

Teresa Jurlewicz
Zbigniew Skoczylas

Algebra i geometria analityczna

Przykłady i zadania

Jurle
ewicz, Teresa
gebra i geometria analityczna :

2

Sk 81312

F.I.7.Jurle

Wydanie dwadzieste czwarte



**ALGEBRA
I
GEOMETRIA
ANALITYCZNA**

ALBERTA
GEOMETRIA
ANALYTICA

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA I GEOMETRIA ANALITYCZNA

Przykłady i zadania

Wydanie dwudzieste czwarte poprawione

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

W Sk 81312

000-81312



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2022

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne
YUMA
teresa.jurlewicz@yuma.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki

IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej



Copyright © 1995 – 2022 by Teresa Jurlewicz and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$.

ISBN 978-83-62780-96-9

Wydanie XXIV poprawione, Wrocław 2022
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. kom.

Spis treści

Wstęp	7
1 Liczby zespolone	9
1.1. Postać algebraiczna liczby zespolonej	9
1.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej	20
1.3. Postać wykładnicza liczby zespolonej	26
1.4. Pierwiastkowanie liczb zespolonych	29
2 Wielomiany	36
2.1. Podstawowe definicje i własności	36
2.2. Pierwiastki wielomianów	38
2.3. Zasadnicze twierdzenie algebry	41
2.4. Ułamki proste	46
3 Macierze i wyznaczniki	53
3.1. Działania na macierzach	53
3.2. Wyznaczniki	59
3.3. Macierz odwrotna	63
4 Układy równań liniowych	72
4.1. Układy Cramera	72
4.2. Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera–Capellego	76
4.3. Metody rozwiązywania układów Cramera	86
4.4. Metody rozwiązywania dowolnych układów równań	93
4.5. Wartości i wektory własne macierzy	100
5 Geometria analityczna w przestrzeni	106
5.1. Wektory i iloczyn skalarny	106
5.2. Iloczyn wektorowy i mieszany	109
5.3. Równania płaszczyzny	115
5.4. Równania prostej	120
5.5. Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn	126

6 Krzywe stożkowe	151
6.1. Okrąg	151
6.2. Elipsa	158
6.3. Hiperbola	164
6.4. Parabola	170
Zbiory zadań	177

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań* jest drugą częścią zestawu podręczników do kursu Algebra z geometrią analityczną. Pierwszą częścią zestawu jest książka pt. „Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory”, a trzecią – opracowanie pt. „Algebra i geometria analityczna. Kolokwia i egzaminy”. Podręczniki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów oraz uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych i wojskowych.

Zbiór „Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania” zawiera przykładowe zadania z rozwiązaniami przedstawionymi „krok po kroku” oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Przykłady i zadania obejmują liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych, geometrię analityczną w przestrzeni oraz krzywe stożkowe. Materiał teoretyczny niezbędny do rozwiązywania zadań można znaleźć w książce pt. „Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory”. Podpunkty przykładów i zadań oznaczone początkowymi literami alfabetu są z reguły najprostsze. Z kolei przykłady i zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze. Kierujemy je do ambitnych studentów. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań z algebry zachęcamy do zapoznania się z książką „Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami”.

W obecnym wydaniu wprowadzono drobne zmiany oraz poprawiono zastrzeżone błędy i usterki.

Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o zbiorze.

Teresa Jurliewicz Zbigniew Skoczylas

*Do 2005 r. książka miała tytuł „Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania”.

Wzrost

Wzrost jest procesem, który trwa przez całe życie człowieka. Jest to proces, który polega na zwiększaniu się rozmiarów ciała człowieka. Wzrost jest procesem, który trwa przez całe życie człowieka. Jest to proces, który polega na zwiększaniu się rozmiarów ciała człowieka.

Wzrost jest procesem, który trwa przez całe życie człowieka. Jest to proces, który polega na zwiększaniu się rozmiarów ciała człowieka. Wzrost jest procesem, który trwa przez całe życie człowieka. Jest to proces, który polega na zwiększaniu się rozmiarów ciała człowieka.

Wzrost jest procesem, który trwa przez całe życie człowieka. Jest to proces, który polega na zwiększaniu się rozmiarów ciała człowieka.

Wzrost jest procesem, który trwa przez całe życie człowieka. Jest to proces, który polega na zwiększaniu się rozmiarów ciała człowieka.

Wzrost jest procesem, który trwa przez całe życie człowieka. Jest to proces, który polega na zwiększaniu się rozmiarów ciała człowieka.

Wzrost jest procesem, który trwa przez całe życie człowieka. Jest to proces, który polega na zwiększaniu się rozmiarów ciała człowieka.

Wzrost jest procesem, który trwa przez całe życie człowieka. Jest to proces, który polega na zwiększaniu się rozmiarów ciała człowieka.

1. Liczby zespolone

1.1. Postać algebraiczna liczby zespolonej

■ **Przykład 1.1.** Wykonać działania:

- (a) $(-2 + 3i) + (7 - 8i)$; (b) $(4i - 3) - (1 + 10i)$;
(c) $(\sqrt{2} + i) \cdot (3 - \sqrt{3}i)$; (d) $\frac{2 - 3i}{5 + 4i}$;
(e) $(3 - 2i)^2$; (f) $(2 + 5i)(2 - 5i)$.

Rozwiązanie. Działania dodawania, odejmowania i mnożenia na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) wykonujemy tak, jak na wielomianach zmiennej i , pamiętając o warunku $i^2 = -1$. Natomiast w przypadku dzielenia liczb zespolonych stosujemy przekształcenie

$$\frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{u^2 + v^2}.$$

W zbiorze liczb zespolonych prawdziwe są tożsamości znane dla liczb rzeczywistych: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, itd. Zatem mamy kolejno:

- (a) $(-2 + 3i) + (7 - 8i) = (-2 + 7) + (3 - 8)i = 5 - 5i$.
(b) $(4i - 3) - (1 + 10i) = (-3 - 1) + (4 - 10)i = -4 - 6i$.
(c) $(\sqrt{2} + i) \cdot (3 - \sqrt{3}i) = \sqrt{2} \cdot 3 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}i + 3i - \sqrt{3}i^2 = (3\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{6})i$.
(d) $\frac{2 - 3i}{5 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(5 - 4i)}{(5 + 4i)(5 - 4i)} = \frac{10 - 8i - 15i + 12i^2}{25 - 16i^2} = \frac{-2 - 23i}{41} = -\frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$.
(e) $(3 - 2i)^2 = 3^2 - 3 \cdot 2i + (2i)^2 = 9 - 6i + 4i^2 = 9 - 6i - 4 = 5 - 6i$.
(f) $(2 + 5i)(2 - 5i) = 2^2 - (5i)^2 = 4 - 25i^2 = 4 + 25 = 29$.

□ **Zadanie 1.1.** Wykonać działania:

- (a) $(1 - 3i) + (4 - 5i)$; (b) $(1 + \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} - 6i)$; (c) $(1 - i)(6 + 5i)$;
(d) $\frac{2 + 3i}{1 + i}$; (e) $(\sqrt{7} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3}i)$; (f) $(\sqrt{3} - i)^3$.

Odpowiedzi. (a) $5 - 8i$; (b) $1 - \sqrt{3} + (6 + \sqrt{2})i$; (c) $11 - i$; (d) $5/2 + i/2$; (e) 10 ; (f) $-8i$.

■ **Przykład 1.2.** Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

$$(a) \ x(2 + 3i) + y(4 - 5i) = 6 - 2i; \quad (b) \ (x - i) \cdot (2 - yi) = 11 - 23i;$$

$$(c) \ \frac{x}{2 - 3i} + \frac{y}{3 + 2i} = 1; \quad (d) \ \frac{x + 3 - 2i}{y - 4 + i} = 1 - i.$$

Rozwiązanie. Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są równe ich części rzeczywiste i urojone, tzn.

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

(a) Mamy $x(2 + 3i) + y(4 - 5i) = (2x + 4y) + (3x - 5y)i$. Zatem

$$x(2 + 3i) + y(4 - 5i) = 6 - 2i \iff (2x + 4y) + (3x - 5y)i = 6 - 2i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ 3x - 5y = -2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 1, y = 1$.

(b) Mamy $(x - i) \cdot (2 - yi) = (2x - y) + (-2 - xy)i$. Zatem

$$(x - i) \cdot (2 - yi) = 11 - 23i \iff (2x - y) + (-2 - xy)i = 11 - 23i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 11, \\ -2 - xy = -23. \end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 11, \\ -2 - x(2x - 11) = -23 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x - 11, \\ 2x^2 - 11x - 21 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7, \\ y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -3/2, \\ y = -14. \end{cases}$$

(c) Mamy

$$\begin{aligned} \frac{x}{2 - 3i} + \frac{y}{3 + 2i} &= \frac{x(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} + \frac{y(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} \\ &= \frac{2x + 3xi}{13} + \frac{3y - 2yi}{13} = \frac{2x + 3y}{13} + \frac{3x - 2y}{13}i. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{x}{2 - 3i} + \frac{y}{3 + 2i} = 1 \iff \frac{2x + 3y}{13} + \frac{3x - 2y}{13}i = 1 \iff (2x + 3y) + (3x - 2y)i = 13,$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron ostatniego równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - 2y = 13 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 2, y = 3$.

(d) Mamy $\frac{x+3-2i}{y-4+i} = 1-i$. Stąd $x+3-2i = (1-i)(y-4+i)$, zatem

$$(x+3) - 2i = (y-3) + (5-y)i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x+3 = y-3, \\ -2 = 5-y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 1, y = 7$.

□ **Zadanie 1.2.** Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

(a) $x(2+3i) + y(5-2i) = -8+7i$; (b) $(2+yi) \cdot (x-3i) = 7-i$;

(c) $\frac{1+yi}{x-2i} = 3i-1$; (d) $\frac{x+yi}{x-yi} = \frac{9-2i}{9+2i}$.

Odpowiedzi. (a) $x = 1, y = -2$; (b) nie istnieją takie liczby; (c) $x = 5, y = 17$;
(d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y = -2x/9$.

■ **Przykład 1.3.** W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

(a) $z^2 + 3\bar{z} = 0$; (b) $2z + (1+i)\bar{z} = 1-3i$;

(c) $z^2 - z + 1 = 0$; (d) $\frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1$;

(e) $(z+\bar{z}) + i(z-\bar{z}) = 2i-6$; (f) $(i-3)z = 5+i-z$;

(g) $\frac{1-3i}{3z+2i} = \frac{2i-3}{5-2iz}$; (h*) $z^2 - i\bar{z} + 2 = 0$.

Rozwiązanie. Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z}$ określoną wzorem $\bar{z} = x - iy$.

(a) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} z^2 + 3\bar{z} &= (x+iy)^2 + 3(x-iy) \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi + 3x - 3yi = x^2 - y^2 + 3x + (2xy - 3y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $z^2 + 3\bar{z} = 0$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0, \\ 2xy - 3y = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny kolejno układom:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0, \\ y(2x - 3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0, \\ y = 0 \text{ lub } x = 3/2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -3, \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3/2, \\ y = 3\sqrt{3}/2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3/2, \\ y = -3\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Zatem równanie $z^2 + 3\bar{z} = 0$ ma cztery rozwiązania:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -3, \quad z_3 = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), \quad z_4 = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i).$$

(b) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} 2z + (1+i)\bar{z} &= 2(x+iy) + (1+i)(x-iy) \\ &= 2x + 2iy + x - iy + ix + y = (3x+y) + (x+y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $2z + (1+i)\bar{z} = 1 - 3i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x + y = -3. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 2, y = -5$. Zatem $z = 2 - 5i$.

(c) Wykorzystamy wzory na pierwiastki równania kwadratowego $az^2 + bz + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$:

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

W tych wzorach δ jest jedną z liczb zespolonych spełniających warunek $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$. Dla równania kwadratowego $z^2 - z + 1 = 0$ mamy $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$. Zatem $\delta = \sqrt{3}i$ oraz

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

(d) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $\bar{z} \neq 1$ mamy

$$\frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1 \iff z+1 = -\bar{z}+1 \iff (x+1) + iy = (-x+1) + iy.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron tego równania, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x+1 = -x+1, \\ y = y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są pary $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Zatem rozwiązaniem równania $(z+1)/(\bar{z}-1) = -1$ są liczby zespolone postaci $z = iy$, gdzie $y \in \mathbb{R}$. Liczby te spełniają warunek $\bar{z} \neq 1$.

(e) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} (z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) &= [(x+iy) + (x-iy)] + i[(x+iy) - (x-iy)] \\ &= 2x + i \cdot 2iy = 2(x-y). \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 6$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2(x-y) = -6, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Jest to układ sprzeczny, zatem równanie nie ma rozwiązań.

(f) Przekształcamy rozważane równanie do postaci $(i-3+1)z = 5+i$. Stąd wynika, że

$$z = \frac{5+i}{-2+i} = \frac{(5+i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-9-7i}{5}.$$

(g) Dla $z \neq -2i/3$ oraz $z \neq -5i/2$ rozważane równanie jest równoważne równaniu

$$(1-3i)(5-2iz) = (3z+2i)(2i-3).$$

Stąd wynika, że

$$5 - 2iz - 15i - 6z = 6iz - 9z - 4 - 6i,$$

a więc

$$z(-2i - 6 - 6i + 9) = (-5 + 15i - 4 - 6i).$$

Zatem

$$z = \frac{-9 + 9i}{3 - 8i} = \frac{(-9 + 9i)(3 + 8i)}{(3 - 8i)(3 + 8i)} = \frac{-99 - 45i}{73} = -\frac{99}{73} - \frac{45}{73}i.$$

(h*) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} z^2 - i\bar{z} + 2 &= (x + iy)^2 - i(\overline{x + iy}) + 2 \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 - ix - y + 2 \\ &= (x^2 - y^2 - y + 2) + i(2xy - x) = 0. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $z^2 - i\bar{z} + 2 = 0$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - y + 2 = 0, \\ 2xy - x = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika, że $x = 0$ lub $y = 1/2$. Po wstawieniu $x = 0$ do pierwszego równania otrzymamy rozwiązania:

$$x = 0, y = 1; \quad x = 0, y = -2.$$

Natomiast po wstawieniu $y = 1/2$ otrzymamy równanie kwadratowe bez rozwiązań rzeczywistych. Zatem równanie wyjściowe ma dwa rozwiązania $z_1 = i$, $z_2 = -2i$.

□ **Zadanie 1.3.** W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

- | | |
|---|--|
| (a) $z^2 = 4\bar{z}$; | (b) $\frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\bar{z}}$; |
| (c) $z^2 - 4z + 13 = 0$; | (d) $(z+2)^2 = (\bar{z}+2)^2$; |
| (e) $2z + \bar{z} = 6 - 5i$; | (f) $(1+i)z + 3(z-i) = 0$; |
| (g) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$; | (h) $\overline{z+i} - z + i = 0$; |
| (i*) $z^2 - (6+i)z + 11 - 7i = 0$; | (j*) $z^3 - 6iz^2 - 12z + 8i = 0$. |

Odpowiedzi. (a) 0, 4, $-2 + 2i\sqrt{3}$, $-2 - 2i\sqrt{3}$; (b) brak rozwiązań; (c) $2 - 3i$, $2 + 3i$;
 (d) $\operatorname{Re} z = -2$ lub $\operatorname{Im} z = 0$; (e) $2 - 5i$; (f) $(3 + 12i)/17$; (g) $(7 - i)/6$; (h) $z \in \mathbb{R}$;
 (i*) $1 - 2i$, $5 + 3i$; (j*) $2i$.

■ **Przykład 1.4.** Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

- | | |
|--|--|
| (a) $\operatorname{Im} [(1 + 2i)z - 3i] < 0$; | (b) $\operatorname{Re} (z - i)^2 \geq 0$; |
| (c) $z^2 = 2 \operatorname{Re} (iz)$; | (d) $\operatorname{Re} (z^3) \geq \operatorname{Im} (z^3)$. |

Rozwiązanie.

Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie dowolną liczbą zespoloną.

(a) Mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [(1+2i)z - 3i] < 0 &\iff \operatorname{Im} [(1+2i)(x+iy) - 3i] < 0 \\ &\iff \operatorname{Im} [(x-2y) + (2x+y-3)i] < 0 \\ &\iff 2x+y-3 < 0 \iff y < -2x+3. \end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór jest półpłaszczyzną otwartą, bez prostej $y = -2x + 3$ (rys. (a)).

(b) Mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (z-i)^2 \geq 0 &\iff \operatorname{Re} [(x+iy-i)^2] \geq 0 \iff \operatorname{Re} [x+i(y-1)]^2 \geq 0 \\ &\iff \operatorname{Re} [x^2 - (y-1)^2 + 2x(y-1)i] \geq 0 \iff x^2 - (y-1)^2 \geq 0 \\ &\iff x^2 \geq (y-1)^2 \iff |x| \geq |y-1|. \end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór jest sumą dwóch obszarów kątowych ograniczonych prostymi $y = 1 - x$, $y = 1 + x$, łącznie z tymi prostymi (rys. (b)).

(c) Mamy

$$\begin{aligned} z^2 = 2 \operatorname{Re} (iz) &\iff (x+iy)^2 = 2 \operatorname{Re} [i(x+iy)] \\ &\iff x^2 - y^2 + i2xy = 2 \operatorname{Re} [-y + ix] \\ &\iff x^2 - y^2 + i2xy = -2y \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest równoważna układowi równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2y, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0, \\ x = 0 \text{ lub } y = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y^2 - 2y = 0, \\ x = 0 \end{cases}, \text{ lub } \begin{cases} x^2 = 0, \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}, \text{ lub } \begin{cases} x = 0, \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór składa się zatem z dwóch punktów $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$ (rys. (c)).

(d) Mamy

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

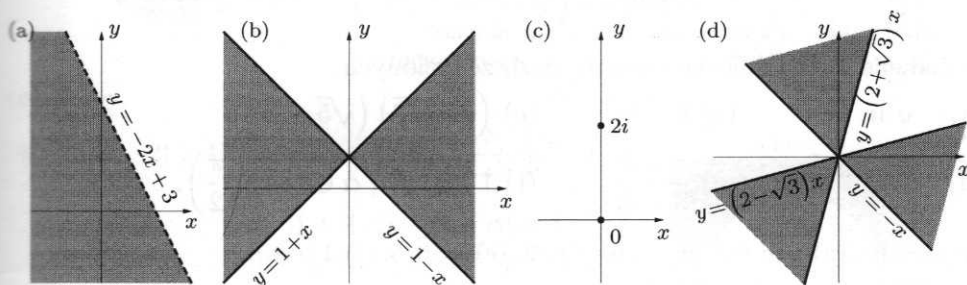
Zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (z^3) \geq \operatorname{Im} (z^3) &\iff x^3 - 3xy^2 \geq 3x^2y - y^3 \\ &\iff x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y \geq 0 \\ &\iff (x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy(x+y) \geq 0 \\ &\iff (x+y)(x^2 - 4xy + y^2) \geq 0 \\ &\iff (x+y)[(y-2x)^2 - 3x^2] \geq 0 \\ &\iff (y+x)[y - (2+\sqrt{3})x][y - (2-\sqrt{3})x] \geq 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest równoważna alternatywie warunków:

$$\begin{aligned}
 & (y + x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \geq 0) \quad \text{lub} \\
 & (y + x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \leq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \leq 0) \quad \text{lub} \\
 & (y + x < 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \leq 0) \quad \text{lub} \\
 & (y + x < 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \leq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \geq 0).
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie tej nierówności przedstawiono na rysunku (d).



Uwaga. W Przykładzie 1.11 przedstawimy inny sposób rozwiązywania zadań tego typu.

□ **Zadanie 1.4.** Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających warunki:

- (a) $\operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0$; (b) $\operatorname{Im} z^2 < 0$; (c) $\overline{z - i} = z - 1$;
 (d) $\frac{4}{z} = \bar{z}$; (e) $\operatorname{Im} \frac{1 + iz}{1 - iz} = 1$; (f) $z\bar{z} + (5 + i)z + (5 - i)\bar{z} + 1 = 0$.

Odpowiedzi. (a) półpłaszczyzna $\operatorname{Im} z \leq 2$; (b) druga i czwarta ćwiartka układu współrzędnych bez obu osi; (c) zbiór pusty; (d) okrąg o środku 0 i promieniu 2; (e) okrąg o środku $1 - i$ i promieniu 1, bez punktu $-i$; (f) okrąg o środku $-5 + i$ i promieniu 5.

■ **Przykład 1.5.** Obliczyć moduły liczb zespolonych:

- (a) $4i$; (b) $12i - 5$; (c) $(4i + 3)(\sqrt{2} - i)$;
 (d) $\frac{2 - i}{\sqrt{3}i - 1}$; (e) $\sqrt{5 + 2i}$; (f) $(1 - \sqrt{2}i)^4$.

Rozwiązanie. Moduł liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, jest określony wzorem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wykorzystamy następujące własności modułu liczby zespolonej:

- (1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, (2) $|z^n| = |z|^n$, (3) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, (4) $|\bar{z}| = |z|$.

Mamy kolejno

- (a) $|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$;
 (b) $|12i - 5| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$;

- (c) $|(4i + 3)(\sqrt{2} - i)| \stackrel{(1)}{=} |4i + 3| |\sqrt{2} - i| = \sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{3};$
 (d) $\left| \frac{2-i}{\sqrt{3}i-1} \right| \stackrel{(3)}{=} \frac{|2-i|}{|\sqrt{3}i-1|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$
 (e) $|\sqrt{5} + 2i| \stackrel{(4)}{=} |\sqrt{5} + 2i| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3;$
 (f) $\left| (1 - \sqrt{2}i)^4 \right| \stackrel{(2)}{=} |1 - \sqrt{2}i|^4 = \left(\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2} \right)^4 = (\sqrt{3})^4 = 9.$

□ **Zadanie 1.5.** Obliczyć moduły liczb zespolonych:

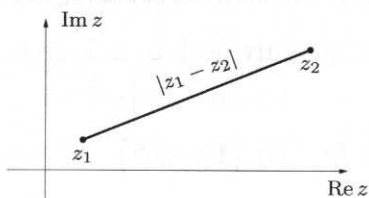
- (a) $-\sqrt{3}i;$ (b) $6 - 8i;$ (c) $(i - \sqrt{3})(\sqrt{5} + 2i);$
 (d) $(i - \sqrt{3})^5;$ (e) $\frac{1 + 3i}{3 - 4i};$ (f) $1 + i \operatorname{tg} \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

Odpowiedzi. (a) $\sqrt{3};$ (b) 10; (c) 6; (d) 32; (e) $\sqrt{10}/5;$ (f) $1/\cos \alpha.$

■ **Przykład 1.6.** Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

- (a) $|z + 1 - 2i| = 3;$ (b) $2 \leq |z + i| < 4;$ (c) $|(1 + i)z - 2| \geq 4;$
 (d) $\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq 1;$ (e) $\operatorname{Re}(z + 1) < 0$ i $|i - z| \leq 3;$ (f) $|z^2 + 4| \leq |z - 2i|;$
 (g) $\left| \frac{\bar{z} - 1 - 3i}{3 - 4i} \right| \leq 1;$ (h) $|z - 1| \leq |z + i| < |z - 2 + 3i|;$ (i) $|(z + i)^2| \geq |z^2 + 1|.$

Rozwiązanie. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 płaszczyzny zespolonej (rys.).

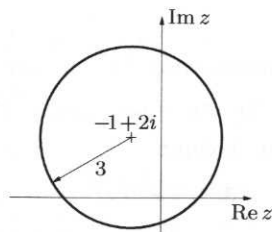


W rozwiązaniach wykorzystamy własności modułu podane w poprzednim przykładzie.

(a) Mamy

$$|z + 1 - 2i| = 3 \iff |z - (-1 + 2i)| = 3.$$

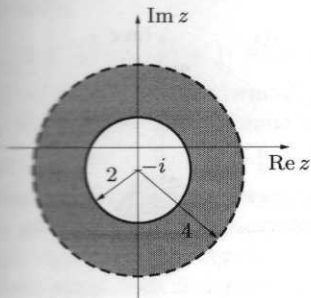
Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości $r = 3$ od punktu $z_0 = -1 + 2i$. Jest to zatem okrąg o środku $z_0 = -1 + 2i$ i promieniu $r = 3$ (rys.).



(b) Mamy

$$2 \leq |z + i| < 4 \iff 2 \leq |z - (-i)| < 4.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości nie mniejszej niż $r_1 = 2$ od punktu $z_0 = -i$ oraz w odległości mniejszej niż $r_2 = 4$ od tego punktu. Jest to zatem pierścień kołowy o środku $z_0 = -i$, promieniu wewnętrznym $r_1 = 2$ i zewnętrznym $r_2 = 4$. Okrąg o promieniu $r_1 = 2$ należy do tego pierścienia, a okrąg o promieniu $r_2 = 4$ nie należy do niego (rys.).



(c) Mamy

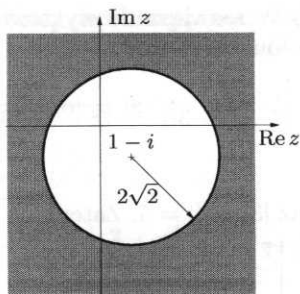
$$|(1+i)z - 2| \geq 4 \iff \left| (1+i) \cdot \left(z - \frac{2}{1+i} \right) \right| \geq 4$$

$$\stackrel{(1)}{\iff} |1+i| \cdot |z - (1-i)| \geq 4$$

$$\iff \sqrt{2} |z - (1-i)| \geq 4$$

$$\iff |z - (1-i)| \geq 2\sqrt{2}.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości nie mniejszej niż $r = 2\sqrt{2}$ od punktu $z_0 = 1 - i$. Jest to zatem zewnątrz koła o środku $z_0 = 1 - i$ i promieniu $r = 2\sqrt{2}$. Okrąg o promieniu $r = 2\sqrt{2}$ należy do tego zbioru (rys.).



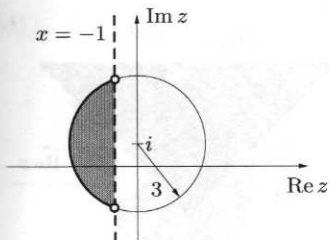
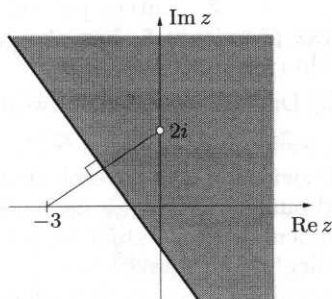
(d) Dla $z \neq 2i$ mamy

$$\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq 1 \stackrel{(3)}{\iff} \frac{|z+3|}{|z-2i|} \geq 1$$

$$\iff |z+3| \geq |z-2i|$$

$$\iff |z - (-3)| \geq |z - 2i|.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z , których odległość od punktu $z_1 = -3$ jest nie mniejsza niż odległość od punktu $z_2 = 2i$. Jest to zatem półpłaszczyzna ograniczona symetralną odcinka o końcach z_1, z_2 , bez punktu $z_2 = 2i$. Symetralna ta należy do szukanego zbioru (rys.).



(e) Poszukiwany zbiór jest wspólną częścią zbiorów określonych przez warunki:

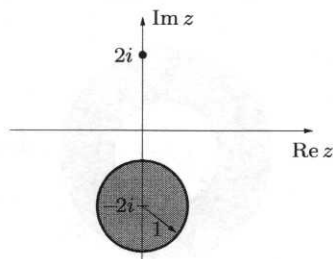
$$\operatorname{Re}(z+1) < 0, \quad |i-z| \leq 3.$$

Pierwszy warunek określa lewą półpłaszczyznę otwartą ograniczoną prostą $x = -1$. Drugi warunek określa koło domknięte o środku $z_0 = i$ i promieniu $r = 3$. Wspólną część tych zbiorów przedstawiono na rysunku.

(f) Mamy

$$\begin{aligned}
 |z^2 + 4| \leq |z - 2i| &\iff |(z + 2i) \cdot (z - 2i)| \leq |z - 2i| \\
 &\stackrel{(1)}{\iff} |z + 2i| \cdot |z - 2i| \leq |z - 2i| \\
 &\iff |z - 2i| = 0 \text{ albo} \\
 &\quad |z - 2i| > 0 \text{ oraz } |z + 2i| \leq 1.
 \end{aligned}$$

Warunek $|z - 2i| = 0$ wyznacza zbiór $\{2i\}$, a warunki $|z + 2i| \leq 1$ oraz $|z - 2i| > 0$



określają koło domknięte o środku $z_0 = -2i$ i promieniu $r = 1$. Sumę tych zbiorów przedstawiono na rysunku.

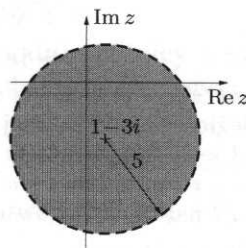
(g) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór $|\bar{z}| = |z|$ oraz własności sprzężenia liczb zespolonych. Mamy

$$\begin{aligned}
 |\bar{z} - 1 - 3i| &\stackrel{(4)}{=} |\overline{\bar{z} - 1 - 3i}| = |z - 1 + 3i| \\
 &= |z - (1 - 3i)|
 \end{aligned}$$

oraz $|3 - 4i| = 5$. Zatem

$$\left| \frac{\bar{z} - 1 - 3i}{3 - 4i} \right| < 1 \iff |z - (1 - 3i)| < 5.$$

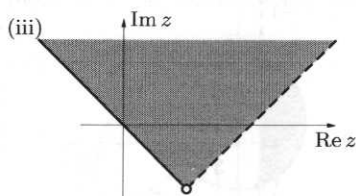
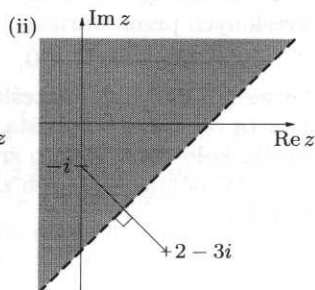
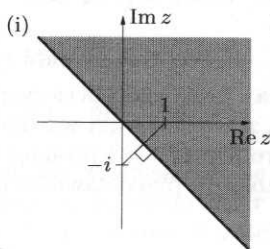
Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości mniejszej niż 5 od punktu $z_0 = 1 - 3i$. Zatem jest to koło o środku z_0 oraz promieniu 5, bez okręgu ograniczającego koło (rys.).



(h) Dana nierówność podwójna jest równoważna koniunkcji

$$|z - 1| \leq |z - (-i)| \text{ oraz } |z - (-i)| < |z - (2 - 3i)|.$$

Rozwiązaniem pierwszej nierówności jest zbiór liczb zespolonych, których odległość od punktu $z_1 = 1$ jest nie większa niż odległość od punktu $z_2 = -i$ (rys. (i)), a rozwiązaniem drugiej – zbiór liczb z , których odległość od punktu $z_2 = -i$ jest mniejsza niż odległość od punktu $z_3 = 2 - 3i$ (rys. (ii)). Zatem pierwszy zbiór jest półpłaszczyzną ograniczoną symetralną odcinka łączącego punkty z_1 i z_2 (symetralna należy do tego zbioru), a drugi półpłaszczyzną ograniczoną symetralną odcinka łączącego punkty z_2 i z_3 (bez tej symetralnej). Szukany zbiór jest wspólną częścią tych półpłaszczyzn (rys. (iii)).



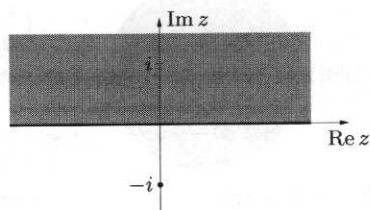
(i) Mamy

$$|(z+i)^2| \geq |z^2+1| \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} |z+i|^2 \geq |(z-i)(z+i)| \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |z+i|^2 \geq |z-i||z+i|.$$

Gdy $z = -i$, to nierówność jest prawdziwa, a dla $z \neq -i$ jest równoważna nierówności

$$|z+i| \geq |z-i|.$$

Zatem rozwiązaniem wyjściowej nierówności jest półpłaszczyzna ograniczona symetralną odcinka łączącego punkty $z_1 = -i$, $z_2 = i$ (razem z symetralną) oraz dołączonym do niej punktem $-i$ (rys.).



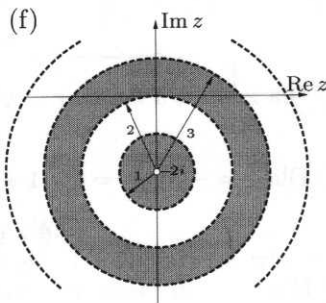
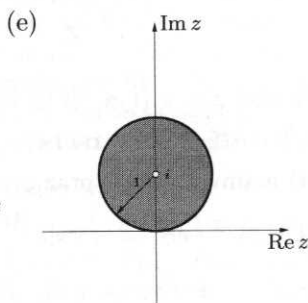
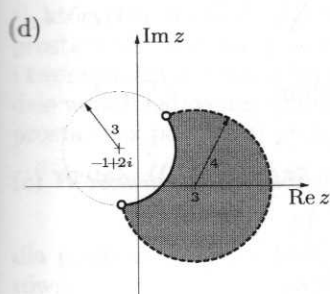
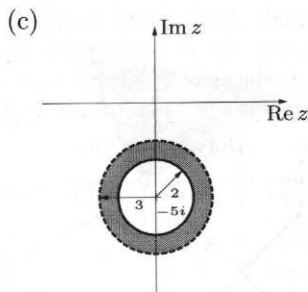
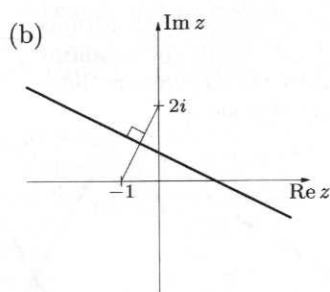
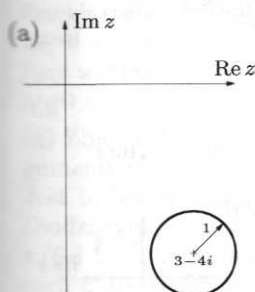
□ **Zadanie 1.6.** Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

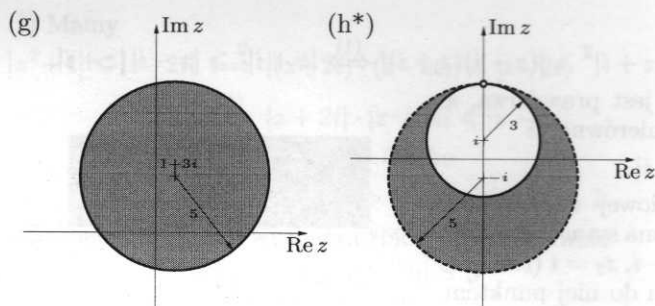
(a) $|z - 3 + 4i| = 1$; (b) $\left| \frac{z-2i}{z+1} \right| = 1$; (c) $2 \leq |iz - 5| < 3$;

(d) $|z + 1 - 2i| \geq 3$ oraz $|z - 3| < 4$; (e) $\left| \frac{z+i}{z^2+1} \right| \geq 1$;

(f) $\sin(\pi|z+2i|) > 0$; (g) $|\bar{z} - 1 + 3i| \leq 5$; (h*) $3|z+i| \leq |z^2+1| < 5|z-i|$.

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej:





1.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

■ **Przykład 1.7.** Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

- (a) $-\sqrt{5}$; (b) $-6 + 6i$; (c) $-2i$;
 (d) $\sqrt{3} + i$; (e) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$; (f) $-\sqrt{27} - 3i$.

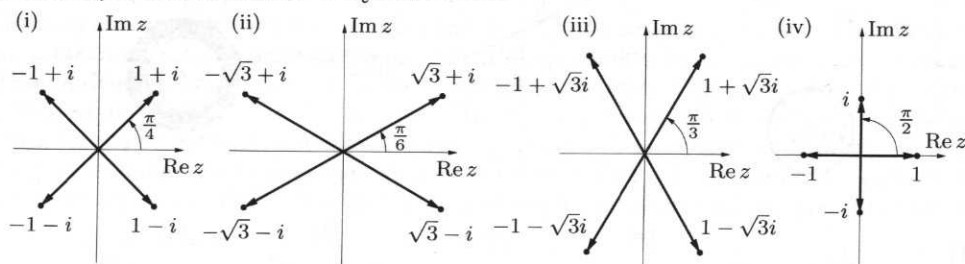
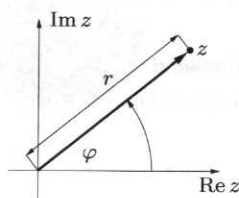
Rozwiązanie. Liczbę zespoloną $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) można zapisać w postaci trygonometrycznej:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest modulem, a φ argumentem liczby z . Dla $r > 0$ argument wyznaczamy z warunków:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Jednak dość często korzystamy z interpretacji geometrycznej danej liczby zespolonej i jej argument ustalamy na podstawie rysunku oraz faktu, że argumenty liczb zespolonych z i αz dla $\alpha > 0$ są takie same.



(a) Dla $z = -\sqrt{5}$ mamy $r = \sqrt{5}$ oraz $\varphi = \pi$ (rys. (iv)). Zatem

$$-\sqrt{5} = \sqrt{5}(\cos \pi + i \sin \pi).$$

(b) Dla $z = -6 + 6i = 6(-1 + i)$ mamy $r = 6\sqrt{2}$ oraz $\varphi = 3\pi/4$ (rys. (i)). Zatem

$$-6 + 6i = 6\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

(c) Dla $z = -2i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = 3\pi/2$ (rys. (iv)). Zatem

$$-2i = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

(d) Dla $z = \sqrt{3} + i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = \pi/6$ (rys. (ii)). Zatem

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

(e) Dla $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i = \sqrt{2}(1 - \sqrt{3}i)$ mamy $r = 2\sqrt{2}$ oraz więc $\varphi = 5\pi/3$ (rys. (iii)). Zatem

$$\sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$$

(f) Dla $z = -\sqrt{27} - 3i = 3(-\sqrt{3} - i)$ mamy $r = 6$ oraz $\varphi = 7\pi/6$ (rys. (ii)). Zatem

$$-\sqrt{27} - 3i = 6 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right).$$

□ **Zadanie 1.7.** Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

(a) $7 + 7i$; (b) $\sqrt{3} - i$; (c) $-5 + 5\sqrt{3}i$; (d) $-\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

Odpowiedzi. (a) $7\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$; (b) $2(\cos(11\pi/6) + i \sin(11\pi/6))$;

(c) $10(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))$; (d) $\sqrt{6}(\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4))$.

■ **Przykład 1.8.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

(a) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$; (b) $\arg(z + 2 - i) = \pi$; (c) $\pi \leq \arg[(-1 + i)z] \leq \frac{3\pi}{2}$.

Rozwiązanie. Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument φ tej liczby spełniający warunek $0 \leq \varphi < 2\pi$. Ponadto przyjmujemy, że $\arg 0 = 0$.

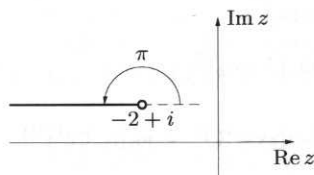
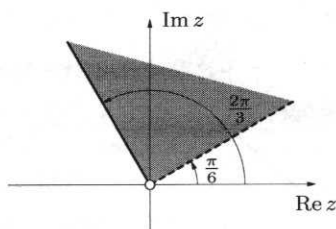
(a) Zbiór składa się z liczb zespolonych, których argumenty główne zawarte są w przedziale $(\pi/6, 2\pi/3]$. Jest to obszar kątowy ograniczony półprostymi wychodzącymi z początku układu i tworzącymi kąty $\pi/6$ i $2\pi/3$ z dodatnią częścią osi $\text{Re } z$. Pierwsza z tych półprostych nie należy do tego zbioru.

(b) Zbiór składa się z liczb zespolonych $w = z - (-2 + i)$, których argumenty główne są równe π . Jest to półprosta wychodząca z początku układu (zmienna w) i tworząca kąt π z dodatnią częścią osi $\text{Re } w$. W układzie współrzędnych ze zmienną z jest to ta sama półprosta (bez początku) przesunięta o wektor $-2 + i$.

(c) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ponieważ $\arg(-1 + i) = 3\pi/4$, więc nierówność



$$\pi \leq \arg [(-1+i)z] \leq \frac{3\pi}{2}$$

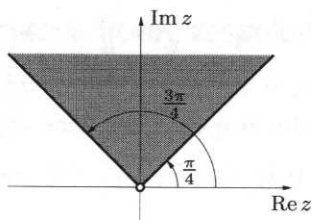
jest równoważna nierówności

$$\pi \leq \frac{3\pi}{4} + \arg z + 2k\pi \leq \frac{3\pi}{2}$$

dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$. Ale $0 \leq \arg z < 2\pi$, więc $k = 0$. Stąd otrzymamy

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}.$$

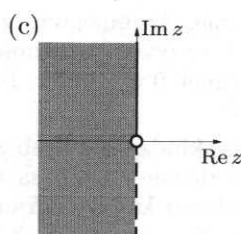
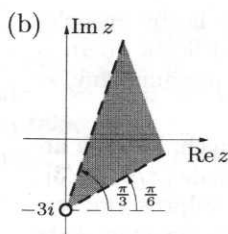
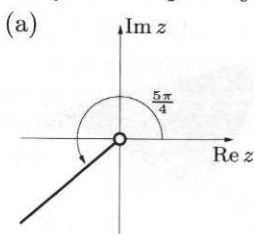
Szukany zbiór jest domkniętym obszarem kątowym ograniczonym półprostymi wychodzącymi z punktu O (bez tego punktu) i tworzącymi kąty $\pi/4$ i $3\pi/4$ z dodatnią częścią osi $\text{Re } z$.



□ **Zadanie 1.8.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

(a) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$; (b) $\frac{\pi}{6} < \arg(z+3i) < \frac{\pi}{3}$; (c) $\pi \leq \arg(iz) < 2\pi$.

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej.



■ **Przykład 1.9.** Obliczyć wartości wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

(a) $(1+i)^7$; (b) $(\sqrt{3}-i)^{32}$; (c) $(-2+2i)^8$;
 (d) $(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)^{10}$; (e) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$; (f) $\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^{14}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór de Moivre'a

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Ponadto wykorzystamy wzory redukcyjne oraz rysunki z Przykładu 1.7.

