działa na tę pchłę?

•20 Wyznacz wartość i kierunek momentu siły względem początku układu współrzędnych, jaki działa ma śliwkę znajdującą się w punkcie o współrzędnych $(-2\text{ m}, 0, 4\text{ m})$, na którą działa siła $\vec{F}$ mająca jedynie składową: a) $F_x = 6$ N, b) $F_x = -6$ N, c) $F_z = 6$ N, d) $F_z = -6$ N.

•21 Wyznacz moment siły względem początku układu współrzędnych, jaki działa ma cząstkę znajdującą się w punkcie o współrzędnych $(0, -4\text{ m}, 3\text{ m})$, na którą działa: a) siła $\vec{F}_1$ o składowych $F_{1x} = 2$ N oraz $F_{1y} = F_{1z} = 0$, b) siła $\vec{F}_2$ o składowych $F_{2x} = 0$, $F_{2y} = 2$ N oraz $F_{2z} = 4$ N. Podaj wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

••22 Ruch cząstki, na którą działa siła, opiszemy w układzie współrzędnych x, y, z. Gdy wektor położenia cząstki jest równy $\vec{r} = (2\text{ m})\hat{i} - (3\text{ m})\hat{j} + (2\text{ m})\hat{k}$, działająca na nią siła wynosi $\vec{F} = F_x\hat{i} + (7\text{ N})\hat{j} - (6\text{ N})\hat{k}$, a moment siły względem początku układu współrzędnych jest równy $\vec{M} = (4\text{ N}\cdot\text{m})\hat{i} + (2\text{ N}\cdot\text{m})\hat{j} - (1\text{ N}\cdot\text{m})\hat{k}$. Wyznacz F_x.

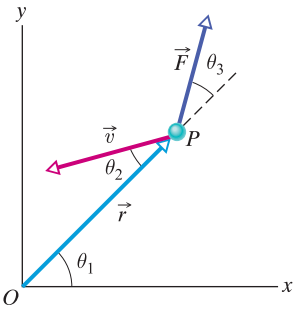
••23 Na kamyczek, którego wektor położenia względem początku układu współrzędnych wynosi $\vec{r} = (0{,}5\text{ m})\hat{j} - (2{,}0\text{ m})\hat{k}$, działa siła $\vec{F} = (2\text{ N})\hat{i} - (3\text{ N})\hat{k}$. Wyznacz działający na kamyczek moment siły względem: a) początku układu współrzędnych, b) punktu o współrzędnych $(2\text{ m}, 0, -3\text{ m})$. Podaj wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

••24 Oblicz moment siły działający na słoik ostrej papryki jalapeño, znajdujący się w punkcie o współrzędnych $(3\text{ m}, -2\text{ m}, 4\text{ m})$, pochodzący od: a) siły $\vec{F}_1 = (3\text{ N})\hat{i} - (4\text{ N})\hat{j} + (5\text{ N})\hat{k}$, b) siły $\vec{F}_2 = (-3\text{ N})\hat{i} - (4\text{ N})\hat{j} - (5\text{ N})\hat{k}$, c) siły równej sumie wektorowej sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. d) Podaj odpowiedź na pytanie (c), biorąc zamiast początku układu współrzędnych punkt o współrzędnych $(3\text{ m}, 2\text{ m}, 4\text{ m})$. Podaj wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

••25 ssm Na cząstkę o wektorze położenia $\vec{r} = (3\text{ m})\hat{i} + (4\text{ m})\hat{j}$ działa siła $\vec{F} = (-8\text{ N})\hat{i} + (6\text{ N})\hat{j}$. Oblicz: a) działający na cząstkę moment siły względem początku układu współrzędnych, w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych, b) kąt między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{F}$.

Podrozdział 11.5. Moment pędu

•26 Jak pokazano na rysunku 11.40, cząstka P o masie 2 kg ma wektor położenia $\vec{r}$ o długości 3 m i prędkość $\vec{v}$ o wartości 4 m/s. Na cząstkę działa siła $\vec{F}$ o wartości 2 N. Wszystkie trzy wektory leżą w płaszczyźnie xy, o osiach zaznaczonych na rysunku, a zaznaczone na rysunku kąty wynoszą: $\theta_1 = 45°$ oraz $\theta_2 = \theta_3 = 30°$. Wyznacz: a) wartość i b) kierunek momentu pędu cząstki oraz c) wartość i d) kierunek działającego na nią momentu siły, względem początku układu współrzędnych.

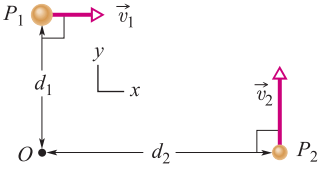


Rys. 11.40. Zadanie 26

•27 ssm W pewnej chwili na ciało o masie 0,25 kg, wektorze położenia $\vec{r} = (2\hat{i} - 2\hat{k})$ m i wektorze prędkości $\vec{v} = (-5\hat{i} + 5\hat{k})$ m/s działa siła $\vec{F} = 4\hat{j}$ N. Wyznacz a) moment pędu ciała i b) działający na nie moment siły względem początku układu współrzędnych. Podaj wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

•28 Ciało o masie 2 kg, które można traktować jak cząstkę, porusza się w płaszczyźnie xy i w chwili, gdy znajduje się w punkcie o współrzędnych (3, 4) m, ma prędkość o składowych $v_x = 30$ m/s oraz $v_y = 60$ m/s. Ile wynosi w tej chwili jego moment pędu względem: a) początku układu współrzędnych, b) punktu o współrzędnych $(-2, -2)$ m? Podaj wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

•29 ilw Ciało P_1 ma masę 6,5 kg oraz równoległą do osi x prędkość o wartości $v_1 = 2{,}2$ m/s. Ciało P_2 ma masę 3,1 kg oraz równoległą do osi y prędkość o wartości $v_2 = 3{,}6$ m/s. Na rysunku 11.41 przedstawiono położenie tych

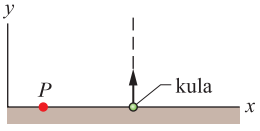


Rys. 11.41. Zadanie 29

ciał w chwili, w której są one odległe od punktu O o $d_1 = 1{,}5$ m i $d_2 = 2{,}8$ m. Wyznacz a) wartość i b) kierunek całkowitego momentu pędu tych ciał względem punktu O.

••30 W pewnej chwili przemieszczenie ciała o masie 2 kg względem początku układu współrzędnych wynosi $\vec{d} = (2\text{ m})\hat{i} + (4\text{ m})\hat{j} - (3\text{ m})\hat{k}$, jego prędkość jest równa $\vec{v} = -(6\text{ m/s})\hat{i} + (3\text{ m/s})\hat{j} + (3\text{ m/s})\hat{k}$, a działa na nie siła $\vec{F} = (6\text{ N})\hat{i} - (8\text{ N})\hat{j} + (4\text{ N})\hat{k}$. Wyznacz: a) przyspieszenie ciała, b) moment pędu ciała względem początku układu współrzędnych, c) działający na ciało moment siły względem początku układu współrzędnych, d) kąt między prędkością ciała a działającą na nie siłą.

••31 Jak pokazano na rysunku 11.42, kula o masie 0,4 kg zostaje wyrzucona pionowo w górę z prędkością początkową 40 m/s. Punkt P jest odległy o 2 m od punktu wyrzucenia kuli. Ile wynosi moment pędu kuli względem punktu P, gdy kula jest: a) w najwyższym punkcie toru, b) na połowie tej wysokości i spada? Ile wynosi moment (względem punktu P) działającej na ciało siły ciężkości, gdy kula jest: c) w najwyższym punkcie toru, d) na połowie tej wysokości i spada?



Rys. 11.42. Zadanie 31

Podrozdział 11.6. Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

•32 Na cząstkę działają dwa momenty siły względem początku układu współrzędnych: $\vec{M}_1$, mający wartość 2 N · m i dodatni kierunek osi x, oraz $\vec{M}_2$, mający wartość 4 N · m i ujemny kierunek osi y. Wyznacz $d\vec{\ell}/dt$, przy czym $\vec{\ell}$ jest momentem pędu cząstki względem początku układu współrzędnych. Podaj wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

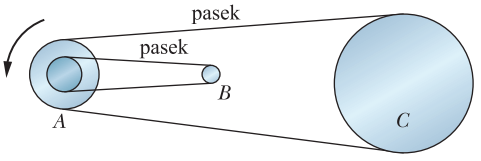
•33 ssm www ilw W chwili $t = 0$ cząstka o masie 3 kg znajduje się w punkcie o współrzędnych $x = 3$ m, $y = 8$ m i ma prędkość $\vec{v} = (5\text{ m/s})\hat{i} - (6\text{ m/s})\hat{j}$. Siła o wartości 7 N działa na nią w ujemnym kierunku osi x. a) Ile wynosi moment pędu tej cząstki względem początku układu współrzędnych? b) Ile wynosi działający na nią moment siły względem początku układu współrzędnych? c) Z jaką szybkością zmienia się w czasie moment pędu tej cząstki?

•34 Cząstka porusza się w płaszczyźnie xy, przy czym kierunek jej ruchu względem początku układu współrzędnych jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Ile wynosi działający na tę cząstkę moment siły względem początku układu współrzędnych, jeśli wartość jej momentu pędu względem tego punktu jest równa: a) 4 kg · m^2/s, b) $4t^2$ kg · m^2/s, c) $4\sqrt{t}$ kg · m^2/s, d) $4/t^2$ kg · m^2/s? Podaj wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

••35 W chwili $t = 0$ wektor położenia cząstki o masie 3 kg wynosi w układzie współrzędnych x, y: $\vec{r} = 4t^2\hat{i} - (2t + 6t^2)\hat{j}$, gdzie $\vec{r}$ jest wyrażone w metrach, a t w sekundach. a) Wyznacz wzór na działający na cząstkę moment siły względem początku układu współrzędnych. b) Czy wartość momentu pędu cząstki (względem początku układu współrzędnych) rośnie, maleje, czy się nie zmienia?

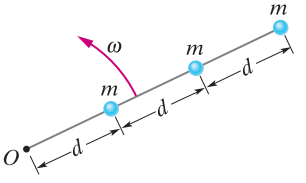
Podrozdział 11.7. Moment pędu ciała sztywnego

•36 Na rysunku 11.43 przedstawiono trzy obracające się jednorodne krążki połączone ze sobą paskami. Jeden z nich jest nałożony na krążki A i C, a drugi na krążek B i oskę krążka A. Paski nie ślizgają się po krążkach. Promienie krążków wynoszą: A — R, jego oska — $0{,}5R$, B — $0{,}25R$, C — $2R$. Krążki B i C mają jednakową gęstość (masę jednostkowej objętości) i jednakową grubość. Wyznacz stosunek wartości momentów pędu krążków C i B.



Rys. 11.43. Zadanie 36

•37 GO Trzy cząstki o masie $m = 23$ g każda połączono ze sobą i z osią obrotu, przechodzącą przez punkt O, za pomocą trzech prętów o długości $d = 12$ cm i znikomo małej masie, jak na rysunku 11.44. Układ ten wykonuje ruch obrotowy z prędkością kątową $\omega = 0{,}85$ rad/s. Wyznacz: a) moment bezwładności układu cząstek, b) wartość momentu pędu środkowej cząstki, c) wartość całkowitego momentu pędu układu cząstek, względem punktu O.



Rys. 11.44. Zadanie 37

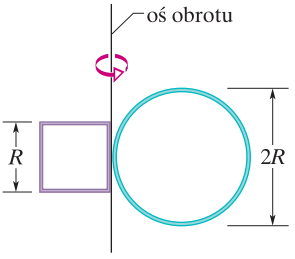
•38 Tarczę ścierną o momencie bezwładności równym $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ kg·m^2 umieszczono w uchwycie wiertarki elektrycznej, której silnik wytwarza moment siły o wartości 16 N · m względem osi tarczy, po czym uruchomiono wiertarkę. Oblicz: a) moment pędu tarczy względem jej osi, b) prędkość kątową tarczy, po 33 ms od włączenia silnika.

•39 ssm Moment pędu koła zamachowego o momencie bezwładności względem osi koła równym 0,14 kg · m^2 maleje w ciągu 1,5 s z 3 do 0,8 kg · m^2/s. a) Ile wynosi średnia wartość momentu siły względem osi koła, działającego na nie w tym czasie? b) O jaki kąt obraca się koło w tym czasie przy założeniu, że jego przyspieszenie kątowe jest stałe? c) Jaka praca zostaje wykonana nad kołem w tym czasie? d) Ile wynosi średnia moc tego koła zamachowego?

••40 Krążek o momencie bezwładności 7 kg · m^2 obraca się wokół swej osi symetrii, gdy działa na niego moment siły za-

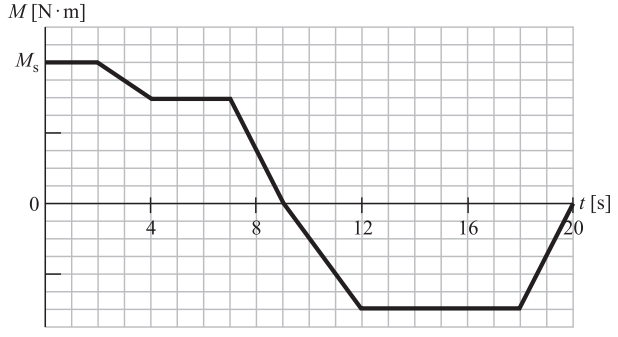
leżny od czasu zgodnie ze wzorem $M = (5 + 2t)$ N · m. W chwili $t = 1$ s moment pędu krążka wynosi 5 kg · m^2/s. Ile wynosi moment pędu krążka w chwili $t = 3$ s?

••41 GO Na rysunku 11.45 przedstawiono sztywną konstrukcję złożoną z obręczy o promieniu R i masie m oraz kwadratu wykonanego z czterech cienkich prętów, każdy o długości R i masie m. Cały układ obraca się ze stałą prędkością kątową wokół osi pionowej zaznaczonej na rysunku. Okres obrotu wynosi 2,5 s. Przyjmij, że $R = 0{,}5$ m, a $m = 2$ kg, i oblicz: a) moment bezwładności układu względem podanej osi obrotu, b) moment pędu układu względem tej osi.



Rys. 11.45. Zadanie 41

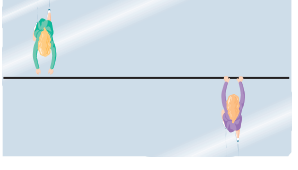
••42 Na rysunku 11.46 przedstawiono zależność momentu siły M od czasu t dla krążka obracającego się wokół swej osi symetrii, gdy działa na niego ten moment siły. Jednostki na osi pionowej są wyznaczone przez współrzędną punktu $M_s = 4$ N · m. W chwili początkowej krążek jest nieruchomy. Ile wynosi moment pędu krążka względem jego osi obrotu w chwili: a) $t = 7$ s i b) $t = 20$ s?



Rys. 11.46. Zadanie 42

Podrozdział 11.8. Zachowanie momentu pędu

•43 Jak pokazano na rysunku 11.47, dwie łyżwiarki, każda o masie 50 kg, zbliżają się do siebie po równoległych torach odległych od siebie o 3 m. Ich prędkości, skierowane przeciwnie, mają taką samą wartość, równą 1,4 m/s. Jedna z łyżwiarek trzyma za koniec długą tyczkę o znikomo małej masie, a druga chwyta ją za drugi koniec, gdy do niej dociera, w związku z czym obie obracają się wokół środka masy tyczki. Załóż, że łyżwiarki poruszają się po tafli lodu bez tarcia. Wyznacz: a) promień okręgu, po jakim poruszają się łyżwiarki, b) ich prędkość kątową, c) energię kinetyczną układu tych dwóch łyżwiarek. Następnie łyżwiarki zbliżają się do siebie, przekładając ręce na tyczce, aż do chwili, gdy ich odległość wynosi 1 m. Ile wynoszą wówczas: d) ich prędkość kątowa, e) energia kinetyczna układu tych dwóch łyżwiarek? f) Skąd pochodzi energia, dzięki której wzrosła energia kinetyczna łyżwiarek?

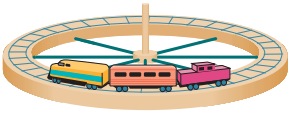

Rys. 11.47. Zadanie 43

•44 Karaluch o masie 0,17 kg biegnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wzdłuż brzegu stojącej na stole tacy obrotowej o promieniu 15 cm i momencie bezwładności $5 \cdot 10^{-3}$ kg · m^2, która może obracać się na łożyskach bez tarcia wokół pionowej osi. Prędkość karalucha względem stołu wynosi 2 m/s, a taca obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara z prędkością kątową $\omega_0 = 2{,}8$ rad/s. W pewnej chwili karaluch dostrzega na swej drodze okruszek chleba i — rzecz jasna — zatrzymuje się przy nim. a) Ile wynosi prędkość kątowa tacy po zatrzymaniu się karalucha? b) Czy energia mechaniczna jest zachowana podczas tego manewru?

•45 ssm www Człowiek stoi na platformie, obracającej się bez tarcia z prędkością kątową 1,2 obrotów/s, i w każdej z wyciągniętych w bok rąk trzyma cegłę. Moment bezwładności układu złożonego z człowieka, cegieł i platformy względem osi obrotu wynosi 6 kg · m^2. Przyciągając cegły do tułowia, człowiek zmniejsza moment bezwładności układu do wartości 2 kg · m^2. a) Ile wynosi prędkość kątowa platformy po wykonaniu przez człowieka tego manewru? b) Ile wynosi stosunek końcowej i początkowej energii kinetycznej układu? c) Kosztem jakiej energii zwiększyła się energia kinetyczna układu?

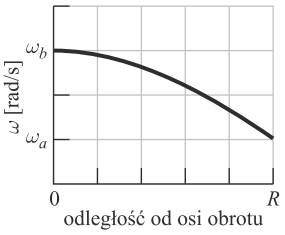
•46 Moment bezwładności obracającej się gwiazdy maleje w czasie jej zapadania się do $\frac{1}{3}$ jego wartości początkowej. Ile wynosi stosunek końcowej energii kinetycznej gwiazdy do jej początkowej energii kinetycznej?

•47 ssm Tor modelu kolejki elektrycznej został ułożony na dużym kole, które może się obracać bez tarcia wokół pionowej osi (rys. 11.48). Na torze ustawiono kolejkę o masie m i w chwili, w której cały układ pozostawał w spoczynku, włączono jej zasilanie. Po upływie pewnego czasu kolejka porusza się ze stałą prędkością o wartości 0,15 m/s względem toru. Z jaką prędkością kątową obraca się wówczas koło, którego masa wynosi $1{,}1m$, a promień — 0,43 m? Potraktuj koło jak obręcz oraz pomiń masę szprych i piasty koła.


Rys. 11.48. Zadanie 47

•48 Krążek o promieniu R obraca się wokół swej osi symetrii. Wirujący wraz z krążkiem karaluch przechodzi w pewnej chwili ze środka na brzeg tego krążka. Prędkość kątowa układu karaluch–krążek zmienia się w czasie wędrówki

karalucha jak na rysunku 11.49 ($\omega_a = 5$ rad/s, a $\omega_b = 6$ rad/s). Ile wynosi stosunek momentu bezwładności karalucha do momentu bezwładności krążka, gdy karaluch jest na brzegu krążka?



