

7 Liczby zespolone

Liczby zespolone to liczby postaci

$$z = a + bi,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Liczbę i nazywamy jednostką urojoną, spełnia ona warunek

$$i^2 = -1.$$

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Liczba rzeczywista a jest liczbą zespoloną postaci $a + 0 \cdot i$. Zatem zbiór liczb rzeczywistych jest zawarty w zbiorze liczb zespolonych: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Postać $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, nazywamy postacią algebraiczną liczby zespolonej. Liczbę a nazywamy częścią rzeczywistą liczby z i oznaczamy ją $a = \operatorname{Re} z$. Liczbę b nazywamy częścią urojoną liczby z i oznaczamy: $b = \operatorname{Im} z$.

Przykład 1. Dla $z = 7 - 5i$ mamy: $\operatorname{Re} z = 7$, $\operatorname{Im} z = -5$.

Na płaszczyźnie Gaussa liczbie zespolonej $z = a + bi$ odpowiada punkt o współrzędnych (a, b) .

7.1 Działania na liczbach zespolonych

Działania na liczbach zespolonych wykonujemy jak na wyrażeniach algebraicznych, pamiętając o tym, że $i^2 = -1$. Podstawowymi działaniami w $\mathbb{C}$ są dodawanie i mnożenie. Dodawanie liczb zespolonych określamy następująco:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$a, b \in \mathbb{R}$. Mnożenie liczb zespolonych:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Podstawowe własności dodawania i mnożenia liczb zespolonych przedstawia poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych liczb zespolonych z, z_1, z_2, z_3 zachodzą następujące równości:*

- (a) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – dodawanie jest łączne,
- (b) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – dodawanie jest przemienne,
- (c) $z + 0 = z$, zero $0 = 0 + 0 \cdot i$ jest elementem neutralnym dodawania,

- (d) $z + (-z) = 0$, liczba $-z = (-a) + (-b)i$ jest elementem przeciwnym (względem dodawania) do $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- (e) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ – mnożenie jest łączne,
- (f) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – mnożenie jest przemienne,
- (g) $z \cdot 1 = z$, jedynka $1 = 1 + 0 \cdot i$ jest elementem neutralnym mnożenia,
- (h) $z \cdot z^{-1} = 1$, liczba $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i$ jest elementem odwrotnym (względem mnożenia) do $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$,
- (i) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ – mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Odejmowanie i dzielenie liczb zespolonych określamy następująco. Odejmowanie: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, czyli

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Dzielenie: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$, czyli

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.$$

Mamy: $\frac{1}{z} = z^{-1}$.

Przykład 2.

$$\frac{1 + 2i}{2 - 3i} = \frac{(1 + 2i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 3i + 4i + 6i^2}{2^2 + 3^2} = \frac{-4 + 7i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{7}{13} \cdot i.$$

Potęgowanie liczb zespolonych definiujemy tak jak dla liczb rzeczywistych. Dla liczby zespolonej z i liczby naturalnej $n > 0$ przyjmujemy:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n.$$

Ponadto, jeśli $z \neq 0$, to przyjmujemy $z^0 = 1$ oraz

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \underbrace{z^{-1} \cdot z^{-1} \cdot \dots \cdot z^{-1}}_n.$$

Zauważmy, że $(z^{-1})^n = (z^n)^{-1}$.

Twierdzenie 2. Dla liczb całkowitych m, n zachodzą wzory:

(a) $z^{m+n} = z^m z^n$,

(b) $z^{m-n} = \frac{z^m}{z^n}$,

$$(c) \quad z^{mn} = (z^m)^n.$$

Rozważmy liczbę zespoloną $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Liczbą sprzężoną do z nazywamy liczbę

$$\bar{z} = a - bi.$$

Przykład 3. Dla $z = 2 + \sqrt{3}i$ mamy: $\bar{z} = 2 - \sqrt{3}i$.