(a) Dla $z = 1 + i$ mamy $|z| = \sqrt{2}$ oraz $\arg z = \pi/4$ (rys. (i)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}(1+i)^7 &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^7 = (\sqrt{2})^7 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \\ &= 8\sqrt{2} \left[\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 8\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 8 - 8i.\end{aligned}$$

(b) Dla $z = \sqrt{3} - i$ mamy $|z| = 2$ oraz $\arg z = 11\pi/6$ (rys. (ii)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} - i)^{32} &= \left[2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \right]^{32} = 2^{32} \left(\cos \frac{176\pi}{3} + i \sin \frac{176\pi}{3} \right) \\ &= 2^{32} \left[\cos \left(58\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(58\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = 2^{32} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2^{32} \left[\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right] = 2^{32} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2^{32} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{31} (i\sqrt{3} - 1).\end{aligned}$$

(c) Dla $z = -2 + 2i$ mamy $|z| = 2\sqrt{2}$ oraz $\arg z = 3\pi/4$ (rys. (i)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymamy

$$\begin{aligned}(-2 + 2i)^8 &= \left[2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^8 \\ &= 2^{12} (\cos 6\pi + i \sin 6\pi) = 2^{12} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{12}.\end{aligned}$$

(d) Dla $z = \cos 33^\circ + i \sin 33^\circ$ mamy $|z| = 1$ oraz $\arg z = 33^\circ$. Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)^{10} &= 1^{10} (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) \\ &= \cos (360^\circ - 30^\circ) + i \sin (360^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 30^\circ - i \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

(e) Dla $z_1 = 1 - i$ mamy $|z_1| = \sqrt{2}$ oraz $\arg z_1 = -\pi/4$, a dla $z_2 = \sqrt{3} + i$ mamy $|z_2| = 2$ (rys. (i)) oraz $\arg z_2 = \pi/6$ (rys. (ii)). Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a oraz wzorów redukcyjnych otrzymamy

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^6 &= \frac{(1-i)^6}{(\sqrt{3}+i)^6} = \frac{\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right]^6}{\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^6} = \frac{2^3 \left(\cos \frac{42\pi}{4} + i \sin \frac{42\pi}{4} \right)}{2^6 (\cos \pi + i \sin \pi)} \\ &= \frac{\cos \left(10\pi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(10\pi + \frac{\pi}{2} \right)}{-2^3} = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}{-2^3} = -\frac{i}{8}.\end{aligned}$$

(f) Dla $z = -\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)$ mamy $|z| = 1$. Ponadto $\arg z = 6\pi/7$, gdyż ze wzorów redukcyjnych wynika, iż

$$z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7}.$$

Zatem korzystając ze wzoru de Moivre'a otrzymamy

$$\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)^{14} = \left[1 \left(\cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7} \right) \right]^{14} = 1^{14} (\cos 12\pi + i \sin 12\pi) = 1.$$

□ **Zadanie 1.9.** Obliczyć wartości wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} (1-i)^{12}; & \text{(b)} (1+\sqrt{3}i)^8; & \text{(c)} (2\sqrt{3}-2i)^{30}; \\ \text{(d)} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{10}; & \text{(e)} \frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}; & \text{(f)} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right)^{24}. \end{array}$$

Odpowiedzi. (a) -2^6 ; (b) $2^7(-1+\sqrt{3}i)$; (c) -4^{30} ; (d) $-i$; (e) $-32i$; (f) 1.

■ **Przykład 1.10.** Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

(a) $\cos 3x$ przez $\cos x$; (b) $\sin 6x$ przez $\sin x$ i $\cos x$.

Rozwiązanie.

(a) Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i \sin x)^3$ wykorzystując dwa wzory: wzór de Moivre'a oraz wzór dwumianowy Newtona. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^3 &= (\cos x)^3 + \binom{3}{1}(\cos x)^2(i \sin x) + \binom{3}{2}(\cos x)(i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \\ &= (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x). \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste prawych stron obu równości otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \\ &= \cos x (\cos^2 x - 3 + 3 \cos^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3). \end{aligned}$$

(b) Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i \sin x)^6$ wykorzystując dwa wzory: wzór de Moivre'a oraz wzór dwumianowy Newtona. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i \sin x)^6 = \cos 6x + i \sin 6x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$\begin{aligned}
 (\cos x + i \sin x)^6 &= (\cos x)^6 + \binom{6}{1} (\cos x)^5 (i \sin x) + \binom{6}{2} (\cos x)^4 (i \sin x)^2 + \binom{6}{3} (\cos x)^3 \\
 &\quad \times (i \sin x)^3 + \binom{6}{4} (\cos x)^2 (i \sin x)^4 + \binom{6}{5} (\cos x) (i \sin x)^5 + (i \sin x)^6 \\
 &= \cos^6 x + 6i \cos^5 x \sin x - 15 \cos^4 x \sin^2 x - 20i \cos^3 x \sin^3 x \\
 &\quad + 15 \cos^2 x \sin^4 x + 6i \cos x \sin^5 x - \sin^6 x \\
 &= (\cos^6 x - 15 \cos^4 x \sin^2 x + 15 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x) \\
 &\quad + i (6 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x).
 \end{aligned}$$

Porównując części urojone prawych stron obu równości otrzymamy

$$\sin 6x = 6 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x.$$

□ **Zadanie 1.10.** Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

- (a) $\sin 3x$ przez $\sin x$; (b) $\cos 4x$ przez $\sin x$ i $\cos x$.

Odpowiedzi. (a) $\sin x (3 - 4 \sin^2 x)$; (b) $\cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$.

■ **Przykład 1.11.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

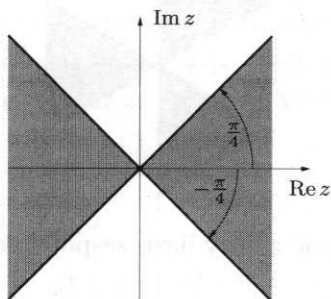
- (a) $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$; (b) $\operatorname{Im}(z^6) < 0$; (c) $\operatorname{Re}[(\bar{z})^3] > 0$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy postać trygonometryczną liczby zespolonej (Przykład 1.7) oraz wzór de Moivre'a (Przykład 1.9).

(a) Dla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r \geq 0$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$ mamy

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(z^2) \geq 0 &\iff \operatorname{Re}\{[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2\} \geq 0 \iff \operatorname{Re}[r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)] \geq 0 \\
 &\iff r^2 \cos 2\varphi \geq 0 \iff r = 0 \text{ lub } r > 0 \text{ i } \cos 2\varphi \geq 0 \\
 &\iff r = 0 \text{ lub } r > 0 \text{ i } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right).
 \end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór składa się z dwóch domkniętych obszarów kątowych (rys.).



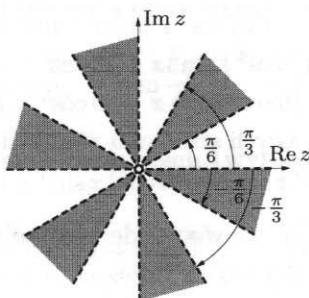
(b) Dla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r \geq 0$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$, mamy

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(z^6) < 0 &\iff \operatorname{Im}\{[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^6\} < 0 \\
 &\iff \operatorname{Im}[r^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi)] < 0 \iff
 \end{aligned}$$

$$\iff r^6 \sin 6\varphi < 0 \iff r > 0 \text{ i } \sin 6\varphi < 0$$

$$\iff r > 0 \text{ i } \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right).$$

Poszukiwany zbiór składa się z sześciu otwartych obszarów kątowych (rys.).



(c) Dla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r \geq 0$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$, mamy

$$\bar{z} = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)].$$

Zatem

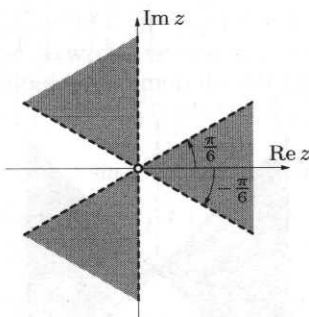
$$\operatorname{Re}[(\bar{z})^3] > 0 \iff \operatorname{Re}\left\{[r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))]^3\right\} > 0$$

$$\iff \operatorname{Re}[r^3(\cos(-3\varphi) + i \sin(-3\varphi))] > 0$$

$$\iff r^3 \cos(-3\varphi) > 0 \iff r > 0 \text{ i } \cos 3\varphi > 0$$

$$\iff r > 0 \text{ i } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right).$$

Poszukiwany zbiór składa się z trzech otwartych obszarów kątowych (rys.).



□ **Zadanie 1.11.** Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

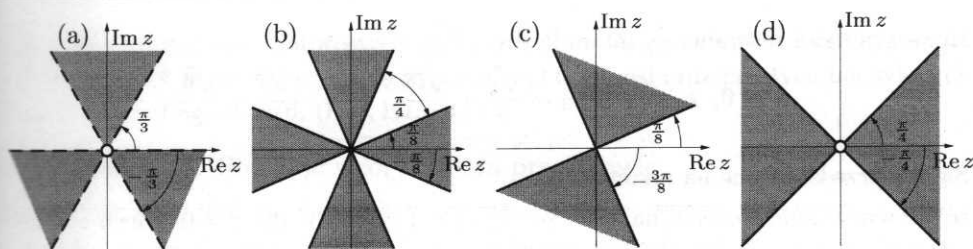
(a) $\operatorname{Im}(z^3) < 0$;

(b) $\operatorname{Re}(z^4) \geq 0$;

(c) $\operatorname{Im}(z^2) \geq \operatorname{Re}[(\bar{z})^2]$;

(d) $\operatorname{Im} \frac{(1+i)z}{(1-i)\bar{z}} \geq 0$.

Odpowiedzi. Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawiono na rysunkach.



1.3. Postać wykładnicza liczby zespolonej

■ **Przykład 1.12.** Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej z rozwiązać równania:

(a) $z^2 = (\bar{z})^2$; (b) $(\bar{z})^6 = 4|z^2|$; (c) $\frac{|z|^2 z}{(\bar{z})^3} = -1$; (d) $|z| \cdot z^2 = -i$.

Rozwiązanie. Zastępując symbolem $e^{i\varphi}$ wyrażenie $\cos \varphi + i \sin \varphi$ występujące w postaci trygonometrycznej liczby zespolonej $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ otrzymamy postać wykładniczą tej liczby, tzn. wzór $z = re^{i\varphi}$. Przy rozwiązywaniu równań będziemy korzystać z tego, że dwie niezerowe liczby zespolone są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich moduły są równe, a argumenty różnią się o wielokrotność 2π , tzn. dla $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $r_1, r_2 > 0$, mamy

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

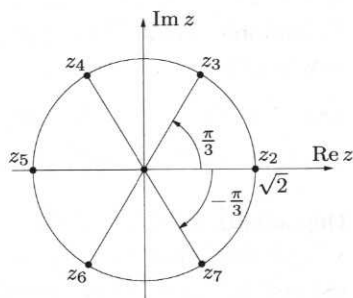
(a) Niech $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r \geq 0$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$. Wtedy $\bar{z} = re^{-i\varphi}$. Ponadto, ze wzoru de Moivre'a mamy $z^2 = r^2 e^{2i\varphi}$ oraz $(\bar{z})^2 = r^2 e^{-2i\varphi}$. Zatem

$$\begin{aligned} z^2 = -(\bar{z})^2 &\iff r^2 e^{2i\varphi} = r^2 e^{-2i\varphi} \\ &\iff r = 0 \text{ albo } r > 0 \text{ oraz } 2\varphi = -2\varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff r = 0 \text{ albo } r > 0 \text{ oraz } \varphi = \frac{k\pi}{2} \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest zatem suma osi rzeczywistej i urojonej.

(b) Liczba $z = 0$ spełnia równanie $(\bar{z})^6 = 4|z^2|$. Niech teraz $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Wówczas $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ oraz ze wzoru de Moivre'a $(\bar{z})^6 = r^6 e^{-6i\varphi}$. Dalej $|z^2| = r^2$, a więc

$$\begin{aligned} (\bar{z})^6 = 4|z^2| &\iff r^6 e^{-6i\varphi} = 4r^2 \\ &\iff r^6 e^{-6i\varphi} = 4r^2 e^{i \cdot 0} \\ &\iff \begin{cases} r^6 = 4r^2, \\ -6\varphi = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 0 \text{ lub } r = \sqrt{2}, \\ \varphi = \frac{l\pi}{3}, \quad l = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases} \end{aligned}$$



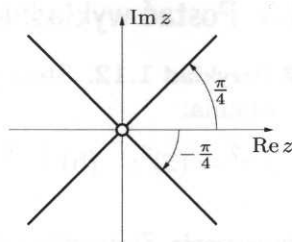
Rozwiązaniami równania są zatem liczby

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{2}, \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \quad z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \\ z_5 = -z_2, \quad z_6 = -z_3, \quad z_7 = -z_4.$$

Są one przedstawione na rysunku.

(c) Równoważnie możemy napisać, że $|z|^2 \cdot z = (-1) \cdot (\bar{z})^3$ dla $z \neq 0$. Niech $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Wówczas

$$\begin{aligned} |z|^2 \cdot z = (-1) \cdot (\bar{z})^3 &\iff r^2 \cdot (re^{i\varphi}) = e^{i\pi} \cdot (r^3 e^{-3i\varphi}) \\ &\iff r^3 e^{i\varphi} = r^3 e^{i(\pi-3\varphi)} \\ &\iff \begin{cases} r^3 = r^3, \\ \varphi = \pi - 3\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r \in (0, \infty), \\ \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

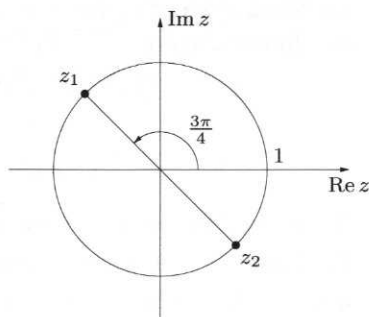


Rozwiązania równania tworzą więc dwie proste nachylone do osi rzeczywistej pod kątami $\pi/4$ oraz $-\pi/4$ i przechodzące przez punkt O , ale bez tego punktu (rys.). Dla $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r \geq 0$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$, mamy $|z| = r$ oraz $z^2 = r^2 e^{2i\varphi}$. Ponadto $-i = 1 \cdot e^{3\pi i/2}$. Równanie $|z| \cdot z^2 = -i$ przyjmie teraz równoważną postać

$$r^3 e^{2i\varphi} = 1 \cdot e^{\frac{3}{2}\pi i}.$$

(d) Stąd $r = 1$ oraz $2\varphi = 3\pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Zatem $\varphi = 3\pi/4 + k\pi$. Jedynymi wartościami k , dla których $0 \leq \varphi < 2\pi$, są 0 i 1 . Rozwiązaniami równania są zatem liczby:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \cdot e^{\frac{3\pi i}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i), \\ z_2 &= 1 \cdot e^{\frac{7\pi i}{4}} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i). \end{aligned}$$



□ **Zadanie 1.12.** Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej z rozwiązać równania:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad z^7 &= \bar{z}; & \text{(b)} \quad \overline{(z^4)} &= z^2 |z^2|; & \text{(c)} \quad (\bar{z})^2 |z^2| &= \frac{4}{z^2}; \\ \text{(d)} \quad |z|^3 &= iz^3; & \text{(e)} \quad z^6 &= (\bar{z})^6; & \text{(f)} \quad |z^8| &= z^4. \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) $0, 1, \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2, i, -\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2, -1, -\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}i/2, -i, \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}i/2$; (b) suma trzech prostych: osi rzeczywistej oraz prostych nachylonych do tej osi pod kątem $\pi/3$ i przechodzących przez punkt O ; (c) okrąg o środku w punkcie O i promieniu $\sqrt[3]{2}$; (d) suma trzech półprostych o początku w punkcie O : nieujemnej

części osi urojonej oraz półprostych nachylonych do niej pod kątem $2\pi/3$; (e) suma sześciu prostych przecinających się w punkcie O : obu osi oraz prostych nachylonych do tych osi pod kątem $\pi/6$; (f) $0, 1, i, -1, -i$.

■ **Przykład 1.13.** Stosując wzory Eulera przedstawić:

(a) $\cos^5 x$; (b) $\sin^6 x$.

w postaci sumy sinusów lub cosinusów wielokrotności kąta x .

Rozwiązanie. Niech $x \in \mathbb{R}$. Wówczas zachodzą wzory (Eulera):

$$(1) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (2) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

(a) Korzystając ze wzoru (1) oraz stosując wzór dwumianowy Newtona otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos^5 x &= \frac{1}{2^5} (e^{ix} + e^{-ix})^5 \\ &= \frac{1}{2^5} \left[\binom{5}{0} (e^{ix})^5 (e^{-ix})^0 + \binom{5}{1} (e^{ix})^4 (e^{-ix})^1 + \binom{5}{2} (e^{ix})^3 (e^{-ix})^2 \right. \\ &\quad \left. + \binom{5}{3} (e^{ix})^2 (e^{-ix})^3 + \binom{5}{4} (e^{ix})^1 (e^{-ix})^4 + \binom{5}{5} (e^{ix})^0 (e^{-ix})^5 \right] \\ &= \frac{1}{2^5} (e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{2^4} \left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} + 5 \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} + 10 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{16} (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x). \end{aligned}$$

(b) Korzystając ze wzoru (2) oraz stosując wzór dwumianowy Newtona otrzymamy

$$\begin{aligned} \sin^6 x &= \frac{1}{(2i)^6} (e^{ix} - e^{-ix})^6 = \\ &= -\frac{1}{2^6} \left[\binom{6}{0} (e^{ix})^6 (e^{-ix})^0 - \binom{6}{1} (e^{ix})^5 (e^{-ix})^1 + \binom{6}{2} (e^{ix})^4 (e^{-ix})^2 \right. \\ &\quad \left. - \binom{6}{3} (e^{ix})^3 (e^{-ix})^3 + \binom{6}{4} (e^{ix})^2 (e^{-ix})^4 - \binom{6}{5} (e^{ix})^1 (e^{-ix})^5 + \binom{6}{6} (e^{ix})^0 (e^{-ix})^6 \right] \\ &= -\frac{1}{2^6} (e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{2^5} \left(\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2} - 6 \frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} + 15 \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} - 10 \right) \\ &= -\frac{1}{32} (10 - 15 \cos 2x + 6 \cos 4x - \cos 6x). \end{aligned}$$

Uwaga. Otrzymane zależności można wykorzystać do obliczania całek nieoznaczonych funkcji $\cos^5 x$, $\sin^6 x$.

□ **Zadanie 1.13.** Stosując wzory Eulera przedstawić:

- (a) $\sin^3 x$; (b) $\cos^2 x$; (c) $\sin^5 x$; (d) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

w postaci sumy sinusów lub cosinusów wielokrotności kąta x .

Odpowiedzi. (a) $(3 \sin x - \sin 3x)/4$; (b) $(1 + \cos 2x)/2$; (c) $(\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)/16$; (d) $(\cos 4x + 3)/4$.

1.4. Pierwiastkowanie liczb zespolonych

■ **Przykład 1.14.** Korzystając z definicji obliczyć:

- (a) $\sqrt{4i-3}$; (b) $\sqrt[3]{8}$; (c) $\sqrt[4]{-1}$.

Rozwiązanie. Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą równość $w^n = z$. Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

(a) Niech $x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie szukany pierwiastkiem. Wtedy $(x + iy)^2 = 4i - 3$. Stąd $x^2 + 2ixy - y^2 = 4i - 3$. Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ 2xy = 4, \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są pary liczb: $x = 1, y = 2$; $x = -1, y = -2$.
Zatem

$$\sqrt{4i-3} = \{1 + 2i, -1 - 2i\}.$$

(b) Niech $x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie szukany pierwiastkiem. Wtedy $(x + iy)^3 = 8$. Stąd $x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = 8$. Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 8, \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^2 - 3y^2) = 8, \\ y(3x^2 - y^2) = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania tego układu wynika, że $y = 0$ lub $3x^2 = y^2$. Wykorzystując te zależności w pierwszym równaniu układu otrzymamy $x^3 = 8$ lub $-8x^3 = 8$. Stąd $x = 2$ lub $x = -1$. Ostatecznie rozwiązaniem układu równań są pary liczb:

$$x = 2, y = 0; \quad x = -1, y = \sqrt{3}; \quad x = -1, y = -\sqrt{3}.$$

Zatem

$$\sqrt[3]{8} = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}.$$

(c) Niech $x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie szukany pierwiastkiem. Wtedy $(x + iy)^4 = -1$. Stąd

$$x^4 + 4x^3yi - 6x^2y^2 - 4xy^3i + y^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + i4xy(x^2 - y^2) = -1.$$

Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = -1, \\ 4xy(x^2 - y^2) = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania układu wynika, że

$$xy = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - y^2 = 0.$$

Jeżeli $x = 0$ lub $y = 0$, to po wstawieniu do pierwszego równania otrzymamy odpowiednio równania $y^4 = -1$ lub $x^4 = -1$, które są sprzeczne. Jeżeli zaś $x^2 - y^2 = 0$, to po wstawieniu do pierwszego równania otrzymamy $-4x^4 = -1$, stąd

$$\left(x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad \left(y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Zatem

$$\sqrt[4]{-1} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \right\}.$$

□ **Zadanie 1.14.** Korzystając z definicji obliczyć:

(a) $\sqrt{5-12i}$; (b) $\sqrt{-11+60i}$; (c) $\sqrt[3]{i}$; (d) $\sqrt[4]{16}$.

Odpowiedzi. (a) $\{3-2i, -3+2i\}$; (b) $\{5+6i, -5-6i\}$;

(c) $\{-i, (\sqrt{3}+i)/2, (-\sqrt{3}+i)/2\}$; (d) $\{2, 2i, -2, -2i\}$.

■ **Przykład 1.15.** Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej:

(a) $\sqrt{-2i}$; (b) $\sqrt[3]{-27}$; (c) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$; (d) $\sqrt[6]{1}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór na pierwiastki stopnia n z liczby zespolonej $z \neq 0$ o argumencie φ . Wzór ten ma postać: $\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$, gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

(a) Dla $z = -2i$ mamy $|z| = 2$ oraz $\arg z = 3\pi/2$. Zatem

$$\sqrt{-2i} = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) : k = 0, 1 \right\}.$$

Dla $k = 0$ mamy

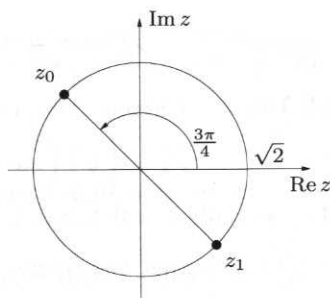
$$z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -1 + i.$$

Dla $k = 1$ otrzymujemy

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 1 - i.$$

Zatem $\sqrt{-2i} = \{-1+i, 1-i\}$.

(b) Dla $z = -27$ mamy $|z| = 27$ oraz $\arg z = \pi$. Zatem



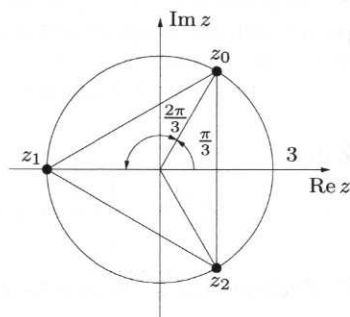
$$\sqrt[3]{-27} = \left\{ \sqrt[3]{27} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) : k = 0, 1, 2 \right\}.$$

Dla $k = 0, 1, 2$ otrzymamy odpowiednio:

$$z_0 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right),$$

$$z_1 = 3 (\cos \pi + i \sin \pi) = 3(-1 + 0 \cdot i) = -3,$$

$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$



$$\text{Stąd } \sqrt[3]{-27} = \left\{ \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -3, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

(c) Dla $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ mamy $|z| = 16$ oraz $\arg z = 2\pi/3$. Zatem

$$\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \left\{ \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{2\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi + 2k\pi}{4} \right) : k = 0, 1, 2, 3 \right\}.$$

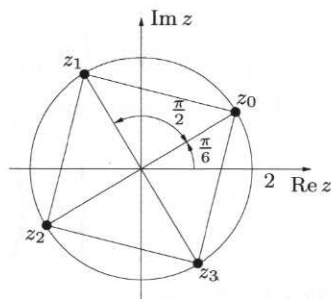
Tak więc dla $k = 0, 1, 2, 3$ mamy odpowiednio:

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i,$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - \sqrt{3}i.$$



$$\text{Stąd } \sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \left\{ \sqrt{3} + i, -1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3}i \right\}.$$

(d) Dla $z = 1$ mamy $|z| = 1$ oraz $\arg z = 0$. Zatem

$$\sqrt[6]{1} = \left\{ \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right) : k = 0, 1, \dots, 5 \right\}.$$

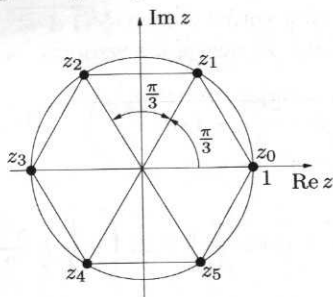
Tak więc dla $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ mamy odpowiednio:

$$z_0 = 1 (\cos 0 + i \sin 0) = 1, \quad z_1 = 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_2 = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = 1 (\cos \pi + i \sin \pi) = -1,$$

$$z_4 = 1 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_5 = 1 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\text{Ostatecznie } \sqrt[6]{1} = \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$



□ **Zadanie 1.15.** Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej:

- (a) $\sqrt{-1 + \sqrt{3}i}$; (b) $\sqrt[3]{-27i}$; (c) $\sqrt[4]{-4}$; (d) $\sqrt[6]{-64}$; (e) $\sqrt[5]{32i}$;
 (f) $\sqrt[3]{-1 + i}$; (g) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$; (h*) $\sqrt[4]{i}$; (i*) $\sqrt[3]{2 + 2i}$.

Odpowiedzi. (a) $\left\{ \sqrt{2} \left(1 + \sqrt{3}i \right) / 2, -\sqrt{2} \left(1 + \sqrt{3}i \right) / 2 \right\}$;

(b) $\left\{ 3i, -3 \left(\sqrt{3} + i \right) / 2, 3 \left(\sqrt{3} - i \right) / 2 \right\}$;

(c) $\{ 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i \}$; (d) $\left\{ \sqrt{3} + i, 2i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i, -2i, \sqrt{3} - i \right\}$;

(e) $\{ 2(\cos(\pi/10) + i \sin(\pi/10)), 2i, 2(\cos(9\pi/10) + i \sin(9\pi/10)), 2(\cos(13\pi/10) + i \sin(13\pi/10)), 2(\cos(17\pi/10) + i \sin(17\pi/10)) \}$;

(f) $\left\{ (1+i)/\sqrt[3]{2}, \left[(-1-\sqrt{3}) + i(-1+\sqrt{3}) \right] / 2\sqrt[3]{2}, \left[(-1+\sqrt{3}) + i(-1-\sqrt{3}) \right] / 2\sqrt[3]{2} \right\}$;

(g) $\left\{ \sqrt{3} + i, -1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3}i \right\}$;

(h*) $\{ \pm(a + bi), \pm(b - ai) \}$, gdzie $a = 1 + \sqrt{2}b$; $b = 1/\sqrt{4+2\sqrt{2}}$,

(i*) $\left\{ (a + i)/\sqrt{2a}, [(1-a) + (a-1)i]/\sqrt{2a}, (-1 - ai)/\sqrt{2a} \right\}$, gdzie $a = 2 + \sqrt{3}$.

■ **Przykład 1.16.** Odgadując jeden z elementów pierwiastków obliczyć pozostałe:

(a) $\sqrt{(3 - 5i)^2}$; (b) $\sqrt[3]{(1 + i)^6}$; (c) $\sqrt[4]{(\sqrt{3} - i)^{12}}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór wyrażający elementy zbioru

$$\sqrt[n]{z} = \{ z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \}$$

w zależności od wybranego pierwiastka z_0 , przy czym argument główny z_0 niekoniecznie musi być najmniejszy:

$$z_k = z_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right), \quad \text{gdzie } 1 \leq k \leq n-1.$$

(a) Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt{(3-5i)^2}$ jest liczba $z_0 = 3-5i$. Drugi element tego zbioru wyraża się zatem wzorem

$$z_1 = z_0 (\cos \pi + i \sin \pi) = (3-5i) \cdot (-1) = -3+5i.$$

(b) Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt[3]{(1+i)^6}$ jest liczba $z_0 = (1+i)^2 = 2i$. Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem

$$z_k = z_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right), \text{ gdzie } k = 1, 2.$$

Zatem

$$z_1 = 2i \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2i \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_2 = 2i \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2i \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \sqrt{3} - i.$$

(c) Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-i)^{12}}$ jest liczba

$$\begin{aligned} z_0 &= (\sqrt{3}-i)^3 = \left[2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \right]^3 \\ &= 8 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -8i. \end{aligned}$$

Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem

$$z_k = z_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} \right), \text{ gdzie } k = 1, 2, 3.$$

Zatem

$$z_1 = -8i \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = -8i \cdot i = 8,$$

$$z_2 = -8i (\cos \pi + i \sin \pi) = -8i \cdot (-1) = 8i,$$

$$z_3 = -8i \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -8i \cdot (-i) = -8.$$

□ **Zadanie 1.16.** Odgadując jeden z elementów pierwiastków obliczyć pozostałe:

$$(a) \sqrt{(5-4i)^4}; \quad (b) \sqrt[4]{(-2+3i)^4}; \quad (c) \sqrt[3]{(2-i)^6}; \quad (d) \sqrt[3]{(2-2i)^9}.$$

Odpowiedzi. (a) $\{9-40i, -9+40i\}$; (b) $\{-2+3i, -3-2i, 2-3i, 3+2i\}$;

(c) $\{3-4i, -3/2+2\sqrt{3}+2i+3\sqrt{3}i/2, -3/2-2\sqrt{3}+2i-3\sqrt{3}i/2\}$;

(d) $\{-16(1+i), 8(1+\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}), 8(1-\sqrt{3}+i+i\sqrt{3})\}$;

■ **Przykład 1.17.** Znaleźć rozwiązania równań:

$$(a) z^6 = (2 + 4i)^6; \quad (b) (z - i)^4 = (z + i)^4; \quad (c) (iz + 1)^3 = (z - 1)^3.$$

Rozwiązanie.

(a) Zauważmy, że rozwiązanie równania $z^6 = (2 + 4i)^6$ sprowadza się do znalezienia zbioru pierwiastków 6-tego stopnia z liczby $(2 + 4i)^6$. Jednym z elementów tego zbioru jest oczywiście liczba $z_0 = 2 + 4i$. Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem:

$$z_k = z_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6} \right) \quad (1 \leq k \leq 5).$$

Zatem

$$z_1 = (2 + 4i) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = (2 + 4i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - 2\sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i,$$

$$z_2 = (2 + 4i) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (2 + 4i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 - 2\sqrt{3} + (-2 + \sqrt{3})i,$$

$$z_3 = (2 + 4i) (\cos \pi + i \sin \pi) = (2 + 4i) (-1) = -2 - 4i,$$

$$z_4 = (2 + 4i) \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (2 + 4i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + 2\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})i,$$

$$z_5 = (2 + 4i) \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = (2 + 4i) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})i.$$

(b) Oczywiście $z \neq -i$. Zatem równanie ma równoważną postać

$$\left(\frac{z - i}{z + i} \right)^4 = 1,$$

która jest z kolei równoważna alternatywie równań

$$\frac{z - i}{z + i} = \omega_k \quad (0 \leq k \leq 3),$$

gdzie $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \sqrt[4]{1}$. Ponieważ $\sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\}$, zatem równania te przyjmują postać $z - i = z + i$ lub $z - i = -(z + i)$ lub $z - i = i(z + i)$ lub $z - i = -i(z + i)$. Pierwsze z tych równań jest sprzeczne, a pozostałe mają odpowiednio rozwiązania $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$.

(c) $z = 1$ nie jest pierwiastkiem równania, zatem możemy je zapisać w równoważnej postaci

$$\left(\frac{iz + 1}{z - 1} \right)^3 = 1,$$

która z kolei jest równoważna alternatywie równań

$$\frac{iz + 1}{z - 1} = \omega_k \quad (0 \leq k \leq 2),$$

gdzie ω_k są elementami zbioru $\sqrt[3]{1}$. Ponieważ

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ 1, -1/2 + \sqrt{3}i/2, -1/2 - \sqrt{3}i/2 \right\},$$

więc otrzymamy równania:

$$\frac{iz+1}{z-1} = 1, \quad \frac{iz+1}{z-1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{iz+1}{z-1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Rozwiązaniami tych równań są:

$$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -\left(1 + \sqrt{3}\right)(1+i)/2, \quad z_2 = \left(\sqrt{3} - 1\right)(1+i)/2.$$

□ **Zadanie 1.17.** Znaleźć rozwiązania równań:

$$(a) z^4 = (1-i)^4; \quad (b) (z-1)^6 = (i-z)^6;$$

$$(c) z^3 = (iz+1)^3; \quad (d^*) (z+2i)^8 + (z-2i)^8 = 0.$$

Odpowiedzi. (a) $1-i, 1+i, -1-i, -1+i$; (b) $(1+i)/2, (2-\sqrt{3}+i)/(3+i\sqrt{3}), (2+\sqrt{3}+i)/(3-i\sqrt{3}), (2-\sqrt{3}-i)/(1+i\sqrt{3}), (2+\sqrt{3}-i)/(1-i\sqrt{3})$; (c) $1/(1-i), -2/(1+i(2-\sqrt{3})), -2/(1+i(2+\sqrt{3}))$; (d*) $z_1 = 2\sqrt{2} \left(\sqrt{7-4\sqrt{2}} + i\sqrt{4\sqrt{2}-5} \right), z_2 = \overline{z_1}, z_3 = -z_1, z_4 = -\overline{z_1}, z_5 = 2\sqrt{2} \left(\sqrt{7+4\sqrt{2}} + i\sqrt{4\sqrt{2}+5} \right), z_6 = \overline{z_5}, z_7 = -z_5, z_8 = -\overline{z_5}.$

2. Wielomiany

2.1. Podstawowe definicje i własności

■ **Przykład 2.1.** Obliczyć iloczyny par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych:

(a) $P(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 3$, $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$;

(b) $W(z) = z^2 + 3iz + 1 - i$, $V(z) = -iz^2 + 4z - 6i$.

Rozwiązanie.

(a) Mamy

$$\begin{aligned}(P \cdot Q)(x) &= P(x) \cdot Q(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 3) \cdot (x^3 - 2x^2 + 5x - 1) \\&= x^5 - 2x^4 + 5x^3 - x^2 - \sqrt{2}x^4 + 2\sqrt{2}x^3 - 5\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + 3x^3 - 6x^2 + 15x - 3 \\&= x^5 - (2 + \sqrt{2})x^4 + 2(4 + \sqrt{2})x^3 - (7 + 5\sqrt{2})x^2 + (15 + \sqrt{2})x - 3.\end{aligned}$$

(b) Mamy

$$\begin{aligned}(W \cdot V)(z) &= W(z) \cdot V(z) = (z^2 + 3iz + 1 - i) \cdot (-iz^2 + 4z - 6i) \\&= -iz^4 + 4z^3 - 6iz^2 + 3z^3 + 12iz^2 + 18z - (1 + i)z^2 + 4(1 - i)z - 6i - 6 \\&= -iz^4 + 7z^3 + (5i - 1)z^2 + (22 - 4i)z - 6(1 + i).\end{aligned}$$

□ **Zadanie 2.1.** Obliczyć iloczyny par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych:

(a) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$, $Q(x) = x^2 - x + 4$;

(b) $W(z) = z^3 + 5z^2 - iz + 3$, $V(z) = (1 + i)z - 2$.

Odpowiedzi. (a) $P(x) \cdot Q(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 5x - 4$; (b) $W(z) \cdot V(z) = (1 + i)z^4 + (3 + 5i)z^3 - (9 + i)z^2 + (3 + 5i)z - 6$.

■ **Przykład 2.2.** Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzielenia wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

(a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x$, $Q(x) = x^2 - 1$;

(b) $P(x) = x^{15} - 1$, $Q(x) = x^5 + 1$;

(c) $P(z) = z^5 + 3z^2 + 7iz - 1$, $Q(z) = z - i$.

Rozwiązanie. Wielomian I jest ilorazem, a wielomian R resztą z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q , jeżeli $P(x) = Q(x) \cdot I(x) + R(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ($x \in \mathbb{C}$). W rozwiązaniu wykorzystamy algorytm dzielenia wielomianów.

(a) Mamy

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 5x + 2 \\
 (2x^4 - 5x^3 + 2x) : (x^2 - 1) \\
 - 2x^4 + 2x^2 \\
 \hline
 = -5x^3 + 2x^2 + 2x \\
 + 5x^3 - 5x \\
 \hline
 = 2x^2 - 3x \\
 - 2x^2 + 2 \\
 \hline
 = -3x + 2
 \end{array}$$

Iloraz $2x^2 - 5x + 2$, reszta z dzielenia $-3x + 2$, czyli

$$2x^4 - 5x^3 + 2x = (x^2 - 1)(2x^2 - 5x + 2) - 3x + 2.$$

(b) Mamy

$$\begin{array}{r}
 x^{10} - x^5 + 1 \\
 (x^{15} - 1) : (x^5 + 1) \\
 - x^{15} - x^{10} \\
 \hline
 = -x^{10} - 1 \\
 + x^{10} + x^5 \\
 \hline
 = x^5 - 1 \\
 - x^5 - 1 \\
 \hline
 = -2
 \end{array}$$

Iloraz $x^{10} - x^5 + 1$, reszta z dzielenia -2 , czyli

$$x^{15} - 1 = (x^5 + 1)(x^{10} - x^5 + 1) - 2.$$

(c) Mamy

$$\begin{array}{r}
 z^4 + iz^3 - z^2 + (3-i)z + 1 + 10i \\
 (z^5 + 3z^2 + 7iz - 1) : (z - i) \\
 - z^5 + iz^4 \\
 \hline
 = iz^4 + 3z^2 + 7iz - 1 \\
 - iz^4 - z^3 \\
 \hline
 = -z^3 + 3z^2 + 7iz - 1 \\
 + z^3 - iz^2 \\
 \hline
 = (3-i)z^2 + 7iz - 1 \\
 - (3-i)z^2 + (1+3i)z \\
 \hline
 = (1+10i)z - 1 \\
 - (1+10i)z - (10-i) \\
 \hline
 = -11 - i
 \end{array}$$

Iloraz $z^4 + iz^3 - z^2 + (3-i)z + 1 + 10i$, reszta z dzielenia $-11 - i$, czyli

$$z^5 + 3z^2 + 7iz - 1 = (z - i)(z^4 + iz^3 - z^2 + (3-i)z + 1 + 10i) - 11 - i.$$

□ **Zadanie 2.2.** Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzielenia wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

(a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x^2 - 3x + 1$;

(b) $P(x) = x^{16} - 16$, $Q(x) = x^4 + 2$;

(c) $P(z) = z^5 - z^3 + 1$, $Q(z) = (z - i)^3$.

Odpowiedzi. (a) Iloraz $2x^2 + 3x + 11$, reszta z dzielenia $25x - 5$; (b) Iloraz $x^{12} - 2x^8 + 4x^4 - 8$, reszta z dzielenia 0; (c) Iloraz $z^2 + 3iz - 7$, reszta z dzielenia $-13iz^2 - 18z + 1 + 7i$.

2.2. Pierwiastki wielomianów

■ **Przykład 2.3.** Znaleźć pierwiastki całkowite wielomianów:

(a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; (b) $2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$; (c) $x^5 + 5x^3 + 3x^2 - x + 15$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych: każdy całkowity pierwiastek wielomianu jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

(a) Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 6$ są liczby: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6. Obliczając wartości wielomianu kolejno dla tych dzielników widzimy, że pierwiastkami całkowitymi są 1, -2, 3. Ponieważ jest to wielomian stopnia 3, więc są to jego jedyne pierwiastki.

(b) Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = -3$ są liczby: 1, -1, 3, -3. Obliczając wartości wielomianu kolejno dla tych dzielników widzimy, że jedynym pierwiastkiem całkowitym jest 3.

(c) Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 15$ są liczby: 1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15. Obliczając wartości wielomianu kolejno dla tych dzielników wnioskujemy, że nie ma on pierwiastków całkowitych.

Uwaga. W wielu przypadkach obliczenia można znacznie uprościć np. badając parzystość wartości wielomianu dla dzielników wyrazu wolnego. W przykładzie (c) dla każdej wartości całkowitej x wartość wielomianu jest liczbą nieparzystą (jako suma algebraiczna czterech liczb jednakowej parzystości oraz 15), zatem nie może być równa 0.

□ **Zadanie 2.3.** Znaleźć pierwiastki całkowite wielomianów:

(a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$;

(b) $3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$;

(c) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

(d) $x^4 + 3x^3 - x^2 + 17x + 99$.

Odpowiedzi. (a) -1, 2, -2; (b) 2; (c) 1, -2, 3; (d) wielomian nie ma pierwiastków całkowitych. Wskazówka. Wykorzystać uwagę z przykładu (2.3 (c)).

■ **Przykład 2.4.** Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianów:

(a) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$; (b) $x^3 + \frac{x^2}{6} - x + \frac{1}{3}$; (c) $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o postaci pierwiastków wymiernych wielomianu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych: jeżeli liczba wymierna p/q , gdzie ułamek p/q jest nieskracalny, jest pierwiastkiem tego wielomianu, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a q współczynnika a_n .

(a) Dla wielomianu $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$ mamy $a_4 = 4$ oraz $a_0 = -1$. Dzielnikami wyrazu wolnego a_0 są liczby 1, -1. Dzielnikami współczynnika a_4 są: 1, -1, 2, -2, 4, -4. Zatem pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogą być tylko liczby:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{-1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{-1}{4}.$$

Obliczając wartości wielomianu kolejno dla tych liczb wnioskujemy, że tylko $-1/2$ jest jego pierwiastkiem wymiernym.

(b) Ponieważ

$$x^3 + \frac{x^2}{6} - x + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} (6x^3 + x^2 - 6x + 2),$$

więc pierwiastki wielomianu $x^3 + x^2/6 - x + 1/3$ pokrywają się z pierwiastkami wielomianu $6x^3 + x^2 - 6x + 2$. Dla wielomianu $6x^3 + x^2 - 6x + 2$ mamy $a_3 = 6$ oraz $a_0 = 2$. Dzielnikami wyrazu wolnego a_0 są liczby: 1, -1, 2, -2. dzielnikami współczynnika a_3 są natomiast liczby: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6. Zatem pierwiastkami wymiernymi rozważanego wielomianu mogą być tylko liczby:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{-1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{-2}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{-1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{-2}{3}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{-1}{6}.$$

Po sprawdzeniu okazuje się, że jedynym pierwiastkiem wymiernym jest $\frac{1}{2}$.