Rys. 11.49. Zadanie 48

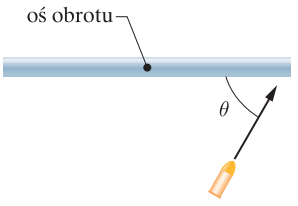
•49 Dwie tarcze umocowano na wspólnej osi za pomocą łożysk o bardzo małym tarciu. Tarcze te mogą zostać ze sobą sprzężone, tak że będą się obracać łącznie — jak jedno ciało. Wyobraź sobie, że pierwszą tarczę, o momencie bezwładności względem jej osi równym 3,3 kg·m^2, wprawiamy w ruch obrotowy z prędkością kątową 450 obrotów/min, a drugą tarczę, o momencie bezwładności względem jej osi równym 6,6 kg · m^2, wprawiamy w ruch obrotowy z prędkością kątową 900 obrotów/min w tym samym kierunku co pierwszą. Następnie sprzęgamy tarcze ze sobą. a) Ile wynosi ich prędkość kątowa po sprzężeniu? Wyobraź sobie następnie, że druga tarcza obraca się początkowo z prędkością kątową 900 obrotów/min, lecz w kierunku przeciwnym niż pierwsza. b) Ile wynosi w tym przypadku prędkość kątowa tarcz po ich sprzężeniu i c) w którą stronę się one obracają?

•50 Wirnik silnika elektrycznego ma moment bezwładności względem swej osi równy $I_w = 2 \cdot 10^{-3}$ kg · m^2. Silnik ten, przeznaczony do zmiany ustawienia sondy kosmicznej w przestrzeni, jest umocowany tak, że jego oś jest równoległa do osi sondy. Moment bezwładności sondy względem tej osi jest równy $I_s = 12$ kg · m^2. Oblicz liczbę obrotów silnika potrzebną do obrócenia sondy wokół jej osi o kąt 30°.

•51 ssm ilw Koło obraca się swobodnie z prędkością kątową o wartości 800 obrotów/min na wale, którego moment bezwładności jest znikomo mały. W pewnej chwili z wałem tym zostaje nagle połączone pozostające uprzednio w spoczynku drugie koło, o momencie bezwładności dwa razy większym od pierwszego. a) Ile wynosi końcowa prędkość kątowa wału z dwoma kołami? b) Jaka część pierwotnej energii kinetycznej ruchu obrotowego zostaje stracona?

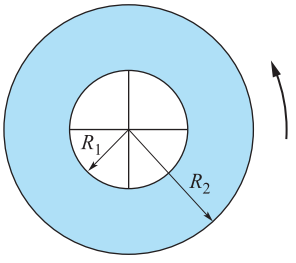
••52 GO Karaluch o masie m leży na skraju jednorodnego krążka o masie $4m$, który może obracać się swobodnie wokół swej osi jak karuzela. Początkowo karaluch i krążek obracają się łącznie z prędkością kątową 0,26 rad/s. W pewnej chwili karaluch zaczyna iść ku środkowi krążka i zatrzymuje się w połowie drogi do środka. a) Ile wynosi przy tym zmiana prędkości kątowej układu karaluch–krążek? b) Ile wynosi stosunek E_k/E_{k0} energii kinetycznej układu po zmianie położenia karalucha do energii kinetycznej tego układu przed tym manewrem? c) Dzięki czemu zmienia się energia kinetyczna układu?

••53 GO Jak pokazano na rysunku 11.50, jednorodny cienki pręt o długości 0,5 m i masie 4 kg może obracać się w płaszczyźnie poziomej wokół osi pionowej, przechodzącej przez jego środek. W pewnej chwili, gdy pręt nie obraca się, w kierunku jednego z jego końców zostaje wystrzelony poziomo pocisk. Kierunek prędkości pocisku tworzy z prętem kąt $\theta = 60°$ (patrz rysunek). Pocisk grzęźnie w pręcie, którego prędkość kątowa tuż po zderzeniu z pociskiem wynosi 10 rad/s. Wyznacz prędkość pocisku tuż przed zderzeniem z prętem.



Rys. 11.50. Zadanie 53

••54 GO Na rysunku 11.51 przedstawiono pierścień, który może się obracać wokół swej osi jak karuzela. Jego promień zewnętrzny R_2 wynosi 0,8 m, a promień wewnętrzny R_1 jest równy $R_2/2$. Masa pierścienia M wynosi 8 kg, a masa łączników w środku układu jest znikomo mała. Początkowo pierścień obraca się z prędkością kątową 8 rad/s, gdy kot o masie $m = M/4$ siedzi na skraju zewnętrznym pierścienia, czyli w odległości R_2 od osi obrotu. O ile zwiększy się energia kinetyczna układu kot–pierścień, gdy kot przejdzie na wewnętrzny skraj pierścienia, czyli znajdzie się w odległości R_1 od osi obrotu?



Rys. 11.51. Zadanie 54

••55 Płyta gramofonowa o masie 0,1 kg i promieniu 0,1 m jest ustawiona poziomo i obraca się swobodnie wokół osi pionowej przechodzącej przez jej środek. Prędkość kątowa płyty wynosi 4,7 rad/s, a moment bezwładności płyty względem jej osi obrotu jest równy $5 \cdot 10^{-4}$ kg · m^2. W pewnej chwili spada na płytę z góry wałek mokrego kitu o masie 0,02 kg i przykleja się do skraju płyty. Ile wynosi prędkość kątowa płyty tuż po przyklejeniu się do niej kitu?

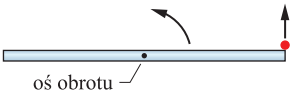
••56 Gdy skoczek w dal odbija się od belki, uzyskuje pewien moment pędu, czego wynikiem jest obrót jego ciała do przodu, co grozi kłopotami przy lądowaniu. Aby temu przeciwdziałać, skoczek obraca w locie ramiona, by wykorzystać większość swego momentu pędu na ruch ramion (patrz rys. 11.18). Przyjmij, że w czasie 0,7 s skoczek wykonał 0,5 obrotu jednym ramieniem i 1 obrót drugim. Potraktuj każde ramię jako sztywny pręt o masie 4 kg i długości 0,6 m, obracający się wokół osi przechodzącej przez jeden z jego końców. Wyznacz wartość całkowitego momentu pędu ramion skoczka względem wspólnej ich osi, przechodzącej przez stawy ramienne, w układzie odniesienia skoczka.

••57 Jednorodna tarcza o masie $10m$ i promieniu $3r$ może obracać się swobodnie jak karuzela wokół swej stałej osi. Mniej-

sza jednorodna tarcza o masie m i promieniu r leży na większej tarczy tak, że ich osie się pokrywają. Obie tarcze obracają się początkowo razem, z prędkością kątową 20 rad/s. W pewnej chwili pod wpływem jakiegoś zaburzenia mniejsza tarcza przesuwa się po powierzchni tarczy większej aż do położenia, w którym ich krawędzie są do siebie styczne. Następnie obie tarcze znów obracają się razem bez wzajemnego poślizgu. a) Ile wynosi wówczas ich prędkość kątowa względem osi większej tarczy? b) Ile wynosi stosunek E_k/E_{k0} energii kinetycznej układu dwóch tarcz po zmianie położenia mniejszej z nich, do energii kinetycznej ich układu przed tym manewrem?

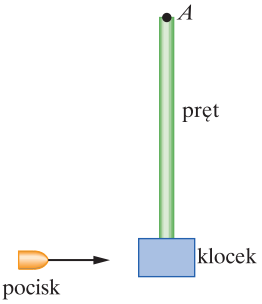
••58 Pozioma platforma w kształcie tarczy kołowej obraca się na łożyskach bez tarcia wokół osi pionowej przechodzącej przez jej środek. Platforma ta ma masę 150 kg i promień 2 m, a jej moment bezwładności względem osi obrotu jest równy 300 kg · m^2. Student o masie 60 kg idzie powoli wzdłuż promienia tarczy, od jej brzegu do środka. Prędkość kątowa układu w chwili, gdy student znajduje się na brzegu platformy wynosi 1,5 rad/s. Ile wynosi prędkość kątowa, gdy student znajduje się w odległości równej 0,5 m od środka platformy?

••59 Na rysunku 11.52 przedstawiono widziany z góry cienki jednorodny pręt o długości 0,8 m i masie M, który się obraca w płaszczyźnie poziomej z prędkością kątową 20 rad/s wokół osi przechodzącej przez jego środek. Cząstka o masie $M/3$, połączona początkowo z jednym końcem pręta, w pewnej chwili odrywa się od niego i biegnie po linii prostej, która w chwili oderwania się cząstki od pręta jest do niego prostopadła. Prędkość cząstki v_{cz} jest o 6 m/s większa od prędkości końca pręta po oderwaniu się cząstki od niego. Oblicz v_{cz}.



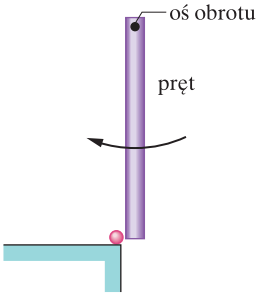
Rys. 11.52. Zadanie 59

••60 Jak pokazano na rysunku 11.53, pocisk o masie 1 g trafia w klocek o masie 0,5 kg przymocowany do końca niejednorodnego pręta o masie 0,5 kg i długości 0,6 m. Układ klocek–pręt–pocisk obraca się następnie wokół stałej osi przechodzącej przez punkt A. Moment bezwładności samego pręta względem tej osi jest równy 0,06 kg · m^2. Przyjmij, że klocek jest dostatecznie mały na to, aby można go uważać za cząstkę na końcu pręta. a) Ile wynosi moment bezwładności układu klocek–pręt–pocisk względem punktu A? b) Wyznacz prędkość pocisku tuż przed uderzeniem w klocek, wiedząc, że prędkość kątowa układu względem punktu A tuż po zderzeniu pocisku z klockiem była równa 4,5 rad/s.



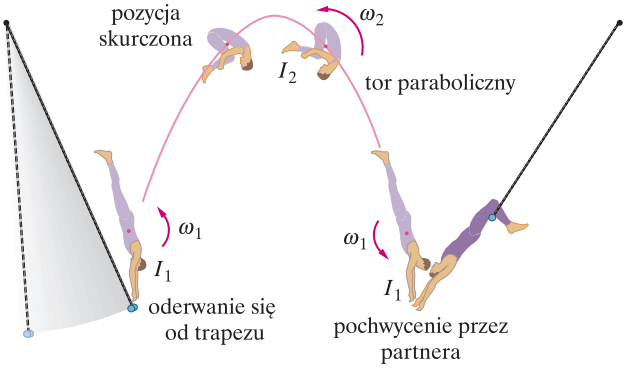
Rys. 11.53. Zadanie 60

••61 Jak pokazano na rysunku 11.54, jednorodny pręt o długości 0,6 m i masie 1 kg obraca się w płaszczyźnie rysunku wokół osi przechodzącej przez jeden z jego końców, względem której jego moment bezwładności wynosi 0,12 kg · m^2. Gdy ruchomy koniec pręta przechodzi przez swe najniższe położenie, zderza się z kulką kitu o masie 0,2 kg, która przykleja się do pręta. Wyznacz prędkość kątową układu pręt–kit tuż po zderzeniu, wiedząc, że prędkość kątowa pręta tuż przed zderzeniem wynosiła 2,4 rad/s.



Rys. 11.54. Zadanie 61

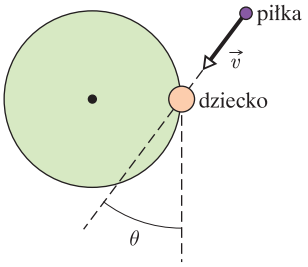
•••62 GO Akrobata wykonujący skok z poczwórnym saltem, musi zostać pochwycony przez partnera po czasie $t = 1{,}87$ s od oderwania się od trapezu. Załóżmy, że pierwsze i ostatnie ćwierć obrotu wykonuje on w pozycji wyprostowanej (patrz rys. 11.55), gdy jego moment bezwładności względem środka masy (oznaczonego kropką) jest równy $I_1 = 19{,}9$ kg · m^2, a pozostałą część lotu odbywa w pozycji skurczonej, gdy ma moment bezwładności $I_2 = 3{,}93$ kg · m^2. Ile musi wynosić jego prędkość kątowa ω_2 względem środka masy podczas lotu w pozycji skurczonej, aby skoczek dotarł do partnera we właściwej chwili?



Rys. 11.55. Zadanie 62

•••63 GO Dziecko o masie 30 kg stoi na brzegu nieobracającej się karuzeli o promieniu 2 m. Moment bezwładności karuzeli względem jej osi obrotu wynosi 150 kg · m^2. W pewnej chwili dziecko łapie piłkę o masie 1 kg, rzuconą do niego przez kolegę. Tuż przed złapaniem jej przez dziecko piłka ma prędkość poziomą $\vec{v}$ o wartości 12 m/s, skierowaną pod kątem $\theta = 37°$ do prostej, stycznej do zewnętrznej krawędzi

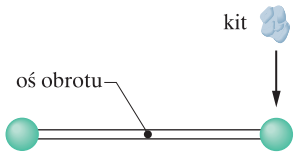
karuzeli w punkcie, w którym stoi dziecko (rys. 11.56). Ile wynosi prędkość kątowa karuzeli tuż po złapaniu piłki przez dziecko?



Rys. 11.56. Zadanie 63

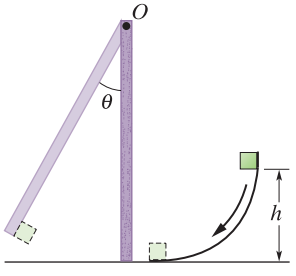
•••64 Baletnica zaczyna *tour jeté* (skok z obrotem, patrz rysunek 11.19a), wyskakując w powietrze z prędkością kątową ω_{pocz}, a jej moment bezwładności jest sumą momentu bezwładności nogi odgiętej od ciała pod kątem 90°, równego $I_{\text{nogi}} = 1{,}44\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, i momentu bezwładności reszty ciała (głównie tułowia), wynoszącego $I_{\text{tułowia}} = 0{,}66\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. W pobliżu maksymalnej wysokości lotu baletnica trzyma obie nogi razem, pod kątem 30° względem tułowia, i ma prędkość kątową $\omega_{\text{końc}}$ (rys. 11.19b). Załóż, że $I_{\text{tułowia}}$ jest nadal takie samo i oblicz stosunek $\omega_{\text{końc}}/\omega_{\text{pocz}}$.

•••65 ssm www Dwie kule o masie 2 kg każda połączono cienkim prętem o długości 50 cm i znikomo małej masie. Pręt może obracać się bez tarcia w płaszczyźnie pionowej wokół poziomej osi przechodzącej przez jego środek. W pewnej chwili, gdy pręt jest ustawiony poziomo (rys. 11.57), na jedną z kul spada grudka wilgotnego kitu o masie 50 g, mająca w chwili uderzenia w kulę prędkość równą 3 m/s, i przykleja się do tej kuli. a) Ile wynosi prędkość kątowa układu tuż po upadku kitu na kulę? b) Ile wynosi stosunek energii kinetycznej całego układu po zderzeniu do energii kinetycznej grudki kitu tuż przed tym zderzeniem? c) O jaki kąt obróci się pręt do chwili, w której prędkość układu stanie się równa zeru?



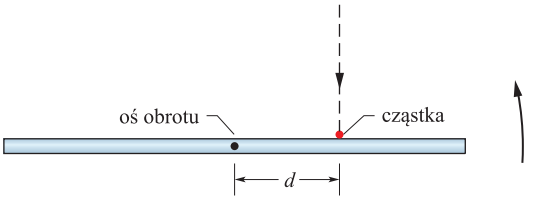
Rys. 11.57. Zadanie 65

•••66 GO Jak pokazano na rysunku 11.58, mały klocek o masie 50 g ześlizguje się bez tarcia z wysokości $h = 20$ cm po pewnej powierzchni, po czym zderza się z końcem jednorodnego pręta pionowego, o masie 100 g i długości 40 cm, i przykleja się do niego. Pręt może się obracać wokół osi przechodzącej przez punkt O. Prędkość pręta przybiera wartość równą zeru w chwili, gdy pręt jest odchylony od pionu o kąt θ. Wyznacz ten kąt.



Rys. 11.58. Zadanie 66

•••67 GO Na rysunku 11.59 przedstawiono widziany z góry cienki jednorodny pręt o długości 0,6 m i masie M, który się obraca z prędkością kątową 80 rad/s w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara w płaszczyźnie poziomej wokół osi przechodzącej przez jego środek. Cząstka o masie $M/3$, biegnąca poziomo z prędkością 40 m/s, zderza się z prętem i przywiera do niego. W chwili zderzenia z cząstką pręt jest prostopadły do toru cząstki, a zderzenie następuje w punkcie odległym od środka pręta o d. a) Dla jakiej wartości d pręt i cząstka są po zderzeniu nieruchome? b) W jakim kierunku obraca się pręt i cząstka, gdy d jest większe od wartości z punktu (a)?



Rys. 11.59. Zadanie 67

Podrozdział 11.9. Precesja żyroskopu

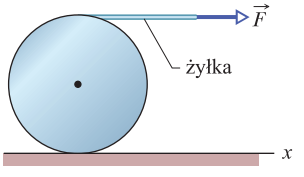
•68 Bąk wiruje z prędkością kątową 30 obrotów/s wokół osi tworzącej z pionem kąt 30°. Masa bąka wynosi 0,5 kg, jego moment bezwładności względem osi symetrii jest równy $5\cdot10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, a środek masy bąka jest 4 cm powyżej punktu podparcia. Wyznacz a) prędkość kątową precesji i b) kierunek precesji, gdy bąk wiruje w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

•69 Pewien żyroskop składa się z jednorodnego krążka o promieniu 50 cm umocowanego na osce o długości 11 cm i znikomo małej masie. Oś ka jest pozioma i podparta na końcu. Wyznacz prędkość kątową precesji żyroskopu, gdy krążek wiruje z prędkością kątową 1000 obrotów/s.

Zadania dodatkowe

70 Jednorodna sztywna kula toczy się bez poślizgu po poziomej podłodze, a potem wtacza się na równię pochyłą, nachyloną do poziomu pod kątem 15°. Jej prędkość spada do zera po przebyciu po równi drogi 1,5 m. Oblicz jej prędkość początkową.

71 ssm Jak pokazano na rysunku 11.60, jednorodny walec o masie 10 kg i promieniu 0,1 m owinęliśmy żyłką, za koniec której ciągniemy, działając poziomo siłą $\vec{F}$ o wartości 12 N. Walec toczy się po podłożu bez poślizgu. a) Ile wynosi wartość przyspieszenia środka masy walca? b) Ile wynosi wartość przyspieszenia kątowego walca względem jego środka masy? c) Wyznacz siłę tarcia działającą na walec. Podaj ją w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.



Rys. 11.60. Zadanie 71

72 Po podłodze toczy się cienkościenna rura. Oblicz dla tej rury stosunek energii kinetycznej ruchu postępowego do energii kinetycznej ruchu obrotowego względem osi równoległej do rury i przechodzącej przez jej środek masy.

73 ssm Dziecinny samochodzik o masie 3 kg porusza się wzdłuż osi x z prędkością daną wzorem $\vec{v} = -2t^3\hat{i}$ m/s. Dla $t > 0$ wyznacz: a) moment pędu samochodziku $\vec{L}$ względem początku układu współrzędnych, b) działający na samochodzik moment siły $\vec{M}$ względem początku układu współrzędnych, c) $\vec{L}$ i d) $\vec{M}$ względem punktu o współrzędnych (2 m, 5 m, 0) oraz e) $\vec{L}$ i f) $\vec{M}$ względem punktu o współrzędnych (2 m, −5 m, 0).

74 Koło obraca się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara wokół swej osi symetrii, mając moment pędu 600 kg · m^2/s. W chwili $t = 0$ do koła przyłożono moment siły 50 N · m, aby zmienić kierunek jego obrotu. W jakiej chwili t prędkość kątowa koła jest równa zeru?

