

1. Liczby zespolone

1.1. Postać algebraiczna liczby zespolonej

■ **Przykład 1.1.** Wykonać działania:

(a) $(-2 + 3i) + (7 - 8i)$; (b) $(4i - 3) - (1 + 10i)$;

(c) $(\sqrt{2} + i) \cdot (3 - \sqrt{3}i)$; (d) $\frac{2 - 3i}{5 + 4i}$;

(e) $(3 - 2i)^2$; (f) $(2 + 5i)(2 - 5i)$.

Rozwiązanie. Działania dodawania, odejmowania i mnożenia na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) wykonujemy tak, jak na wielomianach zmiennej i , pamiętając o warunku $i^2 = -1$. Natomiast w przypadku dzielenia liczb zespolonych stosujemy przekształcenie

$$\frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{u^2 + v^2}.$$

W zbiorze liczb zespolonych prawdziwe są tożsamości znane dla liczb rzeczywistych: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, itd. Zatem mamy kolejno:

(a) $(-2 + 3i) + (7 - 8i) = (-2 + 7) + (3 - 8)i = 5 - 5i$.

(b) $(4i - 3) - (1 + 10i) = (-3 - 1) + (4 - 10)i = -4 - 6i$.

(c) $(\sqrt{2} + i) \cdot (3 - \sqrt{3}i) = \sqrt{2} \cdot 3 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}i + 3i - \sqrt{3}i^2 = (3\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{6})i$.

(d) $\frac{2 - 3i}{5 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(5 - 4i)}{(5 + 4i)(5 - 4i)} = \frac{10 - 8i - 15i + 12i^2}{25 - 16i^2} = \frac{-2 - 23i}{41} = -\frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$.

(e) $(3 - 2i)^2 = 3^2 - 3 \cdot 2i + (2i)^2 = 9 - 6i + 4i^2 = 9 - 6i - 4 = 5 - 6i$.

(f) $(2 + 5i)(2 - 5i) = 2^2 - (5i)^2 = 4 - 25i^2 = 4 + 25 = 29$.

□ **Zadanie 1.1.** Wykonać działania:

(a) $(1 - 3i) + (4 - 5i)$; (b) $(1 + \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} - 6i)$; (c) $(1 - i)(6 + 5i)$;

(d) $\frac{2 + 3i}{1 + i}$; (e) $(\sqrt{7} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3}i)$; (f) $(\sqrt{3} - i)^3$.

Odpowiedzi. (a) $5 - 8i$; (b) $1 - \sqrt{3} + (6 + \sqrt{2})i$; (c) $11 - i$; (d) $5/2 + i/2$; (e) 10 ; (f) $-8i$.

■ **Przykład 1.2.** Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x(2 + 3i) + y(4 - 5i) = 6 - 2i; & \text{(b)} \quad & (x - i) \cdot (2 - yi) = 11 - 23i; \\ \text{(c)} \quad & \frac{x}{2 - 3i} + \frac{y}{3 + 2i} = 1; & \text{(d)} \quad & \frac{x + 3 - 2i}{y - 4 + i} = 1 - i. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są równe ich części rzeczywiste i urojone, tzn.

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

(a) Mamy $x(2 + 3i) + y(4 - 5i) = (2x + 4y) + (3x - 5y)i$. Zatem

$$x(2 + 3i) + y(4 - 5i) = 6 - 2i \iff (2x + 4y) + (3x - 5y)i = 6 - 2i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ 3x - 5y = -2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 1, y = 1$.

(b) Mamy $(x - i) \cdot (2 - yi) = (2x - y) + (-2 - xy)i$. Zatem

$$(x - i) \cdot (2 - yi) = 11 - 23i \iff (2x - y) + (-2 - xy)i = 11 - 23i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 11, \\ -2 - xy = -23. \end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 11, \\ -2 - x(2x - 11) = -23 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x - 11, \\ 2x^2 - 11x - 21 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7, \\ y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -3/2, \\ y = -14. \end{cases}$$

(c) Mamy

$$\begin{aligned} \frac{x}{2 - 3i} + \frac{y}{3 + 2i} &= \frac{x(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} + \frac{y(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} \\ &= \frac{2x + 3xi}{13} + \frac{3y - 2yi}{13} = \frac{2x + 3y}{13} + \frac{3x - 2y}{13}i. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{x}{2 - 3i} + \frac{y}{3 + 2i} = 1 \iff \frac{2x + 3y}{13} + \frac{3x - 2y}{13}i = 1 \iff (2x + 3y) + (3x - 2y)i = 13,$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - 2y = 13 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 2, y = 3$.

(d) Mamy $\frac{x}{y}$

Porównując c

Rozwiązaniem

□ **Zadanie 1**

(a) $x(2 + 3i)$

(c) $\frac{1 + yi}{x - 2i} =$

Odpowiedzi. (

(d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{$

■ **Przykład**

(a) $z^2 + 3\bar{z}$

(c) $z^2 - z +$

(e) $(z + \bar{z}) -$

(g) $\frac{1 - 3i}{3z + 2i}$

Rozwiązanie.

liczbę zespolo

(a) Niech $z =$

$z^2 +$

Porównując c

układ równań

Układ ten jes

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \\ y(2x -) \end{cases}$$

Zatem równa

(d) Mamy $\frac{x+3-2i}{y-4+i} = 1-i$. Stąd $x+3-2i = (1-i)(y-4+i)$, zatem

$$(x+3)-2i = (y-3) + (5-y)i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x+3 = y-3, \\ -2 = 5-y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x=1, y=7$.

□ Zadanie 1.2. Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

(a) $x(2+3i) + y(5-2i) = -8+7i$; (b) $(2+yi) \cdot (x-3i) = 7-i$;

(c) $\frac{1+yi}{x-2i} = 3i-1$; (d) $\frac{x+yi}{x-yi} = \frac{9-2i}{9+2i}$.

Odpowiedzi. (a) $x=1, y=-2$; (b) nie istnieją takie liczby; (c) $x=5, y=17$;

(d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y = -2x/9$.

■ Przykład 1.3. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

(a) $z^2 + 3\bar{z} = 0$; (b) $2z + (1+i)\bar{z} = 1-3i$;

(c) $z^2 - z + 1 = 0$; (d) $\frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1$;

(e) $(z+\bar{z}) + i(z-\bar{z}) = 2i-6$; (f) $(i-3)z = 5+i-z$;

(g) $\frac{1-3i}{3z+2i} = \frac{2i-3}{5-2iz}$; (h*) $z^2 - i\bar{z} + 2 = 0$.

Rozwiązanie. Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x+iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z}$ określoną wzorem $\bar{z} = x-iy$.

(a) Niech $z = x+iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} z^2 + 3\bar{z} &= (x+iy)^2 + 3(x-iy) \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi + 3x - 3yi = x^2 - y^2 + 3x + (2xy - 3y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $z^2 + 3\bar{z} = 0$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0, \\ 2xy - 3y = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny kolejno układom:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0, \\ y(2x-3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0, \\ y = 0 \text{ lub } x = 3/2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -3, \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3/2, \\ y = 3\sqrt{3}/2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3/2, \\ y = -3\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Zatem równanie $z^2 + 3\bar{z} = 0$ ma cztery rozwiązania:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -3, \quad z_3 = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), \quad z_4 = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i).$$

(b) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} 2z + (1+i)\bar{z} &= 2(x+iy) + (1+i)(x-iy) \\ &= 2x + 2iy + x - iy + ix + y = (3x+y) + (x+y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $2z + (1+i)\bar{z} = 1 - 3i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x + y = -3. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 2, y = -5$. Zatem $z = 2 - 5i$.