(c) Dla wielomianu $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$ mamy $a_6 = 3$ oraz $a_0 = -9$. Dzielnikami wyrazu wolnego a_0 są liczby: 1, -1, 3, -3, 9, -9. Dzielnikami współczynnika a_6 są natomiast liczby: 1, -1, 3, -3. Zatem pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogą być tylko liczby

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{-1}{1}, \quad \frac{3}{1}, \quad \frac{-3}{1}, \quad \frac{9}{1}, \quad \frac{-9}{1}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{-1}{3}.$$

Po sprawdzeniu okazuje się, że żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem wielomianu.

Uwaga. Obliczenia w przykładzie (c) można uprościć, jeżeli zauważymy, że dla każdego ułamka p/q , gdzie p i q są liczbami nieparzystymi, wartość wyrażenia $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x$ jest ułamkiem nieskracalnym o parzystym liczniku i nieparzystym mianowniku. Stąd wynika, że wartość wielomianu $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$ dla takiego ułamka jest ułamkiem o nieparzystym liczniku. A zatem wielomian nie może być równy 0 dla tych liczb wymiernych.

□ **Zadanie 2.4.** Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianów:

(a) $x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$; (b) $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1$;

(c) $4x^3 + x - 1$; (d) $x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

Odpowiedzi. (a) $2, -1/2, -1/3$; (b) $1/2, -1/2$; (c) $1/2$;
(d) brak pierwiastków wymiernych.

■ **Przykład 2.5.** Znaleźć pierwiastki równań kwadratowych i dwukwadratowych:

(a) $z^2 + 2iz + 3 = 0$; (b) $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$;

(c) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$; (d) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

Rozwiązanie. Do wyznaczenia pierwiastków równania kwadratowego $az^2 + bz + c = 0$

o współczynnikach zespolonych wykorzystamy wzory

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a},$$

gdzie δ oznacza jeden z pierwiastków kwadratowych z liczby zespolonej $\Delta = b^2 - 4ac$.

(a) Dla równania kwadratowego $z^2 + 2iz + 3 = 0$ mamy

$$\Delta = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -16.$$

Przyjmując $\delta = 4i$ otrzymamy

$$z_1 = \frac{-2i - 4i}{2} = -3i, \quad z_2 = \frac{-2i + 4i}{2} = i.$$

(b) Dla równania kwadratowego $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$, mamy

$$\Delta = (2 + i)^2 - 4(-1 + 7i) = 7 - 24i = (4 - 3i)^2.$$

Przyjmując $\delta = 4 - 3i$ otrzymamy

$$z_1 = \frac{(2 + i) - (4 - 3i)}{2} = -1 + 2i, \quad z_2 = \frac{(2 + i) + (4 - 3i)}{2} = 3 - i.$$

(c) W równaniu $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$ podstawiając $w = z^2$ otrzymamy $w^2 + 5w + 4 = 0$.

Rozwiązaniem tego równania są $w_1 = -1$ oraz $w_2 = -4$. Pierwiastki wyjściowego równania są zatem rozwiązaniami równań $z^2 = -1$, $z^2 = -4$. Stąd $z_1 = -i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2i$.

(d) W równaniu $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$ podstawiając $w = z^2$ otrzymamy $w^2 - 30w + 289 = 0$.

Rozwiązaniem tego równania są

$$w_1 = \frac{30 - 16i}{2} = 15 - 8i \quad \text{oraz} \quad w_2 = \frac{30 + 16i}{2} = 15 + 8i.$$

Pierwiastki wyjściowego równania są zatem rozwiązaniami równań $z^2 = 15 - 8i$, $z^2 = 15 + 8i$. Stąd (patrz Przykład 1.14 (a)) $z_1 = 4 - i$, $z_2 = -4 + i$, $z_3 = 4 + i$, $z_4 = -4 - i$.

□ **Zadanie 2.5.** Znaleźć pierwiastki równań kwadratowych i dwukwadratowych:

(a) $z^2 - 4z + 13 = 0$; (b) $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$;

(c) $z^4 + 8z^2 + 15 = 0$; (d) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$.

Odpowiedzi. (a) $2 - 3i, 2 + 3i$; (b) $1 - 3i, 2 + i$; (c) $i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}$;

(d) $(-1 + i)/\sqrt{2}, (1 - i)/\sqrt{2}, \sqrt{2}(1 + i), -\sqrt{2}(1 + i)$.

2.3. Zasadnicze twierdzenie algebry

■ **Przykład 2.6.** Znając niektóre pierwiastki wielomianów rzeczywistych, znaleźć pozostałe:

(a) $W(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6$, $x_1 = -1 + i$;

(b) $W(x) = x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13$, $x_1 = 2 - 3i$, $x_2 = i$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie: jeżeli liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to $\bar{x}_0$ także jest pierwiastkiem tego wielomianu.

(a) Z twierdzenia tego wynika, że skoro $x_1 = -1 + i$ jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6$, to także liczba $x_2 = \bar{x}_1 = -1 - i$ jest pierwiastkiem tego wielomianu. Z twierdzenia Bezout wynika, że rozważany wielomian jest podzielny przez wielomian

$$(x - x_1)(x - x_2) = [x - (-1 + i)][x - (-1 - i)] = x^2 + 2x + 2.$$

Iloraz z dzielenia wielomianów

$$(x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6) : (x^2 + 2x + 2)$$

jest wielomianem $x^2 + 3$. Pierwiastkami tego wielomianu są liczby $x_3 = \sqrt{3}i$, $x_4 = -\sqrt{3}i$.

(b) Skoro liczby $x_1 = 2 - 3i$ oraz $x_2 = i$ są pierwiastkami wielomianu rzeczywistego, to także liczby $x_3 = \bar{x}_1 = 2 + 3i$ oraz $x_4 = \bar{x}_2 = -i$ są jego pierwiastkami. Z twierdzenia Bezout wynika, że wielomian $x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13$ jest podzielny przez wielomian

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_4) &= [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)](x - i)(x + i) \\ &= (x^2 - 4x + 13)(x^2 + 1) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13.\end{aligned}$$

Ilorazem z dzielenia wielomianów

$$(x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13) : (x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13)$$

jest wielomian $x - 1$. Pierwiastkiem wielomianu $x - 1$ jest oczywiście $x_5 = 1$.

Uwaga. Dla tego wielomianu końcowe obliczenia można uprościć próbując znaleźć pierwiastki całkowite wśród dzielników wyrazu wolnego $a_0 = -13$, tj. wśród liczb: 1, -1, 13, -13.

□ **Zadanie 2.6.** Znając niektóre pierwiastki wielomianów rzeczywistych, znaleźć pozostałe:

(a) $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2} + i$;

(b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 6x - 30$, $x_1 = 1 - 3i$;

(c) $W(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$, $x_1 = 2 + i$;

(d) $W(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 4x + 4$, $x_1 = i$, $x_2 = -\sqrt{2}i$;

(e) $W(x) = x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 22x + 14$, $x_1 = 1 - i$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

Odpowiedzi. (a) $\sqrt{2} - i$, $\sqrt{2}$; (b) $1 + 3i$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; (c) $2 - i$, $1 + 2i$, $1 - 2i$; (d) $-i$, $\sqrt{2}i$, $1 + i$, $1 - i$; (e) $1 + i$, $2 + \sqrt{3}i$, i , $-i$.

■ Przykład 2.7. Znaleźć reszty z dzielenia wielomianów P przez wielomiany Q nie wykonując tej operacji:

(a) $P(x) = x^{10} + x^2 - 2$, $Q(x) = x^3 - 4x$;

(b) $P(x) = x^8 + 5x^3 + 1$, $Q(x) = x^2 - 2x + 2$;

(c) $P(x) = x^{99} + x^{98} + x^{97}$, $Q(x) = x^4 - 1$.

Rozwiązanie.

(a) Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez wielomian stopnia 3 jest wielomianem stopnia ≤ 2 . Zatem ma postać $R(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wtedy $P(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie I jest ilorazem z dzielenia tych wielomianów. Zatem

$$x^{10} + x^2 - 2 = I(x) \cdot (x^3 - 4x) + ax^2 + bx + c$$

dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Podstawiając w tej tożsamości pierwiastki wielomianu $x^3 - 4x$, tj. liczby $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} -2 = c, \\ 1026 = 4a - 2b + c, \\ 1026 = 4a + 2b + c. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest trójka $a = 257$, $b = 0$, $c = -2$. Zatem reszta z dzielenia tych wielomianów ma postać $257x^2 - 2$.

(b) Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez wielomian stopnia 2 jest wielomianem stopnia ≤ 1 . Zatem ma postać $R(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Wtedy $P(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie I jest ilorazem z dzielenia tych wielomianów. Zatem

$$x^8 + 5x^3 + 1 = I(x) (x^2 - 2x + 2) + ax + b$$

dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Ponieważ pierwiastki wielomianu $x^2 - 2x + 2$, tj. liczby $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$, nie są liczbami rzeczywistymi, więc w ostatniej tożsamości wystarczy podstawić tylko jeden z tych pierwiastków np. x_1 . Wtedy otrzymamy równość

$$(1 + i)^8 + 5(1 + i)^3 + 1 = a(1 + i) + b.$$

Stąd $7 + 10i = (a + b) + ai$. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron tej równości otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ a = 10. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para $a = 10$, $b = -3$. Zatem reszta z dzielenia tych wielomianów ma postać $10x - 3$.

(c) Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez wielomian stopnia 4 jest wielomianem stopnia ≤ 3 . Zatem ma postać $R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wtedy $P(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie I jest ilorazem z dzielenia tych wielomianów.

Zatem

$$x^{99} + x^{98} + x^{97} = I(x)(x^4 - 1) + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Pierwiastkami wielomianu $x^4 - 1$ są liczby rzeczywiste $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ oraz zespolone $x_3 = i$, $x_4 = -i$. Zatem do ostatniej tożsamości wystarczy podstawić oba pierwiastki rzeczywiste oraz tylko jeden zespolony. Po podstawieniu otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 1^{99} + 1^{98} + 1^{97} = a + b + c + d, \\ (-1)^{99} + (-1)^{98} + (-1)^{97} = -a + b - c + d, \\ i^{99} + i^{98} + i^{97} = -ai - b + ci + d. \end{cases}$$

Układ ten przekształcamy do równoważnej postaci

$$\begin{cases} a + b + c + d = 3, \\ -a + b - c + d = -1, \\ -a + c = 0, \\ -b + d = -1. \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$. Zatem reszta z dzielenia tych wielomianów ma postać $x^3 + x^2 + x$.

□ **Zadanie 2.7.** Znaleźć reszty z dzielenia wielomianów P przez wielomiany Q nie wykonując tej operacji:

- (a) $P(x) = x^8 - 3x^3 + 5x$, $Q(x) = x^2 - x - 2$;
- (b) $P(x) = x^{14} - 4x^{10} + x^2 + \sqrt{2}x$, $Q(x) = x^2 + 2$;
- (c) $P(x) = x^{30} + 3x^{14} + 2$, $Q(x) = x^3 + 1$;
- (d) $P(x) = x^{100} + 2x^{51} - 3x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 - 1$;
- (e) $P(x) = x^5 + x - 2$, $Q(x) = x^2 - 2x + 5$;
- (f) $P(x) = x^6 + x - 50$, $Q(x) = x^3 + 8$.

Odpowiedzi. (a) $81x + 80$; (b) $\sqrt{2}x - 2$; (c) $3x^2 + 3$; (d) $2x - 1$; (e) $-18x + 58$; (f) $x + 14$.

■ **Przykład 2.8.** Wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

- (a) $iz^2 - 4$; (b) $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i$; (c) $z^4 - (1 - i)^4$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o przedstawianiu wielomianu zespolonego w postaci iloczynu dwumianów. Jeżeli liczby zespolone $z_1, z_2, \dots, z_m$ są jedyinymi pierwiastkami wielomianu W o krotnościach odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_m$, a $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jego współczynnikiem przy najwyższej potęgze, to

$$W(z) = c(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - z_m)^{k_m}.$$

(a) Szukamy pierwiastków wielomianu $iz^2 - 4 = i(z^2 + 4i)$. Pierwiastkami tego wielomianu są: $z_1 = \sqrt{2}(1 - i)$, $z_2 = -\sqrt{2}(1 - i)$. Zatem

$$iz^2 - 4 = i \left[z - \sqrt{2}(1 - i) \right] \left[z + \sqrt{2}(1 - i) \right].$$

(b) Szukamy pierwiastków wielomianu $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i = (z - 1)^3 + 8i$. Zbiór pierwiastków tego wielomianu pokrywa się ze zbiorem $1 + \sqrt[3]{-8i}$. Korzystając ze wzoru na pierwiastki z liczb zespolonych otrzymamy

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 1 - (\sqrt{3} + i) \quad \text{oraz} \quad z_3 = 1 + (\sqrt{3} - i).$$

Zatem

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i = [z - (1 + 2i)] \cdot [z - (1 - \sqrt{3} - i)] \cdot [z - (1 + \sqrt{3} - i)].$$

(c) Szukamy pierwiastków wielomianu $z^4 - (1 - i)^4$. Korzystając dwukrotnie ze wzoru $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} z^4 - (1 - i)^4 &= [z^2 + (1 - i)^2] [z^2 - (1 - i)^2] \\ &= [z^2 + (1 - i)^2] [z + (1 - i)] [z - (1 - i)]. \end{aligned}$$

Pozostały jeszcze do znalezienia pierwiastki wielomianu $z^2 + (1 - i)^2$. Zbiór tych pierwiastków pokrywa się ze zbiorem $\sqrt{-(1 - i)^2}$. Jednym z elementów tego zbioru jest $i(1 - i) = 1 + i$, a drugim $-(1 + i) = -1 - i$. Zatem poszukiwany rozkład ma postać

$$[z - (1 + i)] \cdot [z - (-1 - i)] \cdot [z - (1 - i)] \cdot [z - (-1 + i)].$$

□ **Zadanie 2.8.** Wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

$$(a) \quad z^2 - 2iz - 10; \quad (b) \quad z^4 + 5z^2 + 6; \quad (c) \quad z^3 - 6z - 9.$$

Odpowiedzi. (a) $[z - (i + 3)][z - (i - 3)]$; (b) $(z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i)(z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i)$; (c) $(z - 3)\left[z + \frac{(3 - i\sqrt{3})}{2}\right]\left[z + \frac{(3 + i\sqrt{3})}{2}\right]$.

■ **Przykład 2.9.** Wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

$$(a) \quad x^4 + 81; \quad (b) \quad x^7 - x; \quad (c) \quad x^4 + x^2 + 1.$$

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego. Jeżeli liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu rzeczywistego, to liczba $\bar{x}_0$ także jest pierwiastkiem k -krotnym tego wielomianu. Wykorzystamy także twierdzenie o przedstawianiu wielomianu rzeczywistego w postaci iloczynu dwumianów lub trójmianów rzeczywistych. Jeżeli liczby $x_1, x_2, \dots, x_r$ są jedynymi pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu rzeczywistego W o krotnościach odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_r$ oraz liczby zespolone $z_1, z_2, \dots, z_s$, gdzie $\text{Im } z_j > 0$ dla $1 \leq j \leq s$, są jedynymi pierwiastkami istotnie zespolonymi tego wielomianu o krotnościach odpowiednio $l_1, l_2, \dots, l_s$, to

$$\begin{aligned} W(x) &= a(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_r)^{k_r} \\ &\quad \times (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}, \end{aligned}$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest współczynnikiem wielomianu W przy najwyższej potęgze, a

liczby $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_s, q_s$ są określone przez równości

$$p_j = -2 \operatorname{Re} z_j, \quad q_j = |z_j|^2 \quad \text{dla } 1 \leq j \leq s.$$

(a) Szukamy pierwiastków zespolonych wielomianu $x^4 + 81$. Zbiór tych pierwiastków pokrywa się ze zbiorem $\sqrt[4]{-81}$. Korzystając teraz ze wzoru na pierwiastki z liczb zespolonych otrzymamy

$$\sqrt[4]{-81} = \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i), -\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i) \right\}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} x^4 + 81 &= \left[\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) \right) \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i) \right) \right] \left[\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i) \right) \left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) \right) \right] \\ &= (x^2 - 3\sqrt{2}x + 9)(x^2 + 3\sqrt{2}x + 9). \end{aligned}$$

Uwaga. Ten sam wynik można uzyskać zapisując $x^4 + 81$ w postaci różnicy kwadratów pewnych wyrażeń. Mamy

$$\begin{aligned} x^4 + 81 &= (x^4 + 18x^2 + 81) - 18x^2 = (x^2 + 9)^2 - (3\sqrt{2}x)^2 \\ &= [(x^2 + 9) - 3\sqrt{2}x] \cdot [(x^2 + 9) + 3\sqrt{2}x]. \end{aligned}$$

(b) Szukamy pierwiastków zespolonych wielomianu $x^7 - x = x(x^6 - 1)$. Zbiór tych pierwiastków jest sumą $\{0\}$ oraz zbioru pierwiastków stopnia 6 z liczby zespolonej 1. Ponieważ

$$\sqrt[6]{1} = \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} x^7 - x &= (x - 0) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot \left[\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \cdot \left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \right] \\ &\quad \times \left[\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \right] \\ &= x(x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Uwaga. Ten sam rozkład można uzyskać korzystając ze wzoru $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ oraz $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$. Mamy

$$\begin{aligned} x^7 - x &= x(x^6 - 1) = x(x^3 - 1)(x^3 + 1) \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

(c) Ponieważ wielomian $x^4 + x^2 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc jego rozkład na rzeczywiste czynniki nierozkładalne ma postać

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Współczynniki a, b, c, d znajdziemy rozwiązując odpowiedni układ równań. Mamy

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + (a+c)x^3 + (b+ac+d)x^2 + (ad+bc)x + bd$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\begin{cases} a+c=0, \\ b+ac+d=1, \\ ad+bc=0, \\ bd=1. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są dwie czwórki liczb $a = -1, b = 1, c = 1, d = 1$ lub $a = 1, b = 1, c = -1, d = 1$. Z pierwszej czwórki otrzymamy rozkład

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Druga czwórka daje ten sam rozkład. Zmieniona jest tylko kolejność czynników.

Uwaga. Ten sam rozkład można uzyskać korzystając z faktu, że pierwiastkami równania dwukwadratowego $x^4 + x^2 + 1 = 0$ są liczby:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \bar{z}_1, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = \bar{z}_3.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= \left\{ \left[x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right] \cdot \left[x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right] \right\} \\ &\quad \times \left\{ \left[x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right] \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right] \right\} \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Można także wykorzystać wzór $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Mamy wtedy

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

□ **Zadanie 2.9.** Wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

(a) $x^6 + 8$;

(b) $x^4 + 4$;

(c) $x^4 - x^2 + 1$;

(d) $4x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 9x - 9$.

Odpowiedzi. (a) $(x^2 + 2)(x^2 + \sqrt{6}x + 2)(x^2 - \sqrt{6}x + 2)$;

(b) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$; (c) $(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$;

(d) $(x-1)^2(x+1)(2x-3)(2x+3)$.

2.4. Ułamki proste

■ **Przykład 2.10.** Podane funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

(a) $\frac{z^6}{2z^3 + z - 3}$;

(b) $\frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x}$.

Rozwiązanie.

(a) Po podzieleniu wielomianów $z^6 : (2z^3 + z - 3)$ (jak w Przykładzie 2.2) otrzymujemy

$$z^6 = (2z^3 + z - 3) \left(\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{4}(z^2 - 6z + 9).$$

Zatem

$$\frac{z^6}{2z^3 + z - 3} = \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z + \frac{3}{4} + \frac{z^2 - 6z + 9}{4(2z^3 + z - 3)}.$$

(b) Mamy

$$\frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x} = \frac{3(x^4 + x^3 - x) - 3x^3 + 3x + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x} = 3 + \frac{-3x^3 + 2x^2 + 3x - 1}{x^4 + x^3 - x}.$$

□ **Zadanie 2.10.** Funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

$$(a) \frac{z^5 - 3z^2 + z}{z^3 + 4z^2 + 1}; \quad (b) \frac{x^5 + 3}{x^5 + 4}; \quad (c) \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}.$$

Odpowiedzi. (a) $z^2 - 4z + 16 + \frac{-68z^2 + 5z - 16}{z^3 + 4z^2 + 1}$; (b) $1 - \frac{1}{x^5 + 4}$; (c) $x + \frac{5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$.

■ **Przykład* 2.11.** Zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na zespolone ułamki proste:

$$(a) \frac{iz + 9}{z^2 + 9}; \quad (b) \frac{z + 3}{(z - 1)(z^2 + 1)}; \quad (c) \frac{2z^4 + 8z^2 + 32}{z(z^2 + 4)^2}.$$

Rozwiązanie. Twierdzenie o rozkładzie zespolonej funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste orzeka, że każda taka funkcja jest sumą zespolonych ułamków prostych postaci

$$\frac{A}{(z + a)^n}, \text{ gdzie } a, A \in \mathbb{C} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}.$$

Nieznane współczynniki określone są jednoznacznie.

(a) Mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na zespolone czynniki nierozkładalne:

$$z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i).$$

Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać:

$$\frac{iz + 9}{z^2 + 9} = \frac{A}{z - 3i} + \frac{B}{z + 3i}, \text{ gdzie } A, B \in \mathbb{C}.$$

Po sprowadzeniu prawej strony równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$iz + 9 = A(z + 3i) + B(z - 3i),$$

stąd

$$iz + 9 = (A + B)z + 3(A - B)i.$$

Ponieważ ostatnia równość jest prawdziwa dla każdego $z \in \mathbb{C}$, więc nieznanne współczynniki A, B spełniają układ równań

$$\begin{cases} A + B = i, \\ 3i(A - B) = 9. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $A = -i, B = 2i$. Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{iz + 9}{z^2 + 9} = \frac{-i}{z - 3i} + \frac{2i}{z + 3i}.$$

(b) Mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład za zespolone czynniki nierozkładalne:

$$(z - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z - i)(z + i).$$

Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać:

$$\frac{z + 3}{(z - 1)(z^2 + 1)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - i} + \frac{C}{z + i},$$

gdzie $A, B, C \in \mathbb{C}$. Po sprowadzeniu prawej strony równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$z + 3 = A(z - i)(z + i) + B(z - 1)(z + i) + C(z - 1)(z - i).$$

Podstawiając w otrzymanej równości kolejne pierwiastki mianownika funkcji wymiernej, tj. liczby $1, i$ oraz $-i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} A(1 - i)(1 + i) = 4, \\ B(i - 1)2i = 3 + i, \\ C(-i - 1)(-2i) = 3 - i. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest trójka liczb

$$A = 2, B = -1 + \frac{i}{2}, C = -1 - \frac{i}{2}.$$

Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{z + 3}{(z - 1)(z^2 + 1)} = \frac{2}{z - 1} + \frac{-1 + \frac{i}{2}}{z - i} + \frac{-1 - \frac{i}{2}}{z + i}.$$

(c) Mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na zespolone czynniki nierozkładalne:

$$z(z^2 + 4)^2 = z(z - 2i)^2(z + 2i)^2.$$

Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać:

$$\frac{2z^4 + 8z^2 + 32}{z(z^2 + 4)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 2i} + \frac{C}{(z - 2i)^2} + \frac{D}{z + 2i} + \frac{E}{(z + 2i)^2},$$

gdzie $A, B, C, D, E \in \mathbb{C}$. Po sprowadzeniu prawej strony ostatniej równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$\begin{aligned} 2z^4 + 8z^2 + 32 &= A(z - 2i)^2(z + 2i)^2 + Bz(z - 2i)(z + 2i)^2 + Cz(z + 2i)^2 \\ &\quad + Dz(z - 2i)^2(z + 2i) + Ez(z - 2i)^2. \end{aligned}$$

Stąd

$$2z^4 + 8z^2 + 32 = (A + B + D)z^4 + (2Bi + C - 2Di + E)z^3 + (8A + 4B + 4Ci + 4D - 4Ei)z^2 + (8Bi - 4C - 8Di - 4E)z + 16A$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Korzystając teraz z faktu, że dwa wielomiany są równe, gdy ich stopnie są jednakowe i współczynniki stojące przy jednakowych potęgach zmiennej z są sobie równe, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} A + B + D = 2, \\ 2iB + C - 2Di + E = 0, \\ 8A + 4B + 4Ci + 4D - 4Ei = 8, \\ 8iB - 4C - 8Di - 4E = 0, \\ 16A = 32. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest piątka liczb

$$A = 2, B = 0, C = i, D = 0, E = -i.$$

Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać:

$$\frac{2z^4 + 8z^2 + 32}{z(z^2 + 4)^2} = \frac{2}{z} + \frac{i}{(z - 2i)^2} + \frac{-i}{(z + 2i)^2}.$$

□ **Zadanie* 2.11.** Zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na zespolone ułamki proste:

$$(a) \frac{z^2}{(z-1)(z+2)(z+3)}; \quad (b) \frac{z}{(z^2-1)^2}; \quad (c) \frac{16i}{z^4+4}; \quad (d) \frac{z^2+2z}{(z^2+2z+2)^2}.$$

Odpowiedzi. (a) $\frac{1/12}{z-1} + \frac{-4/3}{z+2} + \frac{9/4}{z+3}$; (b) $\frac{1/4}{(z-1)^2} + \frac{-1/4}{(z+1)^2}$;

(c) $\frac{1-i}{z-1-i} + \frac{-1-i}{z-1+i} + \frac{1+i}{z+1-i} + \frac{-1+i}{z+1+i}$; (d) $\frac{1/2}{(z+1+i)^2} + \frac{1/2}{(z+1-i)^2}$.

■ **Przykład 2.12.** Rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

$$(a) \frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}; \quad (b) \frac{4}{x^3-x^5}; \quad (c) \frac{3x^3+6}{(x^2+1)(x^2+4)};$$

$$(d) \frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2}; \quad (e) \frac{x^3+3}{(x+3)^{100}}; \quad (f) \frac{x^3}{(x^2+1)^2}.$$

Rozwiązanie. Rzeczywiste ułamki proste pierwszego rodzaju mają postać

$$\frac{A}{(x+a)^n}, \text{ gdzie } a, A \in \mathbb{R} \text{ oraz } n \in \mathbb{N},$$

a drugiego rodzaju – postać

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \text{ gdzie } p, q, A, B \in \mathbb{R} \text{ oraz } n \in \mathbb{N},$$

przy czym spełniony jest warunek $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Twierdzenie o rozkładzie rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na rzeczywiste ułamki proste orzeka, że każda taka funkcja jest sumą rzeczywistych ułamków prostych pierwszego i drugiego rzędu. Nieznane współczynniki określone są jednoznacznie.

(a) Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej jest już rozłożony na iloczyn nierozkładalnych czynników rzeczywistych, więc rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma postać

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}, \text{ gdzie } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron powyższej równości przez mianownik funkcji wymiernej otrzymamy tożsamość

$$2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wstawiając do tej tożsamości kolejno pierwiastki mianownika, tj. liczby $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ -B = 2, \\ 2C = 2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{1}{x-3}.$$

(b) Mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na rzeczywiste czynniki nierozkładalne

$$x^3 - x^5 = x^3(1-x)(1+x).$$

Rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{-4}{x^5 - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}, \text{ gdzie } A, B, C, D, E \in \mathbb{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron tej równości przez mianownik funkcji wymiernej otrzymamy tożsamość

$$-4 = Ax^2(x^2-1) + Bx(x^2-1) + C(x^2-1) + Dx^3(x+1) + Ex^3(x-1)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd

$$-4 = (A+D+E)x^4 + (B+D-E)x^3 + (-A+C)x^2 - Bx - C.$$

Korzystając teraz z faktu, że dwa wielomiany są równe, gdy ich stopnie są jednakowe i współczynniki stojące przy jednakowych potęgach zmiennej x są sobie równe, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} A+B+D = 2, \\ 2B+C-2D+E = 0, \\ 8A+4B+4C+4D-4E = 8, \\ 8B-4C-8D-4E = 0, \\ 16A = 32. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest piątka liczb $A = 4$, $B = 0$, $C = 4$, $D = -2$, $E = -2$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{-4}{x^5 - x^3} = \frac{4}{x} + \frac{4}{x^3} + \frac{-2}{x-1} + \frac{-2}{x+1}.$$

(c) Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej jest już rozłożony na iloczyn nierozkładalnych czynników rzeczywistych, więc rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma postać

$$\frac{3x^3 + 6}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}, \text{ gdzie } A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron tej równości przez $(x^2 + 1)(x^2 + 4)$ otrzymamy równość

$$3x^3 + 6 = (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

prawdziwą dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Podstawiając w tej równości po jednym pierwiastku zespolonym każdego z wielomianów $x^2 + 1$ oraz $x^2 + 4$, tj. liczby i oraz $2i$, otrzymamy układ równań ze współczynnikami zespolonymi i rzeczywistymi niewiadomymi

$$\begin{cases} 6 - 3i = (Ai + B) \cdot 3, \\ 6 - 24i = (2Ci + D) \cdot (-3). \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi o współczynnikach rzeczywistych

$$\begin{cases} 3B = 6, \\ 3A = -3, \\ -3D = 6, \\ -6C = -24. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest czwórka liczb $A = -1$, $B = 2$, $C = 4$, $D = -2$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{3x^3 + 6}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{-x + 2}{x^2 + 1} + \frac{4x - 2}{x^2 + 4}.$$

(d) Rozkład na ułamki proste rozważanej funkcji wymiernej ma postać

$$\frac{2x + 1}{x^2(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2}, \text{ gdzie } A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}.$$

W tym przykładzie nieznane współczynniki $A, B, \dots, F$ znajdziemy dokonując kilku przekształceń algebraicznych. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{2x + 1}{x^2(x^2 + 1)^2} &= (2x + 1) \cdot \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^2(x^2 + 1)^2} = (2x + 1) \left(\frac{1}{x^2(x^2 + 1)} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \right) \\ &= (2x + 1) \left(\frac{(1 + x^2) - x^2}{x^2(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \right) \\ &= (2x + 1) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \right) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

(e) W tym przykładzie obliczenia nieznanymi współczynników rozkładu można znacznie uprościć dokonując podstawienia $y = x + 3$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\frac{x^3+3}{(x+3)^{100}} &= \frac{(y-3)^3+3}{y^{100}} = \frac{y^3-9y^2+27y-24}{y^{100}} = \frac{1}{y^{97}} + \frac{-9}{y^{98}} + \frac{27}{y^{99}} + \frac{-24}{y^{100}} \\ &= \frac{1}{(x+3)^{97}} + \frac{-9}{(x+3)^{98}} + \frac{27}{(x+3)^{99}} + \frac{-24}{(x+3)^{100}}.\end{aligned}$$

■ Rozkład na ułamki proste uzyskamy wykonując kilka przekształceń algebraicznych

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^3+x)-x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^2+1)-x}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

□ **Zadanie 2.12.** Rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

(a) $\frac{12}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$; (b) $\frac{x^2}{x^4-1}$; (c) $\frac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2}$;

(d) $\frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}$; (e) $\frac{1}{x^3+x}$; (f) $\frac{x^2+1}{x^3(x+1)^2}$.

Odpowiedzi. (a) $\frac{-2}{x-1} + \frac{6}{x-2} + \frac{-6}{x-3} + \frac{2}{x-4}$; (b) $\frac{1/4}{x-1} + \frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/2}{x^2+1}$;

(c) $\frac{-1}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{2x+2}{(x^2+1)^2}$; (d) $\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{2}{(x^2+2x+2)^2}$; (e) $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$;

(f) $\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$.

3.

Macierze i wyznaczniki

3.1. Działania na macierzach

■ **Przykład 3.1.** Obliczyć:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; & \text{(b)} \quad & 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \\
 \text{(c)} \quad & \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; & \text{(d)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}; \\
 \text{(e)} \quad & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2; & \text{(f)} \quad & \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right)^T.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. Sumą macierzy A i B jest macierz $A+B = [a_{ij} + b_{ij}]$, a ich różnicą macierz $A-B = [a_{ij} - b_{ij}]$. Iloczynem macierzy A przez liczbę α jest macierz $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$.

Z kolei transpozycją macierzy A jest macierz wymiaru $n \times m$ określona wzorem $A^T = [a_{ji}]$. Inaczej mówiąc kolumny (wiersze) macierzy A są wierszami (kolumnami) macierzy A^T .

Iloczynem AB macierzy A i B odpowiednio wymiarów $m \times n$ i $n \times k$ jest macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy określone są wzorem:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \text{ dla } 1 \leq i \leq m \text{ oraz } 1 \leq j \leq k.$$

(a) Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 3+2 \\ -2+0 & 1+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

(b) Mamy

$$\begin{aligned}
 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & 0-1 & 3-0 \\ 0-1 & 6-1 & 3+1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(c) Mamy

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 0 & 3 \cdot 29 + (-4) \cdot 18 + 5 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 29 + (-3) \cdot 18 + 1 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 3 \cdot 29 + (-5) \cdot 18 + (-1) \cdot (-3) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

(e) Mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(f) Korzystając z równości $(AB)^T = B^T A^T$ i $(A^T)^T = A$, otrzymamy

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T \right)^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}.$$

□ **Zadanie 3.1.** Obliczyć:

$$(a) \ 2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; \quad (b) \ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(c) \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}; \quad (d) \ [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5] \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2.$$

Odpowiedzi. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 9 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; (d) $[35]$; (e) $\begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{bmatrix}$;

$$(f) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -12 & 5 \end{bmatrix}.$$

■ **Przykład 3.2.** Obliczyć kilka początkowych potęg macierzy A , następnie wysunąć hipotezę o postaci macierzy A^n ($n \in \mathbb{N}$) i uzasadnić ją za pomocą indukcji matematycznej, jeżeli:

$$(a) A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie.

(a) Mamy

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & (-i)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = A.$$

Na podstawie zauważonych prawidłowości w macierzy A^n dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ wysuwamy hipotezę o postaci tej macierzy

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} & \text{dla } n = 4k + 1, \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \text{dla } n = 4k + 2, \\ \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{bmatrix} & \text{dla } n = 4k + 3, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{dla } n = 4k + 4, \end{cases} \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Przeprowadzimy teraz dowód tej hipotezy dla $n = 4k + 1$ za pomocą indukcji matematycznej. Udowodnimy więc wzór

$$A^{4k+1} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Dla $k = 0$ i $k = 1$ wzór jest prawdziwy. Niech k będzie dowolną liczbą naturalną. Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla k . Pokażemy, że jest on prawdziwy także dla $k + 1$. Mamy

$$A^{4(k+1)+1} = A^{4k+1} \cdot A^4 \left(\begin{array}{l} \text{założenie} \\ \text{indukcyjne} \end{array} \right) = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Zatem z prawdziwości hipotezy dla k wynika jego prawdziwość dla $k + 1$. Ponadto wzór jest prawdziwy dla $k = 1$, więc z zasady indukcji matematycznej wynika, że jest on prawdziwy dla każdej liczby naturalnej oraz dla $k = 0$. Analogicznie przebiegają dowody indukcyjne wzorów na A^n w pozostałych przypadkach.

Uwaga*. Wzór na n -tą potęgę macierzy A można zapisać krótko w postaci

$$A^n = \begin{bmatrix} i^n & \sin \frac{n\pi}{2} \\ 0 & (-i)^n \end{bmatrix}.$$

(b) Mamy

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie obserwacji macierzy A^n dla $n = 1, 2, 3, 4$ wysuwamy hipotezę, że

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Przeprowadzimy dowód tej hipotezy za pomocą indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ hipoteza ta jest prawdziwa. Niech teraz n będzie dowolną liczbą naturalną. Załóżmy, że hipoteza jest prawdziwa dla liczby n . Pokażemy, że jest ona prawdziwa dla liczby $n + 1$. Mamy

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \left(\begin{array}{l} \text{założenie} \\ \text{indukcyjne} \end{array} \right) = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

Zatem z prawdziwości hipotezy dla liczby naturalnej n wynika, jej prawdziwość dla liczby $n + 1$. Ponieważ hipoteza jest prawdziwa dla $n = 1$, więc z zasady indukcji matematycznej wynika, że jest ona prawdziwa dla każdej liczby naturalnej.

□ **Zadanie 3.2.** Obliczyć kilka początkowych potęg macierzy A , następnie wy-

sunąć hipotezę o postaci macierzy A^n ($n \in \mathbb{N}$) i uzasadnić ją za pomocą indukcji matematycznej:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix};$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R}); \quad (d) A = \begin{bmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{bmatrix} \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$(e) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(f^*) A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R});$$

$$(g^*) A = [a_{ij}], \text{ gdzie } a_{ij} = 0 \text{ dla } i \geq j, i, j = 1, 2, \dots, k.$$

Odpowiedzi. (a) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $A^n = \begin{cases} A & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ I & \text{dla } n \text{ parzystych;} \end{cases}$

$$(c) A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}; \quad (d) A^n = \begin{bmatrix} \cosh nx & \sinh nx \\ \sinh nx & \cosh nx \end{bmatrix};$$

$$(e) A^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + (-1)^n & 0 & 1 - (-1)^n \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 - (-1)^n & 0 & 1 + (-1)^n \end{bmatrix} = \begin{cases} A & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ I & \text{dla } n \text{ parzystych,} \end{cases} \quad \text{gdzie } I -$$

$$\text{macierz jednostkowa}; \quad (f^*) A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & n(n-1)a^{n-2}/2 \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix} \quad \text{dla } n \geq 2; \quad (g^*) \text{ Dla}$$

$n \geq k$ macierz A^n jest zerowa.

■ **Przykład 3.3.** Rozwiązać równania macierzowe:

$$(a) 3 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - X \right) = X + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad (b) X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix};$$

$$(c) \left(2X + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Rozwiązanie.

(a) Przyjmujemy oznaczenia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wtedy podane równanie macierzowe można przepisać w postaci

$$3(A - X) = X + B.$$

Zatem mamy kolejno

$$3(A - X) = X + B \iff 3A - 3X = X + B \iff -3X - X = B - 3A$$

$$\iff -4X = B - 3A \iff X = \frac{1}{4}(3A - B).$$

Stąd szukane rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{4} \left(3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 9 \\ 6 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -8 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(b) Ponieważ macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

są wymiaru 2×3 , więc szukana macierz X musi być macierzą kwadratową stopnia 2.

Niech zatem $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, będzie szukaną macierzą. Wtedy dane równanie macierzowe przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Stąd mamy równość

$$\begin{bmatrix} a & a+b & 2a+b \\ c & c+d & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix},$$

która jest równoważna układowi równań

$$\begin{cases} a = 1, \\ a + b = 1, \\ 2a + b = 2, \\ c = 3, \\ c + d = 5, \\ 2c + d = 8. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest czwórka liczb $a = 1, b = 0, c = 3, d = 2$. Rozwiązaniem rozważanego równania jest zatem macierz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Przyjmujemy oznaczenia

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy dane równanie macierzowe można przepisać w postaci

$$(2X + A)^T = BC^T.$$

Korzystając, z równości $(A^T)^T = A$ oraz $(AB)^T = B^T A^T$ kolejno otrzymamy

$$\begin{aligned}
 ((2X + A)^T)^T &= (BC^T)^T \iff 2X + A = (C^T)^T B^T \iff 2X + A = CB^T \\
 &\iff 2X = CB^T - A \iff X = \frac{1}{2} (CB^T - A).
 \end{aligned}$$

Zatem szukany rozwiązaniem jest macierz X postaci

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} -1 & -11 \\ 2 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -14 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□ **Zadanie 3.3.** Rozwiązać równania macierzowe:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X - I = 2X; \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\
 \text{(c)} \quad & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} X + 4I \\
 \text{(d)} \quad & X = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{(e)} \quad X \cdot X^T = X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; (c) $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;
 (d) $X = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ($a \in \mathbb{R}$); (e) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ lub $X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

3.2. Wyznaczniki

■ **Przykład 3.4.** Obliczyć wyznaczniki:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 - \sqrt{2} & \sqrt{5} - 2 \\ \sqrt{5} + 2 & 1 + \sqrt{2} \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix}; \\
 \text{(c)} \quad & \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{(d)} \quad \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ gdzie } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Do obliczania wyznaczników stopnia drugiego zastosujemy wzór:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

a do obliczania wyznaczników stopnia trzeciego wykorzystamy regułę Sarrusa

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

$-ceg \quad -afh \quad -bdi \qquad +aei \quad +bfg \quad +cdh$

(a) Mamy

$$\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{5}-2 \\ \sqrt{5}+2 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix} = (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = -2.$$

(b) Mamy

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha - i \sin \alpha) - 1 \\ = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 = 1 - 1 = 0.$$

(c) Mamy

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \\ = (-1) \cdot (-2) \cdot 6 + 5 \cdot 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 \cdot 3 - 5 \cdot 3 \cdot 6 = -50.$$

(d) Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = (1+z^3+z^6) - (z^3+z^3+z^3) = z^6 - 2z^3 + 1.$$

Korzystając ze wzoru $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ otrzymamy

$$z^3 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(-1 + i\sqrt{3})^3 \\ = \frac{1}{8}((-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot (-1) \cdot (i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3) \\ = \frac{1}{8}(-1 + 3\sqrt{3}i + 9 - 3\sqrt{3}i) = 1.$$

Tak więc $z^6 = (z^3)^2 = 1^2 = 1$. Zatem wyznacznik jest równy 0.□ **Zadanie 3.4.** Obliczyć wyznaczniki:

$$(a) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}; (b) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; (c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; (d) \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Odpowiedzi. (a) -1; (b) $\sin(\alpha - \beta)$; (c) 1; (d) -2.■ **Przykład 3.5.** Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć wyznaczniki:

$$(a) \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix}; (b) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}; (c) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie. Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika macierzy kwadratowej A stopnia $n \geq$

2 względem i -tego wiersza ma postać

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in},$$

gdzie D_{ij} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} macierzy A , tj. wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny tej macierzy, pomnożony przez $(-1)^{i+j}$. Podobnie wygląda wzór na rozwinięcie Laplace'a wyznacznika względem j -tej kolumny

$$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}.$$

Do rozwinięcia wybieramy zwykle wiersz lub kolumnę z największą liczbą zer.