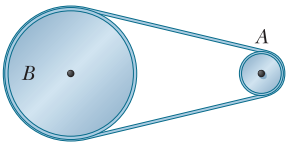
75 ssm Na placu zabaw jest mała karuzela o promieniu 1,2 m i masie 180 kg. Jej ramię bezwładności (patrz zadanie 79 z rozdziału 10) wynosi 91 cm. Dziecko o masie 44 kg biegnie z prędkością 3 m/s wzdłuż linii stycznej do brzegu karuzeli (która początkowo się nie obraca) i dobiegłszy do niej wskakuje na karuzelę. Przyjmij, że tarcie między łożyskami a wałem karuzeli jest znikomo małe i oblicz: a) moment bezwładności karuzeli względem osi jej obrotu, b) wartość momentu pędu biegnącego dziecka względem osi karuzeli, c) prędkość kątową karuzeli i dziecka po jego wskoczeniu na karuzelę.

76 Jednorodny blok granitu ma kształt książki o wymiarach 20 cm, 15 cm i 1,2 cm. Gęstość (masa jednostkowej objętości) granitu wynosi 2,64 g/cm^3. Blok obraca się wokół osi, która jest prostopadła do jego największej ściany i przechodzi przez środek odcinka łączącego jej wierzchołek z punktem przecięcia przekątnych. Moment pędu bloku względem tej osi jest równy 0,104 kg · m^2/s. Ile wynosi energia kinetyczna bloku względem tej osi?

77 ssm Dwie cząstki, każda o masie $2{,}9 \cdot 10^{-4}$ kg i prędkości 5,46 m/s, poruszają się w przeciwnym kierunku po prostych równoległych, odległych od siebie o 4,2 cm. a) Ile wynosi wartość momentu pędu L układu tych dwóch cząstek względem punktu leżącego w połowie odległości między ich torami? b) Czy ta wartość zmieni się, jeśli będziemy obliczać moment pędu układu względem innego punktu? Wyobraź sobie, że zmienimy kierunek ruchu jednej z tych cząstek. Jaka będzie w tym przypadku odpowiedź c) na pytanie z punktu (a) i d) na pytanie z punktu (b)?

78 Toczące się koło o promieniu 0,25 m, poruszające się w chwili początkowej z prędkością 43 m/s, zatrzymuje się po przebyciu 225 m. Oblicz wartość jego: a) przyspieszenia liniowego, b) przyspieszenia kątowego. c) Moment bezwładności koła względem jego osi jest równy 0,155 kg · m^2. Oblicz wartość momentu siły względem osi koła, jaki działa na nie w wyniku tarcia.

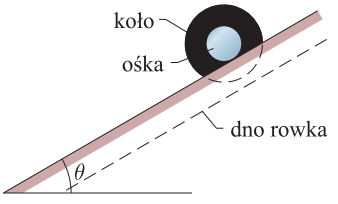
79 Jak pokazano na rysunku 11.61, koła A i B połączono pasem, który się po nich nie ślizga. Promień koła B jest trzy razy większy niż promień koła A. Jaki musi być stosunek momentów bezwładności kół I_A/I_B, aby w czasie ich obrotu miały one jednakowe wartości: a) momentu pędu względem własnej osi, b) energii kinetycznej ruchu obrotowego?



Rys. 11.61. Zadanie 79

80 Cząstka o masie 2,5 kg porusza się poziomo po podłodze z prędkością $(-3 \text{ m/s})\hat{j}$ i zderza się z cząstką o masie 4 kg, poruszającą się poziomo po podłodze z prędkością $(4{,}5 \text{ m/s})\hat{i}$. Zderzenie jest całkowicie niesprężyste i zachodzi w punkcie o współrzędnych x, y równych (−0,5 m, −0,1 m). Wyznacz moment pędu układu cząstek po zderzeniu względem początku układu współrzędnych. Podaj wynik w zapisie przy użyciu wektorów jednostkowych.

81 ssm Jednorodne koło o masie 10 kg i promieniu 0,4 m umocowano sztywno na ośce o znikomo małej masie, jak na rysunku 11.62. Promień ośki wynosi 0,2 m, a moment bezwładności koła i ośki względem ich osi symetrii jest równy 0,6 kg · m^2. Koło jest początkowo nieruchome na szczycie równi o kącie nachylenia $\theta = 30°$ do poziomu. Ośka opiera się na powierzchni równi, a koło wchodzi w rowek, nie stykając się z równią. Po puszczeniu koła swobodnie ośka toczy się po równi bez poślizgu. Wyznacz: a) energię kinetyczną ruchu obrotowego i b) energię kinetyczną ruchu postępowego układu koło–ośka, po przebyciu przez nie po równi drogi 2 m.



Rys. 11.62. Zadanie 81

82 Jednorodny pręt o długości równej 6 m i ciężarze wynoszącym 10 N obraca się w płaszczyźnie poziomej wokół pionowej osi przechodzącej przez jeden z jego końców z prędkością 240 obrotów/min w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (patrząc z góry). Oblicz: a) moment bezwładności pręta względem osi jego obrotu, b) moment pędu pręta względem tej osi.

83 Kula o ciężarze 36 N wtacza się na równię nachyloną do poziomu pod kątem 30°. U podnóża równi środek masy kuli ma prędkość liniową o wartości 4,9 m/s. a) Ile wynosi energia kinetyczna kuli u podnóża równi? b) Ile wynosi droga, jaką przebędzie kula po równi? c) Czy odpowiedź na pytanie (b) zależy od masy kuli?

84  Załóż, że jo-jo z zadania 17 nie zostało puszczone swobodnie, lecz rzucono je w dół z prędkością początkową równą 1,3 m/s. a) Ile czasu będzie trwał ruch kółka do dolnego końca sznurka? Ile wyniesie: b) całkowita energia kinetyczna, c) prędkość liniowa, d) energia kinetyczna ruchu postępowego, e) prędkość kątowa, f) energia kinetyczna ruchu obrotowego kółka w chwili, gdy dotrze ono do dolnego końca sznurka?

85 Dziewczynka o masie m_1 stoi na brzegu karuzeli o promieniu R i momencie bezwładności I, która może obracać się bez tarcia. Karuzela się nie obraca. W pewnej chwili dziewczynka rzuca poziomo kamień o masie m_2 w kierunku stycznym do zewnętrznej krawędzi karuzeli. Prędkość kamienia względem ziemi jest równa v. Ile wynosi po wyrzuceniu kamienia: a) prędkość kątowa karuzeli, b) prędkość liniowa dziewczynki?

86 Ciało o promieniu R i masie m toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni, z prędkością v, po czym wtacza się na pochylnię, wznosząc się maksymalnie na wysokość h nad powierzchnię. a) Oblicz moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez jego środek masy, wiedząc, że $h = 3v^2/4g$. b) Co to może być za ciało?

D O D A T E K A

Międzynarodowy Układ Jednostek (SI)*

Jednostki podstawowe SI

Wielkość	Nazwa	Symbol	Definicja
długość	metr	m	„długość drogi przebytej przez światło w próżni w czasie 1/299 792 458 sekundy” (1983)
masa	kilogram	kg	„ten prototyp [pewien walec z platyny i irydu] będzie odtąd uważany za jednostkę masy” (1889)
czas	sekunda	s	„czas trwania 9 192 631 770 okresów fali promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami nadsubtelnymi stanu podstawowego atomu cezu-133” (1967)
natężenie prądu elektrycznego	amper	A	„natężenie stałego prądu elektrycznego, który — płynąc w dwóch równoległych, nieskończenie długich, prostoliniowych przewodach o znikomo małym, kołowym przekroju, umieszczonych w próżni w odległości 1 metra od siebie — wywołuje między tymi przewodami siłę równą $2 \cdot 10^{-7}$ niutona na każdy metr długości przewodu” (1946)
temperatura termodynamiczna	kelwin	K	„1/273,16 część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody” (1967)
ilość substancji	mol	mol	„ilość substancji układu zawierającego liczbę cząstek równą liczbie atomów zawartych w 0,012 kilograma węgla-12” (1971)
światłość	kandela	cd	„światłość, jaką ma w danym kierunku źródło emitujące promieniowanie elektromagnetyczne o częstości $540 \cdot 10^{12}$ herców i którego natężenie promieniowania w tym kierunku jest równe 1/683 wata na steradian” (1979)

*Na podstawie pracy „The International System of Units (SI)”, National Bureau of Standards Special Publication 330, 1972 edition. Przytoczone definicje zostały przyjęte przez Konferencję Ogólną ds. Miar i Wag (ciało międzynarodowe) w podanych w tabeli latach. Kandela nie jest używana w niniejszej książce.

Niektóre jednostki pochodne SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol	
pole powierzchni	metr kwadratowy	m^2	
objętość	metr sześcienny	m^3	
częstość	herc	Hz	s^{-1}
gęstość	kilogram na metr sześcienny	kg/m^3	
prędkość	metr na sekundę	m/s	
prędkość kątowa	radian na sekundę	rad/s	
przyspieszenie	metr na sekundę kwadrat	m/s^2	
przyspieszenie kątowe	radian na sekundę kwadrat	rad/s^2	
siła	niuton	N	$kg \cdot m/s^2$
ciśnienie	paskal	Pa	N/m^2
praca, energia, ciepło	dżul	J	$N \cdot m$
moc	wat	W	J/s
ładunek elektryczny	kulomb	C	$A \cdot s$
napięcie elektryczne, różnica potencjałów, siła elektromotoryczna	wolt	V	W/A
natężenie pola elektrycznego	wolt na metr (lub niuton na kulomb)	V/m	N/C
opór elektryczny	om	Ω	V/A
pojemność elektryczna	farad	F	$A \cdot s/V$
strumień magnetyczny	weber	Wb	$V \cdot s$
indukcyjność	henr	H	$V \cdot s/A$
indukcja magnetyczna	tesla	T	Wb/m^2
natężenie pola magnetycznego	amper na metr	A/m	
entropia	dżul na kelwin	J/K	
ciepło właściwe	dżul na kilogram i kelwin	$J/(kg \cdot K)$	
przewodność cieplna	wat na metr i kelwin	$W/(m \cdot K)$	
natężenie promieniowania	wat na steradian	W/sr	

Jednostki uzupełniające SI

Wielkość	Nazwa jednostki	Symbol
kąt płaski	radian	rad
kąt bryłowy	steradian	sr

Nazwy przedrostków jednostek SI

Czynnik	Przedrostek	Symbol	Czynnik	Przedrostek	Symbol
10^{24}	jotta	Y	10^{-1}	decy	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centy	c
10^{18}	eksa	E	10^{-3}	mili	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	mikro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	piko	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hekto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deka	da	10^{-24}	jokto	y

DODATEK B

Niektóre podstawowe stałe fizyczne*

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna[a] (1998)	Niepewność względna[b]
prędkość światła w próżni	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	2,997 924 58	(dokładnie)
ładunek elementarny	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	1,602 176 462	0,039
stała grawitacyjna	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $m^3/(s^2 \cdot kg)$	6,673	1500
uniwersalna stała gazowa	R	8,31 J/(mol · K)	8,314 472	1,7
stała Avogadra	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}	6,022 141 99	0,079
stała Boltzmanna	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K	1,380 650 3	1,7
stała Stefana–Boltzmanna	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $W/(m^2 \cdot K^4)$	5,670 400	7,0
objętość molowa gazu doskonałego[c]	V_m	$2{,}27 \cdot 10^{-2}$ m^3/mol	2,271 098 1	1,7
stała elektryczna	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m	8,854 187 817 62	(dokładnie)
stała magnetyczna	μ_0	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061 43	(dokładnie)
stała Plancka	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s	6,626 068 76	0,078
masa elektronu[d]	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg	9,109 381 88	0,079
		$5{,}49 \cdot 10^{-4}$ u	5,485 799 110	0,0021
masa protonu[d]	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	1,672 621 58	0,079
		1,0073 u	1,007 276 466 88	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$
stosunek masy protonu do masy elektronu	m_p/m_e	1840	1836,152 667 5	0,0021
stosunek ładunku elektronu do masy elektronu	e/m_e	$1{,}76 \cdot 10^{11}$ C/kg	1,758 820 174	0,040
masa neutronu[d]	m_n	$1{,}68 \cdot 10^{-27}$ kg	1,674 927 16	0,079
		1,0087 u	1,008 664 915 78	$5{,}4 \cdot 10^{-4}$
masa atomu wodoru[d]	$m_{^1H}$	1,0078 u	1,007 825 031 6	0,0005
masa atomu deuteru[d]	$m_{^2H}$	2,0141 u	2,014 101 777 9	0,0005
masa atomu helu-4[d]	$m_{^4He}$	4,0026 u	4,002 603 2	0,067

*Wartości zebrane w tej tabeli wybrano z wartości zalecanych przez CODATA w 1998 r. (patrz: www.physics.nist.gov).

cd.

Stała	Symbol	Wartość zaokrąglona	Wartość najbardziej dokładna[a] (1998)	Niepewność względna[b]
masa mionu	m_μ	$1{,}88 \cdot 10^{-28}$ kg	1,883 531 09	0,084
moment magnetyczny elektronu	μ_e	$9{,}28 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,284 763 62	0,040
moment magnetyczny protonu	μ_p	$1{,}41 \cdot 10^{-26}$ J/T	1,410 606 663	0,041
magneton Bohra	μ_B	$9{,}27 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,274 008 99	0,040
magneton jądrowy	μ_N	$5{,}05 \cdot 10^{-27}$ J/T	5,050 783 17	0,040
promień Bohra	a_B	$5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m	5,291 772 083	0,0037
stała Rydberga	R	$1{,}10 \cdot 10^{7}$ m^{-1}	1,097 373 156 854 8	$7{,}6 \cdot 10^{-6}$
comptonowska długość fali elektronu	λ_C	$2{,}43 \cdot 10^{-12}$ m	2,426 310 215	0,0073

[a] Wartości w tej kolumnie należy pomnożyć przez tę samą potęgę liczby 10 i jednostkę, co odpowiednie wartości zaokrąglone.
[b] W jednostkach 10^{-6} (milionowych częściach całości).
[c] W warunkach normalnych temperatury (0°C) i ciśnienia (1,0 atm, czyli 0,1 MPa).
[d] Atomowa jednostka masy 1 u = $1{,}660\,538\,73 \cdot 10^{-27}$ kg.

D O D A T E K C

Niektóre dane astronomiczne

Wybrane odległości od Ziemi

do Księżyca[a]	$3{,}82 \cdot 10^8$ m	do środka naszej Galaktyki	$2{,}2 \cdot 10^{20}$ m
do Słońca[a]	$1{,}50 \cdot 10^{11}$ m	do galaktyki Andromedy	$2{,}1 \cdot 10^{22}$ m
do najbliższej gwiazdy (Proxima Centauri)	$4{,}04 \cdot 10^{16}$ m	do granicy obserwowalnego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

Słońce, Ziemia i Księżyc

Właściwość	Jednostka	Słońce	Ziemia	Księżyc
masa	kg	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$7{,}36 \cdot 10^{22}$
średni promień	m	$6{,}96 \cdot 10^8$	$6{,}37 \cdot 10^6$	$1{,}74 \cdot 10^6$
średnia gęstość	kg/m^3	1410	5520	3340
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni	m/s^2	274	9,81	1,67
prędkość ucieczki	km/s	618	11,2	2,38
okres obrotu[a]		37 d na biegunach[b], 26 d na równiku[b]	23 h 56 min	27,3 d
całkowita moc promieniowania[c]	W	$3{,}90 \cdot 10^{26}$		

[a] Mierzony względem odległych gwiazd.
[b] Słońce — będące kulą gazu — nie obraca się jak ciało sztywne.
[c] Tuż nad atmosferą Ziemi energia słoneczna dociera do powierzchni prostopadłej do kierunku padania z szybkością 1340 W/m^2.

Wybrane właściwości planet

	Merkury	Wenus	Ziemia	Mars	Jowisz	Saturn	Uran	Neptun	Pluton
średnia odległość od Słońca, 10^6 km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
okres obiegu, lata	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
okres obrotu[a], d	58,7	−243[b]	0,997	1,03	0,409	0,426	−0,451[b]	0,658	6,39
prędkość na orbicie, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
nachylenie osi względem płaszczyzny orbity	$< 28°$	$\approx 3°$	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
nachylenie orbity względem orbity Ziemi	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
mimośród orbity	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
średnica równika, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
masa (masa Ziemi = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
gęstość (gęstość wody = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni[c], m/s^2	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
prędkość ucieczki[c], km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,1
liczba znanych satelitów	0	0	1	2	16[d]	18[e]	17[e]	8[e]	1

[a] Mierzony względem odległych gwiazd.
[b] Wenus i Uran obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu po orbicie.
[c] Przyspieszenie grawitacyjne jest mierzone na równiku planety.
[d] + pierścień.
[e] + pierścienie.

D O D A T E K D

Współczynniki zamiany jednostek

Współczynniki przeliczeniowe można bezpośrednio odczytać z tabel. Na przykład 1 stopień = $2{,}778 \cdot 10^{-3}$ obrotów, a zatem $16{,}7^\circ = 16{,}7 \cdot 2{,}778 \cdot 10^{-3}$ obrotów. Jednostki SI zapisano czcionką półgrubą. Tabele zostały przygotowane częściowo na podstawie pracy: G. Shortley, D. Wiliams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

Kąt płaski

stopień (°)	minuta (′)	sekunda (″)	**rad**	obr
1 stopień = 1	60	3600	$\mathbf{1{,}745 \cdot 10^{-2}}$	$2{,}778 \cdot 10^{-3}$
1 minuta = $1{,}667 \cdot 10^{-2}$	1	60	$\mathbf{2{,}909 \cdot 10^{-4}}$	$4{,}630 \cdot 10^{-5}$
1 sekunda = $2{,}778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	1	$\mathbf{4{,}848 \cdot 10^{-6}}$	$7{,}716 \cdot 10^{-7}$
1 radian = 57,30	**3438**	$\mathbf{2{,}063 \cdot 10^{5}}$	**1**	**0,1592**
1 obrót = 360	$2{,}16 \cdot 10^{4}$	$1{,}296 \cdot 10^{6}$	**6,283**	1

Kąt bryłowy

1 pełny kąt bryłowy = 4π steradianów = 12,57 steradianów

Długość

cm	**m**	km	cal (in)	stopa (ft)	mila
1 centymetr = 1	$\mathbf{10^{-2}}$	10^{-5}	0,3937	$3{,}281 \cdot 10^{-2}$	$6{,}214 \cdot 10^{-6}$
1 metr = 100	**1**	$\mathbf{10^{-3}}$	**39,37**	**3,281**	$\mathbf{6{,}214 \cdot 10^{-4}}$
1 kilometr = 10^5	**1000**	1	$3{,}937 \cdot 10^{4}$	3281	0,6214
1 cal (in) = 2,540	$\mathbf{2{,}540 \cdot 10^{-2}}$	$2{,}540 \cdot 10^{-5}$	1	$8{,}333 \cdot 10^{-2}$	$1{,}578 \cdot 10^{-5}$
1 stopa (ft) = 30,48	**0,3048**	$3{,}048 \cdot 10^{-4}$	12	1	$1{,}894 \cdot 10^{-4}$
1 mila (lądowa) = $1{,}609 \cdot 10^{5}$	**1609**	1,609	$6{,}336 \cdot 10^{4}$	5280	1

1 angstrem = 10^{-10} m
1 mila morska = 1852 m = 1,151 mil = 6076 stóp
1 fermi = 10^{-15} m

1 rok świetlny = $9{,}460 \cdot 10^{12}$ km
1 parsek = $3{,}084 \cdot 10^{13}$ km
1 sążeń = 6 stóp

1 promień Bohra = $5{,}292 \cdot 10^{-11}$ m
1 jard = 3 stopy
1 nm = 10^{-9} m

1 rod = 16,5 stopy
1 mila = 10^{-3} cali
1 nm = 10^{-9} m

Pole powierzchni

m^2	cm^2	ft^2	in^2
1 metr kwadratowy = 1	**10^4**	**10,76**	**1550**
1 centymetr kwadratowy = **10^{-4}**	1	$1{,}076 \cdot 10^{-3}$	0,1550
1 stopa kwadratowa = **$9{,}290 \cdot 10^{-2}$**	929,0	1	144
1 cal kwadratowy = **$6{,}452 \cdot 10^{-4}$**	6,452	$6{,}944 \cdot 10^{-3}$	1