(c) Wykorzystamy wzory na pierwiastki równania kwadratowego $az^2 + bz + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$:

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

W tych wzorach δ jest jedną z liczb zespolonych spełniających warunek $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$. Dla równania kwadratowego $z^2 - z + 1 = 0$ mamy $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$. Zatem $\delta = \sqrt{3}i$ oraz

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

(d) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $\bar{z} \neq 1$ mamy

$$\frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1 \iff z+1 = -\bar{z}+1 \iff (x+1) + iy = (-x+1) + iy.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron tego równania, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x+1 = -x+1, \\ y = y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są pary $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Zatem rozwiązaniem równania $(z+1)/(\bar{z}-1) = -1$ są liczby zespolone postaci $z = iy$, gdzie $y \in \mathbb{R}$. Liczby te spełniają warunek $\bar{z} \neq 1$.

(e) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} (z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) &= [(x+iy) + (x-iy)] + i[(x+iy) - (x-iy)] \\ &= 2x + i \cdot 2iy = 2(x-y). \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 6$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2(x-y) = -6, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Jest to układ sprzeczny, zatem równanie nie ma rozwiązań.

(f) Przekształcamy rozważane równanie do postaci $(i-3+1)z = 5+i$. Stąd wynika, że

$$z = \frac{5+i}{-2+i} = \frac{(5+i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-9-7i}{5}.$$

(g) Dla $z \neq -2i/3$ oraz $z \neq -5i/2$ rozważane równanie jest równoważne równaniu

$$(1-3i)(5-2iz) = (3z+2i)(2i-3).$$

Stąd wynika, że

a więc

Zatem

$$z = \frac{-9}{5} - \frac{7}{5}i$$

(h*) Niech $z = x + iy$

Porównując części i układ równań

Z drugiego równania równania otrzymar

Natomiast po wsta rzeczywistych. Zate

□ **Zadanie 1.3.** V

(a) $z^2 = 4\bar{z}$;

(c) $z^2 - 4z + 13 = 0$

(e) $2z + \bar{z} = 6 - i$

(g) $\frac{2+i}{z-1+4i} = 1$

(i*) $z^2 - (6+i)z = 0$

Odpowiedzi. (a) 0, 4

(d) $\operatorname{Re} z = -2$ lub 1

(i*) $1 - 2i, 5 + 3i$;

■ **Przykład 1.4.** 1
jących warunki:

(a) $\operatorname{Im} [(1+2i)z]$

(c) $z^2 = 2 \operatorname{Re}(iz)$

Stąd wynika, że

$$5 - 2iz - 15i - 6z = 6iz - 9z - 4 - 6i,$$

a więc

$$z(-2i - 6 - 6i + 9) = (-5 + 15i - 4 - 6i).$$

Zatem

$$z = \frac{-9 + 9i}{3 - 8i} = \frac{(-9 + 9i)(3 + 8i)}{(3 - 8i)(3 + 8i)} = \frac{-99 - 45i}{73} = -\frac{99}{73} - \frac{45}{73}i.$$

(h*) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} z^2 - i\bar{z} + 2 &= (x + iy)^2 - i(\overline{x + iy}) + 2 \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 - ix - y + 2 \\ &= (x^2 - y^2 - y + 2) + i(2xy - x) = 0. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $z^2 - i\bar{z} + 2 = 0$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - y + 2 = 0, \\ 2xy - x = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika, że $x = 0$ lub $y = 1/2$. Po wstawieniu $x = 0$ do pierwszego równania otrzymamy rozwiązania:

$$x = 0, y = 1; \quad x = 0, y = -2.$$

Natomiast po wstawieniu $y = 1/2$ otrzymamy równanie kwadratowe bez rozwiązań rzeczywistych. Zatem równanie wyjściowe ma dwa rozwiązania $z_1 = i$, $z_2 = -2i$.

□ **Zadanie 1.3.** W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

- | | |
|---|--|
| (a) $z^2 = 4\bar{z}$; | (b) $\frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\bar{z}}$; |
| (c) $z^2 - 4z + 13 = 0$; | (d) $(z+2)^2 = (\bar{z}+2)^2$; |
| (e) $2z + \bar{z} = 6 - 5i$; | (f) $(1+i)z + 3(z-i) = 0$; |
| (g) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$; | (h) $\overline{z+i} - z + i = 0$; |
| (i*) $z^2 - (6+i)z + 11 - 7i = 0$; | (j*) $z^3 - 6iz^2 - 12z + 8i = 0$. |

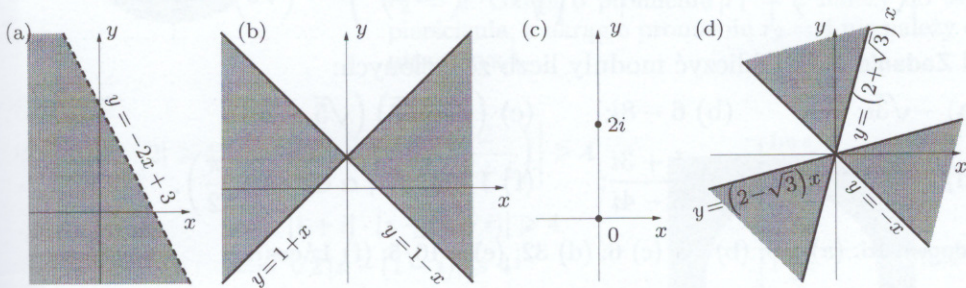
Odpowiedzi. (a) $0, 4, -2 + 2i\sqrt{3}, -2 - 2i\sqrt{3}$; (b) brak rozwiązań; (c) $2 - 3i, 2 + 3i$; (d) $\operatorname{Re} z = -2$ lub $\operatorname{Im} z = 0$; (e) $2 - 5i$; (f) $(3 + 12i)/17$; (g) $(7 - i)/6$; (h) $z \in \mathbb{R}$; (i*) $1 - 2i, 5 + 3i$; (j*) $2i$.

■ **Przykład 1.4.** Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

- | | |
|--|--|
| (a) $\operatorname{Im} [(1 + 2i)z - 3i] < 0$; | (b) $\operatorname{Re} (z - i)^2 \geq 0$; |
| (c) $z^2 = 2 \operatorname{Re} (iz)$; | (d) $\operatorname{Re} (z^3) \geq \operatorname{Im} (z^3)$. |

$(y + x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \geq 0)$ lub
 $(y + x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \leq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \leq 0)$ lub
 $(y + x < 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \leq 0)$ lub
 $(y + x < 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \leq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \geq 0)$.

Rozwiązanie tej nierówności przedstawiono na rysunku (d).