(a) Pierwszy wyznacznik obliczymy stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciej kolumny. Mamy

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ = 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-13) = 13.$$

(b) Wyznacznik z tego punktu obliczymy stosując rozwinięcie Laplace'a względem drugiego wiersza. Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Do obliczania wyznaczników trzeciego stopnia zastosujemy regułę Sarrusa. Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{oraz} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 25.$$

Poszukiwany wyznacznik jest zatem równy $1 \cdot 4 + (-3) \cdot 25 = -71$.

(c) Trzeci wyznacznik obliczymy stosując rozwinięcie Laplace'a względem czwartej kolumny. Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Otrzymany wyznacznik czwartego stopnia obliczymy stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza. Mamy

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ + 1 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Otrzymane wyznaczniki trzeciego stopnia obliczymy za pomocą reguły Sarrusa. Mamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -62, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 38, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 56.$$

Poszukiwany wyznacznik jest zatem równy

$$(-2)[(-3) \cdot (-62) + 4 \cdot 38 + (-1) \cdot 56] = -564.$$

□ **Zadanie 3.5.** Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć wyznaczniki:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Odpowiedzi. (a) -289 ; (b) 275 ; (c) 123 .

■ **Przykład 3.6.** Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach obliczyć wyznaczniki:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 12 & 4 & 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie. Do oznaczania operacji na macierzach będziemy stosowali symbole:

- (1) $w_i \leftrightarrow w_j$ – zamiana i -tego oraz j -tego wiersza;
- (2) cw_j – pomnożenie j -tego wiersza przez liczbę c ($c \neq 0$);
- (3) $w_i + cw_j$ – dodanie do elementów i -tego wiersza odpowiadających im elementów j -tego wiersza pomnożonych przez liczbę c .

Analogiczne operacje na kolumnach będziemy oznaczali odpowiednio: $k_i \leftrightarrow k_j$; ck_j ; $k_i + ck_j$. Podane wyżej działania na wierszach i kolumnach macierzy nazywamy operacjami elementarnymi. Przy czym operacje typu (1) powodują zmianę znaku wyznacznika, typu (2) pomnożenie wyznacznika przez liczbę c , operacje typu (3) nie zmieniają wartości wyznacznika. Celem tych operacji będzie uzyskanie w wybranym wierszu lub kolumnie wyznacznika tylko jednego elementu niezerowego (najlepiej jedynki). Wtedy zastosowanie rozwinięcia Laplace'a (L) względem tego wiersza lub tej kolumny spowoduje obniżenie o 1 stopnia wyznacznika. Do przekształceń będziemy wybierać wiersze lub kolumny zawierające „wiele” zer i „małych” liczb całkowitych, co znacznie uprości obliczenia.

(a) Wykonując podane operacje elementarne i korzystając z rozwinięcia Laplace'a otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} k_2 - 2k_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -16 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{L}{=} 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -16 \end{vmatrix} = 63.$$

(b) Wykonując podane operacje elementarne i korzystając z rozwinięcia Laplace'a otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_2 - 2w_1 \\ w_4 + w_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{L}{=} 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} w_3 + 2w_2$$

$$= - \begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{L}{=} -(-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 46.$$

(c) Wykonując podane operacje elementarne i korzystając z rozwinięcia Laplace'a otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 12 & 4 & 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} k_4 - 2k_3 \\ k_5 - k_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 12 & 4 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{L}{=} 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 12 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} k_2 - 2k_1 \\ k_3 + k_1 \\ k_4 + k_1 \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \\ 12 & -20 & 14 & 15 \end{vmatrix} \stackrel{L}{=} -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 3 \\ -20 & 14 & 15 \end{vmatrix} k_2 \cdot (-1)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & 3 \\ -20 & -14 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} k_2 + 2k_1 \\ k_3 + k_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -11 & 0 \\ -20 & -54 & -5 \end{vmatrix} = -55.$$

□ **Zadanie 3.6.** Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach obliczyć wyznaczniki:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}; & \text{(b)} \quad & \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}; & \text{(c)} \quad & \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \\ \text{(d)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}; & \text{(e)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; & \text{(f)} \quad & \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) 50; (b) -15; (c) -13; (d) 44; (e) 12; (f) -178.

3.3. Macierz odwrotna

■ **Przykład 3.7.** Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do macierzy:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Wzór określający macierz odwrotną do nieosobliwej macierzy kwadratowej A stopnia n ma postać

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

gdzie D_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A (Przykład 3.5).

(a) Mamy $\det A = 10$ oraz

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \det [-1] = -1, \quad D_{12} = (-1)^{1+2} \det [4] = -4,$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \det [-1] = 3, \quad D_{22} = (-1)^{2+2} \det [2] = 2.$$

Zatem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Do sprawdzenia poprawności obliczeń można wykorzystać równość $AA^{-1} = I$, gdzie I oznacza macierz jednostkową.

(b) Mamy $\det A = -1$ oraz

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38, \quad D_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27,$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1, \quad D_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41, \quad D_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29,$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34, \quad D_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

Zatem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

□ **Zadanie 3.7.** Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbb{R}; \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{36} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

■ **Przykład 3.8.** Korzystając z metody bezwyznacznikowej obliczyć macierze odwrotne do macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. Bezwyznacznikowa metoda znajdowania macierzy odwrotnej polega na wykonywaniu operacji elementarnych (zobacz Przykład 3.6) na **wierszach** macierzy postaci $[A|I]$. Celem tych operacji jest sprowadzenie macierzy wyjściowej do macierzy jednostkowej, co dla macierzy nieosobliwych jest zawsze możliwe. Dołączona macierz jednostkowa przechodzi wtedy na macierz odwrotną do wyjściowej, co ilustruje diagram

$$[A|I] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|A^{-1}]$$

Praktycznym sposobem przekształcenia macierzy do macierzy jednostkowej jest algorytm Gaussa-Jordana opisany poniżej.

Na wstępie przedstawiamy **wiersze** macierzy $[A|I]$ tak, aby w jej lewym górnym rogu pojawił się „mały” element różny od 0 (najlepiej jedynka). W przypadku macierzy nieosobliwych, zawsze jest to możliwe (dlaczego?). Następnie, poczynając od pierwszej kolumny, a kończąc na ostatniej kolumnie macierzy A przekształcamy je kolejno według schematu:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \dots & a_{1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{i-1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & a_{ij} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & a_{i+1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots & \dots & \vdots \end{array} \right] \xrightarrow{w_i : a_{ij}} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots & a_{1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{i-1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \mathbf{1} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & a_{i+1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots & \dots & \vdots \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_{i+1} - a_{i+1j}w_i \\ \vdots \\ w_n - a_{nj}w_i \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots & a_{1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{i-1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \mathbf{1} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \vdots \end{array} \right],$$

co kończy się macierzą górną trójkątną w miejscu macierzy A , z jedynkami na głównej przekątnej. Kolejny krok rozpoczynamy od ostatniej kolumny macierzy A , a kończymy na jej pierwszej kolumnie przekształcając je kolejno według schematu:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \dots & a_{1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{i-1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \mathbf{1} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \vdots \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - a_{1j}w_i \\ \vdots \\ w_{i-1} - a_{i-1j}w_i \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \mathbf{1} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \dots & \vdots \end{array} \right],$$

co daje pożądaną macierz jednostkową w miejscu macierzy A i macierz A^{-1} w miejscu macierzy I .

(a) Wykonując kolejno wskazane operacje elementarne otrzymamy

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[w_1 \leftrightarrow w_2]{-w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 5w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 13 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 : 13} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + 2w_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{array} \right] = [I|A^{-1}].$$

$$\text{Zatem } \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}.$$

(b) Wykonując kolejno wskazane operacje elementarne otrzymamy

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 3w_2} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right] = [I|A^{-1}].$$

$$\text{Zatem } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Wykonując kolejno wskazane operacje elementarne otrzymamy

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 \leftrightarrow w_4]{w_2 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 : 2, w_2 : 2} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + w_1} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 2w_4, w_1 - 2w_4} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = [I|A^{-1}].$$

$$\text{Zatem } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□ **Zadanie 3.8.** Korzystając z metody bezwyznacznikowej obliczyć macierze odwrotne do macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Odpowiedzi. (a) } \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

■ **Przykład 3.9.** Wykorzystując operację odwracania macierzy rozwiązać równania macierzowe:

$$(a) \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = 4 \cdot X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad (b) X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}; \quad (d^*) 3 \cdot X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}^{-1};$$

$$(e^*) X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad (f^*) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot (X^{-1})^2 = \frac{1}{2} \cdot X^{-1}.$$

Rozwiązanie.

(a) Zapiśmy podane równanie macierzowe w postaci

$$AX = 4X + B, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zatem mamy kolejno

$$AX = 4X + B \iff AX - 4X = B \iff (A - 4I)X = B.$$

Macierz

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa ($\det(A - 4I) = -2 \neq 0$), więc mnożąc ostatnie równanie lewostronnie przez $(A - 4I)^{-1}$ otrzymamy

$$(A - 4I)^{-1}(A - 4I)X = (A - 4I)^{-1}B \iff X = (A - 4I)^{-1}B$$

Obliczając macierz odwrotną macierzy $A - 4I$ mamy

$$(A - 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem szukane rozwiązanie ma postać

$$X = (A - 4I)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Równanie przepisemy w postaci

$$XA = B, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Macierz A jest nieosobliwa ($\det A = 6 \neq 0$), więc mnożąc obie strony równania prawostronnie przez macierz A^{-1} otrzymamy

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \iff X = BA^{-1}.$$

Obliczając macierz odwrotną macierzy A mamy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Zapiszemy podane równanie macierzowe w postaci

$$A^{-1}XB = C, \text{ gdzie } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że macierz B jest nieosobliwa ($\det B = 1 \neq 0$), więc mnożąc obie strony równania lewostronnie przez macierz A , a następnie prawostronnie przez B^{-1} , mamy kolejno

$$AA^{-1}XB = AC \iff XB = AC \iff XBB^{-1} = ACB^{-1} \iff X = ACB^{-1}.$$

Obliczając macierz odwrotną macierzy B mamy

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$X = ACB^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 214 & -165 \\ 131 & -101 \end{bmatrix}.$$

(d) Równanie możemy przepisać w postaci

$$3X^{-1} = A^{-1}, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Mnożąc obie strony równania prawostronnie przez macierz X i następnie przez macierz A otrzymamy kolejno

$$3X^{-1} = A^{-1} \iff 3X^{-1}X = A^{-1}X \iff 3I = A^{-1}X \iff 3A = AA^{-1}X \iff X = 3A.$$

Stąd

$$X = 3 \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 9 & 12 & 18 \\ 0 & -15 & 21 \end{bmatrix}.$$

(e) Podobnie jak w poprzednich przykładach równanie zapisujemy w postaci

$$X^{-1} = A^{-1}B, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzoru

$$(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1} \text{ oraz } (W^{-1})^{-1} = W$$

otrzymamy

$$X^{-1} = A^{-1}B \iff (X^{-1})^{-1} = (A^{-1}B)^{-1} \iff X = B^{-1}A.$$

Obliczając macierz odwrotną macierzy B mamy

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$X = B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(f) Zakładamy, że niewiadoma macierz jest nieosobliwa. Mnożąc obie strony równania prawostronnie przez macierz X^2 , otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot (X^{-1})^2 \cdot X^2 = \frac{1}{2} \cdot X^{-1} \cdot X^2.$$

Ponieważ

$$(X^{-1})^2 \cdot X^2 = X^{-1} \cdot (X^{-1} \cdot X) \cdot X = X^{-1} \cdot I \cdot X = X^{-1} \cdot X = I$$

oraz

$$X^{-1} \cdot X^2 = (X^{-1} \cdot X) \cdot X = I \cdot X = X,$$

więc równanie przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot X.$$

Zatem

$$X = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

□ **Zadanie 3.9.** Wykorzystując operację odwracania macierzy rozwiązać równania macierzowe:

$$(a) X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(c) \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4 \cdot X \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad (d) 3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot X;$$

$$(e) X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (f) 2 \cdot X^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1};$$

$$(g) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad (h) X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Odpowiedzi. (a) $X = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}$; (b) $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $X = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$;

(d) $X = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} -17 & -9 \\ 11 & 19 \end{bmatrix}$; (e) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (f) $X = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$; (g) $X = \begin{bmatrix} 37 & -60 \\ 29 & -47 \end{bmatrix}$;

(h) $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$

■ **Przykład 3.10.** Macierze kwadratowe A, B mają stopień 3. Ponadto $\det A = -2$, $\det B = 4$. Obliczyć:

(a) $\det(A^2B)$; (b) $\det(AB^{-1})$; (c) $\det(AB^2A^{-1})$;

(d) $\det((A^{-1})^2B^3)$; (e) $\det(3B)$; (f) $\det(2A^{-1})$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy następujące własności wyznaczników:

(1) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (wzór ten jest prawdziwy dla dowolnej liczby czynników);

(2) $\det(A^T) = \det A$; (3) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$; (4) $\det(A^k) = (\det A)^k$ ($k \in \mathbb{N}$);

(5) $\det(cA) = c^n \det A$, gdzie n oznacza stopień macierzy A .

(a) Korzystając z własności (1) i (4) mamy

$$\det(A^2B) = \det(A^2) \cdot \det B = (\det A)^2 \cdot \det B = (-2)^2 \cdot 4 = 16.$$

(b) Korzystając z własności (1) i (3) mamy

$$\det(AB^{-1}) = \det A \cdot \det(B^{-1}) = \det A \cdot \frac{1}{\det B} = (-2) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

(c) Korzystając z własności (1), (3) i (4) mamy

$$\begin{aligned}\det(AB^2A^{-1}) &= \det A \cdot \det(B^2) \cdot \det(A^{-1}) = \det A \cdot (\det B)^2 \cdot \frac{1}{\det A} \\ &= (\det B)^2 = 4^2 = 16.\end{aligned}$$

(d) Korzystając z własności (1), (3) i (4) otrzymamy

$$\det\left((A^{-1})^2 B^3\right) = (\det(A^{-1}))^2 \cdot (\det B)^3 = \frac{(\det B)^3}{(\det A)^2} = \frac{4^3}{(-2)^2} = 16.$$

(e) Korzystając z własności (5) dla $c = 3$ i $n = 3$ otrzymamy

$$\det(3B) = 3^3 \det B = 27 \cdot 4 = 108.$$

(f) Korzystając z własności (5) dla $c = 2$ i $n = 3$ otrzymamy

$$\det(2A^{-1}) = 2^3 \det(A^{-1}) = 8 \cdot \frac{1}{\det A} = \frac{8}{-2} = -4.$$

□ **Zadanie 3.10.** Macierze kwadratowe A, B mają stopień 2. Ponadto $\det A = 3$, $\det B = 2$. Obliczyć:

(a) $\det(AB^2)$; (b) $\det(B^{-1}A)$; (c) $\det(ABA)$;

(d) $\det\left((A^{-1})^2 B^3\right)$; (e) $\det(-2A)$; (f) $\det(3B^{-1})$.

Odpowiedzi. (a) 12; (b) $3/2$; (c) 18; (d) $8/9$; (e) 12; (f) $9/2$.

4. Układy równań liniowych

4.1. Układy Cramera

■ **Przykład 4.1.** Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ układy równań są układami Cramera:

$$(a) \begin{cases} 6p^2x - 3y = 3p, \\ 2x - y = 7; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 3y + 3z = px, \\ 3x + y + 3z = py, \\ 3x + 3y + z = pz? \end{cases}$$

Rozwiązanie. Liniowy układ równań $AX = B$ jest układem Cramera, jeżeli macierz A jest kwadratowa i ma wyznacznik różny od zera.

(a) W zapisie macierzowym rozważany układ ma postać

$$\begin{bmatrix} 6p^2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy tego układu jest równy

$$\det A = \begin{vmatrix} 6p^2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6(1 - p^2).$$

Dany układ jest zatem układem Cramera dla $p \neq -1$ oraz $p \neq 1$.

(b) Zapisując rozważany układ macierzowo mamy

$$\begin{bmatrix} 1-p & 3 & 3 \\ 3 & 1-p & 3 \\ 3 & 3 & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dalej

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1-p & 3 & 3 \\ 3 & 1-p & 3 \\ 3 & 3 & 1-p \end{vmatrix} \begin{matrix} w_1 - w_3 \\ w_2 - w_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2-p & 0 & 2+p \\ 0 & -2-p & 2+p \\ 3 & 3 & 1-p \end{vmatrix} \begin{matrix} k_3 + (k_1 + k_2) \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2-p & 0 & 0 \\ 0 & -2-p & 0 \\ 3 & 3 & 7-p \end{vmatrix} = (2+p)^2(7-p). \end{aligned}$$

Układ ten jest więc układem Cramera dla $p \neq -2$ oraz $p \neq 7$.

□ **Zadanie 4.1.** Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ układy równań są układami Cramera:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} (p+1)x - py = 1, \\ 2x + (p-1)y = 3p; \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} 2px + 4y - pz = 4, \\ 2x + y + pz = 1, \\ (4+2p)x + 6y + pz = 3; \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad & \begin{cases} px + 3y + pz = 0, \\ -px + 2z = 3, \\ x + 2y + pz = p; \end{cases} & \text{(d)} \quad & \begin{cases} x - y - z - t = px, \\ -x + y - z - t = py, \\ -x - y + z - t = pz, \\ -x - y - z + t = pt? \end{cases}
 \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) dla $p \neq -1 - \sqrt{2}$ oraz $p \neq -1 + \sqrt{2}$; (b) nie istnieje takie p ; (c) dla każdego $p \in \mathbb{R}$; (d) dla $p \neq -2$ oraz $p \neq 2$.

■ **Przykład 4.2.** Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania układów równań lub obliczyć wskazaną niewiadomą:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} 9x - 8y = 4, \\ 7x + 2y = 3; \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 3x + y + z = 2, \\ x - 5z = 0; \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad 12 + x + y = 10 + y + z = 8 + z + u = 6 + u + v = 10x + v = 15, \quad x$$

Rozwiązanie. Jedyne rozwiązanie układu Cramera $AX = B$ z niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n$ wyraża się wzorami:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

gdzie A_k oznacza macierz powstałą z A przez zastąpienie w niej k -tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B .

(a) Mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 74, \quad \det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 32, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

zatem $x = \det A_1 / \det A = 16/37$, $y = \det A_2 / \det A = -1/74$.

(b) Korzystając z reguły Sarrusa obliczania wyznaczników stopnia trzeciego otrzymamy

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 28,$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 15, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 8, \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

Stąd wynika, że $x = 15/28$, $y = 2/7$, $z = 3/28$.

(c) Układ zapisujemy w postaci

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ y + z = 5, \\ z + u = 7, \\ u + v = 9, \\ 10x + v = 15, \end{cases} \quad \text{stąd} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Niewiadomą x wyznaczmy ze wzoru $x = \det A_1 / \det A$. Potrzebne wyznaczniki $\det A$ i $\det A_1$ obliczymy korzystając z rozwinięcia Laplace'a, reguły Sarrusa i ze wzoru na wyznacznik macierzy trójkątnej. Mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 - 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 13 = 11.$$

Stąd $x = 11/11 = 1$.

□ **Zadanie 4.2.** Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania układów równań lub obliczyć wskazaną niewiadomą:

$$(a) \begin{cases} 5x - 2y = 6, \\ 3x + y = 4; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + z = 3, \\ 3x + y + 2z = 2; \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y - z = 7, \\ x - y + z = 2; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 3x + 7y + 2z + 4t = 0, \\ 2y + z = 0, \\ x + 4y + z = 1, \\ 5x + 3y + 2z = 0, \end{cases} \quad z; \quad (e) \begin{cases} x + 3y + 3z + 3t = 1, \\ 3x + y + 3z + 3t = 1, \\ 3x + 3y + z + 3t = 1, \\ 3x + 3y + 3z + t = 1, \end{cases} \quad x;$$

$$(f) x + 2y - 4 = 3y + 4z - 6 = 5z + 6s = 7s + 8t = x + y + z + s + t - 2 = 0, \quad y.$$

Odpowiedzi. (a) $x = 14/11$, $y = 2/11$; (b) $x = 2/3$, $y = 2/3$, $z = -1/3$; (c) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; (d) $z = -10/11$; (e) $x = 1/10$; (f) $y = 2$.

■ **Przykład 4.3.** Rozwiązać układy równań metodą macierzy odwrotnej:

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 4x - y = 9; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + 5y + 7z = 1, \\ 6x + 3y + 4z = 0, \\ 5x - 2y - 3z = -1; \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 2x + 4t = 1, \\ t = -2, \\ 2y = 4, \\ -x + z = -1. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Rozwiązanie X układu postaci $AX = B$, z nieosobliwą macierzą A wyznaczmy ze wzoru będziemy wyznaczać ze wzoru

$$X = A^{-1}B.$$

(a) Zapisując układ równań w postaci macierzowej otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

(porównaj Przykład 3.8 (a)), więc

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

czyli $x = 5/2$, $y = 1$.

(b) Układ równań w formie macierzowej ma postać

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$$

(porównaj Przykład 3.8 (b)), więc

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

czyli $x = 0$, $y = -4$, $z = 3$.

(c) Jak w poprzednich przykładach układ równań zapisujemy w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ (porównaj Przykład 3.8 (c))

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

więc

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 2 \\ \frac{7}{2} \\ 2 \end{bmatrix},$$

czyli $x = 9/2$, $y = 2$, $z = 7/2$, $t = 2$.

□ **Zadanie 4.3.** Rozwiązać układy równań metodą macierzy odwrotnej:

$$(a) \begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 2; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + z = 5, \\ 2x + 2y + z = 3, \\ 3x + 2y + z = 1; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x - 3y + 5z = -5, \\ -x + 2y - z = 2; \end{cases} \quad (d) \begin{cases} y + z + t = 4, \\ x + z + t = -1, \\ x + y + t = 2, \\ x + y + z = -2. \end{cases}$$

Odpowiedzi. (a) $x = 1, y = -1$; (b) $x = -2, y = 0, z = 7$; (c) $x = 3, y = 2, z = -1$; (d) $x = -3, y = 2, z = -1, t = 3$.

4.2. Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera–Capellego

■ **Przykład 4.4.** Znaleźć rzędy macierzy wskazując niezerowe minory maksymalnych stopni:

$$(a) \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Rzędem macierzy nazywamy największy stopień niezerowego minora tej macierzy, czyli wyznacznika utworzonego z elementów położonych w wybranych wierszach i kolumnach tej macierzy.

(a) Dana macierz ma wymiar 3×4 , a więc jej rząd może być równy 0, 1, 2 lub 3. Wartości 0 i 1 można od razu wykluczyć, gdyż łatwo wskazać niezerowy minor stopnia 2, np. minor $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$ leżący w lewym górnym rogu macierzy. Należy teraz poszukać niezerowego minora stopnia 3. Obliczamy wszystkie możliwe minory stopnia 3. Mamy

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 9 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 9 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd wynika, że nie istnieje niezerowy minor stopnia 3, więc rząd danej macierzy jest równy 2.

(b) Wszystkie minory danej macierzy zawierające parzyste wiersze lub parzyste kolumny są zerami. Minorem najwyższego stopnia nie zawierającym tych wierszy ani kolumn jest minor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd wynika, że rząd danej macierzy jest mniejszy od 3. Wśród minorów stopnia 2 istnieje minor niezerowy, np. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Rząd danej macierzy jest więc równy 2.

□ **Zadanie 4.4.** Znaleźć rzędy macierzy wskazując niezerowe minory maksymalnych stopni:

$$(a) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix};$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad (e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi. (a) 1; (b) 3; (c) 2; (d) 3; (e) 4; (f) 4.

■ **Przykład 4.5.** Wykonując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach macierzy obliczyć ich rzędy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Wykonując skończoną liczbę operacji elementarnych (zobacz Przykład 3.6) tak na wierszach jak i kolumnach macierzy nie zmienimy jej rzędu. Ponadto

rząd macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli skreślimy w niej wiersz (w_i) czy kolumnę (k_i) złożoną z samych zer lub też jeden z dwóch wierszy czy kolumn równych lub proporcjonalnych. Również transponowanie macierzy nie wpływa na jej rząd. Badaną macierz będziemy więc przekształcać bez zmiany jej rzędu do postaci, z której ten rząd można łatwo odczytać, np. z postaci trójkątnej lub blokowej, z dużą liczbą zer oraz jak najmniejszego wymiaru.

(a) W tym przypadku zastosujemy fragment algorytmu Gaussa otrzymując:

$$\text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_2 - 4w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - 2w_1 \end{matrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_3 = \frac{4}{7}w_2 \\ w_4 = \frac{2}{7}w_2 \end{matrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} = 2.$$

Zauważmy, że wynik uzyskaliśmy szybciej doprowadzając pierwszy wiersz do postaci $[100]$ przez wykonanie operacji $k_2 - 3k_1$.

(b) Wykorzystamy prawidłowość w ułożeniu elementów macierzy. Łatwo zauważyć, że wiersze macierzy złożone są z kolejnych liczb naturalnych, przy czym w wierszach nieparzystych tworzą one ciągi rosnące, a w parzystych malejące. Dlatego też sumy sąsiednich wierszy są ciągami stałymi. Dzięki temu można szybko obliczyć, że

$$\begin{aligned} \text{rz} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_4 + w_3 \\ w_3 + w_2 \\ w_2 + w_1 \end{matrix} &= \text{rz} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_3 = 2w_2 \\ w_4 = 3w_2 \end{matrix} \\ &= \text{rz} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} = 2. \end{aligned}$$

□ **Zadanie 4.5.** Wykonując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach macierzy obliczyć ich rzędy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 45 & 15 & 30 & -60 & 75 \\ 5 & 3 & 2 & -8 & 7 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}; \quad (e) \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}; \quad (f^*) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi. (a) 3; (b) 2; (c) 4; (d) 2; (e) 4; (f*) 6.

■ **Przykład 4.6.** Sprowadzając macierze do postaci schodkowej wyznaczyć ich rzędy:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie. Macierz nazywamy schodkową, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej schodków. Dokonując podanych niżej operacji elementarnych na wierszach macierzy otrzymamy:

(a) Mamy

$$\begin{aligned} \text{rz} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} w_3 - w_1 \\ w_5 + w_1 \end{matrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_3 - w_2 \\ w_4 - w_2 \end{matrix} \\ & = \text{rz} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_5 - w_4 \end{matrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 4. \end{aligned}$$

(b) Mamy

$$\begin{aligned} \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} w_2 - w_1 \\ w_3 + w_1 \\ w_4 - 2w_1 \\ w_6 + w_1 \end{matrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_3 - 2w_2 \\ w_4 + w_2 \\ w_5 - w_2 \\ w_6 + w_2 \end{matrix} \\ & = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_6 - 3w_5 \end{matrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3. \end{aligned}$$

□ **Zadanie 4.6.** Sprowadzając macierze do postaci schodkowej wyznaczyć ich rzędy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 5 & -3 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 13 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & 14 \\ -4 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix};$$

(c) $A = [a_{ij}]$ jest macierzą wymiaru 5×7 , gdzie $a_{ij} = i + j$ dla $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 7$;

(d) $B = [b_{ij}]$ jest macierzą wymiaru 6×6 , gdzie $b_{ij} = i^2 j$ dla $1 \leq i, j \leq 6$.

Odpowiedzi. (a) 3; (b) 2; (c) 2; (d) 1.

■ **Przykład 4.7.** Wyznaczyć rzędy macierzy w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & 2 & p-1 \\ p+2 & 3 & p \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie.

(a) Minorem najwyższego stopnia dla danej macierzy jest jej wyznacznik równy

$$\begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{vmatrix} = 2p(p-2).$$

Rząd tej macierzy jest więc równy 3 wtedy, gdy $2p(p-2) \neq 0$, tzn. dla $p \neq 0$ i $p \neq 2$. Dla $p = 0$ mamy

$$\text{rz} \begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad k_2 \equiv 0 \quad = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Podobnie dla $p = 2$ mamy

$$\text{rz} \begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 2w_1 \end{matrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \quad w_3 = w_2 \quad = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} = 2.$$

(b) Łatwo sprawdzić, że wyznacznik danej macierzy jest równy 0 dla każdego p . To oznacza, że rząd tej macierzy nie jest nigdy równy 3. Zbadajmy teraz jeden z minorów stopnia 2, np. minor

$$\begin{vmatrix} p & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(p-1).$$

Z postaci tego wyznacznika wynika, że dla $p \neq 1$ rząd danej macierzy jest równy 2. Dla $p = 1$ znajdujemy w macierzy inny niezerowy minor stopnia 2, np.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Ostatecznie dla każdej wartości $p \in \mathbb{R}$ rząd danej macierzy jest równy 2.

(c) Obliczmy jeden z minorów najwyższego stopnia np. minor

$$\begin{vmatrix} 1-p & 2 & 1 \\ 1 & 2-p & 1 \\ 1 & 2 & 1-p \end{vmatrix} = p^2(4-p).$$

Jeżeli ten minor jest niezerowy, tzn. jeżeli $p \neq 0$ i $p \neq 4$, to dana macierz ma rząd 3. Przypadki $p = 0$ i $p = 4$ zbadamy osobno. Dla $p = 0$ mamy

$$\text{rz} \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} k_2 = 2k_1 \\ k_3 = k_1 \\ k_4 = 0 \end{matrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Natomiast dla $p = 4$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{rz} \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix} &= \text{rz} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} w_3 - w_1 \\ &= \text{rz} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} w_3 + 4w_2 = 3. \end{aligned}$$

□ **Zadanie 4.7.** Wyznaczyć rzędy macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & p \\ 3 & p & 3 \\ 2p & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & p & 2 \\ 1 & -2 & 7+p \\ 1 & 2+2p & -3-p \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{(d)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p \\ 1 & p & p & p \end{bmatrix}; \quad \text{(e)} \quad \begin{bmatrix} p & -p & 1 & -p \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & p & 3 & p \\ p & 1 & p & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(f*)} \quad \begin{bmatrix} p^2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 2p & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 2p & 2p & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) dla $p = -3$ lub $p = 1$ lub $p = 2$ rząd jest równy 2, w pozostałych przypadkach rząd jest równy 3; (b) rząd jest równy 2 dla każdego $p \in \mathbb{R}$; (c) dla $p = 2$ rząd jest równy 2, dla $p \neq 2$ rząd jest równy 3; (d) dla $p = 1$ rząd jest równy 1, dla $p \neq 1$ rząd jest równy 3; (e) dla $p = 1$ rząd jest równy 2, w pozostałych przypadkach rząd jest równy 3; (f*) dla $p = 2$ rząd jest równy 1, dla $p = -2$ rząd jest równy 3, w pozostałych przypadkach rząd jest równy 4.

■ **Przykład 4.8.** W układach równań liniowych określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz parametrów:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} x - y + 2z + t = 1, \\ 3x + y + z - t = 2, \\ 5x - y + 5z + t = 4; \end{cases} \quad \text{(b)} \quad \begin{cases} 2x + 2y - z + t = 1, \\ x - y - z + 3t = 2, \\ 3x + 5y - 4z - t = 0; \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ 2x + y - z = 1, \\ 5x - y - z = 2, \\ x - 10y + 4z = -1, \\ x + y + 2z = 1; \end{cases} \quad \text{(d)} \quad \begin{cases} y + z + 3t = 0, \\ 2x + y - z - 3t = 2, \\ x - 2y + z + 2t = -1, \\ 2x + 3y + z + 3t = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem Kroneckera-Capellego układ równań liniowych z n niewiadomymi postaci $AX = B$ może nie posiadać rozwiązań albo mieć dokładnie jedno rozwiązanie albo też mieć nieskończenie wiele rozwiązań. Decydują o tym rzędy macierzy A układu oraz jego macierzy rozszerzonej $[A|B]$ i wtedy odpowiednio mamy $\text{rz } A \neq \text{rz } [A|B]$ albo $\text{rz } A = \text{rz } [A|B] = n$ albo też $\text{rz } A = \text{rz } [A|B] = r < n$. W ostatnim przypadku zbiór rozwiązań zależy od $n - r$ parametrów. Do ustalenia rzędów macierzy układu A i macierzy rozszerzonej $[A|B]$ wykorzystamy operacje, które ich nie zmieniają (patrz Przykład 4.5).

(a) Rozważmy podane operacje elementarne na wierszach macierzy rozszerzonej układu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 5w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Delta_3 = w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Z otrzymanej postaci wynika, że $\text{rz } A = 2 = \text{rz } [A|B] = r < n = 4$. Oznacza to, że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależących od $n - r = 2$ parametrów.

(b) Zamieniamy dla wygody kolejność równań układu i przekształcamy jego macierz rozszerzoną do postaci

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 3w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 8 & -1 & -10 & -6 \end{array} \right].$$

Stąd otrzymujemy, że $\text{rz } A = 3 = \text{rz } [A|B] = r$. Jednocześnie $n = 4$, więc układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, a liczba parametrów jest równa $n - r = 1$.

(c) W tym przykładzie mamy $n = 3$. Stosując wskazane operacje elementarne kolejno otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 5w_1 \\ w_4 - w_1 \\ w_5 - w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 14 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\Delta_3 = 2w_2 \\ \Delta_4 = -w_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Zatem $\text{rz } A = 3 = \text{rz } [A|B] = n$. Układ ma więc dokładnie jedno rozwiązanie.

(d) Równanie ze współczynnikiem 1 przy zmiennej x znów dla wygody dajemy na początek i przekształcamy macierz rozszerzoną układu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_3 - 2w_1 \\ w_4 - 2w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_3 - 5w_2 \\ w_4 - 7w_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Stąd $\text{rz } A = 3 < 4 = \text{rz } [A|B]$. Więc rozważany układ równań nie ma rozwiązań.

□ **Zadanie 4.8.** W układach równań liniowych określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz parametrów:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + 4z = 2, \\ 3x + 2y + z = 3; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 4, \\ 4x + 8y = 11, \\ x + 4y = 10; \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 5x - 3y - z = 3, \\ 2x + y - z = 1, \\ 3x - 2y + 2z = -4, \\ x - y - 2z = -2; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x - y + 2z - t = 1, \\ 2x - 3y - z + t = -1, \\ x + 7y - t = 4; \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x - 3y + 2z = 7, \\ x - t = 2, \\ -x - 3y + 2z + 2t = 3. \end{cases}$$

Odpowiedzi. (a), (d) nieskończenie wiele rozwiązań, 1 parametr; (b), (c) brak rozwią-

zań; (e) nieskończenie wiele rozwiązań, 2 parametry.

■ **Przykład 4.9.** Wskazać zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniach układu równań liniowych:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 7s + 2t = 6, \\ -x + 4y + 2z + 7s + 3t = 1, \\ 2x + y + 5z + 4s + t = 3. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Skorzystamy z faktu mówiącego, że jeżeli układ równań liniowych z n niewiadomymi ma nieskończenie wiele rozwiązań, a jego macierz A ma rząd równy r , to dowolny niezerowy minor macierzy A stopnia r wskazuje nam r zmiennych, które można wyrazić za pomocą $n - r$ pozostałych zmiennych, czyli parametrów. Przeprowadzimy najpierw wstępną analizę macierzy rozszerzonej $[A|B]$ układu pozwalającą na ustalenie rzędów oraz wyszukanie odpowiednich minorów. Mamy

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 - 2w_1]{w_2 + w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 14 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & -3 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 + 5w_2]{w_2 : 7} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{5}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & -4 \end{array} \right].$$

Stąd wynika, że $\text{rz } A = 3 = \text{rz } [A|B] = r < n = 5$. Wyznamy teraz wszystkie niezerowe minory stopnia 3 z przekształconej macierzy A . Spośród wszystkich $\binom{5}{3} = 10$ minorów stopnia 3 niezerowe są tylko minory zawierające piątą kolumnę. Jest ich 6, mianowicie

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}.$$

Przyjmując kolejno każdy z tych minorów jako podstawę rozwiązania całego układu równań (tj. układu Cramera z trzema niewiadomymi i dwoma parametrami) widzimy, że parametrami mogą być tylko zmienne pozostające poza minorem, a więc z , s lub y , s lub y , z lub x , s lub x , z lub też x , y .

□ **Zadanie 4.9.** Wskazać zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami w rozwiązaniach układów równań liniowych:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \begin{cases} x - y + z = -1, \\ 2x + 2y - 2z = 3, \\ 3x + y - z = 2; \end{cases} & \quad \text{(b)} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = -1, \\ -x + 8y + 11z + 12t = 5, \\ 2x - y - z = -4; \end{cases} \\ \text{(c)} \quad \begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5, \\ 2x - 6y - 4s + t = -10, \\ 2z + t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) $\{y\}$, $\{z\}$; (b) $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{x, t\}$, $\{y, z\}$, $\{y, t\}$, $\{z, t\}$; (c) $\{x, y, z\}$, $\{x, y, s\}$, $\{x, y, t\}$, $\{x, z, s\}$, $\{x, s, t\}$, $\{y, z, s\}$, $\{y, s, t\}$.

■ **Przykład 4.10.** Określić liczby rozwiązań układów równań liniowych w zależności od parametru p :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} (2p+1)x + (p-3)y = p+1, \\ (p+2)x - 2y = 2p; \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x + py + z = 1, \\ 2x + y + z = p, \\ x + y + pz = p^2; \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} px + y + z = 1, \\ x + y - z = p, \\ x - y + pz = 1; \end{cases} & \text{(d)} \quad & \begin{cases} px + py + pz + pt = p, \\ x + py + pz + pt = p, \\ x + y + pz + pt = p, \\ x + y + z + pt = p. \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Układ, w którym liczba niewiadomych jest równa liczbie równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy A tego układu jest różny od zera. Każdy przypadek wartości parametru p , dla którego $\det A = 0$ wymaga osobnej analizy zgodnie z twierdzeniem Kroneckera–Capellego (Przykład 4.8).

(a) Rozważany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det A = \begin{vmatrix} 2p+1 & p-3 \\ p+2 & -2 \end{vmatrix} = -p^2 - 3p + 4 = (1-p)(p+4) \neq 0,$$

tzn., gdy $p \neq -4$ i $p \neq 1$. Macierz rozszerzona układu dla $p = -4$ ma postać

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} -7 & -7 & -3 \\ -2 & -2 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow[w_2 + 2w_1]{w_1 : (-7)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{50}{7} \end{array} \right].$$

Stąd wynika, że układ jest sprzeczny, gdyż $\text{rz } A = 1 < 2 = \text{rz } [A|B]$. Dla $p = 1$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

więc $\text{rz } A = 1 = \text{rz } [A|B]$. Układ równań ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

(b) Dla układu rozważanego w tym przykładzie mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = 2p(1-p),$$

więc ma on dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $p \neq 0$ i $p \neq 1$. Przeprowadzimy teraz analizę układu dla $p = 0$ oraz $p = 1$ stosując twierdzenie Kroneckera–Capellego. Dla $p = 0$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Oznacza to, że rząd macierzy A układu jest równy 2 podczas, gdy rząd macierzy rozszerzonej $[A|B]$ jest równy 3. Układ równań jest w tym przypadku sprzeczny. Dla

parametru $p = 1$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

W rozważanym przypadku rzędy macierzy głównej oraz macierzy rozszerzonej układu są równe 2. Oznacza to, że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

(c) W kolejnym układzie równań mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3 = (p+1)(p-3),$$

więc dla $p \neq -1$ oraz $p \neq 3$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dla $p = -1$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_1 + w_3 \\ w_2 - w_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

Układ równań jest w tym przypadku sprzeczny. Podobnie jest dla $p = 3$, gdyż

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_1 - 3w_3 \\ w_2 - w_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right],$$

a więc $\text{rz } A = 2 < 3 = \text{rz } [A|B]$.

(d) W ostatnim układzie równań mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} p & p & p & p \\ 1 & p & p & p \\ 1 & 1 & p & p \\ 1 & 1 & 1 & p \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{w_1 - w_2 \\ w_2 - w_3 \\ w_3 - w_4}} \begin{vmatrix} p-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p-1)^3.$$

Dla $p = 0$ oraz $p = 1$ macierze rozszerzone przyjmują odpowiednio postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{oraz} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Zatem dla $p = 0$ otrzymamy, że $\text{rz } A = 3 = \text{rz } [A|B] = r < n = 4$, więc układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r = 1$ parametru. Natomiast dla $p = 1$ mamy $\text{rz } A = 1 = \text{rz } [A|B] = r < n = 4$ i układ równań ma także nieskończenie wiele rozwiązań, ale zależnych od $n - r = 3$ parametrów.

□ **Zadanie 4.10.** Określić liczby rozwiązań układów równań liniowych w zależności od parametru rzeczywistego p :

$$(a) \begin{cases} (p+1)x + (2-p)y = p, \\ (1-3p)x + (p-1)y = -6; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} (p+1)x - y + pz = 1, \\ (3-p)x + 4y - pz = -4, \\ px + 3y = -3; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} px + y + 2z = 1, \\ x + py + 2z = 1, \\ x + y + 2pz = 1; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x + py + pz + pt = 1, \\ 2x + 2y + pz + pt = 2, \\ 2x + 2y + 2z + pt = 3, \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 4; \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + (p-2)y - 2pz = 4, \\ px + (3-p)y + 4z = 1, \\ (1+p)x + y + 2(2-p)z = 7. \end{cases}$$

Odpowiedzi. Układ nie ma rozwiązań, ma dokładnie jedno rozwiązanie, ma nieskończenie wiele rozwiązań odpowiednio (a) dla $p = 1/2$, dla $p \neq 1/2$ i $p \neq 3$, dla $p = 3$; (b) nigdy, dla $p \neq 4$ i $p \neq 0$, dla $p = 4$ lub $p = 0$; (c) dla $p = -2$, dla $p \neq -2$ i $p \neq 1$, dla $p = 1$; (d) dla $p = 2$, dla $p \neq 2$, nigdy; (e) dla $p \in \mathbb{R}$, nigdy, nigdy.