1 mila kwadratowa = $2{,}788 \cdot 10^7$ ft^2 = 640 akrów 1 akr = 43 560 ft^2
1 barn = 10^{-28} m^2 1 hektar = 10^4 m^2 = 2,471 akrów

Objętość

m^3	cm^3	l (litrów)	ft^3	in^3
1 metr sześcienny = 1	**10^6**	**1000**	**35,31**	**$6{,}102 \cdot 10^4$**
1 centymetr sześcienny = **10^{-6}**	1	$1{,}000 \cdot 10^{-3}$	$3{,}531 \cdot 10^{-5}$	$6{,}102 \cdot 10^{-2}$
1 litr = **$1{,}000 \cdot 10^{-3}$**	1000	1	$3{,}531 \cdot 10^{-2}$	61,02
1 stopa sześcienna = **$2{,}832 \cdot 10^{-2}$**	$2{,}832 \cdot 10^4$	28,32	1	1728
1 cal sześcienny = **$1{,}639 \cdot 10^{-5}$**	16,39	$1{,}639 \cdot 10^{-2}$	$5{,}787 \cdot 10^{-4}$	1

1 galon amerykański = 4 kwarty = 231 in^3
1 galon angielski = 277,4 in^3 = 1,201 galonów amerykańskich

Masa

g	**kg**	u	oz	lb
1 g = 1	**0,001**	$6{,}022 \cdot 10^{23}$	$3{,}527 \cdot 10^{-2}$	$2{,}205 \cdot 10^{-3}$
1 kg = 1000	**1**	**$6{,}022 \cdot 10^{26}$**	**35,27**	**2,205**
1 u (jednostka masy atomowej) = $1{,}661 \cdot 10^{-24}$	**$1{,}661 \cdot 10^{-27}$**	1	$5{,}857 \cdot 10^{-26}$	$3{,}662 \cdot 10^{-27}$
1 uncja handlowa = 28,35	**$2{,}835 \cdot 10^{-2}$**	$1{,}718 \cdot 10^{25}$	1	$6{,}250 \cdot 10^{-2}$
1 funt handlowy = 453,6	**0,4536**	$2{,}732 \cdot 10^{26}$	16	1

Gęstość

kg/m^3	g/cm^3	lb/ft^3	lb/in^3
1 kilogram/metr sześcienny = 1	**0,001**	**$6{,}243 \cdot 10^{-2}$**	**$3{,}613 \cdot 10^{-5}$**
1 gram/centymetr sześcienny = **1000**	1	62,43	$3{,}613 \cdot 10^{-2}$
1 funt handlowy/stopę sześcienną = **16,02**	$1{,}602 \cdot 10^{-2}$	1	$5{,}787 \cdot 10^{-4}$
1 funt handlowy/cal sześcienny = **$2{,}768 \cdot 10^4$**	27,68	17,28	1

Czas

a	d	h	min	s
1 rok = 1	365,25	$8{,}766 \cdot 10^{3}$	$5{,}259 \cdot 10^{5}$	$\mathbf{3{,}156 \cdot 10^{7}}$
1 doba = $2{,}738 \cdot 10^{-3}$	1	24	1440	$\mathbf{8{,}640 \cdot 10^{4}}$
1 godzina = $1{,}141 \cdot 10^{-4}$	$4{,}167 \cdot 10^{-2}$	1	60	**3600**
1 minuta = $1{,}901 \cdot 10^{-6}$	$6{,}944 \cdot 10^{-4}$	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	1	**60**
1 sekunda = $3{,}169 \cdot 10^{-8}$	$\mathbf{1{,}157 \cdot 10^{-5}}$	$\mathbf{2{,}778 \cdot 10^{-4}}$	$\mathbf{1{,}667 \cdot 10^{-2}}$	**1**

Prędkość

km/h	m/s	cm/s	mil/h	ft/s
1 kilometr/godzinę = 1	**0,2778**	27,78	0,6214	0,9113
1 metr/sekundę = 3,6	**1**	**100**	**2,237**	**3,281**
1 centymetr/sekundę = $3{,}6 \cdot 10^{-2}$	**0,01**	1	$2{,}237 \cdot 10^{-2}$	$3{,}281 \cdot 10^{-2}$
1 mila/godzinę = 1,609	**0,4470**	44,70	1	1,467
1 stopa/sekundę = 1,097	**0,3048**	30,48	0,6818	1

1 węzeł = 1 mila morska/h = 1,688 ft/s

Siła

dyna	N	lb	G	kG
1 dyna = 1	$\mathbf{10^{-5}}$	$2{,}248 \cdot 10^{-6}$	$1{,}020 \cdot 10^{-3}$	$1{,}020 \cdot 10^{-6}$
1 niuton = 10^{5}	**1**	**0,2248**	**102,0**	**0,1020**
1 funt = $4{,}448 \cdot 10^{5}$	**4,448**	1	453,6	0,4536
1 gram-siła = 980,7	$\mathbf{9{,}807 \cdot 10^{-3}}$	$2{,}205 \cdot 10^{-3}$	1	0,001
1 kilogram-siła = $9{,}807 \cdot 10^{5}$	**9,807**	2,205	1000	1

1 t = 2000 lb
Jednostki: gram-siła (G), kilogram-siła (kG) i funt (jednostka siły) są obecnie rzadko stosowane. Są one zdefiniowane następująco: 1 gram-siła jest to siła ciężkości działająca na ciało o masie 1 g w standardowych warunkach ciążenia (tzn. gdy $g = 9{,}80665$ m/s^2); analogicznie dla kilograma-siły i funta.

Ciśnienie

atm	dyn/cm^2	cal wody	cm Hg	Pa	funt/in^2	funt/ft^2
1 atmosfera = 1	$1{,}013 \cdot 10^{6}$	406,8	76	$\mathbf{1{,}013 \cdot 10^{5}}$	14,70	2116
1 dyna/centymetr kwadratowy = $9{,}869 \cdot 10^{-7}$	1	$4{,}015 \cdot 10^{-4}$	$7{,}501 \cdot 10^{-5}$	**0,1**	$1{,}405 \cdot 10^{-5}$	$2{,}089 \cdot 10^{-3}$
1 cal wody[a] w temp. 4°C = $2{,}458 \cdot 10^{-3}$	2491	1	0,1868	**249,1**	$3{,}613 \cdot 10^{-2}$	5,202
1 centymetr rtęci[a] w temp. 0°C = $1{,}316 \cdot 10^{-2}$	$1{,}333 \cdot 10^{4}$	5,353	1	**1333**	0,1934	27,85
1 paskal = $9{,}869 \cdot 10^{-6}$	**10**	$\mathbf{4{,}015 \cdot 10^{-3}}$	$\mathbf{7{,}501 \cdot 10^{-4}}$	**1**	$1{,}450 \cdot 10^{-4}$	$\mathbf{2{,}089 \cdot 10^{-2}}$
1 funt/cal kwadratowy = $6{,}805 \cdot 10^{-2}$	$6{,}895 \cdot 10^{4}$	27,68	5,171	$\mathbf{6{,}895 \cdot 10^{3}}$	1	144
1 funt/stopę kwadratową = $4{,}725 \cdot 10^{-4}$	478,8	0,1922	$3{,}591 \cdot 10^{-2}$	**47,88**	$6{,}944 \cdot 10^{-3}$	1

[a] W standardowych warunkach ciążenia (tzn. gdy $g = 9{,}80665$ m/s^2).
1 bar = 10^6 dyn/cm^2 = 0,1 MPa 1 milibar = 10^3 dyn/cm^2 = 10^2 Pa 1 tor = 1 mm Hg

Energia, praca, ciepło

Dwie ostatnie jednostki nie są — ściśle rzecz biorąc — jednostkami energii, lecz zostały włączone do tabeli dla wygody. Odpowiadające im wartości współczynników przeliczeniowych wynikają z relatywistycznej równoważności masy i energii, $E = mc^2$, i wyrażają energię wyzwalaną przy całkowitej zamianie na energię atomowej jednostki masy u oraz masę, która po całkowitej zamianie na energię daje odpowiednią energię jednostkową (wiersz i kolumna na żółtym tle).

Btu	erg	ft · lb	kM · h	**J**	cal	kWh	eV	u
1 Btu = 1	$1{,}055 \cdot 10^{10}$	777,9	$3{,}929 \cdot 10^{-4}$	**1055**	252,0	$2{,}930 \cdot 10^{-4}$	$6{,}585 \cdot 10^{21}$	$7{,}070 \cdot 10^{12}$
1 erg = $9{,}481 \cdot 10^{-11}$		$7{,}376 \cdot 10^{-8}$	$3{,}725 \cdot 10^{-14}$	$\mathbf{10^{-7}}$	$2{,}389 \cdot 10^{-8}$	$2{,}778 \cdot 10^{-14}$	$6{,}242 \cdot 10^{11}$	670,2
1 ft · lb = 1,285´10^{-3}	$1{,}356 \cdot 10^{7}$	1	$5{,}051 \cdot 10^{-7}$	**1,356**	0,3238	$3{,}766 \cdot 10^{-7}$	$8{,}464 \cdot 10^{18}$	$9{,}037 \cdot 10^{9}$
1 kM · h = 2545	$2{,}685 \cdot 10^{13}$	$1{,}980 \cdot 10^{6}$	1	$\mathbf{2{,}685 \cdot 10^{6}}$	$6{,}413 \cdot 10^{5}$	0,7457	$1{,}676 \cdot 10^{25}$	$1{,}799 \cdot 10^{16}$
1 J = 9,481 · 10^{-4}	$\mathbf{10^{7}}$	**0,7376**	**3,725 · 10^{-7}**	**1**	**0,2389**	**2,778 · 10^{-7}**	**6,242·10^{18}**	**6,702·10^{9}**
1 cal = $3{,}968 \cdot 10^{-3}$	$4{,}1868 \cdot 10^{7}$	3,088	$1{,}560 \cdot 10^{-6}$	**4,1868**	1	$1{,}163 \cdot 10^{-6}$	$2{,}613 \cdot 10^{19}$	$2{,}806 \cdot 10^{10}$
1 kWh = 3413	$3{,}600 \cdot 10^{13}$	$2{,}655 \cdot 10^{6}$	1,341	$\mathbf{3{,}600 \cdot 10^{6}}$	$8{,}600 \cdot 10^{5}$	1	$2{,}247 \cdot 10^{25}$	$2{,}413 \cdot 10^{16}$
1 eV = $1{,}519 \cdot 10^{-22}$	$1{,}602 \cdot 10^{-12}$	$1{,}182 \cdot 10^{-19}$	$5{,}967 \cdot 10^{-26}$	$\mathbf{1{,}602 \cdot 10^{-19}}$	$3{,}827 \cdot 10^{-20}$	$4{,}450 \cdot 10^{-26}$	1	$1{,}074 \cdot 10^{-9}$
1 u =$1{,}415 \cdot 10^{-13}$	$1{,}492 \cdot 10^{-3}$	$5{,}559 \cdot 10^{-10}$	$1{,}492 \cdot 10^{-17}$	$\mathbf{3{,}564 \cdot 10^{-11}}$	$3{,}564 \cdot 10^{-11}$	$4{,}146 \cdot 10^{-17}$	$9{,}320 \cdot 10^{8}$	1

Moc

KM	cal/s	kW	**W**
1 koń mechaniczny = 1	178,1	0,7457	**745,7**
1 kaloria na sekundę = $5{,}615 \cdot 10^{-3}$	1	$4{,}186 \cdot 10^{-3}$	**4,186**
1 kilowat = 1,341	238,9	1	**1000**
1 wat = 1,341 · 10^{-3}	**0,2389**	**0,001**	**1**

Indukcja magnetyczna

Gs	**T**	mGs
1 gaus (Gs) = 1	$\mathbf{10^{-4}}$	1000
1 tesla (T) = 10^{4}	**1**	$\mathbf{10^{7}}$
1 miligaus (mGs) = 0,001	$\mathbf{10^{-7}}$	1

1 tesla = 1 weber/m^2

Strumień magnetyczny

Mx	**Wb**
1 makswel = 1	$\mathbf{10^{-8}}$
1 weber = 10^{8}	**1**

D O D A T E K E

Wzory matematyczne

Geometria

Koło o promieniu r: obwód = $2\pi r$; pole powierzchni = πr^2.
Kula o promieniu r: pole powierzchni = $4\pi r^2$; objętość = $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Walec obrotowy o promieniu podstawy r i wysokości h: pole powierzchni = $2\pi r^2 + 2\pi rh$; objętość = $\pi r^2 h$.
Trójkąt o podstawie a i wysokości h: pole powierzchni = $\frac{1}{2}ah$.

Równanie kwadratowe i jego rozwiązanie

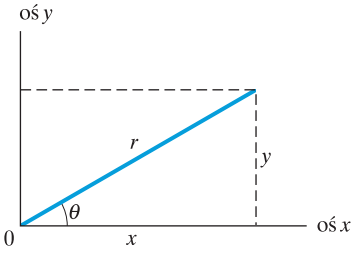
Jeśli $ax^2 + bx + c = 0$, to $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Funkcje trygonometryczne kąta θ

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad \operatorname{ctg}\theta = \dfrac{x}{y}$

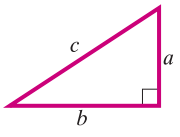
$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$ $\quad \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{r}{y}$



Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym (oznaczenia jak na rysunku)

$a^2 + b^2 = c^2$.



Trójkąty

Kąty: A, B, C.

Boki im przeciwległe: a, b, c.

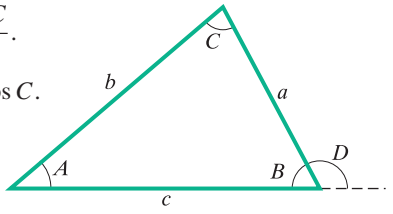
$A + B + C = 180°$.

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Kąt zewnętrzny

$D = A + C$.



Symbole matematyczne

$=$ równa się

$\approx$ równa się w przybliżeniu

$\sim$ jest tego samego rzędu wielkości

$\neq$ nie jest równe

$\equiv$ jest równe tożsamościowo, jest zdefiniowane jako

$>$ jest większe niż ($\gg$ jest dużo większe niż)

$<$ jest mniejsze niż ($\ll$ jest dużo mniejsze niż)

$\geqslant$ jest większe lub równe (czyli nie mniejsze niż)

$\leqslant$ jest mniejsze lub równe (czyli nie większe niż)

$\pm$ plus albo minus

$\propto$ jest proporcjonalne do

$\sum$ suma

$x_{śr}$ wartość średnia x

Tożsamości trygonometryczne

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\sin\theta / \cos\theta = \operatorname{tg}\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = 1$

$$\operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{ctg}^2\theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Rozwinięcia funkcji w szeregi potęgowe

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots \qquad (x^2 < 1)$$

(wzór dwumianowy)

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots \qquad (|x| < 1)$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots \qquad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots \qquad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\operatorname{tg}\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \ldots \qquad (\theta \text{ w radianach})$$

Wzory Cramera

Układ równań z dwiema niewiadomymi x i y

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad \text{oraz} \qquad a_2x + b_2y = c_2$$

ma rozwiązanie

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

oraz

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Iloczyny wektorów

Niech $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ i $\hat{\mathrm{k}}$ będą wektorami jednostkowymi kierunków x, y i z. Zachodzą związki:

$$\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = 1, \qquad \hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{k}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}, \qquad \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{i}}, \qquad \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}.$$

Dowolny wektor $\vec{a}$ o składowych wzdłuż osi x, y i z równych a_x, a_y i a_z można przedstawić w postaci

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}.$$

Niech $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ będą dowolnymi wektorami o długościach (modułach) a, b i c. Zachodzą związki:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c}),$$

$$(s\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(s\vec{b}) = s(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (s \text{ — skalar}).$$

Niech θ będzie mniejszym z kątów między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Zachodzą związki:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta,$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{\mathrm{k}}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_yb_z - b_ya_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{\mathrm{k}},$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta,$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

Pochodne i całki

W poniższych wzorach u i v są dowolnymi funkcjami zmiennej x, a a i m są stałymi. Do każdej z całek nieoznaczonych należy dodać dowolną stałą całkowania. Obszerniejsze tablice zawiera *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.).

1. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(au) = a\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^m = mx^{m-1}$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$
8. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$
9. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$
10. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$
11. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$
12. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x = \operatorname{tg} x \sec x$
13. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$
14. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
15. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin u = \cos u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
16. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos u = -\sin u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

1. $\displaystyle\int \mathrm{d}x = x$
2. $\displaystyle\int au\mathrm{d}x = a\int u\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int (u+v)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}x + \int v\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int x^m\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad (m \neq -1)$
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$
6. $\displaystyle\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = uv - \int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$
8. $\displaystyle\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x$
9. $\displaystyle\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x$
10. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\mathrm{d}x = \ln|\sec x|$
11. $\displaystyle\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x$
12. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}$
13. $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2}(ax+1)\mathrm{e}^{-ax}$
14. $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)\mathrm{e}^{-ax}$
15. $\displaystyle\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
18. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$
19. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$
20. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{n!}{2a^{n+1}} \qquad (a>0)$
21. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x+d} = x - d\ln(x+d)$

D O D A T E K F

Właściwości pierwiastków

O ile nie podano inaczej, wszystkie dane odnoszą się do ciśnienia 1 atm

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm^3] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
aktyn	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
ameryk	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
antymon	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
argon	Ar	18	39,948	$1{,}6626 \cdot 10^{-3}$	−189,4	−185,8	0,523
arsen	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
astat	At	85	(210)	—	(302)	—	—
azot	N	7	14,0067	$1{,}1649 \cdot 10^{-3}$	−210	−195,8	1,03
bar	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
berkel	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
beryl	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
bizmut	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
bohr	Bh	107	262,12	—	—	—	—
bor	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
brom	Br	35	79,909	3,12 (ciecz)	−7,2	58	0,293
cer	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
cez	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
chlor	Cl	17	35,453	$3{,}214 \cdot 10^{-3}$ (0°C)	−101	−34,7	0,486
chrom	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
cyna	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
cynk	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
cyrkon	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276
darmsztad	Ds	110	(271)	—	—	—	—
dubn	Db	105	262,114	—	—	—	—
dysproz	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
einstein	Es	99	(254)	—	—	—	—
erb	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
europ	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
ferm	Fm	100	(237)	—	—	—	—
flerow*	Fl	114	(289)	—	—	—	—
fluor	F	9	18,9984	$1{,}696 \cdot 10^{-3}$ (0°C)	−219,6	−188,2	0,753
fosfor	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
frans	Fr	87	(223)	—	(27)	—	—
gadolin	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234
gal	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
german	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
glin	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900

cd.

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm^3] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
hafn	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
has	Hs	108	(265)	—	—	—	—
hel	He	2	4,0026	$0{,}1664 \cdot 10^{-3}$	−269,7	−268,9	5,23
holm	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
ind	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
iryd	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
iterb	Yb	70	173,04	6,965	824	1530	0,155
itr	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
jod	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
kadm	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
kaliforn	Cf	98	(251)	—	—	—	—
kiur	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
kobalt	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423
kopernik	Cn	112	(285)	—	—	—	—
krypton	Kr	36	83,80	$3{,}488 \cdot 10^{-3}$	−157,37	−152	0,247
krzem	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
ksenon	Xe	54	131,30	$5{,}495 \cdot 10^{-3}$	−111,79	−108	0,159
lantan	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195
lit	Li	3	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
liwermor*	Lv	116	(293)	—	—	—	—
lorens	Lr	103	(257)	—	—	—	—
lutet	Lu	71	174,97	9,849	1663	1930	0,155
magnez	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
mangan	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
meitner	Mt	109	(266)	—	—	—	—
mendelew	Md	101	(256)	—	—	—	—
miedź	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
molibden	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
neodym	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
neon	Ne	10	20,183	$0{,}8387 \cdot 10^{-3}$	−248,597	−246,0	1,03
neptun	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
nikiel	Ni	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
niob	Nb	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
nobel	No	102	(255)	—	—	—	—
ołów	Pb	82	207,19	11,35	327,45	1725	0,129
osm	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
pallad	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
platyna	Pt	78	195,09	21,45	1769	4530	0,134
pluton	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
polon	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
potas	K	19	39,102	0,862	63,20	760	0,758
prazeodym	Pr	59	140,907	6,773	931	3020	0,197
promet	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
protaktyn	Pa	91	(231)	15,37 (oszacowanie)	(1230)	—	—

cd.