Uwaga. W Przykładzie 1.11 przedstawimy inny sposób rozwiązania zadań tego typu.

□ **Zadanie 1.4.** Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

- (a) $\operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0$; (b) $\operatorname{Im} z^2 < 0$; (c) $\overline{z - i} = z - 1$;
(d) $\frac{4}{z} = \bar{z}$; (e) $\operatorname{Im} \frac{1 + iz}{1 - iz} = 1$; (f) $z\bar{z} + (5 + i)z + (5 - i)\bar{z} + 1 = 0$.

Odpowiedzi. (a) półpłaszczyzna $\operatorname{Im} z \leq 2$; (b) druga i czwarta ćwiartka układu współrzędnych bez obu osi; (c) zbiór pusty; (d) okrąg o środku 0 i promieniu 2; (e) okrąg o środku $1 - i$ i promieniu 1, bez punktu $-i$; (f) okrąg o środku $-5 + i$ i promieniu 5.

■ **Przykład 1.5.** Obliczyć moduły liczb zespolonych:

- (a) $4i$; (b) $12i - 5$; (c) $(4i + 3)(\sqrt{2} - i)$;
(d) $\frac{2 - i}{\sqrt{3}i - 1}$; (e) $\sqrt{5 + 2i}$; (f) $(1 - \sqrt{2}i)^4$.

Rozwiązanie. Moduł liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, jest określony wzorem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wykorzystamy następujące własności modułu liczby zespolonej:

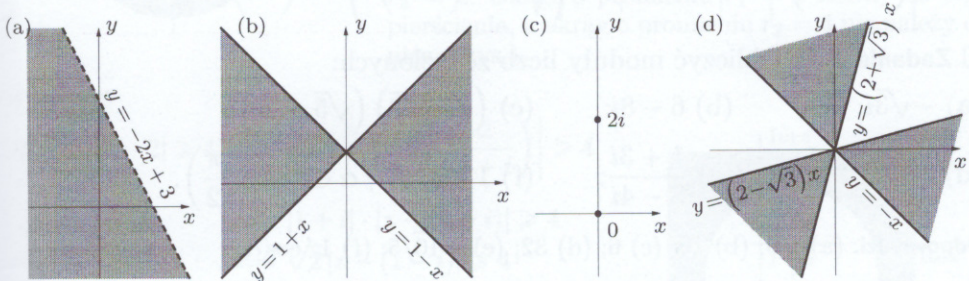
- (1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, (2) $|z^n| = |z|^n$, (3) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, (4) $|\bar{z}| = |z|$.

Mamy kolejno

- (a) $|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$;
(b) $|12i - 5| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$;

$(y + x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \geq 0)$ lub
 $(y + x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \leq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \leq 0)$ lub
 $(y + x < 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \leq 0)$ lub
 $(y + x < 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \leq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \geq 0)$.

Rozwiązanie tej nierówności przedstawiono na rysunku (d).



Uwaga. W Przykładzie 1.11 przedstawimy inny sposób rozwiązania zadań tego typu.

□ **Zadanie 1.4.** Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

- (a) $\operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0$; (b) $\operatorname{Im} z^2 < 0$; (c) $\overline{z - i} = z - 1$;
(d) $\frac{4}{z} = \bar{z}$; (e) $\operatorname{Im} \frac{1 + iz}{1 - iz} = 1$; (f) $z\bar{z} + (5 + i)z + (5 - i)\bar{z} + 1 = 0$.

Odpowiedzi. (a) półpłaszczyzna $\operatorname{Im} z \leq 2$; (b) druga i czwarta ćwiartka układu współrzędnych bez obu osi; (c) zbiór pusty; (d) okrąg o środku 0 i promieniu 2; (e) okrąg o środku $1 - i$ i promieniu 1, bez punktu $-i$; (f) okrąg o środku $-5 + i$ i promieniu 5.

■ **Przykład 1.5.** Obliczyć moduły liczb zespolonych:

- (a) $4i$; (b) $12i - 5$; (c) $(4i + 3)(\sqrt{2} - i)$;
(d) $\frac{2 - i}{\sqrt{3}i - 1}$; (e) $\sqrt{5 + 2i}$; (f) $(1 - \sqrt{2}i)^4$.

Rozwiązanie. Moduł liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, jest określony wzorem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wykorzystamy następujące własności modułu liczby zespolonej:

- (1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, (2) $|z^n| = |z|^n$, (3) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, (4) $|\bar{z}| = |z|$.

Mamy kolejno

- (a) $|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$;
(b) $|12i - 5| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$;

- (c) $|(4i+3)(\sqrt{2}-i)| \stackrel{(1)}{=} |4i+3| |\sqrt{2}-i| = \sqrt{3^2+4^2} \sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2} = 5\sqrt{3};$
 (d) $\left| \frac{2-i}{\sqrt{3}i-1} \right| \stackrel{(3)}{=} \frac{|2-i|}{|\sqrt{3}i-1|} = \frac{\sqrt{2^2+(-1)^2}}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$
 (e) $|\sqrt{5}+2i| \stackrel{(4)}{=} |\sqrt{5}+2i| = \sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2} = 3;$
 (f) $\left| (1-\sqrt{2}i)^4 \right| \stackrel{(2)}{=} |1-\sqrt{2}i|^4 = \left(\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2} \right)^4 = (\sqrt{3})^4 = 9.$

□ **Zadanie 1.5.** Obliczyć moduły liczb zespolonych:

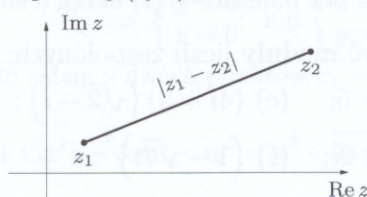
- (a) $-\sqrt{3}i;$ (b) $6-8i;$ (c) $(i-\sqrt{3})(\sqrt{5}+2i);$
 (d) $(i-\sqrt{3})^5;$ (e) $\frac{1+3i}{3-4i};$ (f) $1+i \operatorname{tg} \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

Odpowiedzi. (a) $\sqrt{3};$ (b) 10; (c) 6; (d) 32; (e) $\sqrt{10}/5;$ (f) $1/\cos \alpha.$

■ **Przykład 1.6.** Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

- (a) $|z+1-2i| = 3;$ (b) $2 \leq |z+i| < 4;$ (c) $|(1+i)z-2| \geq 4;$
 (d) $\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq 1;$ (e) $\operatorname{Re}(z+1) < 0$ i $|i-z| \leq 3;$ (f) $|z^2+4| \leq |z-2i|;$
 (g) $\left| \frac{\bar{z}-1-3i}{3-4i} \right| \leq 1;$ (h) $|z-1| \leq |z+i| < |z-2+3i|;$ (i) $|(z+i)^2| \geq |z^2+1|.$

Rozwiązanie. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 płaszczyzny zespolonej (rys.).

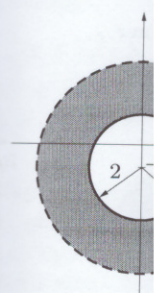
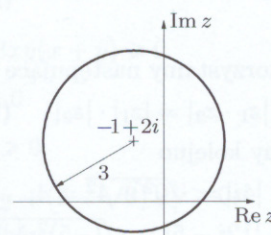


W rozwiązaniach wykorzystamy własności modułu podane w poprzednim przykładzie.