4.3. Metody rozwiązywania układów Cramera

■ **Przykład 4.11.** Rozwiązać układy Cramera metodą eliminacji Gaussa – Jordana:

$$(a) \begin{cases} x + 5y = 2, \\ -3x + 6y = 15; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - 2y + 3z = -7, \\ 3x + y + 4z = 5, \\ 2x + 5y + z = 18; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 4x + 8y - 7z + t = 1, \\ x + 2y - z + t = 1, \\ -x + y + 4z + 6t = 0; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 4y + 2z - s = 3, \\ 2x + 9y + 6z - 2s - 3t = 5, \\ x + 2y - z - s + 5t = 5, \\ -2x - 7y + z + 3s - 4t = -5, \\ -x - 5y - z + 3s + 6t = 4. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Operacje elementarne wykonywane na wierszach układu równań przekształcają ten układ w układ mu równoważny, czyli nie zmieniają jego rozwiązania. Zatem do rozwiązania układu Cramera postaci $AX = B$, gdzie A jest macierzą nieosobliwą możemy wykorzystać algorytm Gaussa – Jordana (patrz Przykład 3.8.9), co ilustruje poniższy diagram:

$$[A|B] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|X],$$

gdzie I jest macierzą jednostkową, a macierz $[A|B]$ nazywamy macierzą rozszerzoną układu $AX = B$.

(a) Wykonując kolejno podane operacje elementarne na wierszach macierzy rozszerzonej układu otrzymamy

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 6 & 15 \end{array} \right] w_2 + 3w_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 21 & 21 \end{array} \right] w_2 : 21 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] w_1 - 5w_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Ostatni zapis oznacza, że

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y = -3, \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y = 1, \end{cases}$$

zatem $x = -3, y = 1$.

(b) Podobnie rozwiązujemy układ z trzema niewiadomymi

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 18 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 2w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 7 & -5 & 26 \\ 0 & 9 & -5 & 32 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 : 7} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 9 & -5 & 32 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_3 - 9w_2} \\ \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{10}{7} \end{array} \right] & \xrightarrow{w_3 : \frac{10}{7}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{w_2 + \frac{5}{7}w_3 \\ w_1 + 2w_2 - 3w_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $x = 2, y = 3, z = -1$.

(c) W tym przykładzie mamy

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 6 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{w_2 - 4w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 + w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{w_2 : 3 \\ w_3 : 2}} \\ \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_4 - 5w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right] & \xrightarrow{w_4 : (-\frac{3}{2})} \\ \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{w_3 - \frac{1}{2}w_4 \\ w_2 - \frac{1}{3}w_3 - 2w_4 \\ w_1 - 2w_2 + 3w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Stąd $x = 4, y = -2, z = 0, t = 1$.

(d) Przekształcamy macierz rozszerzoną danego układu równań otrzymując kolejno

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 9 & 6 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -4 & -5 \\ -1 & -5 & -1 & 3 & 6 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 + 2w_1 \\ w_5 + w_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 6 & 7 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{w_3 + 2w_2 \\ w_4 - w_2 \\ w_5 + w_2}} \\ \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{w_4 - 3w_3 \\ w_5 - 3w_3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 6 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{w_5 - 2w_4 \\ w_5 : 2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_4 - 2w_5 \\ w_3 + 2w_5 \\ w_2 + 2w_5}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 + w_4} \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_3 \\ w_1 - 2w_3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 4w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są liczby $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, $s = 0$, $t = 1$.

□ **Zadanie 4.11.** Rozwiązać układy Cramera metodą eliminacji Gaussa – Jordana:

$$(a) \begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + y = 0; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y = 1, \\ x + 2y - 3z = -3, \\ 2x + 4y + z = 1; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3x + y + z = -1, \\ x + 2z = -6, \\ 3y + 2z = 0; \end{cases} \quad (d) \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1, \\ 3x + 4y + 2z = 2, \\ 4x + 2y + 3z = 3; \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ 2x + 2y + z + t = 0, \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 3, \\ 6x + 4y + 3z + 2t = 2; \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x - 2y + 3s + t = 1, \\ 2x - 3y + z + 8s + 2t = 3, \\ x - 2y + z + 3s - t = 1, \\ y + 3s + 5t = 0, \\ x - 2y + 5s + 8t = -1. \end{cases}$$

Odpowiedzi. (a) $x = -1/7$, $y = 3/7$; (b) $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$; (c) $x = 0$, $y = 2$, $z = -3$; (d) $x = 8/7$, $y = -1/7$, $z = -3/7$; (e) $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$, $t = 2$; (f) $x = 10$, $y = 3$, $z = 0$, $s = -1$, $t = 0$.

■ **Przykład 4.12.** Stosując „metodę kolumn jednostkowych” rozwiązać układy Cramera:

$$(a) \begin{cases} 2x - y + z = 1, \\ -4x - 12y + z = 2, \\ 3x + 3y + z = 3; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1, \\ 3x - y - z - 2t = -4, \\ 2x + 3y - z - t = -6, \\ x + 2y + 3z - t = -4; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3x + y + s + 2t = 2, \\ x - y + 3z + 2s = 1, \\ 2x + 2y + z + s + 3t = 3, \\ x + 2y - z - s + t = 1, \\ y + 2z + 2s = 3. \end{cases}$$

Rozwiązanie. „Metoda kolumn jednostkowych” jest zmodyfikowaną wersją algorytmu Gaussa – Jordana (patrz Przykład 4.11). Polega ona na odpowiednim przekształceniu

macierzy rozszerzonej układu. W przypadku układów Cramera celem postępowania jest doprowadzenie wszystkich kolumn macierzy układu do postaci jednostkowej (tzn. z jedną jedynką i resztą zer) tak, aby jedynki w poszczególnych kolumnach znajdowały się w różnych wierszach. **Przekształcenie j -tej kolumny** schematycznie przedstawiamy poniżej.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \dots & a_{1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{i-1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & a_{ij} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & a_{i+1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots & \dots & \vdots \end{array} \right] \xrightarrow{w_i : a_{ij}} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots & a_{1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{i-1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & a_{i+1j} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots & \dots & \vdots \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - a_{1j}w_i \\ \vdots \\ w_{i-1} - a_{i-1j}w_i \\ w_{i+1} - a_{i+1j}w_i \\ \vdots \\ w_n - a_{nj}w_i \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \vdots \end{array} \right]$$

Dla układu Cramera z n niewiadomymi metoda ta wymaga n kroków, gdyż w jednym kroku przekształca się **ostatecznie** całą kolumnę. Kolejność przekształcanych kolumn oraz położenie końcowych „jedynek” jest dowolna, przy czym praktycznie jest do przekształcenia wybierać kolumnę składającą się z jedynki, „małych” liczb całkowitych i „dużej” liczby zer. W porównaniu z klasycznym algorytmem Gaussa – Jordana metoda ta nie wymaga przestawiania wierszy.

(a) Postępując według omówionej wyżej metody kolejno otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & -12 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - 2w_3 \\ w_2 + 6w_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & 0 & 13 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 : 13} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 + 9w_2 \\ w_3 - 4w_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

Stąd wynika, że układ wyjściowy jest równoważny układowi

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 6, \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 1, \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -2. \end{cases}$$

Zatem $x = -2$, $y = 1$, $z = 6$.

(b) Postępując według omówionej wyżej metody kolejno otrzymamy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 2w_1 \\ w_4 - w_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - w_4 \\ w_2 + 4w_4 \\ w_3 - w_4 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 : (-3) \\ w_3 : (-3) \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - w_2 \\ w_3 - 2w_2 \\ w_4 - w_2 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 : (-17)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 + 2w_3 \\ w_2 - 9w_3 \\ w_4 + 13w_3 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Stąd odczytujemy, że $x = -1$, $y = -1$, $z = 0$, $t = 1$.

(c) Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymamy

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 - 3w_2 \\ w_3 - 2w_2 \\ w_4 - w_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & -9 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 - 4w_5 \\ w_2 + w_5 \\ w_3 - 4w_5 \\ w_4 - 3w_5 \end{array} \rightarrow \\
 & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -17 & -13 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 - 2w_4 \\ w_3 - 3w_4 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] w_1 : 3 \rightarrow \\
 & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_2 - 5w_1 \\ w_3 - 17w_1 \\ w_4 + 10w_1 \\ w_5 - 2w_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \end{array} \right] w_3 : \left(-\frac{37}{3}\right) \rightarrow \\
 & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 - \frac{5}{3}w_3 \\ w_2 + \frac{13}{3}w_3 \\ w_4 - \frac{23}{3}w_3 \\ w_5 + \frac{4}{3}w_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są liczby $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $s = 1$, $t = 0$.

□ **Zadanie 4.12.** Stosując „metodę kolumn jednostkowych” rozwiązać układy Cramera:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \begin{cases} 5x + 2y - 2z = 5, \\ 3x + y + 2z = 1, \\ 2x + 3y + 2z = 5; \end{cases} & (b) \quad & \begin{cases} x - 2y + z - t = -4, \\ 2x - y - z + t = 1, \\ x + y + 2z - t = 5, \\ x + y - z + t = 4; \end{cases} \\
 (c) \quad & \begin{cases} 2x + y + z + t = 0, \\ y + z = 0, \\ 2x + y + z + s = 0, \\ y + z + s + t = 4, \\ x + z + t = 0; \end{cases} & (d) \quad & \begin{cases} 2x + 3y + 2z - t = 3, \\ 2x + y + z + 2s + 3t = 6, \\ 3x - z + s + t = 3, \\ y + 4s + t = 1, \\ 2x + y + z - 2s + 5t = 8. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) $x = 0$, $y = 2$, $z = -\frac{1}{2}$; (b) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$; (c) $x = -1$, $y = 1$, $z = -1$, $s = 2$, $t = 2$; (d) $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, $s = 0$, $t = 1$.

■ **Przykład 4.13.** Klienci sklepu spożywczego stojący przed nami w kolejce płacili kolejno: 9.50 zł za 2 kostki masła, 2 bochenki chleba, 10 jaj, 3 litry mleka; 8.20 zł za 1 masło, 2 chleby, 20 jaj, 1 mleko; 8.90 zł za 3 masła, 1 chleb, 5 jaj, 2 mleka.

- (a) Chcemy kupić 2 masła, 5 chlebów, 35 jaj i 5 litrów mleka. Ile zapłacimy?
 (b) Czy po zapłaceniu za zakupione produkty poznamy ich ceny jednostkowe?
 (c) Jakiego zakupu powinniśmy dokonać, aby otrzymać każdy z tych produktów i jednocześnie poznać jego cenę jednostkową?
 (d) Wyznaczyć ceny jednostkowe, jeżeli kupując po jednej sztuce każdego z tych produktów zapłaciliśmy 3.60 zł.

Rozwiązanie. Niech x, y, z, t oznaczają ceny jednostkowe odpowiednio kostki masła, bochenka chleba, jajka, litra mleka. Z danych zadania wynika następujący układ równań

$$\begin{cases} 2x + 2y + 10z + 3t = 9.5, \\ x + 2y + 20z + t = 8.2, \\ 3x + y + 5z + 2t = 8.9. \end{cases}$$

- (a) Należy wyznaczyć wartość c taką, że $c = 2x + 5y + 35z + 5t$. Wystarczy, aby równanie definiujące liczbę c było kombinacją liniową wcześniejszych trzech równań. Mówiąc ściślej, aby istniały stałe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takie, że

$$(2, 5, 35, 5) = \alpha_1(2, 2, 10, 3) + \alpha_2(1, 2, 20, 1) + \alpha_3(3, 1, 5, 2).$$

Stale $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ znajdziemy rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 10 & 20 & 5 & 35 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 20w_1 \\ w_4 - w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -5 & 1 \\ -30 & 0 & -55 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_1 - 2w_4 \\ w_2 + 2w_4 \\ w_3 + 30w_4}} \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -85 & 85 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_3 = \frac{7}{85}w_2 \\ w_2 : (-7)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_1 - 5w_2 \\ w_3 + w_2}} \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_3 \leftrightarrow w_1 \\ w_2 \leftrightarrow w_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Stąd $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, więc $c = \alpha_1 \cdot 9.5 + \alpha_2 \cdot 8.2 + \alpha_3 \cdot 8.9 = 18.3$. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że zapłacimy 18.30 zł.

(b) Niemożliwe jest wyznaczenie cen jednostkowych poszczególnych produktów na podstawie podanych informacji. Układ równań opisujący te cztery niewiadome nie ma jednoznacznego rozwiązania. Rząd macierzy układu pierwszych trzech równań jest oczywiście mniejszy od 4, zaś dodanie czwartego liniowo zależnego równania nie podwyższa tego rzędu do 4.

(c) Ceny poszczególnych produktów moglibyśmy wyznaczyć z układu równań o macierzy rzędu 4, np. z układu Cramera. Rząd macierzy układu trzech równań napisanych

na początku jest równy

$$\text{rz} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 20 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 - 2w_2 \\ w_3 - 3w_2 \end{matrix} = \text{rz} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -30 & 1 \\ 1 & 2 & 20 & 1 \\ 0 & -5 & -55 & -1 \end{bmatrix} = 3,$$

co zresztą można już było wcześniej wywnioskować na podstawie rachunku przeprowadzonego w punkcie (a). Zakup, jakiego powinniśmy dokonać, musiałby się więc składać z k_1 kostek masła, k_2 bochenków chleba, k_3 jaj i k_4 litrów mleka, gdzie $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$, $k_3 \geq 1$, $k_4 \geq 1$, przy czym musi być spełniony warunek

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 20 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Warunek ten spełniony jest np. dla $k_1 = 6$, $k_2 = 5$, $k_3 = 35$, $k_4 = 1$.

(d) Do początkowego układu trzech równań dołączamy czwarte równanie

$$x + y + z + t = 3.6.$$

Rozwiązujemy otrzymany układ czterech równań (metodą „kolumn jednostkowych”)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 & 3 & 9.5 \\ 1 & 2 & 20 & 1 & 8.2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 8.9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 - 2w_2 \\ w_3 - 3w_2 \\ w_4 - w_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & -30 & 1 & -6.9 \\ 1 & 2 & 20 & 1 & 8.2 \\ 0 & -5 & -55 & -1 & -15.7 \\ 0 & -1 & -19 & 0 & -4.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_2 - w_1 \rightarrow \\ w_3 + w_1 \rightarrow \end{matrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & -30 & 1 & -6.9 \\ 1 & 4 & 50 & 0 & 15.1 \\ 0 & -7 & -85 & 0 & -22.6 \\ 0 & 1 & 19 & 0 & 4.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 + 2w_4 \\ w_2 - 4w_4 \\ w_3 + 7w_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 1 & 2.3 \\ 1 & 0 & -26 & 0 & -3.3 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & 9.6 \\ 0 & 1 & 19 & 0 & 4.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_3 : 48 \rightarrow \end{matrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 1 & 2.3 \\ 1 & 0 & -26 & 0 & -3.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 19 & 0 & 4.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 - 8w_3 \\ w_2 + 26w_3 \\ w_4 - 19w_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1.9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Stąd wynika, że czwarty zakup $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ czyni zadość warunkowi z punktu (c) i pozwala na wyznaczenie cen jednostkowych (w złotych), które są równe $x = 1.9$, $y = 0.8$, $z = 0.2$ i $t = 0.7$.

□ **Zadanie 4.13.** W wytwórni montuje się wyroby A, B, C, D, E z czterech typów detali a, b, c, d . Liczby detali wchodzących w skład poszczególnych wyrobów podane są w tabeli

	A	B	C	D	E
a	1	2	0	4	1
b	2	1	4	5	1
c	1	3	3	5	4
d	1	1	2	3	1

- (a) Czy można obliczyć, ile waży wyroby D i E , jeżeli wyroby A, B, C ważą odpowiednio 12, 20 i 19 dag. Podać znalezione wagi.
 (b) Ile waży detale a, b, c , jeżeli detal d waży 1 dag?

Odpowiedzi. (a) wyrób D waży 44 dag, zaś wagi wyrobu E na podstawie tych danych nie można uzyskać; (b) detale a, b, c ważą odpowiednio 4, 2 i 3 dag.

4.4. Metody rozwiązywania dowolnych układów równań

■ **Przykład 4.14.** Wykorzystując algorytm Gaussa – Jordana rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} 2x + y - z + t = 1, \\ y + 3z - 3t = 1, \\ x + y + z - t = 1; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 2y - z - t = 1, \\ x + y + z + 3t = 2, \\ 3x + 5y - z + t = 3; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ 3x - y + 3z = 2, \\ x + y + z = 0, \\ x - y + z = 1; \end{cases}$$

$$(d^*) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t - u = 6, \\ 3x + 6y + 5z - 2t - 9u = 1, \\ 2x + 4y + 2z - 8u = -5, \\ 2x + 4y + 7z - 5t + u = 17, \\ x + 2y + 6z - 5t - 10u = 12. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Rozwiązywanie dowolnego liniowego układu równań $AX = B$ metodą eliminacji Gaussa – Jordana polega na przekształcaniu macierzy rozszerzonej $[A|B]$ tego układu. Celem postępowania jest doprowadzenie macierzy $[A|B]$ do macierzy $[A'|B']$ opisującej układ równoważny wyjściowemu i jednocześnie zawierający w lewym górnym rogu macierzy A' macierz jednostkową, a pod nią jeszcze jeden wiersz złożony z samych zer. Wówczas, zgodnie z twierdzeniem, możliwe będą trzy sytuacje:

- (1) układ będzie sprzeczny, jeżeli element kolumny B' wyrazów wolnych odpowiadający wierszowi zerowemu macierzy A' będzie różny od zera,
- (2) układ będzie miał tylko jedno rozwiązanie (i będzie równoważny układowi Cramera), jeżeli poza macierzą jednostkową w macierzy A' nie pozostanie żadna inna kolumna,
- (3) układ będzie miał nieskończenie wiele rozwiązań, jeżeli poza macierzą jednostkową w macierzy A' pozostanie choć jedna kolumna. Liczba tych dodatkowych kolumn będzie wówczas liczbą parametrów określających rozwiązanie układu.

Nasze przykłady rozwiązywać będziemy w oparciu o algorytm Gaussa – Jordana, ale zmodyfikowany, bo wykraczający poza układy Cramera. Będziemy wykonywać następujące operacje na **wierszach** macierzy rozszerzonej:

- zamiana między sobą i -tego i j -tego wiersza (oznaczenie $w_i \leftrightarrow w_j$),
- mnożenie i -tego wiersza przez stałą c różną od zera (oznaczenie cw_i),
- dodanie do i -tego wiersza j -tego wiersza pomnożonego przez stałą c (oznaczenie $w_i + cw_j$), które wystarczały dla układów Cramera oraz dodatkowo:
- skreślenie i -tego wiersza złożonego z samych zer (oznaczenie $\psi_i \equiv 0$),
- skreślenie i -tego wiersza równego j -temu wierszowi (oznaczenie $\psi_i = w_j$),
- skreślenie i -tego wiersza, który jest proporcjonalny do j -tego wiersza (oznaczenie $\psi_i \sim w_j$).

Potrzebna tu jeszcze będzie operacja **przestawiania j -tej kolumny na koniec niewiadomych** (oznaczenie $k_j \mapsto$) z jednoczesnym **przemianowaniem oznaczeń niewiadomych**.

(a) Przekształcamy macierz rozszerzoną układu równań otrzymując

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 2w_1} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \sim w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

Dany układ jest więc równoważny układowi

$$\begin{cases} x - 2z + 2t = 0, \\ y + 3z - 3t = 1. \end{cases}$$

Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań z dwoma parametrami. Przyjmując niewiadome z i t za parametry otrzymujemy rozwiązanie tego układu

$$\begin{cases} x = 2z - 2t, \\ y = 1 - 3z + 3t, \end{cases}$$

gdzie $z, t \in \mathbb{R}$.

(b) Postępując podobnie otrzymujemy kolejne równoważne postaci macierzy rozszerzonej

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Ostatni wiersz uzyskanej macierzy wskazuje na sprzeczność danego układu równań. Widać to wyraźnie po rozpisaniu układu w formie rozwiniętej.

$$\begin{cases} x + 2y - z - t = 1, \\ -y + 2z + 4t = 1, \\ 0 = -1. \end{cases}$$

(c) Macierz rozszerzona $[A|B]$ danego układu równań po przestawieniu jego wierszy $w_1 \leftrightarrow w_3$, $w_2 \leftrightarrow w_4$ przyjmie postać

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right].$$

Dokonując na wierszach tej macierzy zaznaczonych operacji otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} [A|B] \xrightarrow{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - 2w_1 \\ w_4 - 3w_1}} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 \leftrightarrow w_3 \\ w_3 \cdot (-1) \\ w_4 \sim w_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 2w_2} \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 : 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_1 - w_2 \\ w_2 - w_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Dany układ równań jest zatem równoważny układowi Cramera posiadającemu jedyne rozwiązanie

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -\frac{1}{2}, \\ z = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

(d*) W tym przykładzie pojawi się konieczność przestawienia kolumn. Można to zrobić jednorazowo pod koniec postępowania opuszczając wcześniej „niewygodne” kolumny. My jednak będziemy to robić stopniowo. Każdą „niewygodną” kolumnę (tzn. nie mającą elementu niezerowego poniżej już ustawionej „jedynki” na przekątnej) będziemy od razu przestawiać **wraz z jej niewiadomą** na koniec macierzy układu przed kolumnę wyrazów wolnych. Od tego momentu będziemy już zaznaczać nad kolumnami macierzy odpowiadające im niewiadome. Oczywiście niewiadome przeniesione na koniec staną się parametrami. Mamy zatem

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & -2 & -9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -8 & -5 \\ 2 & 4 & 7 & -5 & 1 & 17 \\ 1 & 2 & 6 & -5 & -10 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 2w_1 \\ w_4 - 2w_1 \\ w_5 - w_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 \leftrightarrow w_4 \\ w_3 = w_4}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{k_2 \mapsto \\ w_3 + 4w_2 \\ w_4 - 3w_2}} \left[\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u & \\ 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{k_3 \mapsto \\ w_4 \sim w_3 \\ w_3 : 6}} \left[\begin{array}{ccccc|c} x & z & t & u & y & \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & -9 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{w_2 - 3w_3 \\ w_1 - 3w_2 + w_3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} x & z & u & y & t & \\ 1 & 3 & -1 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 3w_3 \\ w_1 - 3w_2 + w_3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} x & z & u & y & t & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Dany układ jest więc równoważny układowi

$$\begin{cases} x & + 2y + t = -4, \\ & z & - t = \frac{7}{2}, \\ & & u = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań z dwoma parametrami. Przyjmując niewiadome y, t za parametry otrzymamy rozwiązanie tego układu

$$\begin{cases} x = -4 - 2y - t, \\ z = \frac{7}{2} + t, \\ u = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

gdzie $y, t \in \mathbb{R}$.

□ **Zadanie 4.14.** Wykorzystując algorytm Gaussa – Jordana rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ x + y + z = 1, \\ 2x - 3y + 5z = 10, \\ 5x - 6y + 8z = 19; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 2y + z + t = 7, \\ 2x - y - z + 4t = 2, \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1, \\ 2x + 4y - z + 2t = 2, \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3, \\ x + y + z + t = 0; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0, \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1, \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1. \end{cases}$$

Odpowiedzi. (a) $x = 1, y = -1, z = 1$; (b) układ jest sprzeczny; (c) $x = -1 - t, y = 1, z = 0$, gdzie $t \in \mathbb{R}$; (d) $x = \frac{1}{7} - \frac{3}{7}z + s - t, y = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}z - s$, gdzie $z, s, t \in \mathbb{R}$.

■ **Przykład 4.15.** Rozwiązać układy równań „metodą kolumn jednostkowych”:

$$(a) \begin{cases} 4x + 3y + 5z + 7u = 2, \\ 2x - y + z + 3u = 4, \\ x + 2y + 2z + 2u = -1, \\ 3x + y + 3z + 5u = 3; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x + 9y + 6z - 2s - 3t = 5, \\ x + 2y - z - s + 5t = 5, \\ -2x - 7y + z + 3s - 4t = -5, \\ -x - 5y - z + 3s + 6t = 4; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 5x + y + 2z + s - t + 6u = 2, \\ -11x - 3y - 9z - 2s + 4t - 15u = -5, \\ 14x + y + 2z + 3s + 2t + 13u = 6, \\ 3x - 2y - 7z + s + 6t - 2u = 1, \\ 2x + 3y + 9z - 7t + 8u = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Metoda kolumn jednostkowych jest praktyczną wersją metody eliminacji Gaussa – Jordana. W przypadku dowolnych układów równań celem postępowania jest doprowadzenie kilku kolumn macierzy układu do postaci jednostkowej (tzn. z jedną jedynką i resztą zer) tak, aby „jedynki” w wyróżnionych kolumnach znajdowały się w różnych wierszach. Wybór kolumn do przekształceń jest dowolny. Najlepiej jest brać kolumny zawierające „małe” liczby całkowite, „dużo” zer, a wyróżniony niezerowy element powinien znajdować się w wierszu dotąd nie wybieranym. Samo przekształcenie kolumny wykonujemy dokładnie tak, jak dla układu Cramera (patrz Przykład 4.13). W stosunku do układów Cramera w przypadku dowolnych układów równań mogą w trakcie postępowania pojawić się wiersze zerowe – wtedy je skreślamy, wiersze równe lub proporcjonalne – wtedy skreślamy jeden z nich. Może się zdarzyć, że w macierzy rozszerzonej układu pojawi się wiersz zerowy z jednym elementem niezerowym w kolumnie wyrazów wolnych. Taki układ równań jest oczywiście sprzeczny. Jeśli tak się nie zdarzy, to postępowanie kończy się wtedy, gdy liczba wyróżnionych kolumn jest równa liczbie wierszy, które pozostały w macierzy. Rozwiązanie układu odczytujemy teraz z końcowej postaci macierzy, wyróżnione „jedynki” wskazują zmienne zależne.

Uwaga. Przy wybieraniu wyróżnionych kolumn oraz ich niezerowych elementów mamy

pełną dowolność. Jednoznacznie określona jest tylko liczba tych kolumn, ale pojawia się ona w naturalny sposób na końcu postępowania.

(a) Przekształcamy macierz rozszerzoną układu równań otrzymując

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 - 4w_3 \\ w_2 - 2w_3 \\ w_4 - 3w_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 = w_4 \\ w_2 = w_4 \\ w_4 \cdot (-1) \end{array} \rightarrow \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & -6 \end{array} \right] w_1 - 2w_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -4 & 0 & 11 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & -6 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

W formie rozwiniętej układ równań przyjmuje postać

$$\begin{cases} x - 8y - 4z = 11, \\ 5y + 3z + u = -6, \end{cases}$$

zatem jego rozwiązanie można zapisać wzorami

$$\begin{cases} x = 11 + 8y + 4z, \\ u = -6 - 5y - 3z, \end{cases}$$

gdzie $y, z \in \mathbb{R}$.

(b) Postępując według tej samej metody otrzymamy

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 9 & 6 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -4 & -5 \\ -1 & -5 & -1 & 3 & 6 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 - 2w_2 \\ w_3 + 2w_2 \\ w_4 + w_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5 & 8 & 0 & -13 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 11 & 9 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_2 + w_3 \\ w_4 - 2w_3 \end{array} \rightarrow \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5 & 8 & 0 & -13 & -5 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_4 \cdot (-1) \\ w_1 + 13w_4 \\ w_2 - 11w_4 \\ w_3 - 6w_4 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -34 & 8 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 32 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] w_1 : 8 \rightarrow \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -17/4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 32 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_2 + 2w_1 \\ w_3 + w_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{17}{4} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{47}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{43}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{cases} -\frac{17}{4}y + z = 1, \\ x + \frac{47}{2}y = 1, \\ \frac{43}{4}y + s = 0, \\ -3y + t = 1 \end{cases}$$

i ostatecznie $x = 1 - 47y/2$, $z = 1 + 17y/4$, $s = -43y/4$, $t = 1 + 3y$, gdzie $y \in \mathbb{R}$.

(c) Rozwiązanie tego przykładu znajdziemy dość szybko, bowiem mamy

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 5 & 1 & 2 & 1 & -1 & 6 & 2 \\ -11 & -3 & -9 & -2 & 4 & -15 & -5 \\ 14 & 1 & 2 & 3 & 2 & 13 & 6 \\ 3 & -2 & -7 & 1 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 0 & -7 & 8 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_2 + 3w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 + 2w_1 \\ w_5 - 3w_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 5 & 1 & 2 & 1 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 13 & 0 & -3 & 3 & 4 & 10 & 5 \\ -13 & 0 & 3 & -3 & -4 & -10 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 - w_2 \\ w_3 - 2w_2 \\ w_4 - 3w_2 \\ w_5 = -w_4 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 + 2w_3 \\ w_2 - w_3 \\ w_4 = w_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 17 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 0 & -9 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

To oznaczaj, że

$$\begin{cases} 3x + y + 17z & + 5u = 5, \\ 3x & - 9z + s & + 2u = -1, \\ x & + 6z & + t + u = 2, \end{cases}$$

zatem

$$\begin{cases} y = 5 - 3x - 17z - 5u, \\ s = -1 - 3x + 9z - 2u, \\ t = 2 - x - 6z - u, \end{cases}$$

gdzie $x, z, u \in \mathbb{R}$.

□ **Zadanie 4.15.** Rozwiązać układy równań „metodą kolumn jednostkowych”:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} 3x + 2y + z - t = 0, \\ 5x - y + z + 2t = -4, \\ 7x + 8y + z - 7t = 6, \\ x - y + z + 2t = 4; \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} 2x + 3y + z - 2s - t = 6, \\ 4x + 7y + 2z - 5s + t = 17, \\ 6x + 5y + 3z - 2s - 9t = 1, \\ 2x + 6y + z - 5s - 10t = 12; \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} 3x + y - 2t = 1, \\ 5x + 2y + 2z - t = 5, \\ x - y - 2t = -5, \\ 5x + y + z - 3t = 0, \\ -7x - 3y + z + 5t = -4, \\ 4x + y - 2z - 5t = -2; \end{cases} & \text{(d)} \quad & \begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5, \\ 2x - 6y - 4s + t = -10, \\ 2z + t = 0, \\ -2x + 6y + 2z + 4s = 10, \\ -2x + 6y + 4z + 4s + t = 10, \\ -x + 3y + z + 2s = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) układ jest sprzeczny; (b) $y = 7/2 + s$, $z = -4 - 2x - s$, $t = 1/2$, gdzie $x, s \in \mathbb{R}$; (c) $x = -1 + t$, $y = 4 - t$, $z = 1 - t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$; (d) $x = -5 + 3y + z + 2s$, $t = -2z$, gdzie $y, z, s \in \mathbb{R}$.

■ **Przykład 4.16.** Dla jakich wartości parametru p układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x + p^2y + z = -p, \\ x + y - pz = p^2, \\ y + z = 1? \end{cases}$$

Określić liczbę rozwiązań układu w pozostałych przypadkach.

Rozwiązanie. Jeżeli dany układ jest układem Cramera, to ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dzieje się tak, o ile

$$\begin{vmatrix} 1 & p^2 & 1 \\ 1 & 1 & -p \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+p) - (p^2 - 1) = (1+p)(2-p) \neq 0,$$

tzn. dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Przypadki $p = -1$ oraz $p = 2$ przeanalizujemy rozwiązując odpowiedni układ równań metodą eliminacji Gaussa – Jordana. Dla $p = -1$ mamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] w_2 = w_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] w_1 - w_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

zatem $x = 0$, $y = 1 - z$, $z \in \mathbb{R}$, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dla $p = 2$ otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] w_2 - w_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] w_2 + 3w_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

W tym przypadku układ nie posiada rozwiązań, bowiem odczytując drugi wiersz ostatniej macierzy w jawnej postaci $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 9$ uzyskaliśmy warunek sprzeczny.

□ **Zadanie 4.16.** Dla jakich wartości parametru p układy równań mają dokładnie jedno rozwiązanie? Określić liczby rozwiązań tych układów w pozostałych przypadkach:

$$(a) \begin{cases} x + py - z = 1, \\ x + 10y - 6z = p, \\ 2x - y + pz = 0; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 4y - 2z = -p, \\ 3x + 5y - pz = 3, \\ px + 3py + z = p. \end{cases}$$

Odpowiedzi. Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań lub też nie posiada rozwiązań odpowiednio dla: (a) $p \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 3\}$, $p = 3$, $p = -5$; (b) $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -7\}$, $p = -1$, $p = -7$.

■ **Przykład 4.17.** W wytwórni montuje się cztery wyroby A, B, C, D z trzech typów detali a, b, c . Wyroby A, B, C, D ważą odpowiednio 60 g, 60 g, 70 g, 90 g. Obliczyć, ile ważą poszczególne detale, jeżeli ich liczba w produkowanych wyrobach podana jest w tabeli:

	A	B	C	D
a	1	2	1	1
b	2	1	1	2
c	2	1	3	4

Rozwiązanie. Niech x, y, z oznaczają odpowiednio wagi w gramach detali a, b, c . Dane, którymi dysponujemy w tym zadaniu prowadzą do układu równań

$$\begin{cases} a + 2b + 2c = 60, \\ 2a + b + c = 60, \\ a + b + 3c = 70, \\ a + 2b + 4c = 90. \end{cases}$$

Wyznaczenie wag poszczególnych detali będzie możliwe, gdy rozważany układ równań będzie miał jednoznaczne rozwiązanie. Stosując metodę eliminacji Gaussa – Jordana otrzymamy

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 2 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & 1 & 3 & 70 \\ 1 & 2 & 4 & 90 \end{array} \right] & \begin{array}{l} w_2 - 2w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - w_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 0 & -3 & -3 & -60 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 30 \end{array} \right] & w_2 - 3w_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 0 & 0 & -6 & -90 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 30 \end{array} \right] & \begin{array}{l} w_2 \sim w_4 \\ w_3 \cdot (-1) \\ w_4 : 2 \end{array} \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array} \right] & \begin{array}{l} w_2 + w_3 \\ w_1 - 2w_2 - 2w_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Zatem detal a waży 20 g, detal b 5 g, a detal c 15 g.

□ **Zadanie 4.17.** Wykonanie pewnego pojemnika wymaga wykonania czterech czynności: narysowania formy, wycięcia, złożenia modelu i jego pomalowania. Liczby poszczególnych czynności w kolejnych dniach pracy pewnego pracownika podaje tabela:

	rysowanie	wycinanie	składanie	malowanie
poniedziałek	30	20	10	5
wtorek	20	15	15	10
środa	40	25	20	20
czwartek	30	20	20	20

Obliczyć czas wykonywania poszczególnych czynności, jeżeli w kolejnych dniach łączny czas pracy wynosił odpowiednio 2 h 10 min, 2 h 15 min, 3 h 55 min, 3 h 30 min.

Odpowiedzi. Czasy potrzebne na narysowanie formy, wycięcie, złożenie modelu i pomalowanie wynoszą odpowiednio 1 minutę, 3 minuty, 2 minuty i 4 minuty.

4.5. Wartości i wektory własne macierzy

■ **Przykład 4.18.** Znaleźć wartości i wektory własne podanych macierzy rzeczywistych:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; & \text{(b)} \quad & \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; & \text{(c)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}; \\ \text{(d)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}; & \text{(e)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}; & \text{(f)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Wartość własna $\lambda \in \mathbb{R}$ rzeczywistej macierzy A stopnia n jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego tej macierzy. Wyznaczamy ją z warunku $\det(A - \lambda I) = 0$. Wektor własny $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ odpowiadający wartości własnej λ jest niezerowym rozwiązaniem jednorodnego układu równań

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Obliczmy najpierw wielomian charakterystyczny macierzy A . Mamy

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Wielomian ten ma dwa rzeczywiste pierwiastki $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, które są wartościami własnymi macierzy A . Wektor własny $v_1 = (x, y)$ odpowiadający wartości własnej λ_1 wyznaczamy z układu równań

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = -2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Stąd $v_1 = (x, -2x)$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Podobnie znajdujemy wektor własny $v_2 = (x, y)$ odpowiadający wartości λ_2 :

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = -x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zatem $v_2 = (x, -x)$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Tutaj

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Liczba $\lambda = 2$ jest jedyną wartością własną (o krotności 2) macierzy A . Rozwiązujemy układ równań

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = x, \quad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

i otrzymujemy wektor własny $v = (x, x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) W tym przykładzie

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Wielomian charakterystyczny nie ma pierwiastków rzeczywistych. To oznacza, że macierz A nie ma rzeczywistych wartości własnych.

(d) Mamy

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(2 - \lambda)(\lambda + 4).$$

Liczby $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ są trzema wartościami własnymi macierzy A . Odpowiadające im wektory własne v_1, v_2, v_3 postaci (x, y, z) znajdziemy rozwiązując poniższe układy równań:

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = -\frac{3}{5}y, z = 6y, y \in \mathbb{R};$$

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = z = 0, x \in \mathbb{R};$$

$$(A - \lambda_3 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = 3y, y \in \mathbb{R}, z = 0.$$

Stąd

$$v_1 = \left(-\frac{3}{5}y, y, 6y\right), v_2 = (x, 0, 0), v_3 = (3y, y, 0),$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(e) Dla podanej macierzy mamy

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ -5 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)(4 - \lambda).$$

Jedynym rzeczywistym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, a więc i jedyną rzeczywistą wartością macierzy A jest liczba $\lambda = 4$. Dla tego λ rozwiązujemy układ równań

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = z = 0, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Otrzymamy wektor własny $v = (0, y, 0)$, gdzie $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f) Wielomian charakterystyczny w_A danej macierzy A ma postać

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 - \lambda & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 - \lambda & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Aby ułatwić sobie obliczenie powyższego wyznacznika od każdego wiersza odejmujemy wiersz ostatni, następnie do ostatniej kolumny dodamy sumę pozostałych. Otrzymamy wtedy

$$w_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & 2 & 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3(10 - \lambda).$$

Macierz A ma więc dwie różne wartości własne $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$, przy czym pierwsza z nich ma krotność 3. Wektory własne v_1, v_2 postaci (x, y, z, t) im odpowiadające znajdziemy z układów równań

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = -2y - 3z - 4t, \quad y, z, t \in \mathbb{R};$$

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = y = z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stąd $v_1 = (-2y - 3z - 4t, y, z, t)$, przy czym parametry y, z, t nie są jednocześnie równe zeru oraz $v_2 = (x, x, x, x)$ dla $x \neq 0$.

□ **Zadanie 4.18.** Znaleźć wartości i wektory własne podanych macierzy rzeczywistych:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \\ \text{(e)} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(g)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(h)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) $\lambda = 3$, $v = (x, -x)$ dla $x \neq 0$; (b) $\lambda_1 = -1$, $v_1 = (x, -3x)$ dla $x \neq 0$, $\lambda_2 = 1$, $v_2 = (x, -x)$ dla $x \neq 0$; (c) brak rzeczywistych wartości własnych; (d) $\lambda_1 = -3$, $v_1 = (x, -7x, 0)$ dla $x \neq 0$, $\lambda_2 = 2$, $v_2 = (2z, z, z)$ dla $z \neq 0$, $\lambda_3 = 4$, $v_3 = (x, 0, 0)$ dla $x \neq 0$; (e) $\lambda_1 = -1$, $v_1 = (x, 0, -2x)$ dla $x \neq 0$, $\lambda_2 = 1$, $v_2 = (x, 0, -x)$ dla $x \neq 0$, $\lambda_3 = 3$, $v_3 = (0, y, 0)$ dla $y \neq 0$; (f) $\lambda = 2$, $v_1 = (x, 2x, 0)$, dla $x \neq 0$, $v_2 = (0, 0, z)$ dla $z \neq 0$; (g) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = (x, x, -x)$ dla $x \neq 0$, $\lambda_2 = 2$, $v_2 = (-x, x, x)$ dla $x \neq 0$, $\lambda_3 = 4$, $v_3 = (x, -x, x)$ dla $x \neq 0$; (h) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = (x, y, z, -x - y - z)$ przy czym parametry x, y, z nie są jednocześnie równe zeru, $\lambda_2 = 7$, $v_2 = (t, 0, 3t/2, t)$ dla $t \neq 0$.

■ **Przykład 4.19.** Wyznaczyć wartości i wektory własne podanych macierzy zespolonych:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 2 & 2-i \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} i-1 & 2 & 1 \\ 0 & 2i & 3 \\ 0 & 0 & i-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Wartość własną $\lambda \in \mathbb{C}$ zespolonej macierzy A stopnia n wyznaczamy z warunku $\det(A - \lambda I) = 0$, zaś odpowiadający jej wektor własny będący niezerowym rozwiązaniem odpowiedniego układu jednorodnego jest tu elementem przestrzeni $\mathbb{C}^n$, tzn. $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

(a) Mamy

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 9 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10.$$

Wielomian charakterystyczny ma dwie wartości własne $\lambda_1 = 1 - 3i$, $\lambda_2 = 1 + 3i$. Znajdziemy teraz wektory własne odpowiadające wartościom własnym λ_1 , λ_2 . Mamy

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3i & -1 \\ 9 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = 3ix, \quad x \in \mathbb{C},$$

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3i & -1 \\ 9 & -3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = -3ix, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Wektory własne v_1 , v_2 , odpowiadające kolejnym wartościom własnym, mają postać $v_1 = (x, 3ix)$, $v_2 = (x, -3ix)$, gdzie $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) W tym przykładzie

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 + i - \lambda & 1 \\ 2 & 2 - i - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Wartości własne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ macierzy A są tu liczbami rzeczywistymi. Rozwiązujemy teraz układ równań

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + i & 1 \\ 2 & 1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = -(1 + i)x, \quad x \in \mathbb{C},$$

$$(A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - i & 1 \\ 2 & -1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff y = (1 - i)x, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Stąd wynika, że $v_1 = (x, -(1 + i)x)$, $v_2 = (x, (1 - i)x)$, gdzie $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) Łatwo sprawdzić, że $\det(A - \lambda I) = 1 - \lambda^3$. Wartościami własnymi macierzy A są zespolone pierwiastki stopnia 3 z jedności, tzn. liczby $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2$, $\lambda_3 = (-1 - i\sqrt{3})/2$. Z odpowiednich układów równań znajdujemy odpowiadające im wektory własne $v_1 = (x, x, x)$, $v_2 = (\lambda_2 z, -\lambda_3 z, z)$, $v_3 = (\lambda_3 z, -\lambda_2 z, z)$, gdzie $x, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(d) Podana macierz jest trójkątna i jej dwie wartości własne $\lambda_1 = i - 1$, $\lambda_1 = 2i$ znajdują się na głównej przekątnej, przy czym λ_1 występuje dwukrotnie. Analiza układu równań

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 + i & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{C}, \\ y = z = 0 \end{cases}$$

prowadzi do wniosku, że $v_1 = (x, 0, 0)$, gdzie $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Podobnie znajdujemy wektor własny v_2 dla wartości własnej λ_2 otrzymując $v_2 = (x, (1 + i)x/2, 0)$, gdzie $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

□ **Zadanie 4.19.** Wyznaczyć wartości i wektory własne podanych macierzy zespolonych:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \\
 & \text{(d)} \begin{bmatrix} 6i & 0 & 0 \\ 4 & 4+2i & 0 \\ i & 1 & 5i \end{bmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{bmatrix} i & i & i \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{bmatrix} -i & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -i \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Odpowiedzi. (a) $\lambda_1 = 1 - 2i$, $v_1 = (2yi, y)$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 + 2i$, $v_2 = \overline{v_1} = (-2yi, y)$ dla $y \neq 0$; (b) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = (x, ix)$, $\lambda_2 = 2$, $v_2 = (x, -ix)$ dla $x \neq 0$; (c) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (0, y, 0)$ dla $y \neq 0$, $\lambda_2 = i$, $v_2 = ((3-i)z, 0, z)$, $\lambda_3 = -i$, $v_3 = ((3+i)z, 0, z)$ dla $z \neq 0$; (d) $\lambda_1 = 5i$, $v_1 = (0, 0, z)$ dla $z \neq 0$, $\lambda_2 = 6i$, $v_2 = ((i-1)y, y, -y)$ dla $y \neq 0$, $\lambda_3 = 4 + 2i$, $v_3 = (0, (4-3i)z, z)$ dla $z \neq 0$; (e) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = (x, y, -x-y)$ przy czym x, y nie są jednocześnie równe zeru, $\lambda_2 = 3 + i$, $v_2 = (iy, y, 2y)$ dla $y \neq 0$; (f) $\lambda_1 = 4$, $v_1 = (0, y, 0)$ dla $y \neq 0$, $\lambda_2 = -3i$, $v_2 = (x, 0, ix)$ dla $x \neq 0$, $\lambda_3 = i$, $v_3 = (iz, 0, z)$ dla $z \neq 0$.