Pierwiastek	Symbol	Liczba atomowa Z	Masa molowa [g/mol]	Gęstość [g/cm^3] w temp. 20°C	Temperatura topnienia [°C]	Temperatura wrzenia [°C]	Ciepło właściwe [J/(g · °C)]
rad	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—
radon	Rn	86	(222)	$9{,}96 \cdot 10^{-3}$ (0°C)	(−71)	−61,8	0,092
ren	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
roentgen	Rg	111	(280)	—	—	—	—
rod	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243
rtęć	Hg	80	200,59	13,55	−38,87	357	0,138
rubid	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
ruten	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239
rutherford	Rf	104	261,11	—	—	—	—
samar	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
seaborg	Sg	106	263,118	—	—	—	—
selen	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
siarka	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
skand	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
sód	Na	11	22,9898	0,9712	97,85	892	1,23
srebro	Ag	47	107,870	10,49	960,8	2210	0,234
stront	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737
tal	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130
tantal	Ta	73	180,948	16,6	3014	5425	0,138
technet	Tc	43	(99)	11,46	2200	—	0,209
tellur	Te	52	127,60	6,24	449,5	990	0,201
terb	Tb	65	158,924	8,229	1357	2530	0,180
tlen	O	8	15,9994	$1{,}3318 \cdot 10^{-3}$	−218,80	−183,0	0,913
tor	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
tul	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159
tytan	Ti	22	47,9	4,54	1670	3260	0,523
uran	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117
wanad	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490
wapń	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
węgiel	C	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
wodór	H	1	1,00797	$0{,}08375 \cdot 10^{-3}$	−259,19	−252,7	14,4
wolfram	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
złoto	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
żelazo	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447
nienazwany	Unt	113	—	—	—	—	—
nienazwany	Unp	115	—	—	—	—	—
nienazwany	Uus	117	—	—	—	—	
nienazwany	Uuo	118	(294)	—	—	—	—

Dla pierwiastków promieniotwórczych w rubryce „masa molowa" w nawiasach podano wartości liczby masowej izotopu o najdłuższym czasie życia. Podane w nawiasach wartości temperatury topnienia i wrzenia są niepewne.

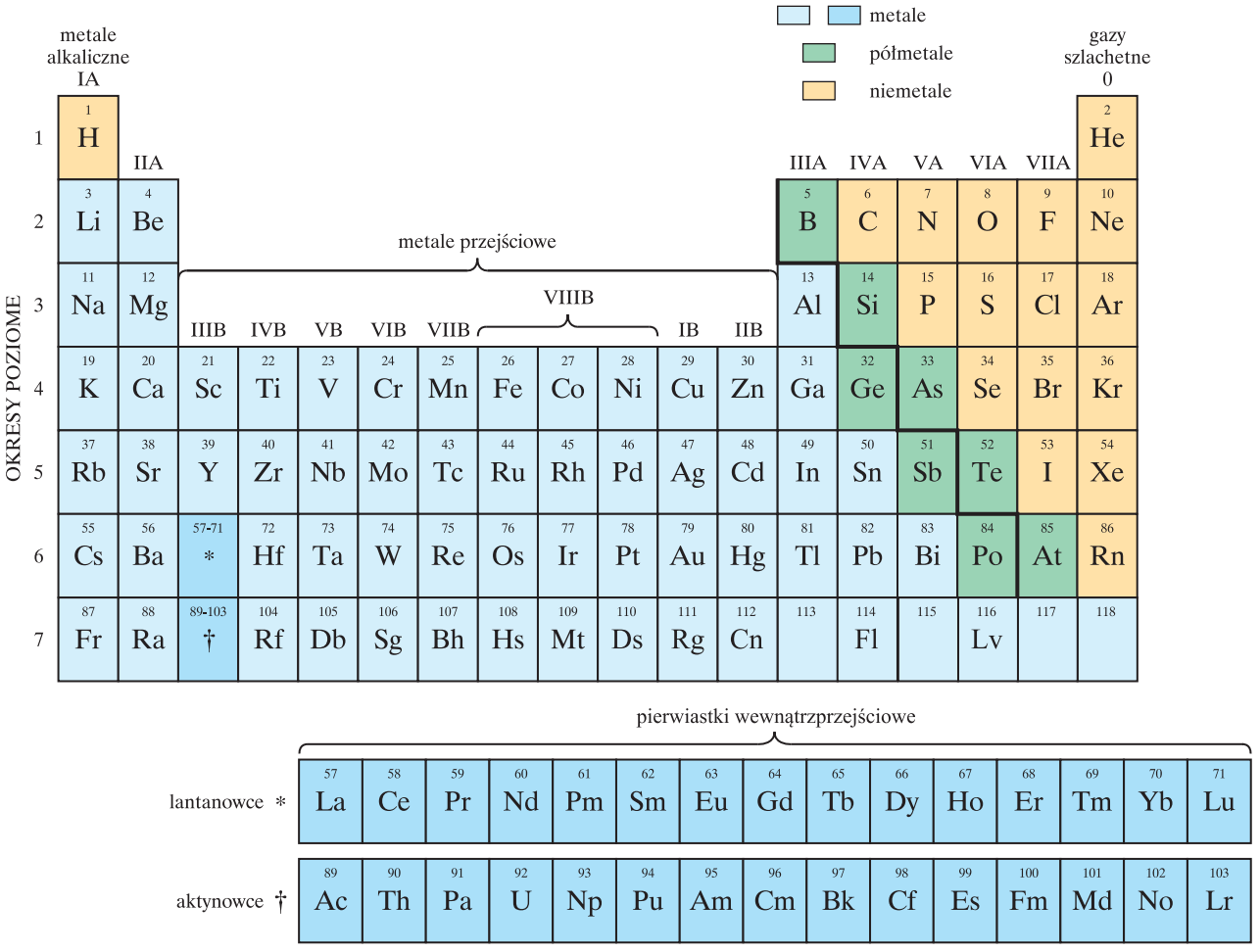
Dane dla gazów odnoszą się do ich normalnej postaci cząsteczkowej, jak H_2, He, O_2, Ne itd. Wartości ciepła właściwego gazów odpowiadają przemianie pod stałym ciśnieniem.

Źródło: J. Emsley, *The Elements*, wyd. III, Clarendon Press, Oxford 1998. Istnieje tłum. polskie: *Chemia. Przewodnik po pierwiastkach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997. Informacje o najnowszych danych i nowoodkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie: www.webelements.com.

*Nazwy i symbole pierwiastków 114 (flerow, Fl) i 116 (liwermor, Lv) nie są jeszcze oficjalnie zatwierdzone.

D O D A T E K G

Układ okresowy pierwiastków



Pierwiastki o liczbie atomowej od 113 do 118 zostały już odkryte. Informacje o najnowszych danych i nowo odkrytych pierwiastkach można znaleźć na stronie www.webelements.com. Pierwiastkom o liczbie atomowej 114 i 116 nadano już nazwy i symbole, lecz nie zostały one jeszcze oficjalnie potwierdzone.

Autorzy zdjęć

Rys. 1.1. © Steven Pitkin
Rys. 1.3. Dzięki uprzejmości Bureau International des Poids et Mesures, przedruk za zgodą BIPM

Rys. 2.7. Dzięki uprzejmości U.S. Air Force
Rys. 2.12. © Jim Sugar/CORBIS

Rys. 4.8. Richard Megna/Fundamental Photographs
Rys. 4.10. Richard Megna/Fundamental Photographs
Rys. 4.12. Jose Gil/Shutterstock

Rys. 6.5. Mitch Gunn/Shutterstock
Rys. 6.7. Germanskydiver Shutterstock
Rys. 6.9. Za zgodą Circus World Museum
Rys. 6.18. Anatoliy Lukich/Shutterstock

Rys. 7.1. Dzięki uprzejmości Library of Congress
Rys. 7.14. stieberszabolcs/Shutterstock

Rys. 8.1. Vitalii Nesterchuk/Shutterstock s. 233 © AP/Wide World Photos
Rys. 8.14. Greg Epperson/Shutterstock

Rys. 9.1. a) Richard Megna/Fundamental Photographs s. 286 © The Harold and Esther Edgerton Family Trust, dzięki uprzejmości Palm Press, Inc.
Rys. 9.48. George Long/Getty Images, Inc.
Rys. 9.52. Stephen Dalton/Photo Researchers, Inc.
Rys. 9.56. Dzięki uprzejmości Réunion des Musées Nationaux/Art Resource

Rys. 10.1. a) testing/Shutterstock
Rys. 10.1. b) Olga Bessnard/ Shutterstock

Rys. 11.1. Scigelova/Shutterstock
Rys. 11.2. Richard Megna/Fundamental Photographs
Rys. 11.5. Alex Emanuel Koch/Shutterstock

O D P O W I E D Z I

Odpowiedzi do wszystkich sprawdzianów oraz do pytań i zadań o numerach nieparzystych

Rozdział 1

Zadania: **1.** a) $4 \cdot 10^4$ km, b) $5{,}1 \cdot 10^8$ km^2, c) $1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3; **3.** a) 10^9 μm, b) 10^{-4}, c) $9{,}1 \cdot 10^5$ μm; **5.** a) 160 żerdzi, b) 40 łańcuchów; **7.** $1{,}1 \cdot 10^3$ akrostóp; **9.** $1{,}9 \cdot 10^{22}$ cm^3; **11.** a) 1,43, b) 0,864; **13.** a) 495 s, b) 141 s, c) 198 s, d) −245 s; **15.** $1{,}21 \cdot 10^{12}$ μs; **17.** C, D, A, B, E — podstawowym kryterium oceny jest stałość zmian dobowych, a nie ich wielkość; **19.** $5{,}2 \cdot 10^6$ m; **21.** $9 \cdot 10^{49}$; **23.** a) 10^3 kg, b) 158 kg/s; **25.** $1{,}9 \cdot 10^5$ kg; **27.** a) $1{,}18 \cdot 10^{-29}$ m^3, b) 0,282 nm; **29.** $1{,}75 \cdot 10^3$ kg; **31.** 1,43 kg/min; **33.** a) 293 buszli am., b) $3{,}81 \cdot 10^3$ buszli am.; **35.** a) 22 garnce, b) 5,5 buszli, c) 200 l; **37.** $8 \cdot 10^2$ km; **39.** a) 18,8 galonów, b) 22,5 galonów; **41.** 0,3; **43.** 3,8 mg/s; **45.** a) tak, b) 8,6 s; **47.** 0,12 j.a./min; **49.** a) 3,88, b) 7,65, c) 156 ken^3, d) $1{,}19 \cdot 10^3$ m^3; **51.** a) 3,9 m, 4,8 m, b) $3{,}9 \cdot 10^3$ mm, $4{,}8 \cdot 10^3$ mm, c) 2,2 m^3, 4,2 m^3; **53.** a) $4{,}9 \cdot 10^{-6}$ parseków, b) $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ lat świetlnych; **55.** a) 3 nebuchadnezzary i 1 methuselah, b) 0,37 butelki standardowej, c) 0,26 l; **57.** 10,7; **59.** 700 do 1500.

Rozdział 2

Sprawdziany: **1.** b i c; **2.** a) 1 i 4, b) 2 i 3 (oblicz pochodną $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$); **3.** a) plus, b) minus, c) minus, d) plus; **4.** 1 i 4 ($a = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ musi być stałe); **5.** a) plus (przemieszczenie w górę wzdłuż osi y), b) minus (przemieszczenie w dół wzdłuż osi y), c) $a = -g = -9{,}8$ m/s^2.

Pytania: **1.** a) ujemny, b) dodatni, c) tak, d) dodatnie, e) stałe; **3.** a) wszystkie razem, b) 4, potem 1 i 2 razem, potem 3; **5.** a) dodatni, b) ujemny, c) 3 i 5, d) 2 i 6 razem, potem 3 i 5 razem, potem 1 i 4 razem (zero); **7.** a) D, b) E; **9.** a) 3, 2, 1, b) 1, 2, 3, c) wszystkie razem, d) 1, 2, 3; **11.** 1 i 2 razem, potem 3.

Zadania: **1.** 13 m; **3.** a) +40 km/h, b) 40 km/h; **5.** a) 0, b) −2 m, c) 0, d) 12 m, e) +12 m, f) +7 m/s; **7.** 60 km; **9.** 1,4 m; **11.** 128 km/h; **13.** a) 73 km/h, b) 68 km/h, c) 70 km/h, d) 0; **15.** a) −6 m/s, b) ujemnym, c) 6 m/s, d) mniejsza, e) tak, 2 s, f) nie; **17.** a) 28,5 cm/s, b) 18,0 cm/s, c) 40,5 cm/s, d) 28,1 cm/s, e) 30,3 cm/s; **19.** −20 m/s^2; **21.** a) 1,10 m/s, b) 6,11 mm/s^2, c) 1,47 m/s, d) 6,11 mm/s^2; **23.** $1{,}62 \cdot 10^{15}$ m/s^2; **25.** a) 30 s, b) 300 m; **27.** a) +1,6 m/s, b) +18 m/s; **29.** a) 10,6 m, b) 41,5 s; **31.** a) $3{,}1 \cdot 10^6$ s, b) $4{,}6 \cdot 10^{13}$ m; **33.** a) 3,56 m/s^2, b) 8,43 m/s; **35.** 0,9 m/s^2; **37.** a) 4 m/s^2, b) $+x$; **39.** a) −2,5 m/s^2, b) 1, d) 0, e) 2; **41.** 40 m; **43.** a) 0,994 m/s^2; **45.** a) 31 m/s, b) 6,4 s; **47.** a) 29,4 m, b) 2,45 s; **49.** a) 5,4 s, b) 41 m/s; **51.** a) 20 m, b) 59 m; **53.** 4 m/s; **55.** a) 857 m/s^2, b) skierowane w górę; **57.** a) $1{,}26 \cdot 10^3$ m/s^2, b) skierowane w górę; **59.** a) 89 cm, b) 22 cm; **61.** 20,4 m; **63.** 2,34 m; **65.** a) 2,25 m/s, b) 3,9 m/s; **67.** 0,56 m/s; **69.** 100 m; **71.** a) 2 s, b) 12 cm, c) −9 cm/s^2, d) w prawo, e) w lewo, f) 3,46 s; **73.** a) 82 m, b) 19 m/s; **75.** a) 0,74 s, b) 6,2 m/s^2; **77.** a) 3,1 m/s^2, b) 45 m, c) 13 s; **79.** 17 m/s; **81.** +47 m/s; **83.** a) 1,23 cm, b) 4 razy, c) 9 razy, d) 16 razy, e) 25 razy; **85.** 25 km/h; **87.** 1,2 h; **89.** $4H$; **91.** a) 3,2 s, b) 1,3 s; **93.** a) 8,85 m/s, b) 1 m; **95.** a) 2 m/s^2, b) 12 m/s, c) 45 m; **97.** a) 48,5 m/s, b) 4,95 s, c) 34,3 m/s, d) 3,5 s; **99.** 22 m/s; **101.** a) $v = (v_0^2 + 2gh)^{0,5}$, b) $t = [(v_0^2 + 2gh)^{0,5} - v_0]/g$, c) taka sama jak w punkcie (a), d) $t = [(v_0^2 + 2gh)^{0,5} + v_0]/g$, dłuższy niż w punkcie (b); **103.** 414 ms; **105.** 90 m; **107.** 0,556 s; **109.** a) 0,28 m/s^2, b) 0,28 m/s^2; **111.** a) 10,2 s, b) 10 m; **113.** a) 5,44 s, b) 53,3 m/s, c) 5,8 m; **115.** 2,3 cm/min; **117.** 0,15 m/s; **119.** a) 1 cm/s, b) 1,6 cm/s, 1,1 cm/s, 0, c) −0,79 cm/s^2, d) 0, −0,87 cm/s^2, −1,2 cm/s^2.

Rozdział 3

Sprawdziany: **1.** a) 7 m (gdy $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają ten sam kierunek), b) 1 m (gdy $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają kierunek przeciwny); **2.** c, d i f (składowe muszą być ustawione tak, by koniec jednej pokrywał się z początkiem drugiej — wektor $\vec{a}$ musi mieć początek w początku pierwszej składowej, a koniec w końcu drugiej); **3.** a) +,+, b) +,−, c) +,+ (narysuj wektor o początku w początku wektora $\vec{d}_1$ i końcu w końcu wektora $\vec{d}_2$); **4.** a) 90°, b) 0° (wektory są równoległe — mają ten sam kierunek), c) 180° (wektory są antyrównoległe — mają przeciwne kierunki); **5.** a) 0° lub 180°, b) 90°.

Pytania: **1.** tak, gdy wektory mają ten sam kierunek; **3.** $\vec{d}_2$, $\vec{d}_1$ lub $\vec{d}_2$, $\vec{d}_2$, $\vec{d}_3$; **5.** wszystkie z wyjątkiem e; **7.** a) tak, b) tak, c) nie; **9.** a) $+x$ w przypadku (1), $+z$ w przypadku (2), $+z$ w przypadku (3), b) $-x$ w przypadku (1), $-z$ w przypadku (2), $-z$ w przypadku (3); **11.** $\vec{s}$, $\vec{p}$, $\vec{r}$ lub $\vec{p}$, $\vec{s}$, $\vec{r}$; **13.** poprawne: c, d, f i h, niepoprawne: a (nie można mnożyć skalarnie wektora i skalara), b (nie można mnożyć wektorowo wektora i skalara), e, g, i oraz j (nie można dodawać do siebie wektora i skalara).