(a) Mamy

$$|z+1-2i| = 3 \iff |z - (-1+2i)| = 3.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości $r = 3$ od punktu $z_0 = -1+2i$. Jest to zatem okrąg o środku $z_0 = -1+2i$ i promieniu $r = 3$ (rys.).



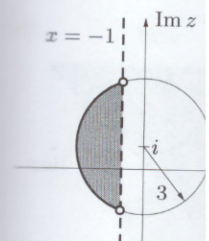
(c) Mamy

$$|(1+i)z-2| \geq$$

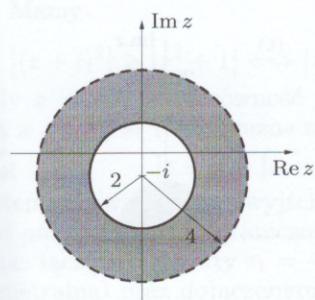
Szukany zbiór s
w odległości nie
 $z_0 = 1-i$. Jest
 $z_0 = 1-i$ i prom
 $r = 2\sqrt{2}$ należy c

(d) Dla $z \neq 2i$ m
 $\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq$

Szukany zbiór skł
głość od punktu
głość od punktu
ma ograniczoną
 z_2 , bez punktu z
szukanego zbioru



$$= 5\sqrt{3};$$



(b) Mamy

$$2 \leq |z + i| < 4 \iff 2 \leq |z - (-i)| < 4.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości nie mniejszej niż $r_1 = 2$ od punktu $z_0 = -i$ oraz w odległości mniejszej niż $r_2 = 4$ od tego punktu. Jest to zatem pierścień kołowy o środku $z_0 = -i$, promieniu wewnętrznym $r_1 = 2$ i zewnętrznym $r_2 = 4$. Okrąg o promieniu $r_1 = 2$ należy do tego pierścienia, a okrąg o promieniu $r_2 = 4$ nie należy do niego (rys.).

(c) Mamy

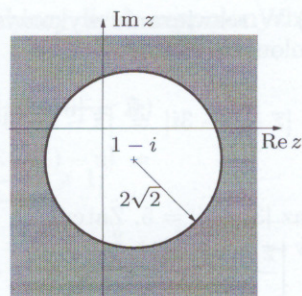
$$|(1+i)z - 2| \geq 4 \iff \left| (1+i) \cdot \left(z - \frac{2}{1+i} \right) \right| \geq 4$$

$$\stackrel{(1)}{\iff} |1+i| \cdot |z - (1-i)| \geq 4$$

$$\iff \sqrt{2} |z - (1-i)| \geq 4$$

$$\iff |z - (1-i)| \geq 2\sqrt{2}.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości nie mniejszej niż $r = 2\sqrt{2}$ od punktu $z_0 = 1 - i$. Jest to zatem zewnętrzne koło o środku $z_0 = 1 - i$ i promieniu $r = 2\sqrt{2}$. Okrąg o promieniu $r = 2\sqrt{2}$ należy do tego zbioru (rys.).

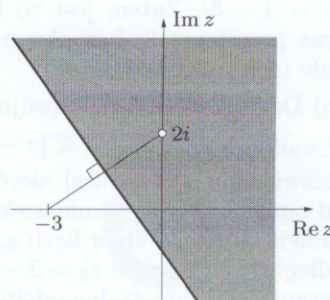
(d) Dla $z \neq 2i$ mamy

$$\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq 1 \stackrel{(3)}{\iff} \frac{|z+3|}{|z-2i|} \geq 1$$

$$\iff |z+3| \geq |z-2i|$$

$$\iff |z - (-3)| \geq |z - 2i|.$$

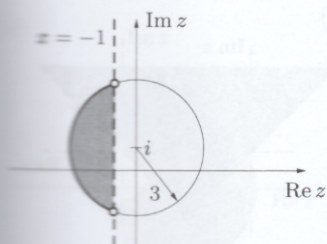
Szukany zbiór składa się z punktów z , których odległość od punktu $z_1 = -3$ jest nie mniejsza niż odległość od punktu $z_2 = 2i$. Jest to zatem półpłaszczyzna ograniczona symetryczną odcinka o końcach z_1 , z_2 bez punktu $z_2 = 2i$. Symetralna ta należy do szukanego zbioru (rys.).



(e) Poszukiwany zbiór jest wspólną częścią zbiorów określonych przez warunki:

$$\operatorname{Re}(z+1) < 0, \quad |i-z| \leq 3.$$

Pierwszy warunek określa lewą półpłaszczyznę otwartą ograniczoną prostą $x = -1$. Drugi warunek określa koło domknięte o środku $z_0 = i$ i promieniu $r = 3$. Wspólną część tych zbiorów przedstawiono na rysunku.



(f) Mamy

$$\begin{aligned}
 |z^2 + 4| \leq |z - 2i| &\iff |(z+2i) \cdot (z-2i)| \leq |z-2i| \\
 &\stackrel{(1)}{\iff} |z+2i| \cdot |z-2i| \leq |z-2i| \\
 &\iff |z-2i| = 0 \text{ albo} \\
 &\quad |z-2i| > 0 \text{ oraz } |z+2i| \leq 1.
 \end{aligned}$$

Warunek $|z-2i| = 0$ wyznacza zbiór $\{2i\}$, a warunki $|z+2i| \leq 1$ oraz $|z-2i| > 0$

określają koło domknięte o środku $z_0 = -2i$ i promieniu $r = 1$. Sumę tych zbiorów przedstawiono na rysunku.

(g) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór $|\bar{z}| = |z|$ oraz własności sprzężenia liczb zespolonych. Mamy

$$\begin{aligned}
 |\bar{z} - 1 - 3i| &\stackrel{(4)}{=} |\overline{\bar{z} - 1 - 3i}| = |z - 1 + 3i| \\
 &= |z - (1 - 3i)|
 \end{aligned}$$

oraz $|3 - 4i| = 5$. Zatem

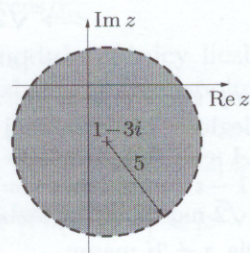
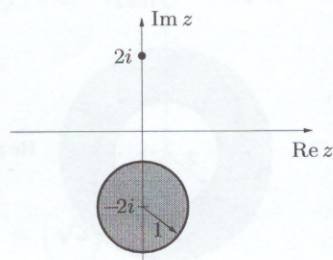
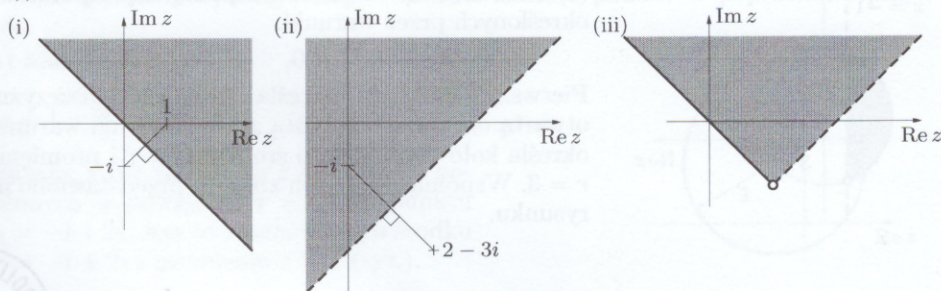
$$\left| \frac{\bar{z} - 1 - 3i}{3 - 4i} \right| < 1 \iff |z - (1 - 3i)| < 5.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości mniejszej niż 5 od punktu $z_0 = 1 - 3i$. Zatem jest to koło o środku z_0 oraz promieniu 5, bez okręgu ograniczającego koła (rys.).