5.

Geometria analityczna w przestrzeni

5.1. Wektory i iloczyn skalarny

■ **Przykład 5.1.** Obliczyć długości wektorów:

- (a) $\mathbf{a} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{5})$; (b) $\overrightarrow{PQ}$, gdzie $P = (1, 2, 3)$, $Q = (4, 6, 15)$.

Rozwiązanie.

- (a) Długość wektora $\mathbf{v} = (x, y, z)$ wyraża się wzorem $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Zatem

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3.$$

- (b) Długość wektora $\overrightarrow{AB}$ łączącego punkty $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ wyraża się wzorem

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Zatem

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2 + (15 - 3)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

□ **Zadanie 5.1.** Obliczyć długości wektorów:

- (a) $\mathbf{a} = (3, -4, 12)$; (b) $\mathbf{b} = (\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{2})$;
 (c) $\mathbf{c} = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, h)$, gdzie $\varrho \geq 0$ oraz $\varphi, h \in \mathbb{R}$;
 (d) $\mathbf{d} = (\varrho \cos \varphi \cos \psi, \varrho \sin \varphi \cos \psi, \varrho \sin \psi)$, gdzie $\varrho \geq 0$ oraz $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$.

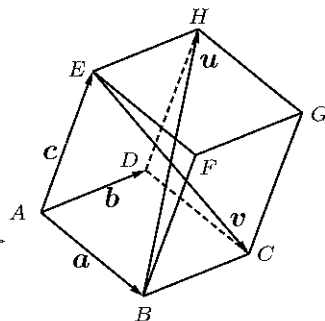
Odpowiedzi. (a) 13; (b) 4; (c) $\sqrt{\varrho^2 + h^2}$; (d) ϱ .

■ **Przykład 5.2.** Równoległoscian jest rozpięty na wektorach $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Wyrazić przekątne równoległoscianu przez wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Rozwiązanie. Niech

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{BH}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{EC}, \quad \mathbf{w} = \overrightarrow{AG} \quad \text{ i } \quad \mathbf{z} = \overrightarrow{DF}$$

oznaczają przekątne równoległoscianu rozpiętego na wektorach $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (rys.).



Aby nie zaciemniać rysunku zaznaczono na nim tylko dwie przekątne u i v . Z faktu, że łamana $ABHEA$ jest zamknięta wynika równość $a + u = c + b$, stąd $u = c + b - a$. Podobnie z faktu, że łamana $ABCEA$ jest zamknięta wynika równość $a + b = c + v$, stąd $v = a + b - c$. Z analogicznych rozważań wynika, że trzecia przekątna w wyraża się wzorem $w = a + b + c$, zaś czwarta $z = a - b + c$.

□ **Zadanie 5.2.** Wektory a , b tworzą dwa sąsiednie boki trójkąta. Wyrazić środkowe tego trójkąta przez wektory a , b .

Odpowiedzi. $(a + b)/2$, $a/2 - b$, $b/2 - a$.

■ **Przykład 5.3.** Obliczyć iloczyny skalarne par wektorów:

$$(a) \ a = (-1, 5, 2), \ b = (3, 0, 7); \quad (b) \ u = i - j + k, \ v = 3i - 2k.$$

Rozwiązanie.

(a) Iloczyn skalarny wektorów $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$ obliczamy ze wzoru

$$a \circ b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Zatem

$$a \circ b = (-1, 5, 2) \circ (3, 0, 7) = (-1) \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 7 = 11.$$

(b) W rozwiązaniu wykorzystamy własności iloczynu skalarnego wektorów oraz fakt, że wersory i , j , k są parami prostopadłe, tzn. spełniają równości: $i \circ j = j \circ k = k \circ i = 0$. Zatem

$$\begin{aligned} u \circ v &= (i - j + k) \circ (3i - 2k) \\ &= 3(i \circ i) - 2(i \circ k) - 3(j \circ i) + 2(j \circ k) + 3(k \circ i) - 2(k \circ k) = 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

Uwaga. Przykład (b) można oczywiście obliczyć tak jak (a) zapisując $u = (1, -1, 1)$, $v = (3, 0, -2)$.

□ **Zadanie 5.3.** Obliczyć iloczyny skalarne par wektorów:

$$(a) \ a = (1, -2, 5), \ b = (3, -1, 0); \quad (b) \ u = 3i - 2k, \ v = -i + 3j + 7k;$$

(c) $x = p + 2q - r$, $y = 3p - q + 2r$, gdzie p , q , r są wersorami parami prostopadłymi.

Odpowiedzi. (a) 5; (b) -17; (c) -1.

■ **Przykład 5.4.** Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miary kątów między:

$$(a) \ \text{wektorami } a = (1, \sqrt{2}, 3), \ b = (0, -\sqrt{2}, 1);$$

(b) wektorem $u = (4, -12, 3)$ i płaszczyzną xOz układu współrzędnych;

(c) przekątnymi ścian prostopadłościanu o krawędziach $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, wychodzącymi z jednego wierzchołka;

(d*) ścianami czworościanu foremnego.

Rozwiązanie. Miara kąta między wektorami niezerowymi $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ wyraża się wzorem

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

(a) Dla wektorów $\mathbf{a} = (1, \sqrt{2}, 3)$ i $\mathbf{b} = (0, -\sqrt{2}, 1)$ mamy

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{(1, \sqrt{2}, 3) \circ (0, -\sqrt{2}, 1)}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \arccos \frac{1}{6}.$$

(b) Zauważmy najpierw, że miara kąta między wektorem i płaszczyzną jest równa mierze kąta między tym wektorem i jego rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę. Rzut prostokątny wektora $\mathbf{u} = (4, -12, 3)$ na płaszczyznę xOz ma postać $\mathbf{u}' = (4, 0, 3)$. Zatem

$$\alpha = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \arccos \frac{(4, -12, 3) \circ (4, 0, 3)}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2}} = \arccos \frac{5}{13}.$$

(c) Sytuację omawianą w zadaniu przedstawiono na rysunku poniżej. Początek układu współrzędnych umieszczono w jednym z wierzchołków prostopadłościanu, a osie pokrywają się z jego krawędziami. Wektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ rozpinające ten prostopadłościan mają wtedy postać:

$$\mathbf{u} = (a, 0, 0) = (5, 0, 0),$$

$$\mathbf{v} = (0, b, 0) = (0, 6, 0),$$

$$\mathbf{w} = (0, 0, c) = (0, 0, 7).$$

Przekątne ścian prostopadłościanu wychodzące z początku układu współrzędnych są reprezentowane przez wektory:

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (5, 6, 0), \quad \mathbf{q} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = (0, 6, 7), \quad \mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = (5, 0, 7).$$

Miary kątów między tymi przekątnymi wyrażają się wzorami:

$$\angle(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \arccos \frac{\mathbf{p} \circ \mathbf{q}}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{q}|} = \arccos \frac{(5, 6, 0) \circ (0, 6, 7)}{\sqrt{5^2 + 6^2} \cdot \sqrt{6^2 + 7^2}} = \arccos \frac{36}{\sqrt{5185}},$$

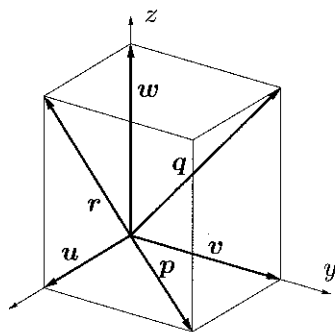
$$\angle(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \arccos \frac{\mathbf{p} \circ \mathbf{r}}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{r}|} = \arccos \frac{(5, 6, 0) \circ (5, 0, 7)}{\sqrt{5^2 + 6^2} \cdot \sqrt{5^2 + 7^2}} = \arccos \frac{25}{\sqrt{4514}},$$

$$\angle(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \arccos \frac{\mathbf{q} \circ \mathbf{r}}{|\mathbf{q}| \cdot |\mathbf{r}|} = \arccos \frac{(0, 6, 7) \circ (5, 0, 7)}{\sqrt{6^2 + 7^2} \cdot \sqrt{5^2 + 7^2}} = \arccos \frac{49}{\sqrt{6290}}.$$

(d*) Niech wersory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ wychodzące z jednego punktu rozpinają czworościan foremny. Ponieważ wersory te tworzą parami kąt $\pi/3$, więc

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \frac{\pi}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Podobnie $\mathbf{u} \circ \mathbf{w} = 1/2$ oraz $\mathbf{w} \circ \mathbf{v} = 1/2$. Niech $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ będą wektorami, które tworzą kąt φ między ścianami czworościanu (rysunek). Wtedy



$$w = \frac{1}{2}u + q \quad \text{oraz} \quad v = \frac{1}{2}u + p.$$

Stąd otrzymamy

$$p = v - \frac{1}{2}u, \quad q = w - \frac{1}{2}u.$$

Wyznamy teraz długość wektora p . Mamy

$$\begin{aligned} |p|^2 &= p \circ p = \left(v - \frac{1}{2}u\right) \circ \left(v - \frac{1}{2}u\right) \\ &= |v|^2 + \frac{1}{4}|u|^2 - u \circ v \\ &= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Oczywiście $|q| = |p|$. Do dalszych obliczeń będzie nam potrzebny iloczyn skalarny $p \circ q$. Mamy

$$\begin{aligned} p \circ q &= \left(v - \frac{1}{2}u\right) \circ \left(w - \frac{1}{2}u\right) = v \circ w - \frac{1}{2}v \circ u - \frac{1}{2}u \circ w + \frac{1}{4}u \circ u \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Przechodzimy do wyznaczenia cosinusa kąta między ścianami. Mamy

$$\cos \varphi = \frac{p \circ q}{|p||q|} = \frac{p \circ q}{|p|^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Zatem $\varphi = \arccos(1/3)$.

□ **Zadanie 5.4.** Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miary kątów między:

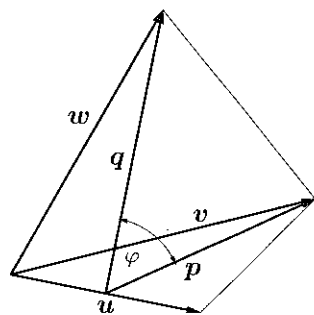
- (a) wektorami $a = (-3, 0, 4)$, $b = (0, 1, -2)$;
- (b) dwusiecznymi kątów utworzonych przez osie Ox , Oy oraz osie Oy , Oz układu $Oxyz$;
- (c) przekątnymi równoległościanu rozpiętego na wektorach $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 0, 2)$, $w = (3, 1, 5)$;
- (d) sąsiednimi ścianami ośmiościanu foremnego.

Odpowiedzi. (a) $\arccos(-8\sqrt{5}/25)$; (b) $\pi/3$; (c) $\varphi_1 = \arccos(20/(3\sqrt{59}))$, $\varphi_2 = \arccos(6\sqrt{7}/\sqrt{295})$, $\varphi_3 = \arccos(13/(3\sqrt{35}))$; (d) $\pi/2$.

5.2. Iloczyn wektorowy i mieszany

■ **Przykład 5.5.** Obliczyć iloczyny wektorowe par wektorów:

- (a) $a = (-1, 3, 2)$, $b = (-1, 2, -5)$; (b) $p = 2j + k$, $q = i - j + 3k$.



Rozwiązanie.

(a) Do obliczenia iloczynu wektorowego wektorów $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ wykorzystamy wzór

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (-1, 3, 2) \times (-1, 2, -5) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} [3 \cdot (-5) - 2 \cdot 2] - \mathbf{j} [(-1) \cdot (-5) - (-1) \cdot 2] + \mathbf{k} [(-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 3] \\ &= -19\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k} = (-19, -7, 1). \end{aligned}$$

(b) W rozwiązaniu wykorzystamy własności iloczynu wektorowego

$$(1) \quad (\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} \pm \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \quad (2) \quad \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \pm \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \pm \mathbf{u} \times \mathbf{w},$$

$$(3) \quad (\alpha \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

oraz równości:

$$(4) \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \times \mathbf{q} &= (2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &\stackrel{(1)}{=} 2\mathbf{j} \times (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &\stackrel{(2)}{=} 2\mathbf{j} \times (\mathbf{i} - \mathbf{j}) + 2\mathbf{j} \times 3\mathbf{k} + \mathbf{k} \times (\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \mathbf{k} \times 3\mathbf{k} \\ &\stackrel{(2)}{=} 2\mathbf{j} \times \mathbf{i} - 2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + 2\mathbf{j} \times 3\mathbf{k} + \mathbf{k} \times \mathbf{i} - \mathbf{k} \times \mathbf{j} + \mathbf{k} \times 3\mathbf{k} \\ &\stackrel{(3)}{=} 2(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) - 2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + 6(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) - (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + 3(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &\stackrel{(4)}{=} -2\mathbf{k} - \mathbf{0} + 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{i} + \mathbf{0} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Uwaga. Iloczyn wektorowy z przykładu (b) można obliczyć sposobem przedstawionym w (a) po zapisaniu $\mathbf{p} = (0, 2, 1)$, $\mathbf{q} = (1, -1, 3)$.

□ **Zadanie 5.5.** Obliczyć iloczyny wektorowe par wektorów:

$$(a) \quad \mathbf{a} = (-3, 2, 0), \quad \mathbf{b} = (1, 5, -2); \quad (b) \quad \mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k};$$

(c) $\mathbf{x} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}$, $\mathbf{y} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q} + 4\mathbf{r}$, gdzie $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ są parami prostopadłymi wersorami o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych.

Odpowiedzi. (a) $(-4, -6, -17)$; (b) $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; (c) $\mathbf{p} - 7\mathbf{q} + 5\mathbf{r}$.

■ **Przykład 5.6.** Obliczyć:

$$(a) \quad \text{pole trójkąta } T \text{ rozpiętego na wektorach } \mathbf{a} = (1, -1, 1), \quad \mathbf{b} = (0, 3, -2);$$

$$(b) \quad \text{pole równoległoboku } R \text{ o wierzchołkach } A = (1, 0, 1), \quad B = (3, -1, 5), \quad C = (-1, 5, 0);$$

$$(c) \quad \text{wysokość trójkąta } T \text{ o wierzchołkach } A = (1, 0, -1), \quad b = (0, 2, 5), \quad c =$$

$(-3, 1, 2)$ opuszczoną z wierzchołka C ;

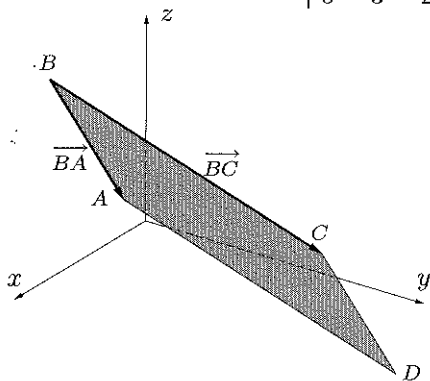
(d) pole powierzchni równoległościanu R rozpiętego na wektorach $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy wzór na pole równoległoboku R rozpiętego na wektorach $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\text{pole}(R) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

(a) Ponieważ pole trójkąta T rozpiętego na wektorach $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jest równe połowie pola równoległoboku rozpiętego na tych wektorach, więc

$$\begin{aligned} \text{pole}(T) &= \frac{1}{2} \text{pole}(R) = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2} |(1, -1, 1) \times (0, 3, -2)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}| = \frac{\sqrt{14}}{2}. \end{aligned}$$



(b) Równoległobok R o wierzchołkach $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, -1, 5)$, $C = (-1, 5, 0)$ jest rozpięty na wektorach:

$$\overrightarrow{BA} = (-2, 1, -4), \quad \overrightarrow{BC} = (-4, 6, -5),$$

zatem jego pole wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \text{pole}(R) &= |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & -4 \\ -4 & 6 & -5 \end{vmatrix} \right| \\ &= |19\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 8\mathbf{k}| \\ &= \sqrt{19^2 + 6^2 + (-8)^2} = \sqrt{461}. \end{aligned}$$

(c) Trójkąt T jest rozpięty na wektorach $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 6)$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = (-4, 1, 3)$, więc korzystając ze wzoru podanego w (a) mamy

$$\begin{aligned} \text{pole}(T) &= \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{2} |(-1, 2, 6) \times (-4, 1, 3)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 6 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-24\mathbf{j} + 7\mathbf{k}| = \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony pole tego trójkąta wyraża się wzorem

$$\text{pole}(T) = \frac{1}{2} \cdot h_C \cdot |AB|,$$

gdzie h_C oznacza wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka C . Ponieważ $|AB| = |(-1, 2, 6)| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{41}$, więc

$$h_C = \frac{2 \cdot \text{pole}(T)}{|AB|} = \frac{25}{\sqrt{41}} = \frac{25}{41} \sqrt{41}.$$

(d) Powierzchnia równoległościanu R rozpiętego na wektorach $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ składa się z dwóch równoległoboków rozpiętych na wektorach $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, z dwóch równoległoboków rozpiętych na wektorach $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ oraz dwóch równoległoboków rozpiętych na wektorach $\mathbf{q}, \mathbf{r}$. Pole tej powierzchni będzie zatem równe

$$\text{pole } (R) = 2(|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| + |\mathbf{p} \times \mathbf{r}| + |\mathbf{q} \times \mathbf{r}|).$$

□ **Zadanie 5.6.** Obliczyć:

- (a) pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, -2, 5)$;
 (b) pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, -1, 3)$, $B = (0, 2, -3)$, $C = (2, 2, 1)$;
 (c) wysokość trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 6, -2)$, $C = (0, 1, 5)$ opuszczoną z wierzchołka C ;
 (d) pole powierzchni czworościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Odpowiedzi. (a) $\sqrt{285}$; (b) $\sqrt{61}$; (c) $\sqrt{14910}/35$;
 (d) $(|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| + |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| + |\mathbf{w} \times \mathbf{u}| + |(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} - \mathbf{v})|)/2$.

■ **Przykład 5.7.** Obliczyć iloczyny mieszane trójek wektorów:

- (a) $\mathbf{a} = (3, -2, 5)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (-2, 2, 1)$;
 (b) $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $2\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, jeżeli $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = 3$.

Rozwiązanie.

- (a) Do obliczenia iloczynu mieszanego wektorów $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{w} = (x_3, y_3, z_3)$ wykorzystamy wzór

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Dla wektorów $\mathbf{a} = (3, -2, 5)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (-2, 2, 1)$ mamy

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 - 3w_2 \\ w_3 + 2w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7.$$

- (b) W rozwiązaniu wykorzystamy następujące własności iloczynu mieszanego

- (1) $(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{r}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{r}) \pm (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{r})$,
 (2) $(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \alpha \mathbf{w}) = \alpha (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$,
 (3) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$, (4) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Mamy

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} + \mathbf{q}, 2\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{r}) &\stackrel{(1)}{=} (\mathbf{p}, 2\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{r}) + (\mathbf{q}, 2\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ &\stackrel{(1)}{=} (\mathbf{p}, 2\mathbf{p}, \mathbf{r}) - (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) + (\mathbf{q}, 2\mathbf{p}, \mathbf{r}) - (\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ &\stackrel{(2)}{=} 2(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \mathbf{r}) - (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) + 2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}) - (\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ &\stackrel{(4)}{=} -(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) + 2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}) \\ &\stackrel{(3)}{=} -(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) - 2(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ &= -3(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = 3 \cdot (-3) = -9. \end{aligned}$$

□ **Zadanie 5.7.** Obliczyć iloczyny mieszane trójek wektorów:

- (a) $\mathbf{a} = (-3, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 1, -5)$, $\mathbf{c} = (2, 3, -4)$;
 (b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

Odpowiedzi. (a) -55 ; (b) 22 .

■ **Przykład 5.8.** Obliczyć:

(a) objętość równoległościanu R o wierzchołkach $A, B, C, D, A', B', C', D'$, gdzie $A = (1, 0, 3)$, $B = (1, 2, 0)$, $D = (3, 0, 4)$, $A' = (0, -1, 3)$;

(b) objętość czworościanu W rozpiętego na wektorach $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{q} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{r} = (-1, 3, -2)$;

(c) wysokość czworościanu W o wierzchołkach $A = (1, -1, 1)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (2, 2, 2)$, $D = (-2, 3, 1)$ opuszczoną z wierzchołka D .

Rozwiązanie.

(a) Objętość równoległościanu R rozpiętego na wektorach $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ wyraża się wzorem

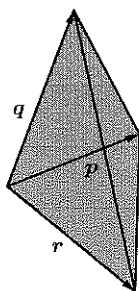
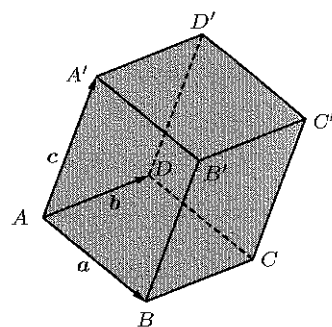
$$\text{objętość}(R) = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

Równoległoscian rozważany w zadaniu jest rozpięty na wektorach

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2, -3), \quad \overrightarrow{AD} = (2, 0, 1), \quad \overrightarrow{AA'} = (-1, -1, 0),$$

zatem jego objętość wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \text{objętość}(R) &= \left| (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) \right| \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right| = 4. \end{aligned}$$



(b) Objętość czworościanu W rozpiętego na wektorach $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ jest równa $1/6$ objętości równoległościanu R rozpiętego na tych wektorach. Zatem wyraża się wzorem

$$\text{objętość}(W) = \frac{1}{6} \text{objętość}(R) = \frac{1}{6} |(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})|.$$

Czworościan rozważany w zadaniu jest rozpięty na wektorach

$$\mathbf{p} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{q} = (1, -1, 0), \quad \mathbf{r} = (-1, 3, -2).$$

Zatem

$$\text{objętość}(W) = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \right| = 1.$$

(c) Do wyznaczenia wysokości h_D czworościanu W opuszczonej z wierzchołka D wykorzystamy wzór

$$\text{objętość}(W) = \frac{1}{3} \text{pole}(T) \cdot h_D,$$

gdzie T jest trójkątem o wierzchołkach A, B, C . Czworościan W jest rozpięty na wektorach $\overrightarrow{AB} = (-1, 3, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 3, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3, 4, 0)$. Objętość tego czworościanu obliczymy korzystając ze wzoru z podpunktu (b). Mamy

$$\text{objętość } (W) = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right| = 3.$$

Z kolei pole trójkąta T wyznaczmy ze wzoru podanego w podpunkcie (a) Przykładu 5.6. Mamy

$$\begin{aligned} \text{pole } (T) &= \frac{1}{2} |(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} |(-1, 3, -1) \times (1, 3, 1)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |6i - 6k| = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Zatem

$$h_D = \frac{3 \text{ objętość } (W)}{\text{pole } (T)} = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

□ **Zadanie 5.8.** Obliczyć:

- (a) objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 5, -1)$;
- (b) objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (2, 3, -1)$, $D = (-1, 3, 5)$;
- (c) wysokość czworościanu o wierzchołkach $P = (0, 0, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $R = (-2, 5, 6)$, $S = (3, -2, 1)$ opuszczoną z wierzchołka S ;
- (d*) objętość równoległościanu o przekątnych $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Odpowiedzi. (a) 9; (b) 2; (c) $\sqrt{2}/2$; (d*) $|(v - w, u - w, u + v)|/8 = |(u, v, w)|/4$.

■ **Przykład 5.9.** Sprawdzić, czy

- (a) wektory $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 4, -1)$, $\mathbf{c} = (2, 2, 3)$ są współpłaszczyznowe;
- (b) punkty $P = (1, 1, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$, $R = (-1, 3, 0)$, $S = (5, 0, -4)$ należą do jednej płaszczyzny.

Rozwiązanie.

W rozwiązaniu wykorzystamy fakt mówiący, że wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

- (a) Dla wektorów $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 4, -1)$, $\mathbf{c} = (2, 2, 3)$ mamy

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ są zatem współpłaszczyznowe.

- (b) Punkty P, Q, R, S należą do jednej płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$, $\vec{PS}$ są współpłaszczyznowe. Dla punktów $P = (1, 1, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$, $R = (-1, 3, 0)$, $S = (5, 0, -4)$, mamy

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{PR} = (-2, 2, -1), \overrightarrow{PS} = (4, -1, -5).$$

Obliczając iloczyn mieszany tych wektorów otrzymamy

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 5.$$

Ponieważ iloczyn jest różny od zera, więc punkty P, Q, R, S nie należą do jednej płaszczyzny.

□ **Zadanie 5.9.** Sprawdzić, czy

(a) wektory $\mathbf{a} = (-1, 3, -5), \mathbf{b} = (1, -1, 1), \mathbf{c} = (4, -2, 0)$ są współpłaszczyznowe;

(b) punkty $P = (0, 0, 0), Q = (-1, 2, 3), R = (2, 3, -4), S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe.

Odpowiedzi. (a) tak; (b) nie.

5.3. Równania płaszczyzny

■ **Przykład 5.10.** Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzny, która spełnia warunki:

(a) przechodzi przez punkt $P = (0, 1, -3)$ i jest prostopadła do wektora $\mathbf{n} = (-2, 3, -5)$;

(b) przechodzi przez punkty $P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (-1, 0, 1), P_3 = (5, 6, 7)$;

(c) przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 1, 0), P_2 = (3, 0, 0)$ i jest prostopadła do płaszczyzny xOy ;

(d) przechodzi przez punkt $P = (0, 1, 0)$ i jest równoległa do wektorów $\mathbf{a} = (-1, 3, 0), \mathbf{b} = (3, 1, -5)$;

(e) przechodzi przez punkt $P = (-1, 4, 1)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi_1 : x - y + 6z - 12 = 0$;

(f) przechodzi przez punkt $P = (2, 3, -6)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0, \pi_2 : x - y + 2 = 0$;

(g) zawiera prostą $l : x = 1 - t, y = 2 + 3t, z = 4 - 2t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : x + 2y + 3z - 12 = 0$;

(h*) jest dwusieczną kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny $\pi_1 : x - y + z = 0; \pi_2 : 5x + y - z + 24 = 0$.

Rozwiązanie. W rozwiązaniu wykorzystamy następujące fakty:

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_0$ i prostopadłej do wektora $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ma postać

$$\pi : (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \circ \mathbf{n} = 0,$$

gdzie $\mathbf{r} = (x, y, z)$ jest promieniem wodzącym punktu tej płaszczyzny. Wektor $\mathbf{n}$ nazywamy wektorem normalnym tej płaszczyzny. W formie rozwiniętej równanie płaszczyzny π przyjmuje postać

$$\pi: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Powyższe zależności nazywamy równaniami normalnymi płaszczyzny.

Z kolei równanie postaci

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $|A| + |B| + |C| > 0$ nazywamy równaniem ogólnym płaszczyzny. Płaszczyzna ta ma wektor normalny $\mathbf{n} = (A, B, C)$.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_0$ i rozpiętej na niewspółliniowych wektorach $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ ma postać

$$\pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

gdzie $\mathbf{r} = (x, y, z)$ jest promieniem wodzącym punktu tej płaszczyzny. Po rozpisaniu na współrzędne równanie to przyjmuje postać

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + a_1s + a_2t, \\ y = y_0 + b_1s + b_2t, \\ z = z_0 + c_1s + c_2t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Powyższe zależności nazywamy równaniami parametrycznymi płaszczyzny π .

(a) Równanie normalne płaszczyzny π rozważanej w zadaniu ma postać

$$\pi: (x - 0, y - 1, z + 3) \circ (-2, 3, -5) = 0,$$

stąd otrzymamy równanie ogólne

$$-2x + 3y - 5z - 18 = 0.$$

W równaniu parametrycznym płaszczyzny występują dwa niewspółliniowe wektory rozpinające tę płaszczyznę. Wektory te są prostopadłe do wektora normalnego $\mathbf{n}$. Takimi niewspółliniowymi wektorami są np. $\mathbf{u} = (3, 2, 0)$ oraz $\mathbf{v} = (0, 5, 3)$. Rzeczywiście, mamy $\mathbf{u} \circ \mathbf{n} = 0$ oraz $\mathbf{v} \circ \mathbf{n} = 0$. Równanie parametryczne płaszczyzny π (w postaci wektorowej) ma zatem postać

$$\pi: (x, y, z) = (0, 1, -3) + s(3, 2, 0) + t(0, 5, 3) \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

stąd otrzymamy

$$\pi: \begin{cases} x = 3s, \\ y = 1 + 2s + 5t, \\ z = -3 + 3t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

(b) Płaszczyzna π przechodząca przez punkty $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (-1, 0, 1)$, $P_3 = (5, 6, 7)$ jest równoległa do wektorów $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -1, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (4, 5, 6)$. Wektor normalny $\mathbf{n}$ tej płaszczyzny ma zatem postać

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-2, -1, 0) \times (4, 5, 6) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

Wektor normalny $\mathbf{n}$ można skrócić np. do wektora $(1, -2, 1)$. Równanie normalne płaszczyzny π ma więc postać

$$\pi: (x - 1, y - 1, z - 1) \circ (1, -2, 1) = 0,$$

stąd równanie ogólne dane jest wzorem

$$\pi: x - 2y + z = 0.$$

Przechodzimy teraz do równania parametrycznego płaszczyzny π . Płaszczyzna ta

przechodzi przez punkt $P_1 = (1, 1, 1)$ i jest rozpięta na wektorach $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -1, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (4, 5, 6)$, zatem

$$\pi : (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(-2, -1, 0) + t(4, 5, 6) \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

stąd otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2s + 4t, \\ y = 1 - s + 5t, \\ z = 1 + 6t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

(c) Ponieważ płaszczyzna π rozważana w zadaniu jest prostopadła do płaszczyzny xOy , więc jest równoległa do osi Oz . Jest zatem równoległa np. do wektora $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$. Ponadto płaszczyzna π jest równoległa do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -1, 0)$. Wektor normalny tej płaszczyzny wyraża się zatem wzorem

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

Równanie normalne płaszczyzny π ma postać

$$\pi : (x - 0, y - 1, z - 0) \circ (1, 3, 0) = 0,$$

stąd równanie ogólne dane jest wzorem

$$\pi : x + 3y - 3 = 0.$$

Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P_1 = (0, 1, 0)$ oraz jest równoległa do wektorów $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -1, 0)$, więc jej równanie parametryczne ma postać

$$\pi : (x, y, z) = (0, 1, 0) + s(0, 0, 1) + t(3, -1, 0) \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

stąd

$$\pi : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = s \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

(d) Wektor normalny płaszczyzny π rozważanej w zadaniu ma postać

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-1, 3, 0) \times (3, 1, -5) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 10\mathbf{k}.$$

Dla uproszczenia dalszych obliczeń wektor normalny można skrócić np. do wektora $\mathbf{n} = (3, 1, 2)$. Równanie normalne płaszczyzny π ma postać

$$\pi : (x - 0, y - 1, z - 0) \circ (3, 1, 2) = 0,$$

stąd równanie ogólne dane jest wzorem

$$\pi : 3x + y + 2z - 1 = 0.$$

Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P = (0, 1, 0)$ i jest równoległa do wektorów $\mathbf{a} = (-1, 3, 0)$, $\mathbf{b} = (3, 1, -5)$, więc jej równanie parametryczne przyjmuje postać

$$\pi : (x, y, z) = (0, 1, 0) + s(-1, 3, 0) + t(3, 1, -5) \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = -s + 3t, \\ y = 1 + 3s + t, \\ z = -5t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

(e) Ponieważ płaszczyzna π rozważana w zadaniu jest równoległa do płaszczyzny $\pi_1 : x - y + 6z - 12 = 0$, więc jej wektor normalny $\mathbf{n}$ jest taki sam jak wektor normalny płaszczyzny π_1 . Zatem $\mathbf{n} = (1, -1, 6)$. Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P = (-1, 4, 1)$ i ma wektor normalny $\mathbf{n} = (1, -1, 6)$, więc jej równanie normalne ma postać

$$\pi : (x + 1, y - 4, z - 1) \circ (1, -1, 6) = 0,$$

stąd rozwiązanie ogólne dane jest wzorem

$$\pi : x - y + 6z - 1 = 0.$$

Znajdziemy teraz dwa niewspółliniowe wektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, które są równoległe do szukanej płaszczyzny π . Ponieważ płaszczyzny π_1 i π są równoległe, więc wektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ muszą być prostopadłe do wektora normalnego płaszczyzny π_1 , tj. do wektora $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 6)$. Takimi wektorami są np. $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ oraz $\mathbf{v} = (0, 6, 1)$. Rzeczywiście mamy $\mathbf{u} \circ \mathbf{n}_1 = 0$ oraz $\mathbf{v} \circ \mathbf{n}_1 = 0$. Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P = (-1, 4, 1)$ oraz jest równoległa do wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, więc jej równanie parametryczne (wektorowe) ma postać

$$\pi : (x, y, z) = (-1, 4, 1) + s(1, 1, 0) + t(0, 6, 1) \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s, \\ y = 4 + s + 6t, \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

(f) Ponieważ szukana płaszczyzna π ma być prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : x - y + 2 = 0$, więc jej wektor normalny $\mathbf{n}$ powinien być prostopadły do wektora normalnego $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$ płaszczyzny π_1 oraz do wektora normalnego $\mathbf{n}_2 = (1, -1, 0)$ płaszczyzny π_2 . Wektor prostopadły do wektorów $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ ma postać

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, 1, 1) \times (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P = (2, 3, -6)$ i ma wektor normalny $\mathbf{n} = (1, 1, -2)$, więc jej równanie normalne ma postać

$$\pi : (x - 2, y - 3, z + 6) \circ (1, 1, -2) = 0,$$

stąd równanie ogólne dane jest wzorem

$$\pi : x + y - 2z - 17 = 0.$$

Znajdziemy teraz dwa niewspółliniowe wektory $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, które rozpinają szukaną płaszczyznę π . Wektory $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ muszą być prostopadłe do wektora normalnego $\mathbf{n} = (1, 1, -2)$ tej płaszczyzny. Takimi niewspółliniowymi wektorami są np. $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$ oraz $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$. Rzeczywiście $\mathbf{u} \circ \mathbf{n} = 0$ oraz $\mathbf{v} \circ \mathbf{n} = 0$. Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P = (2, 3, -6)$ i jest rozpięta przez wektory $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$ oraz $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$, więc jej równanie parametryczne (wektorowe) ma postać

$$\pi : (x, y, z) = (2, 3, -6) + s(1, -1, 0) + t(0, 2, 1) \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

stąd otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + s, \\ y = 3 - s + 2t, \\ z = -6 + t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

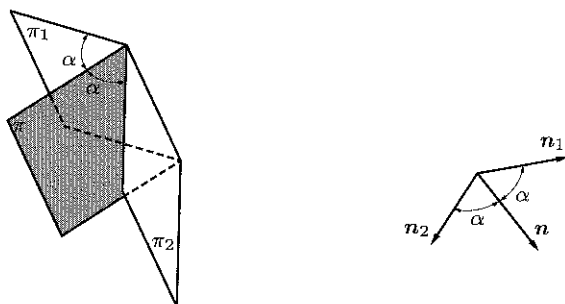
(g) Podamy równanie parametryczne szukanej płaszczyzny. Jednym z wektorów rozpinających tę płaszczyznę jest wektor kierunkowy prostej l . Zatem $u = (-1, 3, -2)$. Drugim wektorem rozpinającym tę płaszczyznę jest wektor normalny płaszczyzny π . Zatem $v = (1, 2, 3)$. Potrzebny jest jeszcze punkt P_0 , przez który przechodzi szukana płaszczyzna. Można za niego przyjąć miejsce przecięcia prostej l i płaszczyzny π , czyli $P_0 = l \cap \pi$. Zatem rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 4 - 2t, \\ x + 2y + 3z - 12 = 0, \end{cases}$$

otrzymamy $P_0 = (-4, 17, -6)$. Równanie parametryczne szukanej płaszczyzny ma postać

$$\begin{cases} x = -4 - s + t, \\ y = 17 + 3s + 2t, \\ z = -6 - 2s + 3t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

(h*) Niech n_1 i n_2 oznaczają wektory normalne odpowiednio płaszczyzn π_1 i π_2 (rys.). Zatem $n_1 = (1, -1, 1)$ oraz $n_2 = (5, 1, -1)$. Ponieważ płaszczyzna dwusieczna kąta dwusiecznego utworzonego przez płaszczyzny π_1 i π_2 (oznaczona na rysunku przez π), tworzy jednakowe kąty dwusieczne z płaszczyznami π_1 i π_2 , więc wektor normalny n tej płaszczyzny jest dwusieczną kąta utworzonego przez wektory normalne n_1 i n_2 .



Jeżeli a_1, a_2 są wersorami, to wektor postaci $v = a_1 + a_2$ leży w płaszczyźnie przez nie wyznaczonej i tworzy z nimi jednakowe kąty. Zatem wektor normalny n płaszczyzny π wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} n &= \frac{n_1}{|n_1|} + \frac{n_2}{|n_2|} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} + \frac{(5, 1, -1)}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(5, 1, -1) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(8, -2, 2). \end{aligned}$$

Dla uproszczenia dalszych obliczeń skracamy wektor normalny np. do postaci $n = (4, -1, 1)$. Znajdziemy teraz punkt należący do płaszczyzn π_1 i π_2 . Przyjmując np. $y = 0$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ 5x - z = -24. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para $x = -4, z = 4$. Zatem $P = (-4, 0, 4)$ jest

punktem wspólnym płaszczyzn π_1 i π_2 . Ponieważ płaszczyzna dwusieczna przechodzi przez punkt P i ma wektor normalny $\mathbf{n}$, zatem jej równanie normalne ma postać

$$\pi : (x + 4, y - 0, z - 4) \circ (4, -1, 1) = 0,$$

stąd równanie ogólne dane jest wzorem

$$\pi : 4x - y + z - 12 = 0.$$

Uwaga. Istnieje jeszcze druga płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny π_1 i π_2 . Wektor normalny tej płaszczyzny wyraża się wzorem:

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_1|} - \frac{\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-2, -2, 2).$$

Równanie drugiej płaszczyzny dwusiecznej ma zatem postać

$$\pi' : (x + 4, y - 0, z - 4) \circ (1, 1, -1) = 0,$$

stąd

$$\pi' : x + y - z + 8 = 0.$$

Znalezienie równań parametrycznych płaszczyzn π i π' zostawiamy Czytelnikowi.

□ **Zadanie 5.10.** Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzny, która spełnia warunki:

- (a) przechodzi przez punkt $P = (1, -2, 0)$ i jest prostopadła do wektora $\mathbf{n} = (0, -3, 2)$;
- (b) przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 2, 3)$, $P_3 = (-1, -3, 5)$;
- (c) przechodzi przez punkty $P_1 = (1, -3, 4)$, $P_2 = (2, 0, -1)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny xOz ;
- (d) przechodzi przez punkt $P = (1, -1, 3)$ oraz jest równoległa do wektorów $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$;
- (e) przechodzi przez punkt $P = (0, 3, 0)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2 = 0$;
- (f) przechodzi przez punkt $P = (2, 1, -3)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y = 0$, $\pi_2 : y - z = 0$.

Odpowiedzi. (a) $3y - 2z + 6 = 0$, $(x, y, z) = (1, -2, 0) + s(1, 0, 0) + t(0, 2, 3)$ ($s, t \in \mathbb{R}$);
 (b) $19x - 8y - z = 0$, $(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(1, 2, 3) + t(-1, -3, 5)$ ($s, t \in \mathbb{R}$);
 (c) $5x + z - 9 = 0$, $(x, y, z) = (1, -3, 4) + s(0, 1, 0) + t(1, 3, -5)$ ($s, t \in \mathbb{R}$); (d) $x - y + z - 5 = 0$, $(x, y, z) = (1, -1, 3) + s(1, 1, 0) + t(0, 1, 1)$ ($s, t \in \mathbb{R}$); (e) $3x - y + 3 = 0$, $(x, y, z) = (0, 3, 0) + s(0, 0, 1) + t(1, 3, 0)$ ($s, t \in \mathbb{R}$); (f) $-x + y + z + 4 = 0$, $(x, y, z) = (2, 1, -3) + s(1, 1, 0) + t(0, 1, -1)$ ($s, t \in \mathbb{R}$).