Zadania: **1.** a) −2,5 m, b) −6,9 m; **3.** a) 47,2 m, b) 122°; **5.** a) 156 km, b) 39,8° na zachód od północy; **7.** Wektory przemieszczenia powinny być do siebie a) równoległe, b) antyrównoległe, c) prostopadłe; **9.** a) $(3\text{ m})\hat{\mathrm{i}} - (2\text{ m})\hat{\mathrm{j}} + (5\text{ m})\hat{\mathrm{k}}$, b) $(5\text{ m})\hat{\mathrm{i}} - (4\text{ m})\hat{\mathrm{j}} - (3\text{ m})\hat{\mathrm{k}}$, c) $(-5\text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (4\text{ m})\hat{\mathrm{j}} + (3\text{ m})\hat{\mathrm{k}}$; **11.** a) $-(9\text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (10\text{ m})\hat{\mathrm{j}}$, b) 13 m, c) +132°; **13.** 4,74 km; **15.** a) 1,59 m, b) 12,1 m, c) 12,2 m, d) 82,5°; **17.** a) 38 m, b) −37,5°, c) 130 m, d) 1,2°, e) 62 m, f) 130°; **19.** a) 5,39 m,

b) 21,8° w lewo względem kierunku do przodu; **21.** a) 70 cm, b) 80 cm, c) 141 cm, d) −172°; **23.** 3,2; **25.** 2,6 km; **27.** a) $8\hat{i}+16\hat{j}$, b) $2\hat{i}+4\hat{j}$; **29.** a) 7,5 cm, b) 90°, c) 8,6 cm, d) 48°; **31.** a) 9,51 m, b) 14,1 m, c) 13,4 m, d) 10,5 m; **33.** a) 12, b) $+z$, c) 12, d) $-z$, e) 12, f) $+z$; **35.** a) −18,8 jednostek, b) 26,9 jednostek, kierunek $+z$; **37.** a) −21, b) −9, c) $5\hat{i}-11\hat{j}-9\hat{k}$; **39.** 70,5°; **41.** 22°; **43.** a) 3 m, b) 0, c) 3,46 m, d) 2 m, e) −5 m, f) 8,66 m, g) −6,67, h) 4,33; **45.** a) −83,4, b) $(1{,}14\cdot10^{3})\hat{k}$, c) $1{,}14\cdot10^{3}$, θ nieokreślone, $\phi=0°$, d) 90°, e) $-5,14\hat{i}+6,13\hat{j}+3\hat{k}$, f) 8,54, $\theta=130°$, $\phi=69{,}4°$; **47.** a) 140°, b) 90°, c) 99,1°; **49.** a) 103 km, b) 60,9° na północ od zachodu; **51.** a) 27,8 m, b) 13,4 m; **53.** a) 30, b) 52; **55.** a) −2,83 m, b) −2,83 m, c) 5 m, d) 0, e) 3 m, f) 5,2 m, g) 5,17 m, h) 2,37 m, i) 5,69 m, j) 25° na północ od wschodu, k) 5,69 m, l) 25° na południe od zachodu; **57.** 4,1; **59.** a) $(9{,}19\text{ m})\hat{i}'+(7{,}71\text{ m})\hat{j}'$, b) $(14\text{ m})\hat{i}'+(3{,}41\text{ m})\hat{j}'$; **61.** a) $11\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$, b) 120°, c) −4,9, d) 7,3; **63.** a) 3 m^2, b) 52 m^3, c) $(11\text{ m}^2)\hat{i}+(9\text{ m}^2)\hat{j}+(3\text{ m}^2)\hat{k}$; **65.** a) $(-40\hat{i}-20\hat{j}+25\hat{k})$ m, b) 45 m, **67.** a) 0, b) 0, c) −1, d) zachodni, e) do góry, f) zachodni; **69.** a) 168 cm, b) 32,5°; **71.** a) 15 m, b) południowy, c) 6 m, d) północny; **73.** a) $2\hat{k}$, b) 26, c) 46, d) 5,81; **75.** a) w górę, b) 0, c) południe, d) 1, e) 0; **77.** a) $(1300\text{ m})\hat{i}+(2200\text{ m})\hat{j}-(410\text{ m})\hat{k}$, b) $2{,}56\cdot10^{3}$ m; **79.** 8,4.

Rozdział 4

Sprawdziany: **1.** (narysuj wektor $\vec{v}$ styczny do toru, o początku na torze) a) pierwszej, b) trzeciej; **2.** (oblicz drugą pochodną położenia względem czasu) 1 i 3 — a_x i a_y są stałe, a zatem wektor $\vec{a}$ jest stały, 2 i 4 – a_y jest stałe, ale a_x nie, zatem wektor $\vec{a}$ nie jest stały; **3.** tak; **4.** a) v_x stałe, b) v_y początkowo dodatnie, malejące aż do zera, potem ujemne o rosnącej wartości bezwzględnej, c) $a_x=0$ przez cały czas, d) $a_y=-g$ przez cały czas; **5.** a) $-(4\text{ m/s})\hat{i}$, b) $-(8\text{ m/s}^2)\hat{j}$.

Pytania: **1.** a i c razem, potem b; **3.** maleje; 5. a, b, c; **7.** a) 0, b) 350 km/h, c) 350 km/h, d) taki sam (ruch w pionie by się nie zmienił); **9.** a) wszystkie razem, b) wszystkie razem, c) 3, 2, 1, d) 3, 2, 1; **11.** 2, potem 1 i 4 razem, potem 3; **13.** a) tak, b) nie, c) tak; **15.** a) zmaleje, b) wzrośnie; **17.** najwyższym.

Zadania: **1.** a) 6,2 m; **3.** $(-2\text{ m})\hat{i}+(6\text{ m})\hat{j}-(10\text{ m})\hat{k}$; **5.** a) 7,59 km/h, b) 22,5° na zachód od północy; **7.** $(-0{,}7\text{ m/s})\hat{i}+(1{,}4\text{ m/s})\hat{j}-(0{,}4\text{ m/s})\hat{k}$; **9.** a) 0,83 cm/s, b) 0°, c) 0,11 m/s, d) −63°; **11.** a) $(6\hat{i}-106\hat{j})$ m, b) $(19\hat{i}-224\hat{j})$ m/s, c) $(24\hat{i}-336\hat{j})$ m/s^2, d) −85,2°; **13.** a) $(8t\hat{j}+\hat{k})$ m/s, b) $8\hat{j}$ m/s^2; **15.** a) $(-1{,}5\hat{j})$ m/s, b) $(4{,}5\hat{i}-2{,}25\hat{j})$ m; **17.** $(32\text{ m/s})\hat{i}$; **19.** a) $(72\text{ m})\hat{i}+(90{,}7\text{ m})\hat{j}$, b) 49,5°; **21.** a) 18 cm, b) 1,9 m; **23.** a) 3,03 s, b) 758 m, c) 29,7 m/s; **25.** 43,1 m/s (155 km/h); **27.** a) 10 s, b) 897 m; **29.** 78,5°; **31.** 3,35 m; **33.** a) 202 m/s, b) 806 m, c) 161 m/s, d) −171 m/s; **35.** 4,84 cm; **37.** a) 1,6 m, b) 6,86 m, c) 2,86 m; **39.** a) 32,3 m, b) 21,9 m/s, c) 40,4°, d) w dół; **41.** 55,5°; **43.** a) 11 m, b) 23 m, c) 17 m/s, d) 63° w dół od poziomu; **45.** a) na pochyłości, b) 5,82 m, c) 31° **47.** a) tak, b) 2,56 m; **49.** a) 31°, b) 63°; **51.** a) 2,3°, b) 1,1 m, c) 18°; **53.** a) 75 m, b) 31,9 m/s, c) 66,9°, d) 25,5 m; **55.** trzeci; **57.** a) 7,32 m, b) zachodni, c) północny; **59.** a) 12 s, b) 4,1 m/s^2, c) w dół, d) 4,1 m/s^2, e) w górę; **61.** a) $1{,}3\cdot10^{5}$ m/s, b) $7{,}9\cdot10^{5}$ m/s^2, c) zwiększą się; **63.** 2,92 m; **65.** $(3\text{ m/s}^2)\hat{i}+(6\text{ m/s}^2)\hat{j}$; **67.** 160 m/s^2; **69.** a) 13 m/s^2, b) wschodni, c) 13 m/s^2, d) wschodni; **71.** 1,67; **73.** a) $(80\text{ km/h})\hat{i}-(60\text{ km/h})\hat{j}$, b) 0°, c) nie; **75.** 32 m/s; **77.** 60°; **79.** a) 38 węzłów, b) 1,5° na wschód od północy, c) 4,2 h, d) 1,5° na zachód od południa; **81.** a) $(-32\text{ km/h})\hat{i}-(46\text{ km/h})\hat{j}$, b) $[(2{,}5\text{ km})-(32\text{ km/h})t]\hat{i}+[(4\text{ km})-(46\text{ km/h})t]\hat{j}$, c) 0,084 h, d) $2\cdot10^{2}$ m; **83.** a) −30°, b) 69 min, c) 80 min, d) 80 min, e) 0°, f) 60 min; **85.** a) 2,7 km, b) 76° w prawo; **87.** a) 44 m, b) 13 m, c) 8,9 m; **89.** a) 45 m, b) 22 m/s; **91.** a) $2{,}6\cdot10^{2}$ m/s, b) 45 s, c) zwiększyłoby; **93.** a) 63 km, b) 18° na południe od wschodu, c) 0,7 km/h, d) 18° na południe od wschodu, e) 1,6 km/h, f) 1,2 km/h, g) 33° na północ od wschodu; **95.** a) 1,5, b) (36 m, 54 m); **97.** a) 62 ms, b) $4{,}8\cdot10^{2}$ m/s; **99.** 2,64 m; **101.** a) 2,5 m, b) 0,82 m, c) 9,8 m/s^2, d) 9,8 m/s^2; **103.** a) 6,79 km/h, b) 6,96°; **105.** a) 16 m/s, b) 23°, c) wznosi się, d) 27 m/s, e) 57°, f) opada; **107.** a) 4,2 m, 45°, b) 5,5 m, 68°, c) 6 m, 90°, d) 4,2 m, 135°, e) 0,85 m/s, 135°, f) 0,94 m/s, 90°, g) 0,94 m/s, 180°, h) 0,3 m/s^2, 180°, i) 0,3 m/s^2, 270°; **109.** a) $5{,}4\cdot10^{-13}$ m, b) zmniejszy się; **111.** a) 0,034 m/s^2, b) 84 min; **113.** a) 8,43 m, b) −129°; **115.** a) 2 ns, b) 2 mm, c) $1\cdot10^{7}$ m/s, d) $2\cdot10^{6}$ m/s; **117.** a) 24 m/s, b) 65°; **119.** 93° względem kierunku ruchu wagonu; **121.** a) $4{,}6\cdot10^{12}$ m, b) $2{,}4\cdot10^{5}$ s; **123.** a) 6,29°, b) 83,7°; **125.** 30 m; **127.** a) $(6\hat{i}+4{,}2\hat{j})$ m/s, b) $(18\hat{i}+6{,}3\hat{j})$ m; **129.** a) 15,2 m/s, b) 12,8 m/s, c) 3,72 m; **131.** a) 11 m, b) 45 m/s; **133.** a) 5,8 m/s, b) 17 m, c) 67°; **135.** a) 32,4 m, b) −37,7 m; **137.** 88,6 km/h.

Rozdział 5

Sprawdziany: **1.** c, d i e (wektory $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ muszą być ustawione tak, by koniec jednego pokrywał się z początkiem drugiego, a wektor $\vec{F}_{wyp}$ musi mieć początek w początku pierwszego z nich, a koniec w końcu drugiego); **2.** a) i b) 2 N, skierowana w lewo (w obu przypadkach przyspieszenie jest równe zeru); **3.** a) równą, b) większą (przyspieszenie jest skierowane w górę, a zatem działająca na ciało siła wypadkowa musi być skierowana w górę); **4.** a) równą, b) większą, c) mniejszą; **5.** a) rosną, b) tak, c) pozostają bez zmiany, d) tak.

Pytania: **1.** a) 2, 3, 4, b) 1, 3, 4, c) 1: $+y$, 2: $+x$, 3: czwarta ćwiartka, 4: trzecia ćwiartka; **3.** zwiększyć; **5.** a) 2 i 4, b) 2 i 4; **7.** a) M, b) M, c) M, d) $2M$, e) $3M$; **9.** a) 20 kg, b) 18 kg, c) 10 kg, d) wszystkie razem, e) 3, 2, 1; **11.** a) rośnie od swej wartości początkowej mg, b) maleje od mg do zera (po czym klocek wznosi się nad podłogę).

Zadania: **1.** 2,9 m/s^2; **3.** a) 1,88 N, b) 0,684 N, c) $(1{,}88\hat{i}+0{,}684\hat{j})$ N; **5.** a) $(0{,}86\text{ m/s}^2)\hat{i}-(0{,}16\text{ m/s}^2)\hat{j}$, b) 0,88 m/s^2, c) −11°; **7.** a) $(-32\text{ N})\hat{i}-(20{,}8\text{ N})\hat{j}$, b) 38,2 N, c) −147°; **9.** a) 8,37 N, b) −133°, c) −125°; **11.** 9 m/s^2; **13.** a) 4 kg, b) 1 kg, c) 4 kg, d) 1 kg; **15.** a) 108 N, b) 108 N, c) 108 N; **17.** a) 42 N, b) 72 N, c) 4,9 m/s^2; **19.** $1{,}2\cdot10^{5}$ N; **21.** a) 11,7 N, b) −59°; **23.** a) $(285\text{ N})\hat{i}+(705\text{ N})\hat{j}$, b) $(285\text{ N})\hat{i}-(115\text{ N})\hat{j}$, c) 307 N, d) −22°, e) 3,67 m/s^2, f) −22°; **25.** a) 0,022 m/s^2, b) $8{,}3\cdot10^{4}$ km, c) $1{,}9\cdot10^{3}$ m/s; **27.** 1,5 mm; **29.** a) 494 N, b) w górę, c) 494 N, d) w dół; **31.** a) 1,18 m, b) 0,674 s, c) 3,5 m/s; **33.** $1{,}8\cdot10^{4}$ N; **35.** a) 46,7°, b) 28°; **37.** a) 0,62 m/s^2, b) 0,13 m/s^2, c) 2,6 m;

39. a) $2{,}2 \cdot 10^{-3}$ N, b) $3{,}7 \cdot 10^{-3}$ N; **41.** a) 1,4 m/s^2, b) 4,1 m/s; **43.** a) 1,23 N, b) 2,46 N, c) 3,69 N, d) 4,92 N, e) 6,15 N, f) 0,25 N; **45.** a) 31,3 kN, b) 24,3 kN; **47.** $6{,}4 \cdot 10^3$ N; **49.** a) 2,18 m/s^2, b) 116 N, c) 21 m/s^2; **51.** a) 3,6 m/s^2, b) 17 N; **53.** a) 0,97 m/s^2, b) 11,6 N, c) 34,9 N; **55.** a) 1,1 N; **57.** a) 0,735 m/s^2, b) w dół, c) 20,8 N; **59.** a) 4,9 m/s^2, b) 2 m/s^2, c) w górę, d) 120 N; **61.** $2Ma/(a+g)$; **63.** a) 8 m/s, b) $+x$; **65.** a) 0,653 m/s^3, b) 0,896 m/s^3, c) 6,5 s; **67.** 81,7 N; **69.** 2,4 N; **71.** 16 N; **73.** a) 2,6 N, b) 17°; **75.** a) 0, b) 0,83 m/s^2, c) 0; **77.** a) 0,74 m/s^2, b) 7,3 m/s^2; **79.** a) 11 N, b) 2,2 kg, c) 0, d) 2,2 kg; **81.** 195 N; **83.** a) 4,6 m/s^2, b) 2,6 m/s^2; **85.** a) lina się zerwie, b) 1,6 m/s^2; **87.** a) 65 N, b) 49 N; **89.** a) $4{,}6 \cdot 10^3$ N, b) $5{,}8 \cdot 10^3$ N; **91.** a) 180 N, b) 640 N; **93.** a) 44 N, b) 78 N, c) 54 N, d) 152 N; **95.** a) 4 kg, b) 6,5 m/s^2, c) 13 N; **97.** a) $(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})$ N, b) 2,2 N, c) −63°, d) 2,2 m/s^2, e) −63°.

Rozdział 6

Sprawdziany: 1. a) 0 (żadna siła nie stara się wprawić klocka w ruch), b) 5 N, c) nie, d) tak, e) 8 N; **2.** ($\vec{a}$ jest skierowane do środka kołowego toru ciała) a) $\vec{a}$ w dół, $\vec{F}_N$ w górę, b) $\vec{a}$ i $\vec{F}_N$ w górę, c) takie same; d) większa w najniższym punkcie toru.

Pytania: 1. a) maleje, b) maleje, c) maleje, d) rośnie, e) rośnie; **3.** a) pozostaje bez zmiany, b) rośnie, c) rośnie, d) nie; **5.** a) w górę, b) poziomy, ku tobie, c) nie zmienia się, d) rośnie, e) rośnie; **7.** Początkowo siła $\vec{f}_s$ jest skierowana w górę wzdłuż równi, a jej wartość rośnie od $mg\sin\theta$ aż do wartości $f_{s,max}$. Później na klocek działa siła tarcia kinetycznego, która jest skierowana w górę wzdłuż równi, a jej wartość f_k jest stała (i mniejsza od $f_{s,max}$); **9.** 4, 3, potem razem: 1, 2 i 5. **11.** a) wszystkie razem, b) wszystkie razem, c) 2, 3, 1; **13.** a) rośnie, b) rośnie, c) maleje, d) maleje, e) maleje.

Zadania: 1. 36 m; **3.** a) 200 N, b) 120 N; **5.** a) 6 N, b) 3,6 N, c) 3,1 N; **7.** a) 190 N, b) 0,56 m/s^2; **9.** a) 11 N, b) 0,14 m/s^2; **11.** a) 300 N, b) 1,3 m/s^2; **13.** a) 130 N, b) nie, c) 110 N, d) 46 N, e) 17 N; **15.** 2°; **17.** a) (17 N)$\hat{\imath}$, b) (20 N)$\hat{\imath}$, c) (15 N)$\hat{\imath}$; **19.** a) nie, b) $(-12\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})$ N; **21.** a) 19°, b) 3,3 kN; **23.** 0,37; **25.** 100 N; **27.** a) 0, b) $(-3{,}9$ m/s$^2)\hat{\imath}$, c) $(-1{,}0$ m/s$^2)\hat{\imath}$; **29.** a) 66 N, b) 2,3 m/s^2; **31.** a) 3,5 m/s^2, b) 0,21 N; **33.** 9,9 s; **35.** 490 N; **37.** a) 320 km/h, b) 650 km/h, c) nie; **39.** 2,3; **41.** 0,6; **43.** 21 m; **45.** a) lżejszy, b) 778 N, c) 223 N, d) 1,11 kN; **47.** a) 10 s, b) 490 N; (c) 1,1 kN; **49.** 1,37 kN; **51.** 2,2 km; **53.** 12°; **55.** 2,6 kN; **57.** 1,81 m/s, **59.** a) 8,74 N, b) 37,9 N, c) 6,45 m/s, d) wzdłuż promienia do osi; **61.** a) 27 N, b) 3 m/s^2; **63.** b) 240 N, c) 0,6; **65.** a) 69 km/h, b) 139 km/h, c) tak; **67.** $g(\sin\theta - 2^{0,5}\mu_k\cos\theta)$; **69.** 3,4 m/s^2; **71.** a) 35,3 N, b) 39,7 N, c) 320 N; **73.** a) 7,5 m/s^2, b) w dół, c) 9,5 m/s^2, d) w dół; **75.** a) $3 \cdot 10^5$ N, b) 1,2°; **77.** 147 m/s; **79.** a) 13 N, b) 1,6 m/s^2; **81.** a) 275 N, b) 877 N; **83.** a) 84,2 N, b) 52,8 N, c) 1,87 m/s^2; **85.** 3,4%; **87.** a) 3,21 kN, b) tak; **89.** a) 222 N, b) 334 N, c) 311 N, d) 311 N, e) c i d; **91.** a) $v_0^2/(4g\sin\theta)$, b) nie; **93.** a) 0,34, b) 0,24; **95.** a) $\mu_k mg/(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$, b) $\theta_0 = \operatorname{arctg}\mu_s$; **97.** 0,18; **99.** a) 56 N, b) 59 N, c) 1,1 kN; **101.** 0,76; **103.** a) gdy kamień był w najwyższym punkcie toru, b) 9,5 m/s; **105.** 0,56.

Rozdział 7

Sprawdziany: 1. a) zmaleje, b) nie zmieni się, c) ujemna, równa zeru; **2.** a) dodatnia, b) ujemna, c) równa zeru; **3.** równa zeru.

Pytania: 1. wszystkie razem; **3.** a) dodatnia, b) ujemna, c) ujemna; **5.** b (praca dodatnia), a (praca równa zeru), c (praca ujemna), d (jeszcze mniejsza praca ujemna); **7.** wszystkie razem; **9.** a) A, b) B; **11.** 2, 3, 1.