(h) Dana nierówność podwójna jest równoważna koniunkcji

$$|z - 1| \leq |z - (-i)| \text{ oraz } |z - (-i)| < |z - (2 - 3i)|.$$

Rozwiązaniem pierwszej nierówności jest zbiór liczb zespolonych, których odległość od punktu $z_1 = 1$ jest nie większa niż odległość od punktu $z_2 = -i$ (rys. (i)), a rozwiązaniem drugiej – zbiór liczb z , których odległość od punktu $z_2 = -i$ jest mniejsza niż odległość od punktu $z_3 = 2 - 3i$ (rys. (ii)). Zatem pierwszy zbiór jest półpłaszczyzną ograniczoną symetralną odcinka łączącego punkty z_1 i z_2 (symetralna należy do tego zbioru), a drugi półpłaszczyzną ograniczoną symetralną odcinka łączącego punkty z_2 i z_3 (bez tej symetralnej). Szukany zbiór jest wspólną częścią tych półpłaszczyzn (rys. (iii)).



(i) Mamy

$$|(z+i)^2| \geq 0$$

Gdy $z = -i$,
dla $z \neq -i$ jest

Zatem rozwiązaniem jest półpłaszczyzna ograniczona odcinkiem łączącym punkty $-i$ i 1 (rys.).

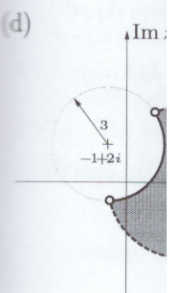
□ **Zadanie 1.** Rozwiąż nierówności. Korzystaj z własności liczb zespolonych.

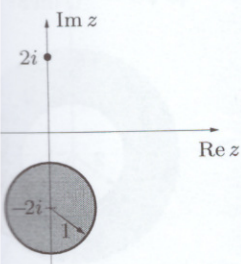
(a) $|z - 3 + 4i| < 5$

(d) $|z + 1 - 3i| < 5$

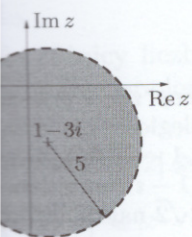
(f) $\sin(\pi|z|) = 0$

Odpowiedzi. Zbiory rozwiązań przedstawiono na rysunkach.

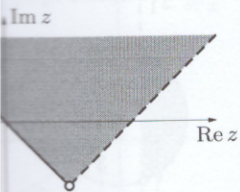




Sumę tych zbiorów
i sprzężenia liczb ze-



$-3i|$.
ch, których odległość
 $-i$ (rys. (i)), a rozwią-
 $= -i$ jest mniejsza niż
ór jest półpłaszczyzną
etralną należy do tego
a łączącego punkty z_2
ch półpłaszczyzn (rys.



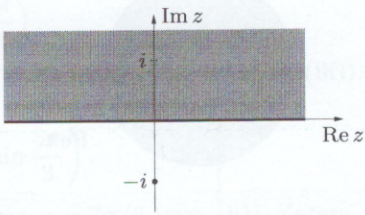
(i) Mamy

$$|(z+i)^2| \geq |z^2+1| \stackrel{(2)}{\iff} |z+i|^2 \geq |(z-i)(z+i)| \stackrel{(1)}{\iff} |z+i|^2 \geq |z-i||z+i|.$$

Gdy $z = -i$, to nierówność jest prawdziwa, a dla $z \neq -i$ jest równoważna nierówności

$$|z+i| \geq |z-i|.$$

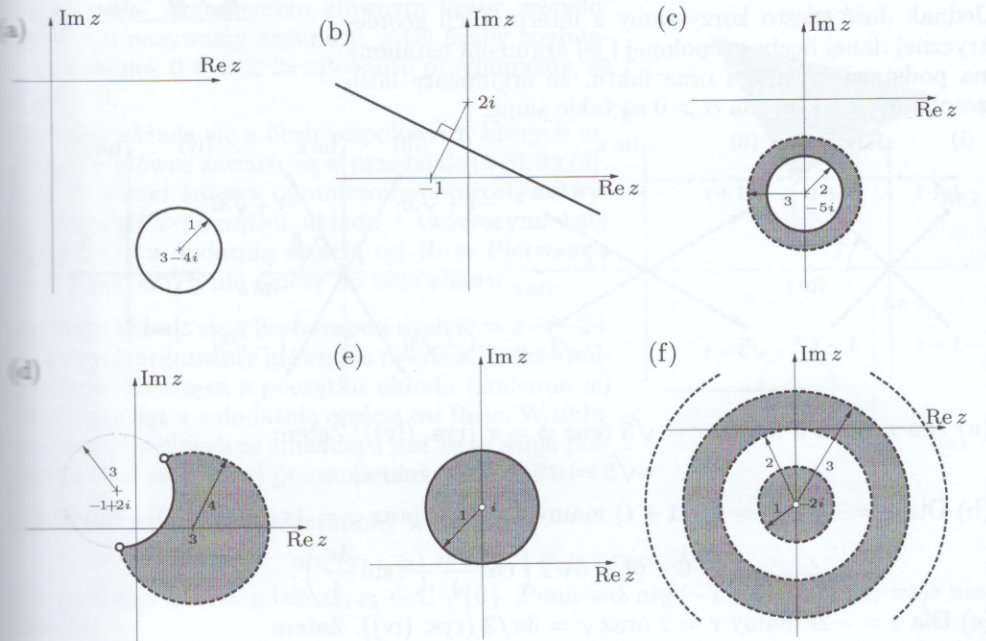
Zatem rozwiązaniem wyjściowej nierówności jest półpłaszczyzna ograniczona symetralną odcinka łączącego punkty $z_1 = -i, z_2 = i$ (razem z symetralną) oraz dołączonym do niej punktem $-i$ (rys.).