5.4. Równania prostej

■ **Przykład 5.11.** Napisać równania parametryczne i krawędziowe prostej, która spełnia warunki:

- (a) przechodzi przez punkt $P = (1, 0, 2)$ i jest równoległa do wektora $\mathbf{v} =$

$(0, 5, -3)$;

(b) przechodzi przez punkty $P_1 = (-1, 1, 0)$, $P_2 = (0, 3, -2)$;

(c) przechodzi przez punkt $P = (1, -5, 3)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny $\pi: x - 3z + 7 = 0$;

(d) przechodzi przez punkt $P = (0, 0, -2)$ i jest prostopadła do wektorów $\mathbf{a} = (0, 1, -5)$ i $\mathbf{b} = (-2, 3, 0)$;

(e) jest dwusieczną kąta utworzonego przez przecinające się proste

$$l_1: \begin{cases} x = -t, \\ y = 2t, \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad l_2: \begin{cases} x = -2 + s, \\ y = 4 - 3s, \\ z = 6 + 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R});$$

(f) jest częścią wspólną płaszczyzny $\pi_1: x + 2z - 4 = 0$ i płaszczyzny $\pi_2: x - y + 6 = 0$; (g) przecina proste skośne (sprawdzić to) $l_1: x = 2 - 2t, y = 3 + t, z = -3 + t$ ($t \in \mathbb{R}$), $l_2: x = 4 + s, y = 3 - 3s, z = 1 - s$ ($s \in \mathbb{R}$), oraz jest do nich prostopadła;

(h) jest zawarta w płaszczyźnie $\pi: x - y - z - 3 = 0$ i prostopadła do prostej

$$l: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

oraz przechodzi przez punkt wspólny płaszczyzny π i prostej l .

Rozwiązanie. Równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_0$, równoległej do niezerowego wektora $\mathbf{v} = (a, b, c)$ ma postać

$$l: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

gdzie $\mathbf{r} = (x, y, z)$ jest promieniem wodzącym punktu tej prostej. Po rozpisaniu na współrzędne powyższe równanie przyjmuje postać

$$l: \begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Równanie krawędziowe prostej ma postać

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

przy czym wektory (A_1, B_1, C_1) , (A_2, B_2, C_2) nie mogą być równoległe.

(a) Równanie parametryczne (wektorowe) prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (1, 0, 2)$ i równoległej do wektora $\mathbf{v} = (0, 5, -3)$ ma postać

$$l: (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(0, 5, -3) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Po rozpisaniu tej równości na współrzędne otrzymamy

$$l: \begin{cases} x = 1, \\ y = 5t, \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Przechodzimy do wyznaczenia równania krawędziowego prostej. Jako równanie pierw-

szej płaszczyzny przyjmujemy $x = 1$. Po wyeliminowaniu parametru t z dwóch pozostałych równań parametrycznych otrzymamy równanie drugiej płaszczyzny $3y + 5z = 10$. Zatem równanie krawędziowe prostej l ma postać

$$l: \begin{cases} x - 1 = 0, \\ 3y + 5z - 10 = 0. \end{cases}$$

(b) Ponieważ szukana prosta l przechodzi przez punkty $P_1 = (-1, 1, 0)$, $P_2 = (0, 3, -2)$, więc jest równoległa do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 2, -2)$. Równanie parametryczne (wektorowe) tej prostej ma zatem postać

$$l: (x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(1, 2, -2) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$l: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Rugując parametr t z pierwszego i drugiego równania otrzymamy $y = 3 + 2x$. Podobnie, z drugiego i trzeciego otrzymamy $y = 1 - z$. Zatem równanie krawędziowe prostej l ma postać

$$l: \begin{cases} -2x + y - 3 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

(c) Ponieważ prosta l rozważana w zadaniu jest prostopadła do płaszczyzny $\pi: x - 3z + 7 = 0$, więc jest równoległa do wektora normalnego tej płaszczyzny, tj. do wektora $\mathbf{n} = (1, 0, -3)$. Równanie parametryczne (wektorowe) prostej przechodzącej przez punkt $P = (1, -5, 3)$ i równoległej do wektora $\mathbf{n} = (1, 0, -3)$ ma zatem postać

$$l: (x, y, z) = (1, -5, 3) + t(1, 0, -3) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$l: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -5, \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Postępując podobnie jak w przykładzie (a) i (b) otrzymamy równanie krawędziowe prostej

$$l: \begin{cases} y + 5 = 0, \\ 3x + z - 6 = 0. \end{cases}$$

(d) Ponieważ szukana prosta l jest prostopadła do wektorów $\mathbf{a} = (0, 1, -5)$, $\mathbf{b} = (-2, 3, 0)$, więc jest równoległa do wektora $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Mamy

$$\mathbf{v} = (0, 1, -5) \times (-2, 3, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Prosta l przechodzi przez punkt $P = (0, 0, -2)$ i jest równoległa do wektora $\mathbf{v} = (15, 10, 2)$, więc jej równanie parametryczne (wektorowe) ma postać

$$l: (x, y, z) = (0, 0, -2) + t(15, 10, 2) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$l: \begin{cases} x = 15t, \\ y = 10t, \\ z = -2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Postępując podobnie jak w przykładzie (a) i (b) otrzymamy równanie krawędziowe prostej

$$l: \begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ y - 5z - 10 = 0. \end{cases}$$

(e) Wektory kierunkowe v_1, v_2 odpowiednio prostych l_1, l_2 mają postać $v_1 = (-1, 2, 3)$, $v_2 = (1, -3, 2)$. Ponieważ szukana prosta l ma być dwusieczną kąta utworzonego przez proste l_1, l_2 , więc jej wektor kierunkowy v powinien być dwusieczną kąta utworzonego przez wektory v_1 i v_2 lub v_1 i $-v_2$. Wiadomo (patrz Przykład 5.10. (h*)), że wektor v leżący w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory niezerowe u, w oraz tworzący z nimi jednakowe kąty ma postać

$$v = \frac{u}{|u|} + \frac{w}{|w|}.$$

Zatem wektor kierunkowy v dwusiecznej l ma postać

$$v = \frac{(-1, 2, 3)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} + \frac{(1, -3, 2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(0, -1, 5),$$

a wektor kierunkowy v' drugiej dwusiecznej l' ma postać

$$v' = \frac{(-1, 2, 3)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} - \frac{(1, -3, 2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 5, 1).$$

Znajdziemy teraz punkt $P = (x, y, z)$ przecięcia prostych l_1 i l_2 . Współrzędne tego punktu spełniają układ równań

$$\begin{cases} x = -t = -2 + s, \\ y = 2t = 4 - 3s, \\ z = 3t = 6 + 2s. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy $x = -2, y = 4, z = 6, s = 0, t = 2$. Zatem $P = (-2, 4, 6)$. Możemy więc napisać równania szukanych dwusiecznych. Przyjmując dla uproszczenia obliczeń, że wektory kierunkowe tych dwusiecznych mają postać $v = (0, -1, 5)$ oraz $v' = (-2, 5, 1)$ otrzymamy

$$l: \begin{cases} x = -2, \\ y = 4 - t, \\ z = 6 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{oraz} \quad l': \begin{cases} x = -2 - 2t, \\ y = 4 + 5t, \\ z = 6 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(f) Niech n_1 oraz n_2 oznaczają odpowiednio wektory normalne płaszczyzn $\pi_1: x + 2z - 4 = 0$ oraz $\pi_2: x - y + 6 = 0$. Wtedy $n_1 = (1, 0, 2)$ oraz $n_2 = (1, -1, 0)$. Wektor kierunkowy v szukanej prostej l jest prostopadły do wektorów n_1 i n_2 , a zatem można przyjąć, że ma postać

$$v = n_1 \times n_2 = (1, 0, 2) \times (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2i + 2j - k.$$

Potrzebny jest jeszcze dowolny punkt P należący do prostej l . Punkt ten wyznaczymy z układu równań

$$\begin{cases} x + 2z = 4, \\ x - y = -6. \end{cases}$$

Przyjmując np. $x = 0$, otrzymamy $y = 6$ oraz $z = 2$. Zatem $P = (0, 6, 2)$. Równanie parametryczne prostej l ma więc postać

$$l: \begin{cases} x = 2t, \\ y = 6 + 2t, \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy równanie krawędziowe tej prostej:

$$l: \begin{cases} x - y + 6 = 0, \\ y + 2z - 10 = 0. \end{cases}$$

(g) Proste l_1, l_2 nie są równoległe, bo ich wektory kierunkowe $v_1 = (-2, 1, 1)$, $v_2 = (1, -3, -1)$ nie są równoległe. Ponadto, proste te nie mają punktów wspólnych, a zatem są skośne. Przechodzimy do wyznaczenia równania szukanej prostej. W tym celu na prostych l_1 i l_2 znajdziemy odpowiednio punkty A i B tak, aby wektor $\overrightarrow{AB}$ był prostopadły do każdej z nich. Niech $A = (2 - 2t, 3 + t, -3 + t)$ ($t \in \mathbb{R}$) oraz $B = (4 + s, 3 - 3s, 1 - s)$ ($s \in \mathbb{R}$). Wtedy

$$\overrightarrow{AB} = (2 + 2t + s, -3s - t, 4 - s - t).$$

Aby wektor $\overrightarrow{AB}$ był prostopadły do prostej l_1 i l_2 , musi być prostopadły do wektorów kierunkowych v_1, v_2 tych prostych. Korzystając z faktu, że wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy 0, otrzymamy warunki $\overrightarrow{AB} \circ v_1 = 0$, $\overrightarrow{AB} \circ v_2 = 0$. Po wstawieniu danych dostaniemy układ równań

$$\begin{cases} (2 + 2t + s, -3s - t, 4 - s - t) \circ (-2, 1, 1) = 0, \\ (2 + 2t + s, -3s - t, 4 - s - t) \circ (1, -3, -1) = 0. \end{cases}$$

Po uproszczeniu układ przyjmie postać

$$\begin{cases} s + t = 0, \\ 11s + 6t = 2. \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest para $(s, t) = (2/5, -2/5)$. Stąd $A = (14/5, 13/5, -17/5)$, $B = (22/5, -2/5, 3/5)$, a zatem $\overrightarrow{AB} = (8/5, -3, 4)$. Równanie szukanej prostej ma więc postać

$$l: x = \frac{14}{5} + \frac{8}{5}t, y = \frac{13}{5} - 3t, z = -\frac{17}{5} + 4t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Znalezienie równania krawędziowego prostej l zostawiamy Czytelnikowi.

(h) Najpierw znajdziemy wektor kierunkowy v prostej l . Ma on postać $v = n_1 \times n_2$, gdzie $n_1 = (1, 1, 1)$, $n_2 = (2, -1, -3)$ są wektorami normalnymi płaszczyzn w równaniu krawędziowym prostej. Mamy

$$v = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2i + 5j - 3k = (-2, 5, -3).$$

Wektor kierunkowy v^* szukanej prostej l^* jest prostopadły do wektora kierunkowego $v = (-2, 5, -3)$ prostej l oraz do wektora normalnego $n = (1, -1, -1)$ płaszczyzny π . Mamy zatem

$$v^* = v \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -8i - 5j - 3k = (-8, -5, -3).$$

Potrzebne są nam jeszcze współrzędne punktu P , przez który przechodzi szukana płaszczyzna. Ponieważ punkt P należy jednocześnie do płaszczyzny π oraz do prostej l , więc jego współrzędne spełniają układ równań

$$\begin{cases} x - y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka $(x, y, z) = (2, -6, 5)$. Zatem $P = (2, -6, 5)$. Przechodzimy do napisania równania parametrycznego szukanej prostej. Mamy

$$l^* : \begin{cases} x = 2 - 8t, \\ y = -6 - 5t, \\ z = 5 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Znalezienie równania krawędziowego prostej l^* zostawiamy Czytelnikowi.

□ **Zadanie 5.11.** Napisać równania parametryczne i krawędziowe prostej, która spełnia warunki:

- (a) przechodzi przez punkt $P = (-3, 5, 2)$ i jest równoległa do wektora $v = (2, -1, 3)$;
- (b) przechodzi przez punkty $P_1 = (1, 0, 6)$, $P_2 = (-2, 2, 4)$;
- (c) przechodzi przez punkt $P = (0, -2, 3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2z - 6 = 0$;
- (d) przechodzi punkt $P = (7, 2, 0)$ i jest prostopadła o wektorów $v_1 = (2, 0, -3)$, $v_2 = (-1, 2, 0)$;
- (e) jest dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste $l_1 : x = -2 + 3t, y = 4 - t, z = 5t$, $l_2 : x = -2 + s, y = 4 - 5s, z = 3s$ ($t, s \in \mathbb{R}$);
- (f*) jest dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad l_2 : \begin{cases} x = -6 + 4s, \\ y = 1 - 3s, \\ z = -29 - 12s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R});$$

(g) przecina proste skośne (sprawdzić to) $l_1 : x = 1, y = 2 - t, z = 3 + t$ ($t \in \mathbb{R}$), $l_2 : x = 2 + s, y = 3 - 2s, z = 4 - s$ ($s \in \mathbb{R}$), oraz jest do nich prostopadła;

(h) jest zawarta w płaszczyźnie $\pi : x = 1 - s + 2t, y = -1 + 2s + t, z = 1 - s + 2t$ ($s, t \in \mathbb{R}$), i prostopadła do prostej $l_1 : x = 1 - 2p, y = 2 + p, z = 5 + 3p$ ($p \in \mathbb{R}$), oraz przechodzi przez punkt przecięcia prostej l i płaszczyzny π .

Odpowiedzi. (a) $l : x = -3 + 2t, y = 5 - t, z = 2 + 3t$ ($t \in \mathbb{R}$), $l : \begin{cases} x + 2y - 7 = 0, \\ 3y + z - 17 = 0; \end{cases}$

(b) $l : x = 1 - 3t, y = 2t, z = 6 - 2t$ ($t \in \mathbb{R}$), $l : \begin{cases} 2x + 3y - 2 = 0, \\ y + z - 6 = 0; \end{cases}$

$$(c) l : x = 3t, y = -2 - t, z = 3 + 2t \ (t \in \mathbb{R}), l : \begin{cases} x + 3y + 6 = 0, \\ 2y + z + 1 = 0; \end{cases}$$

$$(d) l : x = 7 + 6t, y = 2 + 3t, z = 4t \ (t \in \mathbb{R}), l : \begin{cases} x - 2y - 3 = 0, \\ 4y - 3z - 8 = 0; \end{cases}$$

$$(e) l : x = -2 + 2t, y = 4 - 3t, z = 4t \ (t \in \mathbb{R}), l : \begin{cases} 3x + 2y + 2 = 0, \\ 4y + 3z - 16 = 0; \end{cases}$$

$$(f^*) l : x = 1 + 7t, y = -1 - 2t, z = 2 + 31t \ (t \in \mathbb{R}), l : \begin{cases} 2x + 7y + 5 = 0, \\ 31y + 2z + 27 = 0; \end{cases}$$

$$(g) l : x = 1 + 3t, y = 20/11 + t, z = 35/11 + t \ (t \in \mathbb{R}), l : \begin{cases} 11x - 33y + 49 = 0, \\ 11y - 11z + 15 = 0; \end{cases}$$

$$(h) l : x = 13/15 + t, y = 6/5 - t, z = 13/5 + t \ (t \in \mathbb{R}), l : \begin{cases} 5x + 5y - 18 = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

5.5. Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn

■ **Przykład 5.12.** Zbadać, czy

(a) punkty $A = (1, -2, 5)$, $B = (3, -2, 11)$, $C = (1, -2, 1)$ należą do prostej
 $l : x = 1 - t, y = -2, z = 5 - 3t \ (t \in \mathbb{R});$

(b) prosta

$$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2t, \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

jest zawarta w płaszczyźnie $\pi : 3x + 3y + z - 6 = 0$;

(c) punkty $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, -1, 3)$ należą do płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s - t, \\ y = -3 - s + 2t, \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R});$$

(d) proste

$$l_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : \begin{cases} x = -1 + s, \\ y = 2 - s, \\ z = -3 + 4s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}),$$

mają punkt wspólny;

(e) prosta $l : x = -5 - 2t, y = t, z = 3 - t \ (t \in \mathbb{R})$, jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y - z + 15 = 0$;

(f) płaszczyzny

$$\pi_1 : 2x + 3y - 5z + 30 = 0, \quad \pi_2 : \begin{cases} x = -5 + t, \\ y = 2 + 5s + t, \\ z = 1 + 3s + t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

są równoległe;

(g) równania

$$\pi_1 : \begin{cases} x = -2 + s - t, \\ y = 4 - 2s + 3t, \\ z = 6 - s, \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + s, \\ y = -2 - s + t, \\ z = 3 - 2s - t, \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

przedstawiają tę samą płaszczyznę.

(h) równania krawędziowe

$$l_1 : \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0; \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 4x - y + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

przedstawiają tę samą prostą.

Rozwiązanie.

(a) Podstawiając współrzędne punktu $A = (1, -2, 5)$ do równania parametrycznego prostej

$$l : x = 1 - t, y = -2, z = 5 - 3t \quad (t \in \mathbb{R})$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 1 - t = 1, \\ -2 = -2, \\ 5 - 3t = 5. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $t = 0$. To oznacza, że punkt A należy do prostej l . Postępując podobnie z punktem B otrzymamy rozwiązanie $t = -2$, czyli punkt B także należy do prostej l . Natomiast dla punktu C otrzymamy sprzeczny układ równań. To oznacza, że nie należy on do prostej l .

(b) Podstawiając przedstawienia parametryczne współrzędnych prostej

$$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2t, \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

do równania płaszczyzny $\pi : 3x + 3y + z - 6 = 0$ otrzymamy, że równość

$$3(1 + t) + 3(-2t) + (3 + 3t) - 6 = 0$$

jest prawdziwa dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że prosta l jest zawarta w płaszczyźnie π .

(c) Podstawiając współrzędne punktu $A = (0, 0, 0)$ do równania parametrycznego płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s - t, \\ y = -3 - s + 2t, \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} s - t = -1, \\ s - 2t = -3, \\ 2t = 4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $s = 1, t = 2$. Oznacza to, że punkt A należy do płaszczyzny π . Postępując podobnie z punktem B , otrzymamy sprzeczny układ

równań. Oznacza to, że punkt B nie należy do płaszczyzny π .

(d) Aby sprawdzić, czy proste l_1 i l_2 mają punkt wspólny rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} t = -1 + s, \\ -2t = 2 - s, \\ 3t = -3 + 4s. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $t = -1, s = 0$. Proste l_1 i l_2 mają zatem punkt wspólny. Współrzędne tego punktu odpowiadają wartościom $t = -1$ i $s = 0$ parametrów i są równe $x = -1, y = 2, z = -3$.

(e) Prosta l o wektorze kierunkowym v jest równoległa do płaszczyzny π o wektorze normalnym n wtedy i tylko wtedy, gdy $v \circ n = 0$. Wektor kierunkowy prostej rozważanej w zadaniu ma postać $v = (-2, 1, -1)$, a wektor normalny płaszczyzny π postać $n = (1, 1, -1)$. Wektory te spełniają warunek $v \circ n = 0$, zatem prosta l jest równoległa do płaszczyzny π .

(f) Dwie płaszczyzny są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne są współliniowe. Wektor normalny n_1 płaszczyzny $\pi_1: 2x + 3y - 5z + 30 = 0$ ma postać $n_1 = (2, 3, -5)$. Z kolei wektor normalny n_2 płaszczyzny

$$\pi_2: (x, y, z) = (-5, 2, 1) + s(0, 5, 3) + t(1, 1, 1), \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

ma postać

$$n_2 = (0, 5, 3) \times (1, 1, 1) = (2, 3, -5).$$

Ponieważ wektory n_1 i n_2 są współliniowe, więc płaszczyzny π_1 i π_2 są równoległe.

(g) Zbadamy czy wektory normalne płaszczyzn π_1, π_2 są równoległe oraz czy pewien punkt płaszczyzny π_2 należy do płaszczyzny π_1 . Wektory u_1, v_1 rozpinające płaszczyznę π_1 mają postać $u_1 = (1, -2, -1), v_1 = (-1, 3, 0)$, a wektory u_2, v_2 rozpinające płaszczyznę π_2 – postać $u_2 = (1, -1, -2), v_2 = (0, 1, -1)$. Wektory normalne tych płaszczyzn wyznaczymy korzystając z iloczynu wektorowego. Mamy

$$n_1 = u_1 \times v_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3i + j + k,$$

$$n_2 = u_2 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3i + j + k.$$

Zatem wektory n_1, n_2 są równoległe. Zbadamy teraz, czy punkt $P = (1, -2, 3)$ płaszczyzny π_2 (w równaniu przyjęto $s = 0, t = 0$) należy też do płaszczyzny π_1 . W tym celu sprawdzimy, czy układ równań

$$\begin{cases} 1 = -2 + s - t, \\ -2 = 4 - 2s + 3t, \\ 3 = 6 - s, \end{cases}$$

ma rozwiązanie. Łatwo pokazać, że para $s = 3, t = 0$ jest jego rozwiązaniem. Zatem płaszczyzny π_1, π_2 pokrywają się.

(h) **I sposób.** Wystarczy pokazać, że wektory kierunkowe prostych są równoległe oraz, że pewien punkt prostej l_1 należy do prostej l_2 . Wektor kierunkowy prostej l_1 ma postać $v_1 = (1, -2, 1) \times (3, 1, -1) = (1, 4, 7)$, gdzie $(1, -2, 1), (3, 1, -1)$ są odpowiednio wektorami normalnymi płaszczyzn $x - 2y + z - 1 = 0, 3x + y - z + 2 = 0$. Podobnie, wektor kierunkowy prostej l_2 ma postać $v_2 = (4, -1, 0) \times (2, 3, -2) = (2, 8, 14)$, gdzie

$(4, -1, 0)$, $(2, 3, -2)$ są odpowiednio wektorami normalnymi płaszczyzn $4x - y + 1 = 0$, $2x + 3y - 2z + 3 = 0$. Zatem wektory v_1, v_2 są równoległe. Łatwo sprawdzić, że punkt $(0, 1, 3)$ prostej l_1 , który uzyskaliśmy przyjmując $x = 0$ w jej równaniu krawędziowym i rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} -2y + z - 1 = 0, \\ y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

spełnia też równanie krawędziowe prostej l_2 . Zatem proste l_1, l_2 pokrywają się.

II sposób. Wystarczy pokazać, że każdy punkt jednej prostej należy do drugiej. Niech (x_0, y_0, z_0) będzie dowolnym punktem prostej l_1 . To oznacza, że spełnia układ równań

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 + z_0 - 1 = 0, \\ 3x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0. \end{cases}$$

Pokażemy, że spełnia również układ

$$\begin{cases} 4x_0 - y_0 + 1 = 0, \\ 2x_0 + 3y_0 - 2z_0 + 3 = 0. \end{cases}$$

Rzeczywiście, mamy

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 + z_0 - 1 = 0, \\ 3x_0 + y_0 - z_0 + 2 = 0. \end{cases} \begin{matrix} \nearrow R_2 + R_1 \\ \searrow R_2 - R_1 \end{matrix} \begin{cases} 4x_0 - y_0 + 1 = 0, \\ 2x_0 - 3y_0 - 2z_0 + 3 = 0. \end{cases}$$

Zatem proste l_1, l_2 pokrywają się.

□ **Zadanie 5.12.** Zbadać, czy

(a) punkty $A = (1, 2, 3)$, $B = (-1, -2, 0)$ należą do prostej

$$l : x = 1 + t, y = 2 + 2t, z = 3 - t \quad (t \in \mathbb{R});$$

(b) prosta $m : \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ jest zawarta w płaszczyźnie

$$\pi : 5y - 3z + 13 = 0;$$

(c) punkty $A = (0, 1, 5)$, $B = (1, 2, 3)$ należą do płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s + t, \\ y = 2 + 3s - t, \\ z = 3 - s + 2t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R});$$

(d) proste

$$l_1 : x = -1 - 2t, y = 3 + t, z = -4 - 8t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$l_2 : x = s, y = 1 + s, z = 2 + 2s \quad (s \in \mathbb{R}),$$

mają punkt wspólny;

(e) prosta $l : x = t, y = 1 + 2t, z = 2 + 3t \quad (t \in \mathbb{R})$, jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y - z + 3 = 0$;

(f) równania krawędziowe

$$l_1 : \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0, \\ 2y - y + z + 3 = 0, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 3x + y + 2 = 0, \\ 3x - 4y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

przedstawiają tę samą prostą;

(g) równania parametryczne

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + s - t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = -2 + s + t, \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 5 + s - t, \\ z = 2 + s + t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}),$$

przedstawiają tę samą płaszczyznę.

Odpowiedzi. (a) $A \in l$, $B \notin l$; (b) $m \subset \pi$; (c) $A \in \pi$, $B \notin \pi$; (d) $l_1 \cap l_2 = \{(1, 2, 4)\}$; (e) $l \parallel \pi$; (f) nie; (g) nie.

■ **Przykład 5.13.** Wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny, która zawiera:

- (a) punkt $P = (1, 3, 4)$ oraz prostą $l : x = -3 + t, y = 1 - 2t, z = 4 - t$ ($t \in \mathbb{R}$);
 (b) przecinające się proste (sprawdzić to)

$$l_1 : x = 2 + t, y = 1 - t, z = 3 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$l_2 : x = 4, y = -1 - 2s, z = 7 + s \quad (s \in \mathbb{R});$$

- (c) proste równoległe (sprawdzić to)

$$l_1 : x = 3 - t, y = 1 + 3t, z = 5 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$l_2 : x = 5 + 2s, y = 3 - 6s, z = 2 + 4s \quad (s \in \mathbb{R});$$

- (d) prostą $l : x = -3 + t, y = 1 - 2t, z = 4 - t$ ($t \in \mathbb{R}$), oraz jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : 2x - y + 3z - 7 = 0$;

- (e) punkty $P = (4, 0, -1)$, $Q = (2, 1, -3)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : x - y + 2z - 1 = 0$;

- (f) punkt $P = (1, 3, 5)$ i jest prostopadła do prostej $l : \begin{cases} x + y - z - 2 = 0, \\ 2x - y + 3z + 4 = 0; \end{cases}$

- (g) punkt $P = (-2, 0, 1)$ i jest równoległa do prostych

$$l_1 : x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = 3t \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$l_2 : x = 4 - s, y = 1 - 2s, z = 5 + s \quad (s \in \mathbb{R});$$

- (h) punkty $A = (0, 1, -2)$, $B = (3, 2, 1)$ i jest równoległa do prostej

$$l : \begin{cases} x - z - 3 = 0, \\ 2x - y + z = 0; \end{cases}$$

- (i) prostą $l : \begin{cases} x + y - z - 2 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0, \end{cases}$ ale nie przecina osi Oy .

Rozwiązanie.

(a) Znamy punkt, który należy do szukanej płaszczyzny, więc potrzebny jest nam jeszcze jej wektor normalny. Aby go wyznaczyć, na prostej l wybieramy dowolny punkt A , np. odpowiadający parametrowi $t = 0$, otrzymamy wtedy $A = (-3, 1, 4)$. Ponieważ wektor normalny n płaszczyzny musi być prostopadły do wektora $\overrightarrow{PA} = (-4, -2, 0)$ oraz do wektora kierunkowego $v = (1, -2, -1)$ prostej l , więc można przyjąć, że ma postać

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PA} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k} = (2, -4, 10).$$

Teraz możemy napisać równanie normalne płaszczyzny:

$$\pi : 2(x - 1) - 4(y - 3) + 10(z - 4) = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy $\pi : x - 2y + 5z - 15 = 0$.

(b) Proste l_1, l_2 przecinają się, bo tylko punkt $P = (4, -1, 7)$ należący do prostej l_2 (przyjęto $s = 0$), należy także do prostej l_1 (dla $t = 2$). Ponieważ płaszczyzna ma zawierać proste l_1, l_2 , więc jej wektor normalny $\mathbf{n}$ powinien być prostopadły do wektorów kierunkowych $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -2, 1)$ odpowiednio prostych l_1, l_2 . Zatem można przyjąć, że ma postać

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (3, -1, -2).$$

Mamy punkt P , który należy do poszukiwanej płaszczyzny, oraz wektor normalny, zatem jej równanie ma postać:

$$\pi : 3(x - 4) - (y + 1) - 2(z - 7) = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy $\pi : 3x - y - 2z + 1 = 0$.

(c) Ponieważ wektory kierunkowe $\mathbf{v}_1 = (-1, 3, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -6, 4)$ odpowiednio prostych l_1, l_2 są równoległe, więc proste także są równoległe. Do napisania równania normalnego szukanej płaszczyzny potrzebny jest nam punkt, który do niej należy, oraz wektor normalny. Przyjmując w równaniu pierwszej prostej np. $t = 0$, otrzymamy $P_1 = (3, 1, 5)$. Aby wyznaczyć wektor normalny płaszczyzny, wybieramy punkt na drugiej prostej. Przyjmując np. $s = 0$, otrzymamy $P_2 = (5, 3, 2)$. Ponieważ wektor normalny $\mathbf{n}$ płaszczyzny jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 2, -3)$ oraz do wektora kierunkowego $\mathbf{v}_1 = (-1, 3, -2)$, więc można przyjąć, że ma postać

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k} = (5, 7, 8).$$

Mamy punkt P_1 , który należy do poszukiwanej płaszczyzny, oraz wektor normalny, zatem jej równanie ma postać:

$$\pi : 5(x - 3) + 7(y - 1) + 8(z - 5) = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy $\pi : 5x + 7y + 8z - 62 = 0$.

(d) Wektor normalny $\mathbf{n}^*$ szukanej płaszczyzny π^* jest prostopadły do wektora normalnego $\mathbf{n} = (2, -1, 3)$ płaszczyzny π oraz do wektora kierunkowego $\mathbf{v} = (1, -2, -1)$ prostej l . Zatem można przyjąć, że ma postać

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = (7, 5, -3).$$

Potrzebny w równaniu normalnym płaszczyzny punkt znajdziemy przyjmując w równaniu prostej l np. $t = 0$. Otrzymamy wtedy $P = (-3, 1, 4)$. Zatem równanie szukanej

płaszczyzny ma postać

$$\pi^*: 7(x+3) + 5(y-1) - 3(z-4) = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy $\pi^*: 7x + 5y - 3z + 28 = 0$.

(e) Wektor normalny $\mathbf{n}^*$ szukanej płaszczyzny π^* jest prostopadły do wektora normalnego $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$ płaszczyzny π oraz do wektora $\overrightarrow{PQ} = (-2, 1, -2)$. Zatem można przyjąć, że ma postać

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{j} - \mathbf{k} = (0, -2, -1).$$

Znamy punkt należący do szukanej płaszczyzny (np. $P = (4, 0, -1)$) oraz wektor normalny, więc możemy napisać jej równanie

$$\pi^*: 0(x-4) + (-2)(y-0) + (-1)(z+1) = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy $\pi^*: 2y + z + 1 = 0$.

(f) Znamy punkt $P = (1, 3, 5)$, który należy do szukanej płaszczyzny, więc potrzebny jest nam jeszcze wektor normalny. Można przyjąć, że wektor ten pokrywa się z wektorem kierunkowym prostej l . Prosta l jest przedstawiona w postaci krawędziowej, więc jej wektor kierunkowy $\mathbf{v}$ jest iloczynem wektorowym wektorów normalnych $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{n}_2 = (2, -1, 3)$ przecinających się płaszczyzn $\pi_1: x + y - z - 2 = 0$, $\pi_2: 2x - y + 3z + 4 = 0$. Mamy

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = (2, -5, -3).$$

Stąd $\mathbf{n} = (2, -5, -3)$. Zatem równanie szukanej płaszczyzny ma postać

$$\pi: 2(x-1) - 5(y-3) - 3(z-5) = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy $\pi: 2x - 5y - 3z + 28 = 0$.

(g) Zadanie ma podobne rozwiązanie jak podpunkt (b). Znamy już punkt $P = (-2, 0, 1)$, który zawiera szukana płaszczyzna. Potrzebny jest nam jeszcze jej wektor normalny. Ponieważ płaszczyzna ma być równoległa do obu prostych, więc wektor normalny ma postać $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, gdzie $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3)$ oraz $\mathbf{v}_2 = (-1, -2, 1)$ są wektorami kierunkowymi odpowiednio prostych l_1 oraz l_2 . Mamy

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = (4, -4, -4).$$

Wektor $\mathbf{v}$ można zastąpić wektorem równoległym $(1, -1, -1)$. Szukana płaszczyzna ma zatem równanie normalne

$$\pi: 1(x+2) - 1(y-0) - 1(z-1) = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy $\pi: x - y - z + 3 = 0$.

(h) Najpierw wyznaczmy wektor normalny szukanej płaszczyzny. Ponieważ jest on prostopadły do wektora $\overrightarrow{AB} = (3, 1, 3)$ oraz do wektora kierunkowego $\mathbf{v}$ prostej l , więc

ma postać $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{v}$. Wektor kierunkowy prostej l ma postać $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, gdzie $\mathbf{n}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{n}_2 = (2, -1, 1)$ są wektorami normalnymi płaszczyzn w równaniu krawędziowym prostej l . Zatem

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k} = (-1, -2, -1).$$

Podobnie

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 7\mathbf{k} = (5, 0, -7).$$

Szukana płaszczyzna ma zatem równanie normalne

$$\pi: 5(x-0) + 0(y-1) + (-7)(z+2) = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy $\pi: 5x - 7z - 14 = 0$.

(i) Skoro szukana płaszczyzna π nie przecina osi Oy , więc musi być do niej równoległa. Wyznamy wektor normalny płaszczyzny π . Ponieważ wektor ten będzie prostopadły do wektora kierunkowego $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$ osi Oy oraz do wektora kierunkowego $\mathbf{v}_2$ prostej l , więc ma postać $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Jak w rozwiązaniu poprzedniego podpunktu, wektor kierunkowy $\mathbf{v}_2$ ma postać $\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, gdzie $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{n}_2 = (2, -1, 3)$ są wektorami normalnymi płaszczyzn tworzących prostą l . Wyznamy teraz kolejno wektory $\mathbf{v}_2$ oraz $\mathbf{n}$. Mamy

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = (2, -5, -3)$$

oraz

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{k} = (-3, 0, -2).$$

Do napisania równania normalnego szukanej płaszczyzny π potrzebny jest nam jeszcze punkt P na prostej l . Przyjmując w równaniu krawędziowym prostej np. $z = 0$, otrzymamy $x = -1$, $y = 3$. Zatem $P = (-1, 3, 0)$. Teraz możemy napisać równanie normalne płaszczyzny π

$$\pi: (-3)(x+1) + 0(y-3) + (-2)(z-0) = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymamy $\pi: 3x + 2z + 3 = 0$.

□ **Zadanie 5.13.** Wyznaczyć równanie płaszczyzny, która zawiera:

(a) punkt $P = (2, 0, -1)$ i oś Oy ;

(b) przecinające się proste (sprawdzić to)

$$l_1: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad l_2: \begin{cases} x = 3 - s, \\ y = 3s, \\ z = 5 - 2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R});$$

(c) proste równoległe (sprawdzić to)

$$l_1: x = 2 + 2t, y = 3 - t, z = 1 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$l_2: x = 4 - 4s, y = 1 + 2s, z = 1 - 6s \quad (s \in \mathbb{R});$$

(d) prostą $l: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 4 = 0, \end{cases}$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny $\pi: x = 3 - 2s + t, y = 2 + 2s + t, z = 1 - s + t \quad (s, t \in \mathbb{R});$

(e) punkty $P = (1, 3, 0)$, $Q = (0, 2, 5)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi: x + y - 2z - 4 = 0;$

(f) punkt $P = (1, 3, 5)$ i jest prostopadła do prostej

$$l: x = 2 + t, y = 3 - t, z = 4 + 3t \quad (t \in \mathbb{R});$$

(g) punkt $P = (-2, 0, 1)$ i jest równoległa do prostych

$$l_1: x = 2 + 2t, y = 3 - t, z = 1 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$l_2: x = 4 - 3s, y = 1 + 2s, z = 1 - 6s \quad (s \in \mathbb{R});$$

(h) punkty $A = (0, 1, -2)$, $B = (3, 2, 1)$ i jest równoległa do prostej

$$l: \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y + 4 = 0; \end{cases}$$

(i) prostą $l: x = 4 - 3t, y = 1 + t, z = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R})$, ale nie przecina osi Ox .

Odpowiedzi. (a) $\pi: x + 2z = 0$; (b) $\pi: 2x - z - 1 = 0$; (c) $\pi: 3x + 3y - z - 14 = 0$;

(d) $\pi: 3x + y - 4z + 1 = 0$; (e) $\pi: x - y + 2 = 0$; (f) $\pi: x - y + 3z - 13 = 0$; (g)

$\pi: 12x + 3y - 7z - 31 = 0$; (h) $\pi: x - y + 1 = 0$; (i) $\pi: y + z - 3 = 0$.

■ **Przykład 5.14.** Znaleźć punkty przecięcia:

(a) prostych $l_1: \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad l_2: \begin{cases} x = 1 + 2s, \\ y = 2 + s, \\ z = 3 - 4s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R});$

(b) prostej $l: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -3t, \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ i płaszczyzny $\pi: x + y + z - 7 = 0$;

(c) płaszczyzn $\pi_1: (x, y, z) = (0, 0, 0) + r(1, -2, 4) + s(0, -1, 3) \quad (r, s \in \mathbb{R})$,

$$\pi_2: (x, y, z) = (1, -1, 1) + t(1, 1, 1) + u(-1, 0, 0) \quad (t, u \in \mathbb{R}),$$

$$\pi_3: (x, y, z) = (2, 3, 3) + v(1, 0, 0) + w(0, -2, -1) \quad (v, w \in \mathbb{R}).$$

Rozwiązanie.

(a) Aby znaleźć współrzędne punktu przecięcia prostych l_1, l_2 rozwiązujemy układ trzech równań z niewiadomymi t, s . Mamy

$$\begin{cases} 1 - t = 1 + 2s, \\ -3 + 2t = 2 + s, \\ 1 + 3t = 3 - 4s, \end{cases} \iff \begin{cases} t + 2s = 0, \\ -2t + s = -5, \\ 3t + 4s = 2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $t = 2, s = -1$. Punkt P przecięcia prostych l_1, l_2 odpowiada np. wartości parametru $t = 2$ w równaniu prostej l_1 . Zatem

$$P = (-1, 1, 7).$$

(b) Aby obliczyć współrzędne punktu przecięcia prostej l i płaszczyzny π , wstawiamy przedstawienia parametryczne współrzędnych tej prostej do równania płaszczyzny. Wtedy mamy

$$(1+t) + (-3t) + (4-t) - 7 = 0,$$

stąd $t = -2/3$. Punkt wspólny prostej l i płaszczyzny π ma zatem współrzędne $(1/3, 2, 14/3)$.

(c) Aby znaleźć współrzędne punktu przecięcia płaszczyzn π_1 , π_2 i π_3 , rozwiązujemy układ sześciu równań z niewiadomymi parametrami r, s, t, u, v, w . Mamy

$$\begin{cases} r = 1+t-u=2+v, \\ -2r-s=-1+t=3-2w, \\ 4r+3s=1+t=3-w. \end{cases} \iff \begin{cases} r & -t+u & = & 1, \\ -2r-s-t & & = & -1, \\ 4r+3s-t & & = & 1, \\ & -t+u+v & = & -1, \\ & -t & -2w & = & -4, \\ & -t & & -w & = & -2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest szóstka liczb $r = 1, s = -1, t = 0, u = 0, v = -1, w = 2$. Punkt P przecięcia płaszczyzn π_1 , π_2 i π_3 odpowiada np. wartościom parametrów $t = 0, u = 0$, zatem $P = (1, -1, 1)$.

□ **Zadanie 5.14.** Znaleźć punkty przecięcia:

$$(a) \text{ prostych } l_1 : \begin{cases} x+2y-z+4=0, \\ y+z-3=0, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 2x-y-2z+8=0, \\ x+2y+2z-5=0; \end{cases}$$

(b) prostej $l : x = 1, y = -2 + 3u, z = 4 - u$ ($u \in \mathbb{R}$) i płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = s + t, \\ y = 1 + s + 2t, \\ z = 3 + 2s + 4t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R});$$

(c) płaszczyzn $\pi_1 : 3x + y + z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + 2z + 6 = 0$, $\pi_3 : 3y + 2z = 0$.

Odpowiedzi. (a) $(-1, 0, 3)$; (b) $(1, 1, 3)$; (c) $(0, 2, -3)$.

■ **Przykład 5.15.** Obliczyć odległość:

(a) punktu $P = (1, 0, -5)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 12y + 4z + 8 = 0$;

(b) płaszczyzn równoległych $\pi_1 : 2x - y + 3z = 0$, $\pi_2 : -4x + 2y - 6z + 8 = 0$;

(c) punktu $P = (0, 0, 0)$ od prostej

$$l : x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3 - 2t \quad (t \in \mathbb{R});$$

(d) prostych równoległych

$$\begin{aligned} l_1 : x = 1 + t, y = 2 + 2t, z = -3 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ l_2 : x = 2s, y = 4s, z = 6s \quad (s \in \mathbb{R}); \end{aligned}$$

(e) prostych skośnych $l_1 : \begin{cases} x = 0, \\ x + z = 1, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0; \end{cases}$

(f) prostej $l : x = -t, y = -1 + 2t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$), od płaszczyzny

$$\pi : x + y - z + 7 = 0.$$

Rozwiązanie.