Zadania: 1. a) $2{,}9 \cdot 10^7$ m/s, b) $2{,}1 \cdot 10^{-13}$ J; **3.** a) $5 \cdot 10^{14}$ J, b) 0,1 megatony TNT, c) 8; **5.** a) 2,4 m/s, b) 4,8 m/s; **7.** 0,96 J; **9.** 20 J; **11.** a) 62,3°, b) 118°; **13.** a) 170 N, b) 340 m, c) $-5{,}8 \cdot 10^4$ J, d) 340 N, e) 170 m, f) $-5{,}8 \cdot 10^4$ J; **15.** a) 1,5 J, b) wzrasta; **17.** a) 12 kJ, b) −11 kJ, c) 1,1 kJ, d) 5,4 m/s; **19.** 25 J; **21.** a) $-3Mgd/4$, b) Mgd, c) $Mgd/4$, d) $\sqrt{gd/2}$; **23.** 4,41 J; **25.** a) 25,9 kJ, b) 2,45 N; **27.** a) 7,2 J, b) 7,2 J, c) 0, d) −25 J; **29.** a) 0,9 J, b) 2,1 J, c) 0; **31.** a) 6,6 m/s, b) 4,7 m; **33.** a) 0,12 m, b) 0,36 J, c) −0,36 J, d) 0,06 m, e) 0,09 J; **35.** a) 0, b) 0; **37.** a) 42 J, b) 30 J, c) 12 J, d) 6,5 m/s, kierunek $+x$, e) 5,5 m/s, kierunek $+x$, f) 35 m/s, kierunek $+x$; **39.** 4 N/m; **41.** 530 J; **43.** a) 0,83 J, b) 2,5 J, c) 4,2 J, d) 5 W; **45.** 490 W; **47.** a) 100 J, b) 8,4 W; **49.** 740 W; **51.** a) 32 J, b) 8 W, c) 78,2°; **53.** a) 1,2 J, b) 1,1 m/s; **55.** a) $26 \cdot 10^4$ J, b) 0,55 KM. **57.** a) 797 N, b) 0, c) −1,55 kJ, d) 0, e) 1,55 kJ, f) F się zmienia podczas przemieszczania skrzyni; **59.** a) 11 J, b) −21 J; **61.** −6 J; **63.** a) 314 J, b) −155 J, c) 0, d) 158 J; **65.** a) 98 N, b) 4 cm, c) 3,9 J, d) −3,9 J; **67.** a) 23 mm, b) 45 N; **69.** 165 kW; **71.** −37 J; **73.** a) 13 J, b) 13 J; **75.** 235 kW; **77.** a) 6 J, b) 6 J; **79.** a) 0,6 J, b) 0, c) −0,6 J; **81.** a) 3,35 m/s, b) 22,5 J, c) 0, d) 0, e) 0,212 m; **83.** a) −520 J, b) −0,16 J; **85.** 6,63 m/s.

Rozdział 8

Sprawdziany: 1. nie (rozważ pełny obieg mniejszej pętli); **2.** 3, 1, 2 (patrz równanie (8.6)); **3.** a) wszystkie razem, b) wszystkie razem; **4.** a) CD, AB, BC (zero) (zbadaj nachylenie wykresu), b) dodatni kierunek osi x; **5.** wszystkie razem.

Pytania: 1. a) 3, 2, 1, b) 1, 2, 3; **3.** a) 12 J, b) −2 J; **5.** a) rośnie, b) maleje, c) maleje, d) nie zmienia się w obszarach AB i BC, maleje w obszarze CD; **7.** +30 J; **9.** 2, 1, 3; **11.** −40 J.

Zadania: 1. 89 N/cm; **3.** a) 167 J, b) −167 J, c) 196 J, d) 29 J, e) 167 J, f) −167 J, g) 296 J, h) 129 J; **5.** a) 4,31 mJ, b) −4,31 mJ, c) 4,31 mJ, d) −4,31 mJ, e) wszystkie się zwiększą; **7.** a) 13,1 J, b) −13,1 J, c) 13,1 J, d) wszystkie wzrosną; **9.** a) 17 m/s, b) 26,5 m/s, c) 33,4 m/s, d) 56,7 m, e) pozostaną bez zmiany; **11.** a) 2,08 m/s, b) 2,08 m/s, c) wzrośnie; **13.** a) 0,98 J, b) −0,98 J, c) 3,1 N/cm; **15.** a) 260 m, b) nie zmieni się, c) zmaleje; **17.** a) 2,5 N, b) 0,31 N, c) 30 cm; **19.** a) 784 N/m, b) 62,7 J, c) 62,7 J, d) 80 cm; **21.** a) 8,35 m/s, b) 4,33 m/s, c) 7,45 m/s, d) obie zmaleją; **23.** a) 4,85 m/s, b) 2,42 m/s; **25.** −320 J; **27.** a) nie, b) 930 N; **29.** a) 35 cm, b) 1,7 m/s; **31.** a) 39,2 J, b) 39,2 J, c) 4 m; **33.** a) 2,4 m/s, b) 4,19 m/s; **35.** a) 39,6 cm, b) 3,64 cm; **37.** −18 mJ; **39.** a) 2,1 m/s, b) 10 N, c) kierunek $+x$, d) 5,7 m, e) 30 N, f) kierunek $-x$; **41.** a) −3,7 J, c) 1,3 m, d) 9,1 m, e) 2,2 J, f) 4 m, g) $(4-x)e^{-x/4}$, h) 4 m; **43.** a) 5,6 J, b) 3,5 J; **45.** a) 30,1 J, b) 30,1 J, c) 0,225; **47.** 0,53 J; **49.** a) −2,9 kJ, b) 390 J, c) 210 N; **51.** a) 1,5 MJ, b) 0,51 MJ, c) 1 MJ, d) 63 m/s; **53.** a) 67 J, b) 67 J,

c) 46 cm; **55.** a) $-0{,}9$ J, b) 0,46 J, c) 1 m/s; **57.** 1,2 m; **59.** a) 19,4 m, b) 19 m/s; **61.** a) 150 N; (b) $380g$; **63.** a) 7,4 m/s, b) 90 cm, c) 2,8 m, d) 15 m; **65.** 20 cm; **67.** a) 7 J, b) 22 J; **69.** 3,7 J; **71.** 4,33 m/s; **73.** 25 J; **75.** a) 4,9 m/s, b) 4,5 N, c) 71°, d) się nie zmieni; **77.** a) 4,8 N, b) kierunek $+x$, c) 1,5 m, d) 13,5 m, e) 3,5 m/s; **79.** a) 24 kJ, b) 470 N; **81.** a) 5 J, b) 9 J, c) 11 J, d) 3 J, e) 12 J, f) 2 J, g) 13 J, h) 1 J, i) 13 J, j) 1 J, l) 11 J, m) 10,8 m, n) zawróci do punktu $x = 0$ i tam się zatrzyma; **83.** a) 6 kJ, b) 0,6 kW, c) 0,3 kW, d) 0,9 kW; **85.** 880 MW; **87.** a) $v_0 = (2gL)^{0,5}$, b) $5mg$, c) $-mgL$, d) $-2mgL$; **89.** a) 109 J, b) 60,3 J, c) 68,2 J, d) 41 J; **91.** a) 2,7 J, b) 1,8 J, c) 0,39 m; **93.** a) 10 m, b) 49 N, c) 4,1 m, d) 120 N; **95.** a) 5,5 m/s, b) 5,4 m, c) pozostaną bez zmiany; **97.** 80 mJ; **99.** 24 W; **101.** -12 J; **103.** a) 8,8 m/s, b) 2,6 kJ, c) 1,6 kW; **105.** a) 740 J, b) 240 J; **107.** 15 J; **109.** a) 2,35 kJ, b) 352 J; **111.** 738 m, **113.** a) $-3{,}8$ kJ, b) 31 kN; **115.** a) 300 J, b) 93,8 J, c) 6,38 m; **117.** a) 5,6 J, b) 12 J, c) 13 J; **119.** a) 1,2 J, b) 11 m/s, c) nie, d) nie; **121.** a) $2{,}1 \cdot 10^6$ kg, b) $(100+1{,}5t)^{0,5}$ m/s, c) $(1{,}5 \cdot 10^6)/(100+1{,}5t)^{0,5}$ N, d) 6,7 km; **123.** 54%; **125.** a) $2{,}7 \cdot 10^9$ J, b) $2{,}7 \cdot 10^9$ W, c) $2{,}4 \cdot 10^8$; **127.** 5,4 kJ; **129.** $3{,}1 \cdot 10^{11}$ W; **131.** jest tak dlatego, że siła, jaką działasz na kapustę, gdy ją opuszczasz, wykonuje pracę; **135.** a) 8,6 kJ, b) 0,86 kW, c) 0,43 kW, d) 1,3 kW.

Rozdział 9

Sprawdziany: **1.** a) w początku układu współrzędnych, b) w czwartej ćwiartce, c) na osi y poniżej początku układu, d) w początku układu, e) w trzeciej ćwiartce, f) w początku układu; **2.** a)–c) w ich środku masy, znajdującym się cały czas w początku osi (siły, którymi działają łyżwiarze, są siłami wewnętrznymi względem układu, a zatem nie mogą zmienić położenia środka masy); **3.** (rozważ nachylenie wykresu i równanie (9.23)) a) 1, 3, potem 2 i 4 razem (siła równa zeru), b) 3; **4.** a) nie zmienia, b) nie zmienia (patrz równanie (9.32)), c) zmniejsza (patrz równanie (9.35)); **5.** a) równe zeru, b) dodatnie (przed odbiciem p_y jest skierowane w dół, a po odbiciu — w górę), c) dodatni kierunek osi y; **6.** (wypadkowa sił zewnętrznych równa zeru, a zatem $\vec{P}$ zachowane) a) 0, b) nie, c) $-x$; **7.** a) 10 kg · m/s, b) 14 kg · m/s, c) 6 kg · m/s; **8.** a) 4 kg · m/s, b) 8 kg · m/s, c) 3 J; **9.** a) 2 kg · m/s (z zachowania pędu wzdłuż osi x), b) 3 kg · m/s (z zachowania pędu wzdłuż osi y).

Pytania: **1.** a) 2 N, w prawo, b) 2 N, w prawo, c) większa niż 2 N, w prawo; **3.** b, c, a; **5.** a) wzdłuż osi x tak, wzdłuż osi y nie, b) wzdłuż osi x tak, wzdłuż osi y nie, c) wzdłuż osi x nie, wzdłuż osi y tak; **7.** a) c — energia kinetyczna nie może być ujemna, d — całkowita energia kinetyczna nie może wzrosnąć, b) a, c) b; **9.** a) jedno jest nieruchome, b) 2, c) 5, d) równa (jak w bilardzie); **11.** a) C, b) B, c) 3.

Zadania: **1.** a) $-1{,}5$ m, b) $-1{,}43$ m; **3.** a) $-6{,}5$ cm, b) 8,3 cm, c) 1,4 cm; **5.** a) $-0{,}45$ cm, b) -2 cm; **7.** a) 0, b) $3{,}13 \cdot 10^{-11}$ m; **9.** a) 28 cm, b) 2,3 m/s; **11.** $(-4\text{ m})\hat{\imath} + (4\text{ m})\hat{\jmath}$; **13.** 53 m; **15.** a) $(2{,}35\hat{\imath} - 1{,}57\hat{\jmath})$ m/s^2, b) $(2{,}35\hat{\imath} - 1{,}57\hat{\jmath})t$ m/s (t w sekundach), d) prosty, pod kątem 34° ku dołowi; **17.** 4,2 m; **19.** a) $7{,}5 \cdot 10^4$ J, b) $3{,}8 \cdot 10^4$ kg·m/s, c) 39° na południe od wschodu; **21.** a) 5 kg·m/s, b) 10 kg · m/s; **23.** od $1 \cdot 10^3$ do $1{,}2 \cdot 10^3$ kg · m/s; **25.** a) 42 N · s, b) 2,1 kN; **27.** a) 67 m/s, b) $-x$, c) 1,2 kN, d) $-x$; **29.** 5 N; **31.** a) $2{,}39 \cdot 10^3$ N · s, b) $4{,}78 \cdot 10^5$ N, c) $1{,}76 \cdot 10^3$ N · s, d) $3{,}52 \cdot 10^5$ N; **33.** a) 5,86 kg · m/s, b) 59,8°, c) 2,93 kN, d) 59,8°; **35.** $9{,}9 \cdot 10^2$ N; **37.** a) 9 kg · m/s, b) 3 kN, c) 4,5 kN, d) 20 m/s; **39.** 3 mm/s; **41.** a) $-(0{,}15\text{ m/s})\hat{\imath}$, b) 0,18 m; **43.** 55 cm; **45.** a) $(\hat{\imath} - 0{,}167\hat{\jmath})$ km/s, b) 3,23 MJ; **47.** a) 14 m/s, b) 45°; **49.** $3{,}1 \cdot 10^2$ m/s; **51.** a) 721 m/s, b) 937 m/s; **53.** a) 33%, b) 23%, c) maleje; **55.** a) +2 m/s, b) $-1{,}3$ J, c) +40 J, d) układowi dostarczono energię, na przykład za pomocą niewielkiego wybuchu; **57.** a) 4,4 m/s, b) 0,8; **59.** 25 cm; **61.** a) 99 g, b) 1,9 m/s, c) 0.93 m/s; **63.** a) 3 m/s, b) 6 m/s; **65.** a) 1,2 kg, b) 2,5 m/s; **67.** -28 cm; **69.** a) 0,21 kg, b) 7,2 m; **71.** a) $4{,}15 \cdot 10^5$ m/s, b) $4{,}84 \cdot 10^5$ m/s; **73.** 120°; **75.** a) 433 m/s, b) 250 m/s; **77.** a) 46 N, b) nie musi się zmieniać; **79.** a) $1{,}57 \cdot 10^6$ N, b) $1{,}35 \cdot 10^5$ kg, c) 2,08 km/s; **81.** a) 7290 m/s, b) 8200 m/s, c) $1{,}271 \cdot 10^{10}$ J, d) $1{,}275 \cdot 10^{10}$ J; **83.** a) 1,92 m, b) 0,64 m; **85.** a) 1,78 m/s, b) mniejszą, c) mniejszą, d) większą; **87.** a) 3,7 m/s, b) 1,3 N · s, c) $1{,}8 \cdot 10^2$ N; **89.** a) $(7{,}4 \cdot 10^3\text{ N} \cdot \text{s})\hat{\imath} - (7{,}4 \cdot 10^3\text{ N} \cdot \text{s})\hat{\jmath}$, b) $(-7{,}4 \cdot 10^3\text{ N} \cdot \text{s})\hat{\imath}$, c) $2{,}3 \cdot 10^3$ N, d) $2{,}1 \cdot 10^4$ N, e) $-45°$; **91.** +4,4 m/s; **93.** $1{,}18 \cdot 10^4$ kg; **95.** a) 1,9 m/s, b) $-30°$, c) sprężyste; **97.** a) 6,9 m/s, b) 30°, c) 6,9 m/s, d) $-30°$, e) 2 m/s, f) $-180°$; **99.** a) 25 mm, b) 26 mm, c) w dół, d) $1{,}6 \cdot 10^{-2}$ m/s^2; **101.** 29 J; **103.** 2,2 kg; **105.** 5 kg; **107.** a) 50 kg/s, b) 160 kg/s; **109.** a) $4{,}6 \cdot 10^3$ km, b) 73%; **111.** 190 m/s; **113.** 28,8 N; **115.** a) 0,745 mm, b) 153°, c) 1,67 mJ; **117.** a) $(2{,}67\text{ m/s})\hat{\imath} + (-3\text{ m/s})\hat{\jmath}$, b) 4,01 m/s, c) 48,4°; **119.** a) $-0{,}5$ m, b) $-1{,}8$ cm, c) 0,5 m; **121.** 0,22%; **123.** 36,5 km/s; **125.** a) $(-1 \cdot 10^{-19}\hat{\imath} + 0{,}67 \cdot 10^{-19}\hat{\jmath})$ kg · m/s, b) $1{,}19 \cdot 10^{-12}$ J; **127.** $2{,}2 \cdot 10^{-3}$.

Rozdział 10

Sprawdziany: **1.** b i c; **2.** a i d ($\alpha = \mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$ musi być stałe); **3.** a) tak, b) nie, c) tak, d) tak; **4.** wszystkie razem; **5.** 1, 2, 4, 3 (patrz równanie (10.36)); **6.** (patrz równanie (10.40)) 1 i 3 razem, potem 4, potem 2 i 5 razem (moment siły równy zeru); **7.** a) w dół na rysunku ($M_{\text{wyp}} = 0$), b) mniejsza (porównaj ramiona sił).

Pytania: **1.** a) c, a, potem b i d razem, b) b, potem a i c razem, potem d; **3.** wszystkie razem; **5.** a) zmniejszyć, b) zgodnym, c) przeciwnym; **7.** zwiększyć; **9.** c, a, b; **11.** mniejsze.

Zadania: **1.** 14; **3.** a) 4 rad/s, b) 11,9 rad/s; **5.** 11 rad/s; **7.** a) 4 m/s, b) nie; **9.** a) 3 s, b) 18,9 rad; **11.** a) 30 s, b) $1{,}8 \cdot 10^3$ rad; **13.** a) 340 s, b) $-4{,}5 \cdot 10^{-3}$ rad/s^2, c) 98 s; **15.** 8 s; **17.** a) 44 rad, b) 5,5 s, c) 32 s, d) $-2{,}1$ s, e) 40 s; **19.** a) $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ rad/s, b) 20,2 m/s^2, c) 0; **21.** $6{,}9 \cdot 10^{-13}$ rad/s; **23.** a) 20,9 rad/s, b) 12,5 m/s, c) 800 obrotów/min^2, d) 600 obrotów; **25.** a) $7{,}3 \cdot 10^{-5}$ rad/s, b) 350 m/s, c) $7{,}3 \cdot 10^{-5}$ rad/s, d) 460 m/s; **27.** a) 73 cm/s^2, b) 0,075, c) 0,11; **29.** a) $3{,}8 \cdot 10^3$ rad/s, b) 190 m/s; **31.** a) 40 s, b) 2 rad/s^2; **33.** 12,3 kg·m^2; **35.** a) 1,1 kJ, b) 9,7 kJ; **37.** 0,097 kg·m^2; **39.** a) 49 MJ, b) 100 min; **41.** a) 0,023 kg · m^2, b) 1,1 mJ; **43.** $4{,}7 \cdot 10^{-4}$ kg · m^2; **45.** $-3{,}85$ N · m, **47.** 4,6 N · m; **49.** a) 28,2 rad/s^2, b) 338 N · m; **51.** a) 6 cm/s^2, b) 4,87 N, c) 4,54 N, d) 1,2 rad/s^2, e) 0,0138 kg·m^2; **53.** 0,140 N; **55.** $2{,}51 \cdot 10^{-4}$ kg · m^2; **57.** a) 420 rad/s^2, b) 500 rad/s; **59.** 396 N · m; **61.** a) $-19{,}8$ kJ, b) 1,32 kW; **63.** 5,42 m/s; **65.** a) 5,32 m/s^2, b) 8,43 m/s^2, c) 41,8°; **67.** 9,82 rad/s; **69.** $6{,}16 \cdot 10^{-5}$ kg · m^2; **71.** a) 31,4 rad/s^2, b) 0,754 m/s^2, c) 56,1 N,

d) 55,1 N; **73.** a) $4{,}81 \cdot 10^5$ N, b) $1{,}12 \cdot 10^4$ N · m, c) $1{,}25 \cdot 10^6$ J; **75.** a) 2,3 rad/s^2, b) 1,4 rad/s^2; **77.** a) −67 obrotów/min^2, b) 8,3 obrotu; **81.** 3,1 rad/s; **83.** a) 1,57 m/s^2, b) 4,55 N, c) 4,94 N; **85.** 30 obrotów; **87.** 0,054 kg · m^2; **89.** $1{,}4 \cdot 10^2$ N · m; **91.** a) 10 J, b) 0,27 m; **93.** 4,6 rad/s^2; **95.** 2,6 J; **97.** a) $5{,}92 \cdot 10^4$ m/s^2, b) $4{,}39 \cdot 10^4$ s^{-2}; **99.** a) 0,791 kg · m^2, b) $1{,}79 \cdot 10^{-2}$ N · m; **101.** a) $1{,}5 \cdot 10^2$ cm/s, b) 15 rad/s, c) 15 rad/s, d) 75 cm/s, e) 3 rad/s; **103.** a) 7 kg · m^2, b) 7,2 m/s, c) 71°; **105.** a) 0,32 rad/s, b) $1 \cdot 10^2$ km/h; **107.** a) $1{,}4 \cdot 10^2$ rad, b) 14 s.