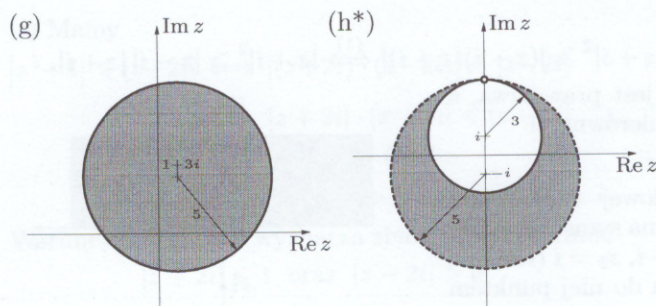


□ **Zadanie 1.6.** Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

- (a) $|z - 3 + 4i| = 1$; (b) $\left| \frac{z - 2i}{z + 1} \right| = 1$; (c) $2 \leq |iz - 5| < 3$;
(d) $|z + 1 - 2i| \geq 3$ oraz $|z - 3| < 4$; (e) $\left| \frac{z + i}{z^2 + 1} \right| \geq 1$;
(f) $\sin(\pi|z + 2i|) > 0$; (g) $|\bar{z} - 1 + 3i| \leq 5$; (h*) $3|z + i| \leq |z^2 + 1| < 5|z - i|.$

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej:





1.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

■ **Przykład 1.7.** Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

- (a) $-\sqrt{5}$; (b) $-6 + 6i$; (c) $-2i$;
 (d) $\sqrt{3} + i$; (e) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$; (f) $-\sqrt{27} - 3i$.

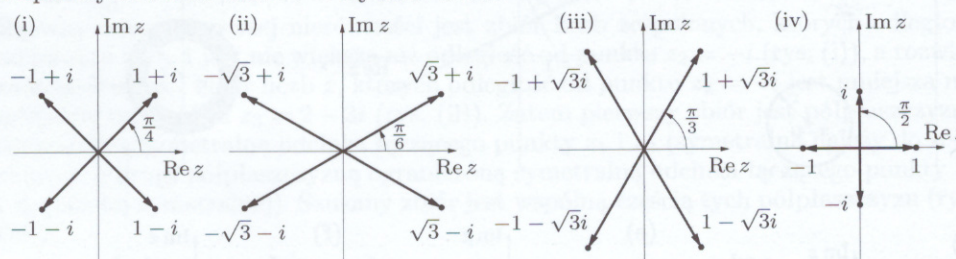
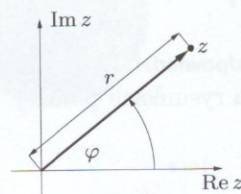
Rozwiązanie. Liczbę zespoloną $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) można zapisać w postaci trygonometrycznej:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest modulem, a φ argumentem liczby z . Dla $r > 0$ argument wyznaczamy z warunków:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Jednak dość często korzystamy z interpretacji geometrycznej danej liczby zespolonej i jej argument ustalamy na podstawie rysunku oraz faktu, że argumenty liczb zespolonych z i αz dla $\alpha > 0$ są takie same.



- (a) Dla $z = -\sqrt{5}$ mamy $r = \sqrt{5}$ oraz $\varphi = \pi$ (rys. (iv)). Zatem
 $-\sqrt{5} = \sqrt{5}(\cos \pi + i \sin \pi).$

- (b) Dla $z = -6 + 6i = 6(-1 + i)$ mamy $r = 6\sqrt{2}$ oraz $\varphi = 3\pi/4$ (rys. (i)). Zatem

$$-6 + 6i = 6\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

- (c) Dla $z = -2i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = 3\pi/2$ (rys. (iv)). Zatem

- (d) Dla $z = \sqrt{3}$

- (e) Dla $z = \sqrt{2}$
 Zatem

- (f) Dla $z = -\sqrt{2}$

□ **Zadanie 1.7.**

- (a) $7 + 7i$; (1)

Odpowiedzi. (a)
 (c) $10(\cos(2\pi/3))$

■ **Przykład 1.8**

- (a) $\frac{\pi}{6} < \arg z$

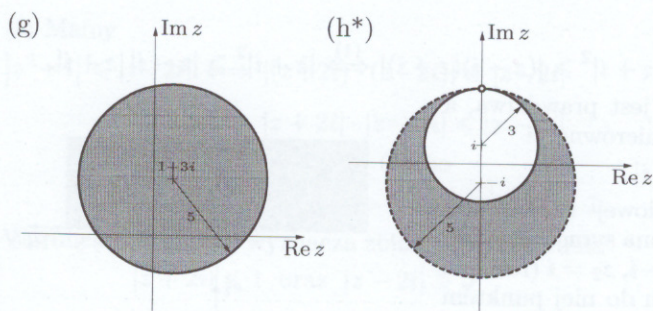
Rozwiązanie. Ar
 nej $z \neq 0$ nazyw
 jący warunek 0
 $\arg 0 = 0$.

(a) Zbiór składa
 gumenty główne
 jest to obszar k
 chodzącymi z p
 $\pi/6$ i $2\pi/3$ z d
 tych półprostyc

(b) Zbiór składa
 a), których argu
 prosta wychodz
 i tworząca kąt π
 dzie współrzęd
 prosta (bez poc

(c) W rozwiąz

dla pewnego k
 równość



1.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

■ **Przykład 1.7.** Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

- (a) $-\sqrt{5}$; (b) $-6 + 6i$; (c) $-2i$;
 (d) $\sqrt{3} + i$; (e) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$; (f) $-\sqrt{27} - 3i$.

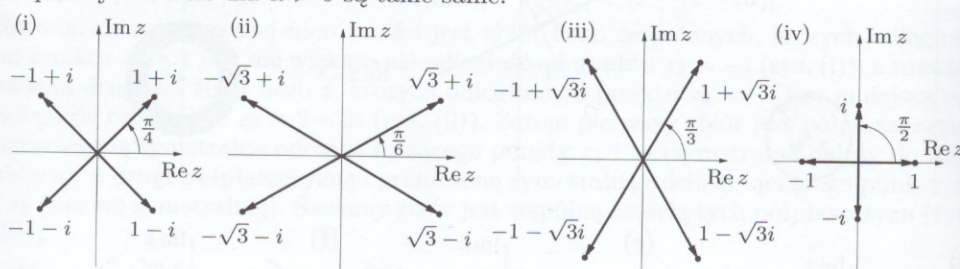
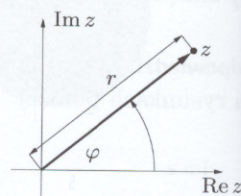
Rozwiązanie. Liczbę zespoloną $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) można zapisać w postaci trygonometrycznej:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest modulem, a φ argumentem liczby z . Dla $r > 0$ argument wyznaczamy z warunków:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Jednak dość często korzystamy z interpretacji geometrycznej danej liczby zespolonej i jej argument ustalamy na podstawie rysunku oraz faktu, że argumenty liczb zespolonych z i αz dla $\alpha > 0$ są takie same.



- (a) Dla $z = -\sqrt{5}$ mamy $r = \sqrt{5}$ oraz $\varphi = \pi$ (rys. (iv)). Zatem

$$-\sqrt{5} = \sqrt{5}(\cos \pi + i \sin \pi).$$

- (b) Dla $z = -6 + 6i = 6(-1 + i)$ mamy $r = 6\sqrt{2}$ oraz $\varphi = 3\pi/4$ (rys. (i)). Zatem

$$-6 + 6i = 6\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

- (c) Dla $z = -2i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = 3\pi/2$ (rys. (iv)). Zatem

(a) Dla $z = \sqrt{3} + i$ mamy

(b) Dla $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 3i)$

$\sqrt{2}$

(c) Dla $z = -\sqrt{27} - 3i = -3(\sqrt{3} + i)$

■ **Zadanie 1.7.** Podane

(a) $7 + 7i$; (b) $\sqrt{3} - i$

Rozwiązanie. (a) $7\sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$

(b) $2(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))$

■ **Przykład 1.8.** Narysuj

(a) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$; (b) $\arg z = \pi$

Rozwiązanie. Argumenty liczb zespolonych $z \neq 0$ nazywamy argumentami liczby z . Argumenty liczb zespolonych z i αz dla $\alpha > 0$ są takie same.