(a) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór na odległość d punktu $P = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$;

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Odległość d punktu $P = (1, 0, -5)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 12y + 4z + 8 = 0$ jest równa

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 12 \cdot 0 + 4 \cdot (-5) + 8|}{\sqrt{3^2 + (-12)^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{169}} = \frac{9}{13}.$$

(b) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

na odległość d płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$; Przekształcamy równanie płaszczyzny π_2 tak, aby miała te same współczynniki co płaszczyzna π_1 . Mamy $\pi_2 : 2x - y + 3z - 4 = 0$. Odległość d płaszczyzn π_1 i π_2 jest zatem równa

$$d = \frac{|0 - (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

(c) Odległość d punktu P od prostej l wyznaczmy w następujący sposób: przez punkt P prowadzimy płaszczyznę π prostopadłą do prostej l , następnie wyznaczamy punkt P' przecięcia prostej l z płaszczyzną π (będzie to rzut punktu P na prostą l) i wyznaczmy odległość punktów P i P' . Ponieważ płaszczyzna π ma wektor normalny $\mathbf{n}$ taki sam jak wektor kierunkowy $\mathbf{v}$ prostej l , więc $\mathbf{n} = \mathbf{v} = (2, -1, -2)$. Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (0, 0, 0)$ ma zatem postać

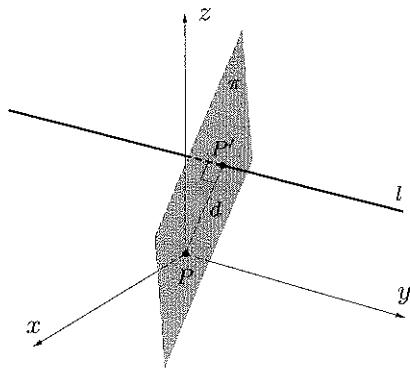
$$\pi : 2(x - 0) - 1(y - 0) - 2(z - 0) = 0,$$

stąd otrzymamy $\pi : 2x - y - 2z = 0$. Znajdziemy teraz punkt P' przecięcia prostej l i płaszczyzny π . Współrzędne tego punktu wyznaczmy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 - t, \\ z = 3 - 2t, \\ 2x - y - 2z = 0. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu otrzymamy $t = 1/3$, $x = 5/3$, $y = -4/3$, $z = 7/3$. Zatem $P' = (5/3, -4/3, 7/3)$. Obliczamy teraz odległość d punktu P' od punktu $P = (0, 0, 0)$, czyli szukaną odległość punktu P od prostej l , mamy

$$d = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{90}}{3} = \sqrt{10}.$$



(d) **I sposób.** Odległość d między prostymi równoległymi l_1 i l_2 wyznaczmy w następujący sposób: na prostej l_1 wybieramy dowolny punkt A , a na prostej l_2 dwa dowolne punkty B, C ; obliczamy pole trójkąta $\triangle ABC$ (wykorzystując iloczyn wektorowy); obliczamy wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka A (rys.). Aby wyznaczyć dowolny punkt A na prostej

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = -3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

przyjmujemy np. $t = 0$, stąd $x = 1, y = 2$ oraz $z = -3$. Zatem $A = (1, 2, -3)$. Podobnie znajdujemy punkty B i C na prostej

$$l_2 : x = 2s, y = 4s, z = 6s \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Przyjmując $t = 0$, otrzymamy $x = 0, y = 0$ oraz $z = 0$, a przyjmując $t = 1$, otrzymamy $x = 1, y = 2$ oraz $z = 3$. Zatem

$$B = (0, 0, 0), \quad C = (1, 2, 3).$$

Obliczamy teraz pole trójkąta ABC korzystając ze wzoru

$$\text{pole}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

Tak więc mamy

$$\begin{aligned} \text{pole}(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} |(-1, -2, 3) \times (0, 0, 6)| \\ &= \frac{1}{2} |(-12, 6, 0)| = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + 6^2 + 0^2} = 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

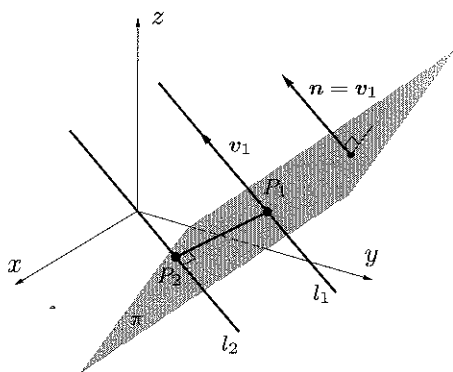
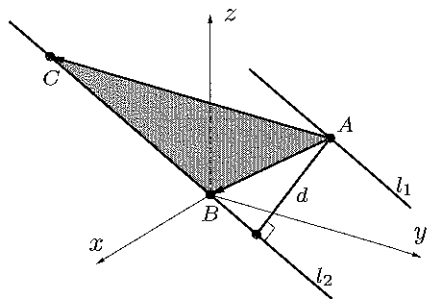
Obliczamy następnie długość boku BC trójkąta ABC . Mamy

$$|BC| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{14}.$$

Możemy teraz obliczyć wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka A , czyli szukaną odległość d prostych l_1 i l_2 . Mamy

$$d = \frac{2 \text{ pole}(\triangle ABC)}{|BC|} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7} \sqrt{70}.$$

II sposób. Odległość d między prostymi równoległymi l_1 i l_2 obliczymy w następujący sposób: wyznaczmy równanie płaszczyzny π prostopadłej do obu prostych (przechodzącej przez wybrany punkt P_1 na prostej l_1), następnie wyznaczamy punkt P_2 przecięcia tej płaszczyzny z prostą l_2 i na końcu obliczamy odległość punktów P_1, P_2 (rys.). Wektor normalny $\mathbf{n}$ płaszczyzny π jest równoległy do wektora kierunkowego $\mathbf{v}_1$ prostej l_1 . Można przyjąć, że $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$. Współrzędne punktu P_1 należącego do prostej l_1 wyznaczamy tak jak w I sposobie. Zatem $P_1 = (1, 2, -3)$. Równanie



płaszczyzny π przechodzącej przez punkt P_1 i prostopadłej do obu prostych ma postać

$$\pi : (x - 1, y - 2, z + 3) \circ (1, 2, 3) = 0,$$

stąd

$$\pi : x + 2y + 3z + 4 = 0.$$

Współrzędne punktu P_2 otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 4t, \\ z = 6t, \\ x + 2y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymamy $t = -1/7$, $x = -2/7$, $y = -4/7$, $z = -6/7$. Zatem $P_2 = (-2/7, -4/7, -6/7)$. Odległość d prostych równoległych l_1 i l_2 jest więc równa

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(2 + \frac{4}{7}\right)^2 + \left(-3 + \frac{6}{7}\right)^2} = \frac{3}{7}\sqrt{70}.$$

(e) Odległość dwóch prostych skośnych jest równa odległości dwóch płaszczyzn równoległych π_1 , π_2 zawierających te proste (rys.). Aby wyznaczyć te płaszczyzny, najpierw znajdziemy wektory kierunkowe $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ odpowiednio prostych l_1 i l_2 . Wektor kierunkowy $\mathbf{v}_1$ prostej l_1 jest iloczynem wektorowym wektorów normalnych płaszczyzn $x = 0$ i $x + z = 1$, czyli

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0) \times (1, 0, 1) = (0, 1, 0).$$

Podobnie, wektor kierunkowy $\mathbf{v}_2$ prostej l_2 jest równy

$$\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0).$$

Wspólny wektor normalny $\mathbf{n}$ płaszczyzn równoległych π_1 i π_2 zawierających odpowiednio proste l_1 i l_2 , jest prostopadły do obu wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. Można zatem przyjąć, że

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0) \times (1, -1, 0) = (0, 0, -1).$$

Napišemy teraz równania płaszczyzn π_1 i π_2 . W tym celu wybieramy po jednym punkcie na każdej z prostych. Na prostej l_1 wybraliśmy punkt $A_1 = (0, 0, 1)$, a na prostej l_2 punkt $A_2 = (0, 1, 0)$. Równanie płaszczyzny π_1 ma zatem postać

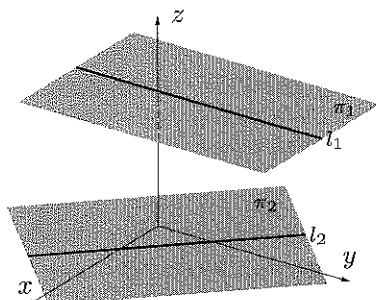
$$\pi_1 : 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) - (z - 1) = 0,$$

stąd $\pi_1 : z = 1$. Podobnie równanie płaszczyzny π_2 ma postać

$$\pi_2 : 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 1) - (z - 0) = 0,$$

stąd $\pi_2 : z = 0$. Korzystając ze wzoru na odległość d płaszczyzn równoległych π_1 , π_2 mamy $d = |1 - 0| = 1$. Zatem również odległość i odległość prostych l_1 i l_2 jest równa 1.

(f) Zauważmy najpierw, że prosta $l : x = -t$, $y = -1 + 2t$, $z = t$ o wektorze kierun-



kowym $v = (-1, 2, 1)$ jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y - z + 7 = 0$ o wektorze normalnym $n = (1, 1, -1)$. Rzeczywiście, mamy bowiem

$$n \circ v = (1, 1, -1) \circ (-1, 2, 1) = 0.$$

Odległość prostej l od płaszczyzny π jest równa odległości dowolnego punktu prostej l od tej płaszczyzny. Wybieramy dowolny punkt P na prostej l . Przyjmując $t = 0$, otrzymamy $x = 0$, $y = -1$ oraz $z = 0$. Stąd $P = (0, -1, 0)$. Korzystając ze wzoru na odległość punktu od płaszczyzny otrzymamy

$$d = \frac{|0 + (-1) - 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

□ **Zadanie 5.15.** Obliczyć odległość:

- (a) punktu $P = (1, -2, 3)$ od płaszczyzny $\pi : x + y - 3z + 5 = 0$;
- (b) płaszczyzn równoległych $\pi_1 : 2x + y - 2z = 0$, $\pi_2 : 2x + y - 2z - 3 = 0$;
- (c) płaszczyzn $\pi_1 : x - 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_2 : 3x - 6y + 6z - 3 = 0$;
- (d) punktu $P = (0, 1, -1)$ od prostej $l : x = 2t, y = -t, z = 3t$ ($t \in \mathbb{R}$);
- (e) prostych równoległych

$$l_1 : x - 1 + t, y = -1 + 2t, z = -t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$l_2 : x = -2s, y = 1 - 4s, z = 3 + 2s \quad (s \in \mathbb{R});$$

- (f) prostych skośnych $l_1 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 1, \\ z = 1; \end{cases}$

- (g) prostych $l_1 : x = 9 + 4t, y = 2 - 3t, z = t, \quad l_2 : x = -2s, y = -7 + 9s, z = 2 + 2s$ ($t, s \in \mathbb{R}$);

- (h) prostej $l : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$, od płaszczyzny $\pi : 2x + y + 4z = 0$.

Odpowiedzi. (a) $5/\sqrt{11}$; (b) 1; (c) 2; (d) $\sqrt{6/7}$; (e) $\sqrt{14}$; (f) 1; (g) $57/7$; (h) $3\sqrt{21}/7$.

■ **Przykład 5.16.** Obliczyć miarę kąta między:

- (a) prostą $l : x = -2 - 3t, y = -1 - 2t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$), i płaszczyzną

$$\pi : 2x - 3y - 5 = 0;$$

- (b) płaszczyznami $\pi_1 : (x, y, z) = (1, 6, 7) + s(-1, 2, 0) + t(1, 1, 1)$ ($s, t \in \mathbb{R}$),
 $\pi_2 : (x, y, z) = (3, 4, 5) + s(0, 1, -3) + t(1, 0, -2)$ ($s, t \in \mathbb{R}$);

- (c) prostymi $l_1 : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z + 3 = 0, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ -x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$

Rozwiązanie.

- (a) Miara kąta α między prostą l o wektorze kierunkowym v i płaszczyzną π o wektorze normalnym n jest określona wzorem

$$\alpha = \arccos \frac{|n \times v|}{|n| \cdot |v|}.$$

Ponieważ prosta l ma wektor kierunkowy $\mathbf{v} = (-3, -2, 1)$, a płaszczyzna π wektor normalny $\mathbf{n} = (2, -3, 0)$, więc

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos \frac{|(2, -3, 0) \times (-3, -2, 1)|}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2}} = \arccos \frac{|(-3, -2, -13)|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}} \\ &= \arccos 1 = 0\end{aligned}$$

oznacza to, że prosta l jest równoległa do płaszczyzny π .

(b) W tym przykładzie wykorzystamy fakt mówiący, że miara kąta między dwiema płaszczyznami jest równa mierze kąta ostrego między wektorami normalnymi tych płaszczyzn. Wyznamy teraz wektory normalne płaszczyzn π_1 i π_2 . Płaszczyzna π_1 jest rozpięta na wektorach $\mathbf{u}_1 = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, a płaszczyzna π_2 na wektorach $\mathbf{u}_2 = (0, 1, -3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -2)$. Wektory normalne $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ tych płaszczyzn mają odpowiednio postaci:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 &= \mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1 = (-1, 2, 0) \times (1, 1, 1) = (2, 1, -3), \\ \mathbf{n}_2 &= \mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}_2 = (0, 1, -3) \times (1, 0, -2) = (-2, -3, -1).\end{aligned}$$

Miara kąta ostrego α między wektorami normalnymi $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ (a zatem i między płaszczyznami π_1 i π_2) jest równa

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos \frac{|\mathbf{n}_1 \circ \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \arccos \frac{|(2, 1, -3) \circ (-2, -3, -1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} \\ &= \arccos \frac{2}{7}.\end{aligned}$$

(c) Kątem między dwiema prostymi nazywamy kąt ostry między wektorami kierunkowymi tych prostych. Wektor kierunkowy $\mathbf{v}_1$ prostej l_1 ma postać

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0) \times (0, 1, -1) = (-1, 1, 1),$$

a wektor kierunkowy $\mathbf{v}_2$ prostej l_2 postać

$$\mathbf{v}_2 = (1, -2, 1) \times (-1, 3, 2) = (-7, -3, 1).$$

Miara kąta ostrego α między wektorami $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ (a zatem i miara kąta między prostymi l_1 i l_2) jest równa

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos \frac{|\mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|} = \arccos \frac{|(-1, 1, 1) \circ (-7, -3, 1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2 + 1^2}} \\ &= \arccos \frac{5}{\sqrt{177}}.\end{aligned}$$

□ **Zadanie 5.16.** Obliczyć miarę kąta między:

(a) prostą $l : x = 3 + 2t, y = 1, z = -2 - 3t$ ($t \in \mathbb{R}$), i płaszczyzną $\pi : x - z = 0$;

(b) płaszczyznami $\pi_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0$, $\pi_2 : 2x + y - z + 3 = 0$;

(c) prostymi $l_1 : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2 + t, \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : \begin{cases} x = 3 - 2s, \\ y = 4 - s, \\ z = 1 + 3s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$

Odpowiedzi. (a) $\arccos 1/\sqrt{26}$; (b) $\arccos 3/(2\sqrt{21})$; (c) $\arccos 10/\sqrt{154}$.

■ **Przykład 5.17.** Znaleźć rzut prostokątny:

- (a) punktu $P = (1, 0, -3)$ na prostą $l : x = 2t, y = 1 - t, z = -1 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$);
 (b) punktu $P = (0, 0, 1)$ na płaszczyznę $\pi : x + y - 2z + 4 = 0$;
 (c) prostej $l : x = y = z$ na płaszczyznę $\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Rozwiązanie.

(a) **I sposób.** Punkt $P' \in l$ jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą l , jeżeli spełniony jest warunek $\overrightarrow{P'P} \perp \mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v}$ oznacza wektor kierunkowy prostej l . Niech $P' = (x, y, z)$. Wtedy

$$\overrightarrow{P'P} = (1 - x, -y, -3 - z).$$

Wektor $\overrightarrow{P'P}$ jest prostopadły do wektora $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\overrightarrow{P'P} \circ \mathbf{v} = 0 \iff (1 - x, -y, -3 - z) \circ (2, -1, 2) = 0 \iff -2x + y - 2z - 4 = 0.$$

Zatem współrzędne punktu $P' \in l$ otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = -1 + 2t, \\ -2x + y - 2z = 4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest czwórka liczb $t = -1/9, x = -2/9, y = 10/9, z = -11/9$. Zatem

$$P' = \left(-\frac{2}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{11}{9}\right).$$

II sposób. Szukany rzut P' jest punktem, w którym prosta l przecina płaszczyznę π prostopadłą do niej i przechodzącą przez punkt P . Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (1, 0, -3)$ i o wektorze normalnym $\mathbf{n} = \mathbf{v} = (2, -1, 2)$ ma postać

$$\begin{aligned} 2(x - 1) - (y - 0) + 2(z - 3) &= 0 \iff \\ \iff 2x - y + 2z + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Zatem współrzędne punktu

$$P' = (2t, 1 - t, -1 + 2t)$$

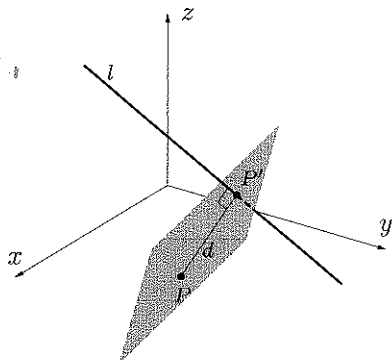
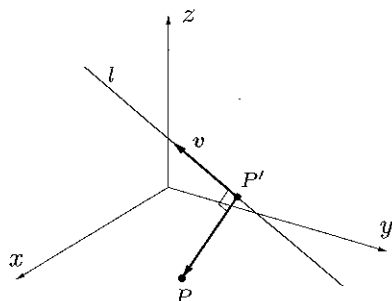
wyznaczamy z zależności

$$2(2t) - (1 - t) + 2(-1 + 2t) + 4 = 0.$$

Stąd $9t + 1 = 0$, czyli $t = -1/9$, więc

$$P' = \left(-\frac{2}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{11}{9}\right).$$

(b) **I sposób.** Punkt $P' \in \pi$ jest rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π , jeżeli spełniony jest warunek $\overrightarrow{P'P} \parallel \mathbf{n}$, gdzie $\mathbf{n}$ oznacza wektor normalny płaszczyzny π (rys.). Niech $P' = (x, y, z)$. Wtedy $\overrightarrow{P'P} = (-x, -y, 1 - z)$. Wektor $\overrightarrow{P'P}$ jest rów-



noległy do wektora $\mathbf{n} = (1, 1, -2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{P'P} = k \cdot \mathbf{n}$ dla pewnego $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Współrzędne punktu P' spełniają zatem układ równań

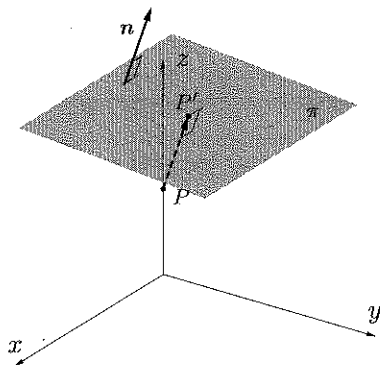
$$\begin{cases} x + y - 2z + 4 = 0, \\ \frac{-x}{1} = \frac{-y}{1} = \frac{1-z}{-2}, \end{cases}$$

gdzie podwójne równanie układu jest warunkiem równoległości wektorów $\overrightarrow{P'P}$ i $\mathbf{n}$. Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x + y - 2z = -4, \\ x - y = 0, \\ 2y + z = 1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest trójka liczb $x = -1/3$, $y = -1/3$, $z = 5/3$. Zatem

$$P' = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

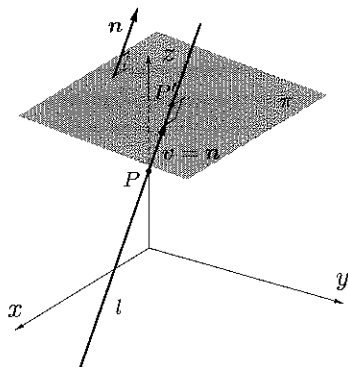


II sposób Niech l oznacza prostą prostopadłą do płaszczyzny π i przechodzącą przez punkt P (rys.). Zatem jej wektor kierunkowy $\mathbf{v} = \mathbf{n}$. Stąd równanie parametryczne tej prostej ma postać

$$l: x = t, y = t, z = 1 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

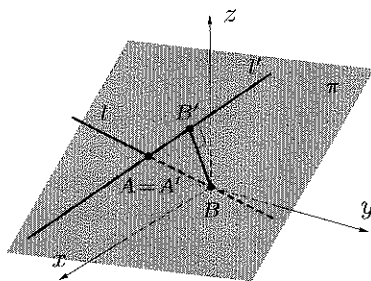
Szukany rzut P' jest punktem wspólnym prostej l i płaszczyzny π . Jego współrzędne $(t, t, 1 - 2t)$ wstawiamy do równania płaszczyzny π otrzymując $t + t - 2(1 - 2t) + 4 = 0$. Stąd $6t + 2 = 0$, więc $t = -1/3$. Zatem

$$P' = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$



(c) Rzut prostej l na płaszczyznę π wyznaczmy w następujący sposób. Na prostej l wybieramy dwa dowolne punkty A i B . Następnie znajdujemy rzuty prostokątne A' i B' tych punktów na płaszczyznę π . Rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę π będzie wtedy prosta l' przechodząca przez punkty A' i B' (rys.). Dla uproszczenia obliczeń wygodnie jest przyjąć, że A jest punktem przecięcia prostej l i płaszczyzny π . Wtedy $A' = A$. Niech $A = (x, y, z)$. Współrzędne punktu A spełniają układ równań

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t, \\ x + 2y + 3z - 6 = 0. \end{cases}$$



Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x = 1, y = 1, z = 1$. Zatem $A = (1, 1, 1) = A'$. Wybieramy teraz dowolny punkt $B = (x', y', z') \neq A$ na prostej l . Przyjmując np. $x' = 0$, otrzymamy $y' = 0$ oraz $z' = 0$. Postępując podobnie jak w punkcie (b) tego przykładu znajdziemy rzut prostokątny B' punktu B na płaszczyznę π . Mamy $B' = (3/7, 6/7, 9/7)$. Teraz znajdziemy równanie prostej l' przechodzącej przez punkty A' i B' . Mamy

$$l' : x = 1 + \frac{4}{7}t, y = 1 + \frac{1}{7}t, z = 1 - \frac{2}{7}t, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Przyjmując $t = 7s$ otrzymamy uproszczoną postać równania

$$l' : x = 1 + 4s, y = 1 + s, z = 1 - 2s \quad (s \in \mathbb{R}).$$

□ **Zadanie 5.17.** Znaleźć rzut prostokątny:

- (a) punktu $P = (-3, 2, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x + y + z = 0$;
- (b) punktu $P = (-1, 2, 0)$ na prostą $l : x = y = z$;
- (c) prostej $l : x = 3 + t, y = 5 + 2t, z = -1 \quad (t \in \mathbb{R})$, na płaszczyznę $\pi : x + 3y - 2z - 6 = 0$.

Odpowiedzi. (a) $(-8/3, 7/3, 1/3)$; (b) $(1/3, 1/3, 1/3)$; (c) $l' : x = 1 + t, y = 1 + t, z = -1 + 2t \quad (t \in \mathbb{R})$.

■ **Przykład 5.18.** Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (0, 1, 3)$ względem:

- (a) punktu $S = (1, 0, -1)$;
- (b) prostej $l : x = -1 - 2t, y = t, z = 5 + 3t \quad (t \in \mathbb{R})$;
- (c) płaszczyzny $\pi : x + y + z = 0$.

Rozwiązanie.

(a) Punkt P' jest symetryczny do punktu P względem punktu S , jeżeli spełnia warunek

$$\overrightarrow{SP'} = -\overrightarrow{SP}.$$

Niech $P' = (x, y, z)$. Wtedy $\overrightarrow{SP'} = (x - 1, y, z + 1)$ oraz $\overrightarrow{SP} = (-1, 1, 4)$. Z warunku $\overrightarrow{SP'} = -\overrightarrow{SP}$ wynika, że współrzędne punktu P' spełniają układ równań

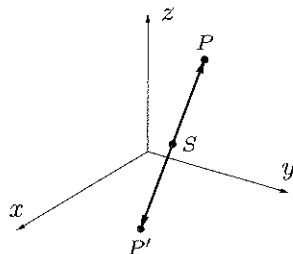
$$\begin{cases} x - 1 = 1, \\ y = -1, \\ z + 1 = -4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x = 2, y = -1, z = -5$. Zatem $P' = (2, -1, -5)$.

(b) Punkt P' jest symetryczny do punktu P względem prostej l , jeżeli spełnia warunek

$$\overrightarrow{SP'} = -\overrightarrow{SP},$$

gdzie S oznacza rzut prostokątny punktu P na prostą l . Znajdziemy teraz rzut prostokątny S punktu $P = (0, 1, 3)$ na prostą l .



I sposób wyznaczania S . Punkt S należy do prostej l , więc spełnia jej równania, czyli $S = (-1 - 2t, t, 5 + 3t)$. Ponadto wektor $\overrightarrow{SP}$ jest prostopadły do wektora kierunkowego $\mathbf{v}$ tej prostej, więc spełnia warunek

$$\overrightarrow{SP} \circ \mathbf{v} = 0 \iff$$

$$\iff (1 - 2t, 1 - t, -2 - 3t) \circ (-2, 1, 3) = 0$$

$$\iff -14t - 7 = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$$

Zatem $S = (0, -1/2, 7/2)$.

II sposób wyznaczania S . Punkt S jest punktem przecięcia prostej l z płaszczyzną π prostopadłą do l i przechodzącą przez punkt P . Równanie płaszczyzny π o wektorze normalnym $\mathbf{n} = \mathbf{v}$ i zawierającej punkt P jest postaci

$$\pi: -2x + y + 3z - 10 = 0.$$

Współrzędne $(-1 - 2t, t, 5 + 3t)$ punktu S wyznaczmy z zależności

$$-2(-1 - 2t) + t + 3(5 + 3t) - 10 = 0.$$

Stąd $14t + 7 = 0$. Zatem $t = -1/2$, więc $S = (0, -1/2, 7/2)$. Znajdziemy teraz P' . Niech $P' = (x', y', z')$. Wtedy

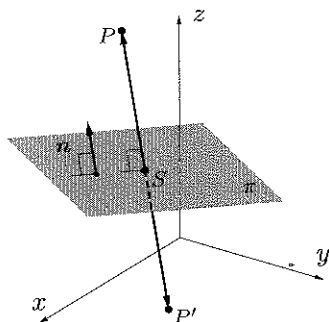
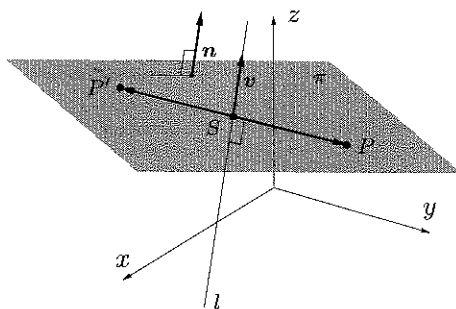
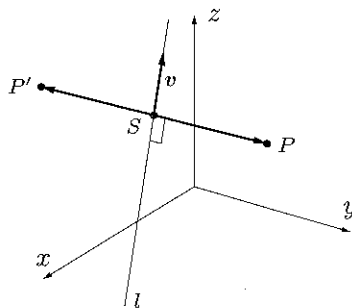
$$\overrightarrow{SP} = \left(x' - 0, y' + \frac{1}{2}, z' - \frac{7}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{SP} = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Z warunku $\overrightarrow{SP} = -\overrightarrow{SP'}$ mamy

$$\left(x' - 0, y' + \frac{1}{2}, z' - \frac{7}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \iff (x', y', z') = (0, -2, 4).$$

Zatem $P' = (0, -2, 4)$.

(c) Punkt P' jest symetryczny do punktu P względem płaszczyzny π , jeżeli spełnia warunek $\overrightarrow{SP} = -\overrightarrow{SP'}$, gdzie S oznacza rzut prostokątny punktu P na płaszczyznę $\pi: x + y + z = 0$.



I sposób wyznaczania S . Niech $S = (x, y, z)$. Ponieważ punkt S należy do płaszczyzny π , więc spełnia jej równanie. Ponadto wektor $\overrightarrow{SP}$ jest prostopadły do tej płaszczyzny, więc jest równoległy do wektora normalnego $\mathbf{n}$ płaszczyzny π , czyli spełnia warunek $\overrightarrow{SP} = k\mathbf{n}$ dla pewnego $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mamy $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ oraz $\overrightarrow{SP} = (-x, 1-y, 3-z)$. Zatem współrzędne punktu S spełniają układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \frac{-x}{1} = \frac{1-y}{1} = \frac{3-z}{1}, \end{cases}$$

gdzie podwójne równanie układu jest warunkiem równoległości wektorów $\overrightarrow{SP}$ i $\mathbf{n}$. Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ -x + y = 1, \\ -x + z = 3. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x = -4/3$, $y = -1/3$, $z = 5/3$.

II sposób wyznaczania S . Prosta przechodząca przez punkt P i prostopadła do płaszczyzny π opisana jest równaniem

$$l: x = t, y = 1 + t, z = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Niech S będzie punktem przecięcia prostej l i płaszczyzny π . Zatem $S = (t, 1+t, 3+t)$ oraz $t + (1+t) + (3+t) = 0$. Stąd $t = -4/3$, zatem

$$S = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Znajdziemy teraz P' . Niech $P' = (x', y', z')$. Wtedy

$$\overrightarrow{SP'} = \left(x' + \frac{4}{3}, y' + \frac{1}{3}, z' - \frac{5}{3}\right)$$

oraz

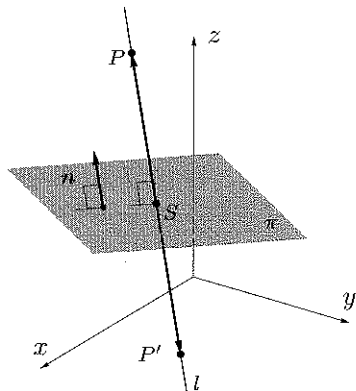
$$\overrightarrow{SP} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Z warunku $\overrightarrow{SP} = -\overrightarrow{SP'}$ mamy

$$\left(x' + \frac{4}{3}, y' + \frac{1}{3}, z' - \frac{5}{3}\right) = -\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \iff (x', y', z') = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Zatem

$$P' = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right).$$



□ **Zadanie 5.18.** Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (2, 3, -1)$ względem:

- (a) punktu $S = (1, -1, 2)$; (b) prostej $l: \begin{cases} x + y = 0, \\ y + z = 0; \end{cases}$
 (c) płaszczyzny $\pi: 2x - y + z - 6 = 0$.

Odpowiedzi. (a) $(0, -5, 5)$; (b) $(-10/3, -5/3, -1/3)$; (c) $(6, 1, 1)$.

■ **Przykład 5.19.** Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $w = (1, -1, 1)$:

(a) punktu $P = (0, 1, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x + 3y - 6 = 0$;

(b) prostej $l : x = t, y = -t/2, z = t/3$ ($t \in \mathbb{R}$), na płaszczyznę

$$\pi : x + y + z - 5 = 0.$$

Rozwiązanie.

(a) Rzut punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora w jest punktem przecięcia prostej l , o wektorze kierunkowym w , poprowadzonej przez punkt P , z płaszczyzną π (rys.). Znajdziemy najpierw równanie parametryczne prostej l o wektorze kierunkowym $w = (1, -1, 1)$ przechodzącej przez punkt $P = (0, 1, 0)$. Mamy

$$l : x = t, y = 1 - t, z = t, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

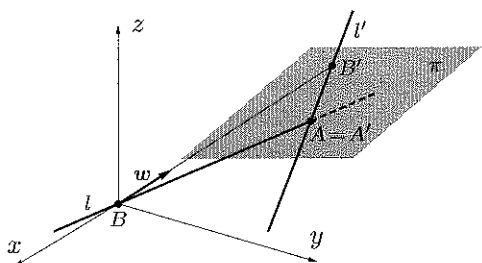
Wyznaczmy teraz punkt $P' = (x, y, z)$ przecięcia prostej l z płaszczyzną π . Współrzędne tego punktu spełniają układ równań

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, \\ z = t, \\ x + 3y - 6 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest czwórka liczb $t = -3/2, x = -3/2, y = 5/2, z = -3/2$.
Zatem

$$P' = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

(b) Rzut prostej l na płaszczyznę π w kierunku wektora w wyznaczmy w następujący sposób. Na prostej l wybieramy dwa dowolne punkty A i B . Następnie znajdujemy ich rzuty A' i B' na płaszczyznę π w kierunku wektora w . Rzutem prostej l na płaszczyznę π w kierunku wektora w będzie prosta l' przechodząca przez punkty A' i B' (rys.).



Dla uproszczenia obliczeń wygodnie jest przyjąć, że A jest punktem przecięcia prostej l z płaszczyzną π . Wtedy oczywiście $A' = A$. Niech $A = (x, y, z)$. Współrzędne punktu A spełniają układ równań

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -t/2, \\ z = t/3, \\ x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest czwórka liczb $t = 6, x = 6, y = -3, z = 2$. Zatem $A = (6, -3, 2) = A'$. Wybieramy teraz dowolny punkt $B \neq A$ na prostej l . Przyjmując

np. $t = 0$ otrzymamy $B = (0, 0, 0)$. Postępując podobnie jak w punkcie (a) tego przykładu znajdziemy rzut $B' = (5, -5, 5)$ punktu B na płaszczyznę π w kierunku wektora w . Teraz znajdziemy równanie prostej l' przechodzącej przez punkty A' i B' . Mamy

$$l' : x = 6 - t, y = -3 - 2t, z = 2 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

□ **Zadanie 5.19.** Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $v = (2, 3, -1)$:

(a) punktu $O = (0, 0, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x - 2z + 8 = 0$;

(b) prostej $l : x = 1 + t, y = -1 + t, z = 2 + t \quad (t \in \mathbb{R})$, na płaszczyznę $\pi : x - y + z - 1 = 0$.

Odpowiedzi. (a) $(-4, -6, 2)$; (b) $l' : x = -2 + 4t, y = -4 + 5t, z = -1 + t \quad (t \in \mathbb{R})$.

■ **Przykład 5.20.** Obliczyć objętości i pola powierzchni brył ograniczonych płaszczyznami:

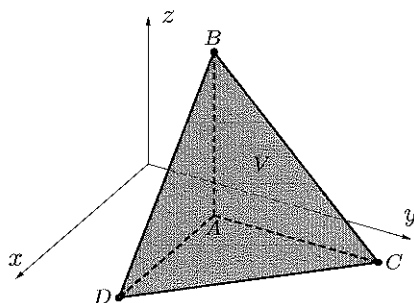
(a) $x = 0, y = 2, z = -1, x + y + z = 6$;

(b) $x = 1, x = 2, x - y = 0, x - y = 3, y + z = 0, y + z = 4$.

Rozwiązanie.

(a) Bryła V rozważana w zadaniu jest czworościanem, który ma trzy parami prostopadłe płaszczyzny. Wyznamy najpierw wierzchołki A, B, C, D tego czworościanu. Współrzędne tych wierzchołków spełniają odpowiednio układy równań

$$A : \begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \\ z = -1, \end{cases} \quad B : \begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \\ x + y + z = 6, \end{cases} \quad C : \begin{cases} x = 0, \\ z = -1, \\ x + y + z = 6, \end{cases} \quad D : \begin{cases} y = 2, \\ z = -1, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$



Po rozwiązaniu tych układów otrzymamy $A = (0, 2, -1)$, $B = (0, 2, 4)$, $C = (0, 7, -1)$ oraz $D = (5, 2, -1)$. Ponieważ czworościan V jest rozpięty na wektorach

$$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 5), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 5, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (5, 0, 0),$$

więc jego objętość można obliczyć wykorzystując iloczyn mieszany wektorów. Mamy

$$\text{objętość}(V) = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = \frac{125}{6}.$$

Do obliczenia powierzchni całkowitej S czworościanu V wykorzystamy iloczyn wektorowy. Mamy $\overrightarrow{DB} = (-5, 0, 5)$ oraz $\overrightarrow{DC} = (-5, 5, 0)$. Zatem

$$\begin{aligned} \text{pole}(S) &= \text{pole}(S_{\triangle ABC}) + \text{pole}(S_{\triangle ABD}) + \text{pole}(S_{\triangle ACD}) + \text{pole}(S_{\triangle DBC}) \\ &= \frac{1}{2} \left(|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC}| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|-25i| + |25j| + |-25k| + |-25i - 25j - 25k| \right) \\ &= \frac{1}{2} (75 + 25\sqrt{3}). \end{aligned}$$

(b) Bryła rozważana w zadaniu jest równoległościannem V o wierzchołkach A, B, C, D, A', B', C' i D' (rys.). Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej tego równoległościannu wystarczy znajomość punktów A, B, D i A' . Współrzędne tych punktów spełniają odpowiednio układy równań

$$\begin{aligned} A: \begin{cases} x = 1, \\ x - y = 0, \\ y + z = 0, \end{cases} & B: \begin{cases} x = 1, \\ x - y = 3, \\ y + z = 0, \end{cases} \\ D: \begin{cases} x = 1, \\ x - y = 0, \\ y + z = 4, \end{cases} & A': \begin{cases} x = 2, \\ x - y = 0, \\ y + z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu tych układów otrzymamy

$$A = (1, 1, -1), \quad B = (1, -2, 2), \quad D = (1, 1, 3), \quad A' = (2, 2, -2).$$

Ponieważ rozważany równoległoscian jest rozpięty na wektorach

$$\overrightarrow{AB} = (0, -3, 3), \quad \overrightarrow{AD} = (0, 0, 4), \quad \overrightarrow{AA'} = (1, 1, -1),$$

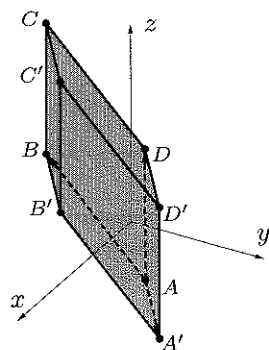
więc jego objętość można obliczyć ze wzoru

$$\text{objętość}(V) = \left| (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) \right| = \left| \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = 12.$$

Z kolei pole powierzchni całkowitej S tego równoległościannu wyraża się wzorem

$$\text{pole}(S) = 2(\text{pole}(S_{\diamond ABCD}) + \text{pole}(S_{\diamond ABB'A'}) + \text{pole}(S_{\diamond AA'D'D}))$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left(|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA'}| + |\overrightarrow{AA'} \times \overrightarrow{AD}| \right) \\ &= 2 \left(\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \right| \right) \\ &= 2 \left(|-12i| + |3j + 3k| + |4i - 4j| \right) = 2(12 + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) = 24 + 14\sqrt{2}. \end{aligned}$$



□ **Zadanie 5.20.** Obliczyć objętości i pola powierzchni brył ograniczonych płaszczyznami:

(a) $x = 1, y = -1, z = 3, x + y + z = 5$;

(b) $x - y = 1, x - y = 5, x + 2z = 0, x + 2z = 3, z = -1, z = 4$.

Odpowiedzi. (a) objętość = $4/3$, pole = 9 ; (b) objętość = 60 ,
pole = $2(15\sqrt{2} + 20\sqrt{5} + \sqrt{4154})$.

■ **Przykład 5.21.** Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez parami przecinające się proste:

$$l_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : \begin{cases} x = 3, \\ y = 3 - 3s, \\ z = 3 - 6s \end{cases} (s \in \mathbb{R}), \quad l_3 : \begin{cases} x = 3 + 3u, \\ y = 0, \\ z = -3 - 3u \end{cases} (u \in \mathbb{R}).$$

Rozwiązanie. Znajdźmy najpierw punkty przecięcia tych prostych. Niech A będzie punktem przecięcia prostych l_1 i l_3 . Zatem

$$A = (t, t, t) = (3 + 3u, 0, -3 - 3u).$$

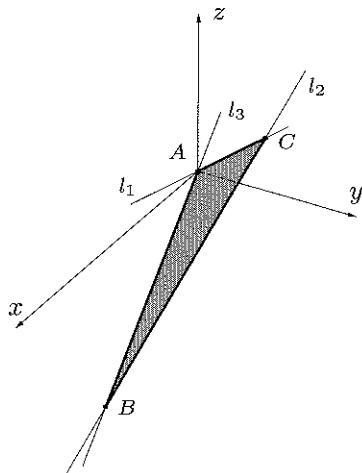
Stąd $t = 0, u = -1$, czyli $A = (0, 0, 0)$. Niech B będzie punktem przecięcia prostych l_1 i l_2 . Zatem

$$B = (t, t, t) = (3, 3 - 3s, 3 - 6s).$$

Stąd $t = 3, s = 0$, czyli $B = (3, 3, 3)$. Niech C będzie punktem przecięcia prostych l_2 i l_3 . Zatem

$$C = (3, 3 - 3s, 3 - 6s) = (3 + 3u, 0, -3 - 3u).$$

Stąd $s = 1, u = 0$, czyli $C = (3, 0, -3)$. Pole trójkąta ABC można obliczyć ze wzoru



$$\begin{aligned} \text{pole}(\triangle_{ABC}) &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\ &= \frac{1}{2} |(3, 3, 3) \times (3, 0, -3)| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |-9i + 18j - 9k| = \frac{9}{2} \sqrt{6}. \end{aligned}$$

□ **Zadanie 5.21.** Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez parami przecinające się proste:

$$l_1 : \begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = 0, \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 3 + 3s, \\ z = -4s \end{cases} (s \in \mathbb{R}), \quad l_3 : \begin{cases} x = -2p, \\ y = 3 - 3p, \\ z = 0 \end{cases} (p \in \mathbb{R}).$$

Odpowiedzi. $\sqrt{61}$.

■ **Przykład 5.22.** Czworoscian ma wierzchołki: $A = (0, 0, 0)$, $B = (4, 0, 0)$, $C = (0, 6, 0)$, $D = (0, 0, 8)$. Wyznaczyć środek i promień kuli opisanej na tym czworoscianie.

Rozwiązanie. Niech $S = (x, y, z)$ będzie środkiem, a R promieniem kuli opisanej na czworoscianie $ABCD$. Wtedy

$$|SA| = |SB| = |SC| = |SD| = R.$$

Zapisując te równości w formie układu równań otrzymamy

$$\begin{cases} \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}, \\ \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2}, \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-8)^2}. \end{cases}$$

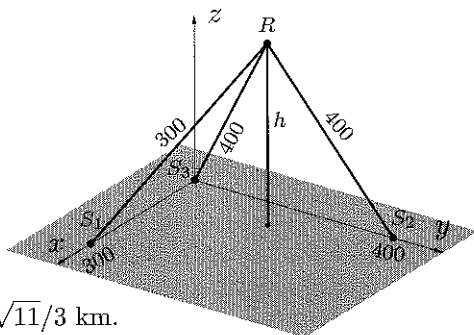
Stąd

$$\begin{cases} x &= 2, \\ -2x + 3y &= 5, \\ -3y + 4z &= 7. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest trójka $x = 2, y = 3, z = 4$. Zatem $S = (2, 3, 4)$. Obliczymy teraz promień kuli opisanej na czworoscianie $ABCD$. Mamy

$$R = |SA| = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{29}.$$

□ **Zadanie 5.22.** Stacje radarowe S_1, S_2, S_3 umieszczone są w wierzchołkach trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $l_1 = 30$ km, $l_2 = 40$ km (rys.). Pomiary odległości samolotu S od tych stacji dały następujące wyniki: $d_1 = 30$ km, $d_2 = 40$ km, $d_3 = 40$ km. Obliczyć, na jakiej wysokości h leciał samolot.



Odpowiedź. $h = 200\sqrt{11}/3$ km.