Rozdział 11

Sprawdziany: **1.** a) taka sama, b) mniejsza; **2.** mniejsze (rozważ zamianę energii kinetycznej ruchu obrotowego w grawitacyjną energię potencjalną); **3.** (narysuj wektory i skorzystaj z reguły prawej ręki) a) $\pm z$, b) $+y$, c) $-x$; **4.** (patrz równanie (11.21)) a) 1 i 3 razem, potem 2 i 4 razem, potem 5 (moment pędu równy zeru), b) 2 i 3; **5.** (patrz równania (11.23) i (11.16)) a) 3, potem 1, potem 2 i 4 razem (zmiana równa zeru), b) 3; **6.** a) wszystkie razem (takie samo M i takie samo t, więc takie samo ΔL), b) kula, krążek, obręcz (w kolejności odwrotnej niż I); **7.** a) zmaleje, b) pozostanie bez zmiany ($M_{\text{wyp}} = 0$, zatem L jest zachowane), c) wzrośnie.

Pytania: **1.** a, potem b i c razem, potem e, potem d (moment pędu równy zeru); **3.** a) będzie się obracać w miejscu, b) potoczy się ku tobie, c) potoczy się, oddalając się od ciebie; **5.** a) 1, 2, 3 (moment siły równy zeru), b) 1 i 2 razem, potem 3, c) 1 i 3 razem, potem 2; **7.** a) pozostaje bez zmiany, b) wzrastają, c) maleją, d) pozostaje bez zmiany, maleją, wzrastają; **9.** D, potem B, potem A i C razem; **11.** a) taki sam, b) taki sam.

Zadania: **1.** a) 0, b) (22 m/s)$\hat{\mathbf{i}}$, c) (−22 m/s)$\hat{\mathbf{j}}$, d) 0, e) $1{,}5 \cdot 10^3$ m/s^2, f) $1{,}5 \cdot 10^3$ m/s^2, g) (22 m/s)$\hat{\mathbf{i}}$, h) (44 m/s)$\hat{\mathbf{i}}$, i) 0, j) 0, k) $1{,}5 \cdot 10^3$ m/s^2, l) $1{,}5 \cdot 10^3$ m/s^2; **3.** −3,15 J; **5.** 0,02; **7.** a) 63 rad/s, b) 4 m; **9.** 4,8 m; **11.** a) (−4 N)$\hat{\mathbf{i}}$, b) 0,6 kg · m^2; **13.** 0,5; **15.** a) −(0,11 m)ω, b) −2,1 m/s^2, c) −47 rad/s^2, d) 1,2 s, e) 8,6 m, f) 6,1 m/s; **17.** a) 13 cm/s^2, b) 4,4 s, c) 55 cm/s, d) 18 mJ, e) 1,4 J, f) 27 obr./s; **19.** (−2 N · m)$\hat{\mathbf{i}}$; **21.** a) (6 N · m)$\hat{\mathbf{j}}$ + (8 N · m)$\hat{\mathbf{k}}$, b) (−22 N · m)$\hat{\mathbf{i}}$; **23.** a) (−1,5 N · m)$\hat{\mathbf{i}}$ − (4 N · m)$\hat{\mathbf{j}}$ − (1 N · m)$\hat{\mathbf{k}}$, b) (−1,5 N · m)$\hat{\mathbf{i}}$ − (4 N · m)$\hat{\mathbf{j}}$ − (1 N · m)$\hat{\mathbf{k}}$; **25.** a) (50 N · m)$\hat{\mathbf{k}}$, b) 90°; **27.** a) 0, b) (8 N · m)$\hat{\mathbf{i}}$ + (8 N · m)$\hat{\mathbf{k}}$; **29.** a) 9,8 kg · m^2/s, b) $+z$; **31.** a) 0,b) −22,6 kg · m^2/s, c) −7,84 N · m, d) −7,84 N · m; **33.** a) −(170 kg · m^2/s)$\hat{\mathbf{k}}$, b) +(56 N · m)$\hat{\mathbf{k}}$, c) +(56 kg · m^2/s^2)$\hat{\mathbf{k}}$; **35.** a) $48t\hat{\mathbf{k}}$ N · m, b) rośnie; **37.** a) $4{,}6 \cdot 10^{-3}$ kg · m^2, b) $1{,}1 \cdot 10^{-3}$ kg · m^2/s, c) $3{,}9 \cdot 10^{-3}$ kg · m^2/s; 39. a) 1,47 N · m, b) 20,4 rad, c) −29,9 J, d) 19,9 W; **41.** a) 1,6 kg · m^2, b) 4 kg · m^2/s; **43.** a) 1,5 m, b) 0,93 rad/s, c) 98 J, d) 8,4 rad/s, e) 880 J, f) z energii wewnętrznej łyżwiarek; **45.** a) 3,6 obrotów/s, b) 3, c) gdy człowiek przyciąga cegły do tułowia, działając na nie siłami, zamienia swą energię wewnętrzną w energię kinetyczną; **47.** 0,17 rad/s; **49.** a) 750 obrotów/min, b) 450 obrotów/min, c) zgodną z kierunkiem ruchu wskazówek zegara; **51.** a) 267 obrotów/min, b) 0,667; **53.** $1{,}3 \cdot 10^3$ m/s; **55.** 3,4 rad/s; **57.** a) 18 rad/s, b) 0,92; **59.** 11 m/s; **61.** 1,5 rad/s; **63.** 0,07 rad/s; **65.** a) 0,148 rad/s, b) 0,0123, c) 181°; **67.** a) 0,18 m, b) zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara; **69.** 0,041 rad/s; **71.** a) 1,6 m/s^2, b) 16 rad/s^2, c) (4 N)$\hat{\mathbf{i}}$; **73.** a) 0, b) 0, c) $-30t^3\hat{\mathbf{k}}$ kg · m^2/s, d) $-90t^2\hat{\mathbf{k}}$ N · m, e) $30t^3\hat{\mathbf{k}}$ kg · m^2/s, f) $90t^2\hat{\mathbf{k}}$ N · m; **75.** a) 149 kg · m^2, 158 kg · m^2/s, c) 0,74 rad/s; **77.** a) $6{,}65 \cdot 10^{-5}$ kg · m^2/s, b) nie, c) 0, d) tak; **79.** a) 0,333, b) 0,111; **81.** a) 58,8 J, b) 39,2 J; **83.** a) 61,7 J, b) 3,43 m, c) nie; **85.** a) $mvR/(I + MR^2)$, b) $mvR^2/(I + MR^2)$.

S K O R O W I D Z

C
ciało jednorodne 274
– rozciągłe 274, 280, 345
– sztywne 327
ciężar 129, 130–131
– pozorny 131
cyfra znacząca 5
czas 6, 10, 21
–, wzorzec 6

D
diagram sił 126
długość 4, 10
droga zamknięta 227
– –, równanie 227–228
dżul 188

E
energia 187
– całkowita 252, 254
– kinetyczna 187–189, 188, 212, 232
– –, ruch obrotowy 343, 356, 361
– –, zderzenie 294
– mechaniczna 232, 251
– potencjalna 224, 232, 251
– –, grawitacyjna 225, 230, 251
– – sprężystości 224, 225, 230–231, 251
– –, wyznaczanie 229
– termiczna 226, 244
– wewnętrzna 246–248, 252

G
gęstość 8, 274

H
Hooke R. 201

I
iloczyn skalarny 65–66, 70
– wektorowy 66–68, 70

J
jednostka 2
– masy, atomowa 8
– pochodna 2
– podstawowa 2
–, zamiana 3–4
jo-jo 373
Joule J.P. 188

K
kierunek 18
– dodatni 17, 38
– obrotu 334
– ujemny 17, 38
kilogram 7
–, wzorzec 8
kilowatogodzina 210
kinematyka 12
konfiguracja odniesienia 230, 251
koń mechaniczny 210
krzywa energii potencjalnej 236–237, 251

L
linia odniesienia 360
lot swobodny 35

M
masa 7, 124, 143
– układu, całkowita 271
mechanika klasyczna 120, 143
metr 4
–, wzorzec 5
miara łukowa 338
– – kąta 325, 328
Międzynarodowy Układ Jednostek 2–3
moc 209–210, 213, 246, 249, 252
– chwilowa 210, 211, 246, 249, 252
–, jednostka 210
– średnia 210, 249, 252
moment bezwładności 327, 343, 345, 361
– siły 327, 350, 361
– –, jednostka 350
– –, kierunek 352
– –, wypadkowy 352
– –, wyznaczanie 351

N
naprężenie 133, 143
Newton I. 120

O
obrót ze stałym przyspieszeniem kątowym 335–336
oś obrotu 327
– stała 327

P
Państwowy Instytut Wzorców i Technik (NIST) 6
pęd 283
– całkowity 296
–, jednostka 283
–, układ cząstek 283, 283
–, zderzenie 294
płyn 164
pole przekroju poprzecznego 164, 173
położenie 38, 79–81, 340
– kątowe 328, 360
– –, zerowe 328
– odniesienia 251
– równowagi 239
popęd 285, 286, 307
praca 188, 190, 212
–, brak tarcia 242–243
– całkowita 193, 242
–, energia kinetyczna 190, 212
–, – potencjalna 225
–, jednostka 192
–, podnoszenie ciała 212
–, ruch obrotowy 356, 361
–, siła ciężkości 196, 212
–, – sprężystości 200, 201–203, 212
–, – stała 212
–, – zewnętrzna 252
–, – zmienna 207, 213
–, tarcie 243
–, trzy wymiary 206
– wykonana nad układem 242
–, wzór 190–191
–, znak 192
prawo Hooke'a 200, 201
prędkość 340
–, całkowanie 37
– chwilowa 22-23, 39. 82–84, 102
– graniczna 164–167 , 165, 173
– kątowa 325, 329–330, 334, 360
– –, chwilowa 360
– –, średnia 360
– średnia 19–21, 39, 82–84, 102
–, średnia wartość bezwzględna 21, 39
–, środek masy 296
– światła 4
przemieszczenie 18, 38, 79–81, 102
– kątowe 329, 334, 360
– liniowe 327
–, wektor 53
przesunięcie kątowe 325

przyspieszenie 25, 340
–, całkowanie 36
– chwilowe 25, 39, 85–86, 102
– dośrodkowe 96, 167, 173
– kątowe 325, 330, 360
– –, chwilowe 360
– –, średnie 360
– stałe 9
– średnie 25, 39, 85–86, 102
–, środek masy 279
– ziemskie 27, 34
punkt odniesienia 230
– zwrotny 239, 251

R
radian 325, 328
reguła prawej dłoni 66, 334, 360
rozkład na składowe 55
rozpad ciała 280
równanie ruchu, stałe przyspieszenie 30
– wektorowe 54
równowaga 251
– nietrwała 239–240
– sił 125
– trwała 240
ruch 17
– jednostajny po okręgu 95–97, 103, 167–173, 173
– – – –, okres 96
– – – –, wzór 96
– obrotowy 325
– –, stałe przyspieszenie kątowe 361
– po orbicie 168
– postępowy 325
– prostoliniowy 17–39
–, stałe przyspieszenie 28–33
–, środek masy 278, 308
– w dwóch i trzech wymiarach 79–102
– w jednym wymiarze 237
– względny 103
– – w dwóch wymiarach 100–101
– – w jednym wymiarze 98–99
rzut ukośny 87–92, 102
– –, opór powietrza 92
– –, równanie toru 91
– –, ruch w pionie 91
– –, – w poziomie 90–91
– –, tor 102
– –, zasięg 91, 102

S
sekunda 7
siła 120, 121–122, 143
– akcji 135
–, całkowanie 287
– ciągu 308
– ciężkości 129, 143
– dośrodkowa 168, 169, 173
– grawitacji, patrz siła ciężkości
–, jednostka 125
– niezachowawcza 226, 251
– normalna 129, 131–132, 143
– oporu 164–167, 173
–, ramię 351, 361
– reakcji 135
– sprężystości 200, 212
– tarcia 129, 143, 173
– – kinetycznego 159, 173
– – statycznego 173
– wewnętrzna 126, 279
– wypadkowa 134
– zachowawcza 224, 226, 251
– –, niezależność pracy od drogi 226–227
– zewnętrzna 233, 248, 279
skalar 53, 70
składowa 55
– skalarna 60
skok baletnicy 280
spadek swobodny 34–36, 39, 129
stała siłowa, patrz stała sprężystości
– sprężystości 201
stan nieodkształcony 200
suma wektorowa 54

Ś
środek masy 271, 272, 307

T
tarcie 133, 156–161, 173
– statyczne 157
–, właściwości 160
tarcza, nieruchoma 299
teoria względności Einsteina 120
twierdzenie Steinera 345–346, 361
– –, dowód 346

U
układ ciał 126
– cząstek 272
– –, położenie środka masy 272
– izolowany 233, 247–248
– metryczny 4
– o zmiennej masie 304, 308
– odniesienia, inercjalny 122–123, 143
– SI, patrz Międzynarodowy Układ Jednostek
– współrzędnych, prawoskrętny 60
– zamknięty 279

W
waga 131
wahadło 233
wartość bezwzględna 18
wat 3, 210
Watt J. 210
wektor 53, 70
–, dodawanie geometryczne 70
–, – graficzne 53–55
–, – składowych 70
– jednostkowy 59, 70
–, mnożenie 65
–, – przez skalar 65, 70
–, – – wektor 65
– położenia 80, 102
–, prawa fizyki 70
–, składowe 55, 70
– wypadkowy, patrz suma wektorowa
wielkość fizyczna 2
– podstawowa 2
– –, wzorzec 2
– wektorowa 18, 53
współczynnik oporu 173
– – aerodynamicznego 164
– przeliczeniowy 3
– tarcia kinetycznego 156, 160
– – statycznego 160
wzorzec 2
– wtórny 4

Z
zachowanie energii mechanicznej 232–233
– pędu 290, 307
zasada dynamiki Newtona, druga 124–125, 143, 285, 304, 327
– – –, –, rozkład na składowe 125
– – –, –, ruch obrotowy 352–353, 361
– – –, –, układ cząstek 278, 307
– – –, pierwsza 121, 122, 143
– – –, trzecia 134, 134–135, 143
– superpozycji sił 122
– zachowania energii 188, 246, 252
– – – mechanicznej 233
– – pędu 290, 307
zasady dynamiki, stosowalność 135
zderzenie 285, 307
– 2D 303, 308
– całkowicie niesprężyste 1D 295
–, ciąg 287–288
– niesprężyste 294
– – 1D 295, 308
– pojedyncze 286
–, siła średnia 288
– sprężyste 294
– – 1D 298–299, 308
– –, ciała o jednakowych masach 300
–, zmiana prędkości 288
zegar atomowy 6
– –, cezowy 7
– –, kwarcowy 7
zespawanie na zimno 159
zmienna kątowa 338
– liniowa 338

WYBRANE STAŁE FIZYCZNE*

prędkość światła	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s
stała grawitacyjna	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(s^2 · kg)
stała Avogadra	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
uniwersalna stała gazowa	R	8,31 J/(mol · K)
energetyczny równoważnik masy	c^2	$8{,}99 \cdot 10^{16}$ J/kg
		931,5 MeV/u
stała elektryczna	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m
stała magnetyczna	μ_0	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$ H/m
stała Plancka	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s
		$4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eV · s
stała Boltzmanna	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K
		$8{,}62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
ładunek elementarny	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C
masa elektronu	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg
masa protonu	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg
masa neutronu	m_n	$1{,}68 \cdot 10^{-27}$ kg
masa deuteronu	m_d	$3{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg
promień Bohra	r_B	$5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m
magneton Bohra	μ_B	$9{,}27 \cdot 10^{-24}$ J/T
		$5{,}79 \cdot 10^{-5}$ eV/T
stała Rydberga	R	0,01097 nm^{-1}

* Obszerniejszy spis stałych fizycznych, zawierający także wartości najbardziej dokładne oraz ich niepewności, przedstawiony jest w dodatku B.

WYBRANE WSPÓŁCZYNNIKI ZAMIANY JEDNOSTEK*

Masa i gęstość

1 kg = 1000 g = $6{,}02 \cdot 10^{26}$ u
1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
1 kg/m^3 = 10^{-3} g/cm^3

Długość i objętość

1 m = 100 cm = 39,4 in = 3,28 ft
1 mila = 1,61 km = 5280 ft
1 in = 2,54 cm
1 nm = 10^{-9} m = 10 Å
1 pm = 10^{-12} m = 1000 fm
1 rok świetlny (y) = $9{,}46 \cdot 10^{15}$ m
1 m^3 = 1000 l = 35,3 ft^3
= 264 galony amerykańskie

Czas

1 d = 86 400 s
1 a = $365\frac{1}{4}$ d = $3{,}16 \cdot 10^{7}$ s

Miara łukowa kąta

1 rad = 57,3° = 0,159 obrotu
π rad = 180° = $\frac{1}{2}$ obrotu

Prędkość

1 m/s = 3,28 ft/s = 2,24 mili/h
1 km/h = 0,621 mili/h = 0,278 m/s

Siła i ciśnienie

1 N = 10^5 dyn = 0,225 funta
1 Pa = 1 N/m^2 = 10 dyn/cm^2
1 atm = $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa = 76 cm Hg

Energia i moc

1 J = 10^7 ergów = 0,239 cal
1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^6$ J
1 cal = 4,19 J
1 eV = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J
1 KM = 746 W

Magnetyzm

1 T = 1 Wb/m^2 = 10^4 Gs

* Obszerniejszy spis przedstawiony jest w dodatku D.

Plik zabezpieczony watermarkiem jawnym i niejawnym: 18246903A6232633

Nowoczesny, przejrzyście napisany, kompletny podręcznik podstaw fizyki, który powstał na podstawie legendarnej już książki Resnicka i Hallidaya. Przedstawia aktualny stan wiedzy, zarówno w rozdziałach związanych z fizyką współczesną, jak i w tych dotyczących fizyki klasycznej. Prezentowany materiał jest bogato ilustrowany i poparty wieloma przykładami, a aparat matematyczny ograniczony do niezbędnego minimum.

Uzupełnieniem książki są wykazy niektórych danych astronomicznych, współczynników zamiany jednostek, wzorów matematycznych, właściwości pierwiastków, wybranych stałych i właściwości fizycznych, a także układ okresowy pierwiastków oraz skorowidz pojęć.

HALLIDAY RESNICK • WALKER

PODSTAWY FIZYKI

1

Kultowy podręcznik – nowe wydanie!

Drugie wydanie polskie opiera się na najnowszym, już dziesiątym, wydaniu amerykańskim.

W książce poczyniono pewne zmiany:

- podzielono na nowo treść książki, niektóre rozdziały napisano na nowo
- dodano listę celów nauczania oraz informację o podstawowych faktach, które należy przyswoić
- dodano 16 nowych przykładów oraz 250 nowych zadań i 50 pytań
- w internecie na stronie książki zamieszczono pomoce dydaktyczne (np. animacje, wskazówki do zadań)

Podstawowy podręcznik dla studentów i uczniów
Nieoceniona pomoc dla wykładowców i nauczycieli

TOM 1 zawiera wiadomości z mechaniki klasycznej. Są tu omówione m.in. ruch w jednym, dwóch i trzech wymiarach, siły, energia, praca, zderzenia oraz ruch obrotowy.

PWN
Wydawnictwo Naukowe PWN SA
infolinia: 801 33 33 88
www.pwn.pl

tom 1
ISBN 978-83-01-18114-7
9 788301 181147

tom 1–5
ISBN 978-83-01-18123-9
9 788301 181239