(a) Zbiór składa się z liczb zespolonych, których argumenty główne zawarte są w przedziale $(\pi/6, 2\pi/3]$. Jest to obszar kątowny o wierzchołku w początku układu współrzędnych, ograniczony dwiema półprostymi wychodzącymi z początku układu.

(b) Zbiór składa się z liczb zespolonych, których argumenty główne są równe π . Jest to półprosta wychodząca z początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do kierunku dodatniej półosi rzeczywistej.

(c) W rozwiązaniu wykazać, że dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, gdzie n jest liczbą całkowitą, mamy

$z^k = 1$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, gdzie n jest liczbą całkowitą.

$$-2i = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

(d) Dla $z = \sqrt{3} + i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = \pi/6$ (rys. (ii)). Zatem

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

(e) Dla $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i = \sqrt{2}(1 - \sqrt{3}i)$ mamy $r = 2\sqrt{2}$ oraz więc $\varphi = 5\pi/3$ (rys. (iii)). Zatem

$$\sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$$

(f) Dla $z = -\sqrt{27} - 3i = 3(-\sqrt{3} - i)$ mamy $r = 6$ oraz $\varphi = 7\pi/6$ (rys. (ii)). Zatem

$$-\sqrt{27} - 3i = 6 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right).$$

□ **Zadanie 1.7.** Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

(a) $7 + 7i$; (b) $\sqrt{3} - i$; (c) $-5 + 5\sqrt{3}i$; (d) $-\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

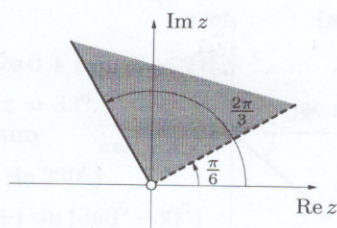
Odpowiedzi. (a) $7\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$; (b) $2(\cos(11\pi/6) + i \sin(11\pi/6))$; (c) $10(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))$; (d) $\sqrt{6}(\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4))$.

■ **Przykład 1.8.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

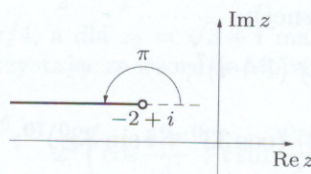
(a) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$; (b) $\arg(z + 2 - i) = \pi$; (c) $\pi \leq \arg[(-1 + i)z] \leq \frac{3\pi}{2}$.

Rozwiązanie. Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument φ tej liczby spełniający warunek $0 \leq \varphi < 2\pi$. Ponadto przyjmujemy, że $\arg 0 = 0$.

(a) Zbiór składa się z liczb zespolonych, których argumenty główne zawarte są w przedziale $(\pi/6, 2\pi/3]$. Jest to obszar kątowny ograniczony półprostymi wychodzącymi z początku układu i tworzącymi kąty $\pi/6$ i $2\pi/3$ z dodatnią częścią osi $\text{Re } z$. Pierwsza z tych półprostych nie należy do tego zbioru.



(b) Zbiór składa się z liczb zespolonych $w = z - (-2 + i)$, których argumenty główne są równe π . Jest to półprosta wychodząca z początku układu (zmienna w) i tworząca kąt π z dodatnią częścią osi $\text{Re } w$. W układzie współrzędnych ze zmienną z jest to ta sama półprosta (bez początku) przesunięta o wektor $-2 + i$.



(c) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ponieważ $\arg(-1 + i) = 3\pi/4$, więc nierówność

$$\pi \leq \arg [(-1+i)z] \leq \frac{3\pi}{2}$$

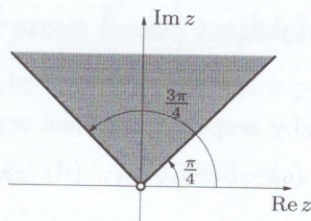
jest równoważna nierówności

$$\pi \leq \frac{3\pi}{4} + \arg z + 2k\pi \leq \frac{3\pi}{2}$$

dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$. Ale $0 \leq \arg z < 2\pi$, więc $k = 0$. Stąd otrzymamy

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}.$$

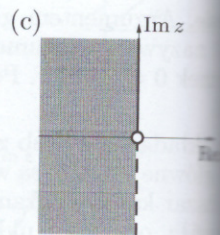
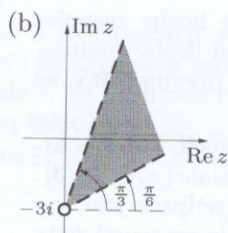
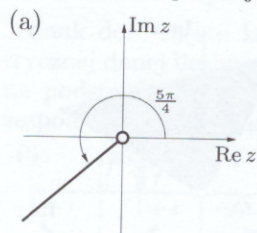
Szukany zbiór jest domkniętym obszarem kątowym ograniczonym półproszymi wychodzącymi z punktu O (bez tego punktu) i tworzącymi kąty $\pi/4$ i $3\pi/4$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} z$.



□ **Zadanie 1.8.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających

(a) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$; (b) $\frac{\pi}{6} < \arg(z+3i) < \frac{\pi}{3}$; (c) $\pi \leq \arg(iz) < 2\pi$.

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej.



■ **Przykład 1.9.** Obliczyć wartości wyrażeń (wynik podać w postaci liczbowej):

(a) $(1+i)^7$;

(b) $(\sqrt{3}-i)^{32}$;

(c) $(-2+2i)^8$;

(d) $(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)^{10}$;

(e) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$;

(f) $\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^{10}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór de Moivre'a

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Ponadto wykorzystamy wzory redukcyjne z Przykładu 1.7.

$$\pi \leq \arg [(-1+i)z] \leq \frac{3\pi}{2}$$

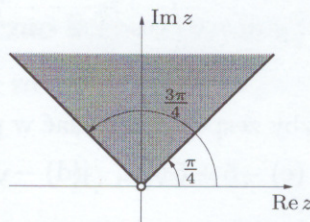
jest równoważna nierówności

$$\pi \leq \frac{3\pi}{4} + \arg z + 2k\pi \leq \frac{3\pi}{2}$$

dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$. Ale $0 \leq \arg z < 2\pi$, więc $k = 0$. Stąd otrzymamy

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}.$$

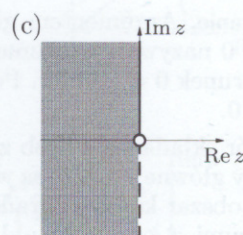
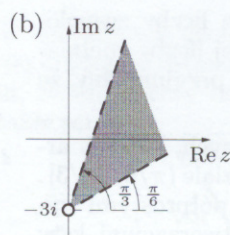
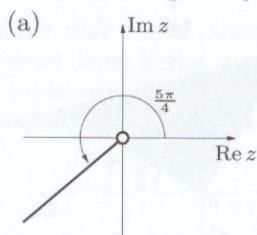
Szukany zbiór jest domkniętym obszarem kątowym ograniczonym półprostymi wychodzącymi z punktu O (bez tego punktu) i tworzącymi kąty $\pi/4$ i $3\pi/4$ z dodatnią częścią osi $\text{Re } z$.