Własności sprzężenia liczby zespolonej przedstawia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Dla dowolnych liczb zespolonych z , z_1 , z_2 zachodzą równości:

$$(a) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$(b) \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$(c) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$$

$$(d) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},$$

$$(e) \quad \overline{(\bar{z})} = z,$$

$$(f) \quad \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

7.2 Moduł i argument liczby zespolonej

Definicja. Modułem liczby zespolonej $z = a + bi$ (gdzie $a, b \in \mathbb{R}$) nazywamy liczbę rzeczywistą

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Przykład 4. $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Na płaszczyźnie Gaussa moduł liczby z jest równy jej odległości od liczby 0. Odległość liczb z_1 i z_2 jest równa $|z_1 - z_2|$.

Podstawowe własności modułu liczby zespolonej są następujące.

Twierdzenie 4. Dla dowolnych liczb zespolonych z , z_1 , z_2 zachodzą równości:

$$(a) \quad |-z| = |z|,$$

$$(b) \quad |\bar{z}| = |z|,$$

$$(c) \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2,$$

$$(d) \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$(e) \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$(f) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Definicja. Argumentem liczby zespolonej $z = a + bi \neq 0$ (gdzie $a, b \in \mathbb{R}$) nazywamy liczbę rzeczywistą φ spełniającą warunki

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{r}, \end{cases}$$

gdzie $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Argument liczby zespolonej jest określony z dokładnością do wielokrotności 2π , tzn. jeśli φ jest argumentem liczby z , to $\varphi + 2k\pi$ (dla $k \in \mathbb{Z}$) też jest argumentem liczby z . Jako argument liczby 0 możemy przyjąć dowolną liczbę rzeczywistą φ .

Na płaszczyźnie Gaussa argument liczby z to miara kąta zorientowanego, jaki tworzy dodatnia półoś rzeczywista z półprostą o początku 0, przechodzącą przez z .

Liczba z ma jednoznacznie określony argument z przedziału $[0, 2\pi)$. Argument ten nazywamy argumentem głównym. Oznaczenie argumentu (głównego): $\varphi = \arg z$.

Uwaga. Czasami wygodniej jest wybrać argument z przedziału $(-\pi, \pi]$.

7.3 Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Dla $r = |z|$ mamy $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$, więc

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r, \varphi \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$.

Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot s(\cos \psi + i \sin \psi) = rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$$

$$\frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{s(\cos \psi + i \sin \psi)} = \frac{r}{s}(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$$

Potęgowanie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej jest bardzo łatwe – wzór de Moivre’a:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Przykład 5.

$$(1 + i)^{100} = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^{100} = 2^{50} (\cos 25\pi + i \sin 25\pi) = -2^{50}$$

7.4 Pierwiastek liczby zespolonej

Pierwiastkiem stopnia n liczby $z \in \mathbb{C}$ nazywamy liczbę $w \in \mathbb{C}$ taką, że $w^n = z$.

Przykład 6. Przykłady pierwiastków liczb zespolonych.

- (a) Liczba i jest pierwiastkiem kwadratowym (tzn. stopnia 2) liczby -1 , liczba $-i$ też!
- (b) Liczby $2, -2, 2i$ i $-2i$ są pierwiastkami stopnia 4 liczby 16 .
- (c) Liczba $1 + i$ jest pierwiastkiem stopnia 100 liczby -2^{50} .

Twierdzenie 5. *Liczba zespolona $z \neq 0$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n . Jeśli*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r, \varphi \in \mathbb{R}, r > 0$, to wszystkie pierwiastki stopnia n liczby z są postaci

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

gdzie $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Na płaszczyźnie Gaussa pierwiastki stopnia n danej liczby zespolonej są wierzchołkami n -kąta foremnego o środku 0 .

Przykład 7. Pierwiastkami stopnia 4 liczby

$$-\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

są liczby

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{2\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) = \\ & = \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{3} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

dla $k = 0, 1, 2, 3$.

Twierdzenie 6 (Zasadnicze twierdzenie algebry). *Wielomian stopnia $n > 0$ o współczynnikach zespolonych posiada (z uwzględnieniem krotności) dokładnie n pierwiastków.*

Zatem dla dowolnego wielomianu o współczynnikach zespolonych

$$W(T) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

istnieją liczby zespolone $z_1, z_2, \dots, z_n$ (niekoniecznie różne) takie, że

$$W(T) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Wniosek 1. *Wielomian stopnia $n > 0$ o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki stopnia 1 i 2.*