□ **Zadanie 1.8.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

- (a) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$; (b) $\frac{\pi}{6} < \arg(z+3i) < \frac{\pi}{3}$; (c) $\pi \leq \arg(iz) < 2\pi$.

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej.



■ **Przykład 1.9.** Obliczyć wartości wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

- (a) $(1+i)^7$; (b) $(\sqrt{3}-i)^{32}$; (c) $(-2+2i)^8$;
 (d) $(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)^{10}$; (e) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$; (f) $\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^{14}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór de Moivre'a

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Ponadto wykorzystamy wzory redukcyjne oraz rysunki z Przykładu 1.7.

1.2. Postać trygonometryczna

(a) Dla $z = 1+i$ mamy $|z| = \sqrt{2}$ i $\arg z = \pi/4$. Wzór de Moivre'a oraz

$$(1+i)^7 = \left[\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8(1-i).$$

(b) Dla $z = \sqrt{3}-i$ mamy $|z| = 2$ i $\arg z = 5\pi/6$. Wzór de Moivre'a oraz

$$(\sqrt{3}-i)^{32} = \left[2\left(\cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6}\right)\right]^{32} = 2^{32}\left[\cos \frac{160\pi}{6} - i \sin \frac{160\pi}{6}\right] = 2^{32}\left[\cos \frac{40\pi}{3} - i \sin \frac{40\pi}{3}\right] = 2^{32}\left[\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3}\right] = 2^{32}\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(c) Dla $z = -2+2i$ mamy $|z| = 2\sqrt{2}$ i $\arg z = 3\pi/4$. Wzór de Moivre'a oraz

$$(-2+2i)^8 = \left[2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)\right]^8 = 256\left(\cos 6\pi + i \sin 6\pi\right) = 256(1+i \cdot 0) = 256.$$

(d) Dla $z = \cos 33^\circ + i \sin 33^\circ$ mamy $|z| = 1$ i $\arg z = 33^\circ$. Wzór de Moivre'a oraz

$$(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)^{10} = \cos 330^\circ + i \sin 330^\circ = \cos 30^\circ - i \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}.$$

(e) Dla $z_1 = 1-i$ mamy $|z_1| = \sqrt{2}$ i $\arg z_1 = 3\pi/4$ (rys. (i)) oraz $\arg z_2 = \pi/3$ (rys. (ii)). Wzory redukcyjne

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6 = \frac{(1-i)^6}{(\sqrt{3}+i)^6} = \frac{\cos 10\pi + i \sin 10\pi}{\cos 2\pi + i \sin 2\pi} = \frac{1+i \cdot 0}{1+i \cdot 0} = 1.$$

(a) Dla $z = 1 + i$ mamy $|z| = \sqrt{2}$ oraz $\arg z = \pi/4$ (rys. (i)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}(1+i)^7 &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^7 = (\sqrt{2})^7 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \\ &= 8\sqrt{2} \left[\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 8\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 8 - 8i.\end{aligned}$$

(b) Dla $z = \sqrt{3} - i$ mamy $|z| = 2$ oraz $\arg z = 11\pi/6$ (rys. (ii)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} - i)^{32} &= \left[2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \right]^{32} = 2^{32} \left(\cos \frac{176\pi}{3} + i \sin \frac{176\pi}{3} \right) \\ &= 2^{32} \left[\cos \left(58\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(58\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = 2^{32} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2^{32} \left[\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right] = 2^{32} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2^{32} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{31} (i\sqrt{3} - 1).\end{aligned}$$

(c) Dla $z = -2 + 2i$ mamy $|z| = 2\sqrt{2}$ oraz $\arg z = 3\pi/4$ (rys. (i)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymamy

$$\begin{aligned}(-2 + 2i)^8 &= \left[2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^8 \\ &= 2^{12} (\cos 6\pi + i \sin 6\pi) = 2^{12} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{12}.\end{aligned}$$

(d) Dla $z = \cos 33^\circ + i \sin 33^\circ$ mamy $|z| = 1$ oraz $\arg z = 33^\circ$. Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)^{10} &= 1^{10} (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) \\ &= \cos (360^\circ - 30^\circ) + i \sin (360^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 30^\circ - i \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

(e) Dla $z_1 = 1 - i$ mamy $|z_1| = \sqrt{2}$ oraz $\arg z_1 = -\pi/4$, a dla $z_2 = \sqrt{3} + i$ mamy $|z_2| = 2$ (rys. (i)) oraz $\arg z_2 = \pi/6$ (rys. (ii)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^6 &= \frac{(1-i)^6}{(\sqrt{3}+i)^6} = \frac{\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right]^6}{\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^6} = \frac{2^3 \left(\cos \frac{42\pi}{4} + i \sin \frac{42\pi}{4} \right)}{2^6 (\cos \pi + i \sin \pi)} \\ &= \frac{\cos \left(10\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(10\pi + \frac{\pi}{2} \right)}{-2^3} = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}{-2^3} = -\frac{i}{8}.\end{aligned}$$

(f) Dla $z = -\cos(\pi/7) + i \sin(\pi/7)$ mamy $|z| = 1$. Ponadto $\arg z = 6\pi/7$, gdyż ze wzorów redukcyjnych wynika, iż

$$z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7}.$$

Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymamy

$$\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)^{14} = \left[1 \left(\cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7} \right) \right]^{14} = 1^{14} (\cos 12\pi + i \sin 12\pi) = 1.$$

□ **Zadanie 1.9.** Obliczyć wartości wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} (1-i)^{12}; & \text{(b)} (1+\sqrt{3}i)^8; & \text{(c)} (2\sqrt{3}-2i)^{30}; \\ \text{(d)} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{10}; & \text{(e)} \frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}; & \text{(f)} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right)^{24}. \end{array}$$

Odpowiedzi. (a) -2^6 ; (b) $2^7(-1+\sqrt{3}i)$; (c) -4^{30} ; (d) $-i$; (e) $-32i$; (f) 1.

■ **Przykład 1.10.** Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

(a) $\cos 3x$ przez $\cos x$; (b) $\sin 6x$ przez $\sin x$ i $\cos x$.

Rozwiązanie.

(a) Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i \sin x)^3$ wykorzystując dwa wzory: wzór de Moivre'a oraz wzór dwumianowy Newtona. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^3 &= (\cos x)^3 + \binom{3}{1}(\cos x)^2(i \sin x) + \binom{3}{2}(\cos x)(i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \\ &= (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x). \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste prawych stron obu równości otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \\ &= \cos x (\cos^2 x - 3 + 3 \cos^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3). \end{aligned}$$

(b) Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i \sin x)^6$ wykorzystując dwa wzory: wzór de Moivre'a oraz wzór dwumianowy Newtona. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i \sin x)^6 = \cos 6x + i \sin 6x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość