

**Teresa Jurlewicz
Zbigniew Skoczylas**

Algebra i geometria analityczna

Definicje, twierdzenia, wzory

**Jurle
Jurlewicz, Teresa**

Algebra i geometria analityczna :

2

Wydanie dwudzieste czwarte

Sk 81308

F.I.7.Jurle



Żurlewicz Zbigniew

**ALGEBRA
I
GEOMETRIA
ANALITYCZNA**

ARTICLE
I
ARTICLE
CONTENTS

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas



ALGEBRA I GEOMETRIA ANALITYCZNA

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie dwudzieste czwarte powiększone

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

W Sk 81308

000-81308



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2022

Teresa Jurlewicz
Przedsiębiorstwo Informatyczne
YUMA
teresa.jurlewicz@yuma.com.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej



Copyright © 1994 – 2022 Teresa Jurlewicz and Zbigniew Skoczylas

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład wykonano w systemie L^AT_EX.

ISBN 978-83-62780-95-2

Wydanie XXIV powiększone, Wrocław 2022
Oficina Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BiS Bierońscy, Sp. Kom.

Spis treści

Wstęp	7
1. Liczby zespolone	9
1.1. Podstawowe definicje i własności	9
1.2. Postać algebraiczna liczby zespolonej	11
1.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej	14
1.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej	23
1.5. Pierwiastkowanie liczb zespolonych	25
2. Wielomiany	28
2.1. Podstawowe definicje i własności	28
2.2. Pierwiastki wielomianów	29
2.3. Zasadnicze twierdzenie algebry	33
2.4. Ułamki proste	37
3. Macierze i wyznaczniki	40
3.1. Macierze – podstawowe określenia	40
3.2. Działania na macierzach	44
3.3. Definicja indukcyjna wyznacznika	51
3.4. Definicja permutacyjna wyznacznika*	56
3.5. Własności wyznaczników	57
3.6. Macierz odwrotna	65
3.7. Algorytm Gaussa – Jordana	71
4. Układy równań liniowych	73
4.1. Podstawowe określenia	73
4.2. Układy Cramera	74
4.3. Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera–Capellego	77
4.4. Metody rozwiązywania układów Cramera	80
4.5. Metody rozwiązywania dowolnych układów równań	82
4.6. Wartości i wektory własne macierzy	87

5. Geometria analityczna w przestrzeni	90
5.1. Wektory	90
5.2. Iloczyn skalarny	96
5.3. Iloczyn wektorowy	98
5.4. Iloczyn mieszany	101
5.5. Równania płaszczyzny	104
5.6. Równania prostej	107
5.7. Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn	110
6. Krzywe stożkowe	116
6.1. Podstawowe definicje i własności	116
6.2. Okrąg	118
6.3. Elipsa	120
6.4. Hiperbola	123
6.5. Parabola	128
6.6. Krzywe stożkowe w przyrodzie, nauce i technice	130
Odpowiedzi i wskazówki	137
Literatura	153
Skorowidz	154

Wstęp

Niniejsza książka* jest pierwszą częścią zestawu podręczników do przedmiotu Algebra z geometrią analityczną. Pozostałymi częściami zestawu są zbiór zadań pt. „Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania” oraz opracowanie pt. „Algebra i geometria analityczna. Kolokwia i egzaminy”. Książki te są przeznaczone głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci wydziałów nauk ścisłych i przyrodniczych uniwersytetów oraz uczelni ekonomicznych, pedagogicznych, rolniczych oraz wojskowych.

Materiał zawarty w podręczniku obejmuje liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych, geometrię analityczną w przestrzeni oraz krzywe stożkowe. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończone są ćwiczeniami, przy czym początkowe z nich są z reguły najprostsze. Do wybranych twierdzeń podane są dowody. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza aktualnie obowiązujący program przedmiotu. W ten sam sposób oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Dodatkowy materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą rozszerzyć swoją wiedzę z algebry i geometrii analitycznej. Studentów zainteresowanych rozwiązywaniem trudnych i nietypowych zadań z tego przedmiotu zachęcamy do zapoznania się z książką „Studencki konkurs matematyczny. Zadania z rozwiązaniami”.

Równolegle do materiału teoretycznego omawianego na wykładach studenci powinni rozwiązywać samodzielnie zadania. Zbiór takich zadań wraz z metodami ich rozwiązywania można znaleźć w drugiej części zestawu pt. „Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania”. Ćwiczenia z tej książki oraz zadania z drugiej części podręcznika są podobnych typów i mają ten sam stopień trudności jak zadania, które zwykle pojawiają na kolokwiach i egzaminach. Zestawy zadań, które w poprzednich latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na sprawdzianach, umieszczone są w trzeciej części zestawu pt. „Algebra i geometria analityczna. Kolokwia i egzaminy”.

*Do 2005 r. książka miała tytuł „Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory”.

Do obecnego wydania dodano nowy paragraf „Krzywe stożkowe w przyrodzie, nauce i technice”, a rozdziały poprzedzono omówieniem ich zawartości. Ponadto, poprawiono zauważone błędy i usterki.

Serdecznie dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Wydziału Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o poprzednich wydaniach podręcznika. Podziękowania składamy także dr. Jerzemu Cisło za wyjaśnienia spraw związanych z nawigacją w żeglarskim.

Teresa Jurlewicz

Zbigniew Skoczylas

1. Liczby zespolone

W pierwszym rozdziale wprowadzamy liczby zespolone oraz działania na nich. Następnie omawiamy postać algebraiczną, trygonometryczną i wykładniczą tych liczb. Rozdział kończymy pierwiastkowaniem liczb zespolonych.

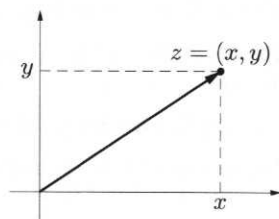
1.1. Podstawowe definicje i własności

Definicja 1.1. (liczba zespolona, działania w zbiorze liczb zespolonych)

Liczbą zespoloną nazywamy parę uporządkowaną liczb rzeczywistych, np. (x, y) , (u, v) , (a, b) . Liczby zespolone oznaczamy krótko przez z , w itp. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Mamy zatem

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Liczbę zespoloną $z = (x, y)$ przedstawiamy na płaszczyźnie w postaci punktu o współrzędnych (x, y) albo wektora o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu (x, y) . W tej interpretacji zbiór wszystkich liczb zespolonych nazywamy *płaszczyzną zespoloną*.



Rys. 1.1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

W zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzamy dwa działania – dodawanie i mnożenie. Sumę liczb zespolonych $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ określamy wzorem:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

a ich iloczyn wzorem:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Uwaga. Z określenia pary uporządkowanej wynika, że liczby zespolone $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = y_2$. Iloczyn $z \cdot z \cdot \dots \cdot z$ złożony z n czynników zespolonych z oznaczamy przez z^n .

Notka historyczna. Liczby zespolone pojawiły się po raz pierwszy w XVI wieku. Wykorzystywano je (używając formalnie symbolu $\sqrt{-1}$) do obliczania

pierwiastków rzeczywistych wielomianów stopnia trzeciego (wzory Cardana*). Pierwszą ścisłą teorię liczb zespolonych podał w XIX wieku Carl Gauss†. Jego interpretacja geometryczna liczb zespolonych oraz wprowadzona symbolika są stosowane współcześnie.

Ćwiczenie 1.2. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej liczby:

- (a) $z_1 = (3, 2)$; (b) $z_2 = (-3, 1)$; (c) $z_3 = (10, 0)$; (d) $z_4 = (0, -4)$.

Ćwiczenie 1.3. Dla $z_1 = (0, 1)$, $z_2 = (3, -4)$ oraz $z_3 = (\sqrt{2}, -3)$ obliczyć:

- (a) $z_1 + z_2$, $z_2 + z_3$; (b) $z_1 \cdot z_2$, $z_2 \cdot z_3$; (c) $(z_1)^2$.

Ćwiczenie 1.4. (własności działań w zbiorze liczb zespolonych)

Niech z_1, z_2, z_3 będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Pokazać, że:

(1) dodawanie liczb zespolonych jest:

- (a) przemienne, tzn. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
(b) łączne, tzn. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

(2) dla każdej liczby zespolonej z liczba $\mathbf{0} = (0, 0)$ spełnia równość $z + \mathbf{0} = z$;

(3) dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y)$ liczba $-z = (-x, -y)$ spełnia równość $z + (-z) = \mathbf{0}$;

(4) mnożenie liczb zespolonych jest

- (a) przemienne, tzn. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
(b) łączne, tzn. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

(5) dla każdej liczby zespolonej z liczba $\mathbf{1} = (1, 0)$ spełnia równość $z \cdot \mathbf{1} = z$;

(6) dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y) \neq \mathbf{0}$ liczba

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

spełnia równość $z \cdot \frac{1}{z} = \mathbf{1}$;

(7) mnożenie liczb zespolonych jest rozdzielne względem dodawania, tzn.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Uwaga. Liczby zespolone $\mathbf{0}$, $-z$, $\mathbf{1}$ oraz $1/z$, wprowadzone odpowiednio w punktach (2), (3), (5) oraz (6), są jedynymi liczbami o żądanych własnościach. Liczby te nazywamy: $\mathbf{0}$ – elementem neutralnym dodawania, $-z$ – elementem przeciwnym do liczby z , $\mathbf{1}$ – elementem neutralnym mnożenia, $1/z$ – elementem odwrotnym do liczby z .

*Geronimo Cardano (1501-1576), matematyk, filozof i lekarz włoski.

†Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matematyk, astronom i fizyk niemiecki.

Ćwiczenie 1.5. Pokazać, że jeżeli liczby zespolone z_1, z_2 spełniają warunek $z_1 \cdot z_2 = 0$, to $z_1 = 0$ lub $z_2 = 0$.

Definicja 1.6. (różnica i iloraz liczb zespolonych)

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi.

Różnicę liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Iloraz liczb zespolonych określamy wzorem:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}, \text{ o ile } z_2 \neq 0.$$

Uwaga. Wszystkie reguły podstawowych działań algebraicznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie), znane dla liczb rzeczywistych, obowiązują także w zbiorze liczb zespolonych. W szczególności prawdziwe są wzory skróconego mnożenia, wzór dwumianowy Newtona, wzory na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego itp.

Ćwiczenie 1.7. Obliczyć:

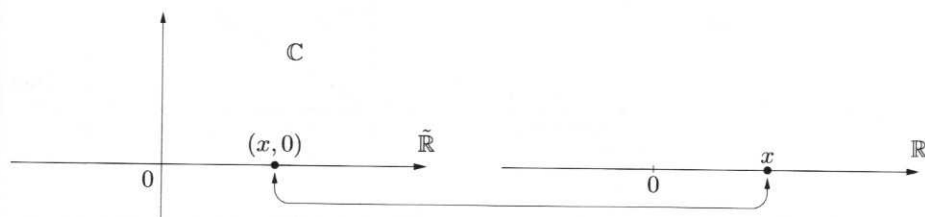
(a) $(4, -1) - (-3, 5)$; (b) $\frac{(-1, -2)}{(3, 4)}$; (c) $\frac{(0, -6)}{(0, 2)}$.

Uwaga. Łatwo zauważyć, że liczby zespolone postaci $(x, 0)$ ($x \in \mathbb{R}$) mają następujące własności:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0); \quad (x_1, 0) - (x_2, 0) = (x_1 - x_2, 0);$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0); \quad \frac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} = \left(\frac{x_1}{x_2}, 0 \right), \text{ o ile } x_2 \neq 0.$$

Z własności tych wynika, że zbiór $\tilde{\mathbb{R}} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ można utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Będziemy pisali zatem x zamiast $(x, 0)$.



Rys. 1.2. Zbiory $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$

1.2. Postać algebraiczna liczby zespolonej

Definicja 1.8. (jednostka urojona)

Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy ją symbolem i : $i = (0, 1)$.

Ćwiczenie 1.9. Pokazać, że liczba i jest rozwiązaniem równania $z^2 + 1 = 0$.

FAKT 1.10. (postać algebraiczna liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną z można jednoznacznie zapisać w postaci:

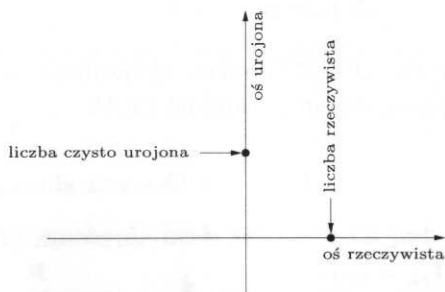
$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy *postacią algebraiczną*. Liczbę x nazywamy wówczas *częścią rzeczywistą* (z łac. *realis*) liczby zespolonej z , co zapisujemy $\operatorname{Re} z = x$, a liczbę y jej *częścią urojoną* (z łac. *imaginalis*), co zapisujemy $\operatorname{Im} z = y$. Ponadto łatwo zauważyć, że liczby zespolone w postaci algebraicznej $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i odpowiednio urojone są równe, czyli, gdy

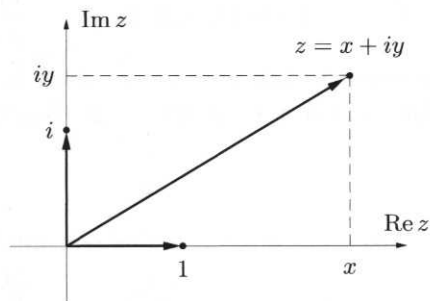
$$\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Dowód. Zauważmy, że $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, co po utożsamieniu liczb postaci $(x, 0)$ z liczbami x oznacza, że $z = x + iy$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Jednoznaczność tego przedstawienia wynika z tego, że gdyby jednocześnie zachodził związek $z = x_1 + iy_1$ dla $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, to mielibyśmy $(x_1, 0) + (0, 1)(y_1, 0) = (x_1, y_1) = (x, y)$, a więc $x_1 = x$, $y_1 = y$.

Uwaga. Liczbę zespoloną postaci iy ($y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) nazywamy *czysto urojoną*. Nie każde przedstawienie liczby zespolonej w formie $x + iy$ jest jej postacią algebraiczną. Niezbędne jest dodanie warunku $x, y \in \mathbb{R}$. Np. przedstawienie $1 + i(-2i)$ nie jest postacią algebraiczną liczby 3.



Rys. 1.3. Osie rzeczywista i urojona na płaszczyźnie zespolonej



Rys. 1.4. Interpretacja geometryczna postaci algebraicznej liczby zespolonej

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej wykonujemy tak jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów zmiennej i , przy warunku $i^2 = -1$. Przy dzieleniu przez liczbę zespoloną $x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) należy dzielną i dzielnik pomnożyć przez $x - iy$, aby w mianowniku uzyskać liczbę rzeczywistą.

Ćwiczenie 1.11. Wykonać działania:

- (a) $(1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{2}i)$; (b) $(3i - 2) - (1 - 2i)$;
 (c) $(1 + 2i)(-3 + 4i)$; (d) $\frac{4 + 5i}{2 - i}$.

Ćwiczenie 1.12. Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Uzasadnić równości:

- (a) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$; (b) $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$;
 (c) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$; (d) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$.

Ćwiczenie 1.13. Znaleźć liczby zespolone spełniające warunki:

- (a) $z^2 + 4i = 0$; (b) $\operatorname{Re} z - 3\operatorname{Im} z = 2$; (c) $\operatorname{Re}(iz) + 1 = 0$;
 (d) $\frac{z+2}{i-1} = \frac{3z+i}{2+i}$; (e) $z^2 - 6z + 10 = 0$; (f) $\operatorname{Im}(z^2) = (2-i)z$.

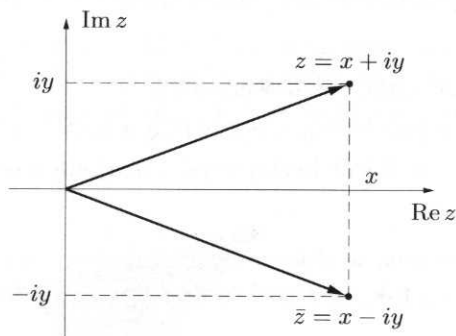
Wsk. Wykorzystać przedstawienie algebraiczne liczb zespolonych i warunków ich równości

Definicja 1.14. (*sprzężenie liczby zespolonej*)

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z}$ określoną wzorem:

$$\bar{z} = x - iy.$$

Liczba sprzężona do liczby zespolonej jest jej obrazem w symetrii względem osi $\operatorname{Re} z$ (rys. 1.5).



Rys. 1.5. Interpretacja geometryczna sprzężenia liczby zespolonej

FAKT 1.15. (*własności sprzężenia liczb zespolonych*)

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wtedy

- (1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; (2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;
 (3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; (4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, o ile $z_2 \neq 0$.

Uwaga. Równości w punktach (1) i (3) są prawdziwe dla dowolnej liczby odpowiednio składników i czynników.

Dowód. Udowodnimy własności (1), (4). Dowody pozostałych własności sprzężenia liczb zespolonych pozostawiamy Czytelnikowi. Niech $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ($x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$). Wtedy mamy odpowiednio

$$(1) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

$$(4) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)} = \frac{\overline{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}}{\overline{(x_2^2 + y_2^2)}} = \frac{\overline{x_1x_2 + y_1y_2}}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{\overline{x_2y_1 - x_1y_2}}{x_2^2 + y_2^2}i \\ = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i = \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Ćwiczenie 1.16. Sprawdzić, że

$$(a) \ z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z; \quad (b) \ z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z; \quad (c) \ \overline{\overline{z}} = z; \quad (d) \ \operatorname{Im}(\overline{z}) = -\operatorname{Im} z.$$

Ćwiczenie 1.17. Rozwiązać równania:

$$(a) \ 2z + (3 - i)\overline{z} = 5 + 4i; \quad (b) \ z + i = \overline{z + i}; \\ (c) \ z \cdot \overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i; \quad (d) \ z + \overline{z} + i(z - \overline{z}) = 5 + 3i.$$

Wsk. Wykorzystać przedstawienie algebraiczne liczb zespolonych i warunek ich równości

Ćwiczenie 1.18. Uzasadnić równoważności:

$$(a) \ \text{liczba zespolona } z \text{ jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy } z = \overline{z}; \\ (b) \ \text{liczba zespolona } z \neq 0 \text{ jest liczbą czysto urojoną wtedy i tylko wtedy, gdy } z = -\overline{z}.$$

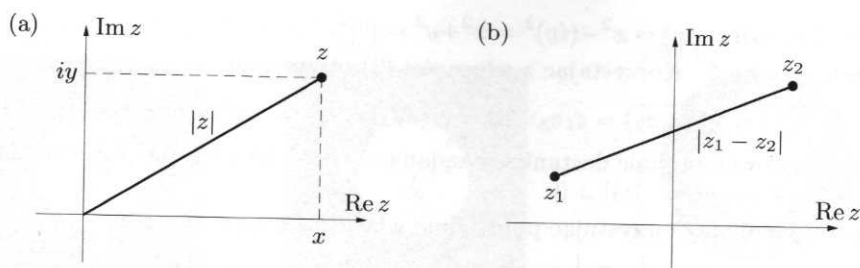
Ćwiczenie 1.19. Dlaczego w zbiorze liczb zespolonych nie można wprowadzić relacji nierówności ($\leq$) tak, aby zachowane były jej własności ze zbioru liczb rzeczywistych?

1.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Definicja 1.20. (moduł liczby zespolonej)

Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą $|z|$ określoną wzorem:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Rys. 1.6. Interpretacja geometryczna modułu:
(a) liczby zespolonej, (b) różnicy liczb zespolonych

Uwaga. Moduł liczby zespolonej jest uogólnieniem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Geometrycznie moduł liczby zespolonej z jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych (rys. 1.6 (a)). Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 (rys. 1.6 (b)).

Ćwiczenie 1.21. Obliczyć moduły liczb zespolonych:

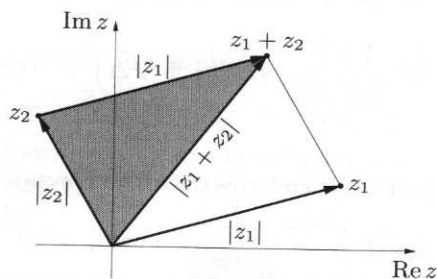
(a) $z = -i$; (b) $z = -1 + 3i$; (c) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $z = -5 - 12i$.

FAKT 1.22. (własności modułu liczby zespolonej)

Dla dowolnych liczb zespolonych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzą relacje:

(1) $|\bar{z}| = |z| = |-z|$; (2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; (3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(4) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, o ile $z_2 \neq 0$; (5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; (6) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Uwaga. Warunki w punktach (3) i (5) powyższego faktu prawdziwe są dla dowolnej liczby odpowiednio czynników i składników. W szczególności mamy $|z^n| = |z|^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Nierówność (5) jest nazywana *nierównością trójkąta* (rys. 1.7).



Rys. 1.7. Interpretacja geometryczna nierówności trójkąta

Dowód. Niech $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Wtedy mamy kolejno:

(1) $|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$,

$|-z| = |-x - iy| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

(2) $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

(3) Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Korzystając z własności (2) otrzymamy

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1) (z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1| |z_2|)^2.$$

Pierwiastkując obustronnie dostaniemy żadaną równość, korzystamy przy tym z tego, że $|z_1 \cdot z_2| \geq 0$ oraz $|z_1| \cdot |z_2| \geq 0$.

(4) Niech $z_2 \neq 0$. Wykorzystując poprzednie własności mamy

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \right| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1 \bar{z}_2| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1| |z_2| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(5) Możliwe są dwa przypadki $z_1 + z_2 = 0$ lub $z_1 + z_2 \neq 0$. W pierwszym przypadku nierówność jest oczywista. Załóżmy więc, że $z_1 + z_2 \neq 0$. Wtedy, wobec wzoru $\operatorname{Re}(u+w) = \operatorname{Re} u + \operatorname{Re} w$, nierówności $\operatorname{Re} u \leq |u|$ i równości $|u/w| = |u|/|w|$, mamy kolejno

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) \\ &\leq \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|}. \end{aligned}$$

Stąd oraz z oczywistej równości $\operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) = 1$, otrzymamy

$$\frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \geq 1,$$

co po pomnożeniu stron przez $|z_1 + z_2|$ daje żadaną nierówność.

(6) Z poprzedniej nierówności wynika, że

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \quad \text{oraz} \quad |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|.$$

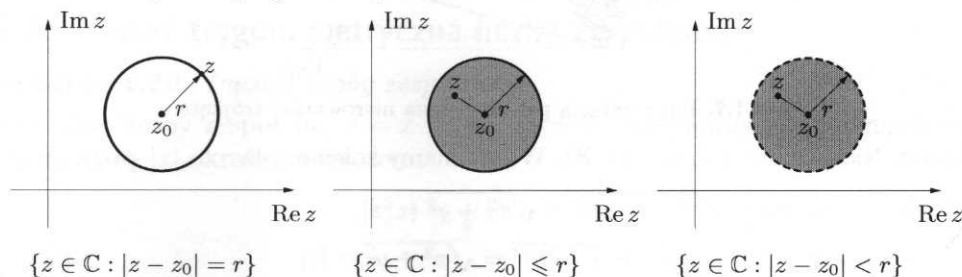
Zatem

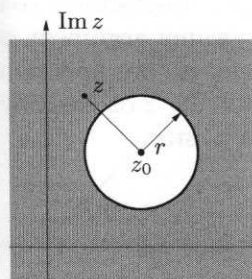
$$-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|, \quad \text{więc} \quad \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|.$$

Ćwiczenie 1.23. Obliczyć moduły liczb zespolonych:

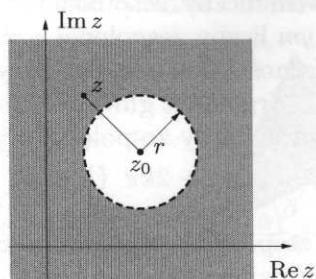
(a) $(1+2i)(3-4i)$; (b) $\frac{4+i}{3+2i}$; (c) $(1+\sqrt{2}i)^4$; (d) $\frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{2}+2i)^3}$.

Interpretacje geometryczne równań i nierówności z modułem

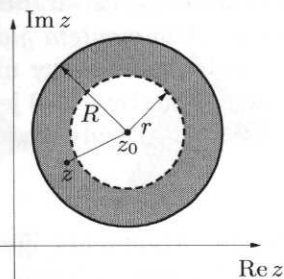




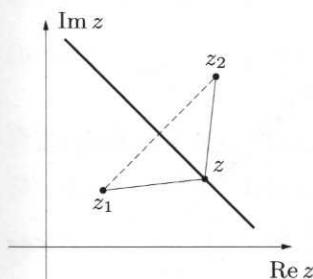
$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geq r\}$$



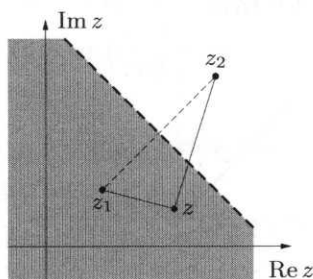
$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$$



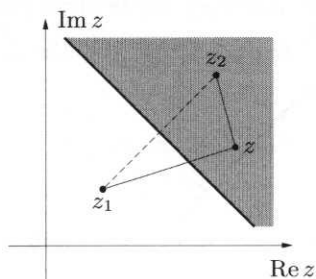
$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| \leq R\}$$



$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = |z - z_2|\}$$



$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| < |z - z_2|\}$$



$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \geq |z - z_2|\}$$

Ćwiczenie 1.24. Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

- (a) $|z + i| = 3$; (b) $|2iz + 6| \leq 4$; (c) $2 < |z + 2 - i| \leq 3$;
 (d) $|z + 5| = |3i - z|$; (e) $\left| \frac{z - 3}{z - 3i} \right| > 1$; (f) $|\bar{z} + 2 - i| \leq |z|$;
 (g*) $|z + i| + |z - i| = 2$; (h) $\left| \frac{z + i}{z^2 + 1} \right| \leq 1$; (i) $3|z - 1| \leq |z^2 - 1| < 6|z + 1|$.

Ćwiczenie 1.25. Uzasadnić, że równość

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

jest prawdziwa dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 . Podać interpretację geometryczną tej tożsamości.

Definicja 1.26. (argument i argument główny liczby zespolonej)

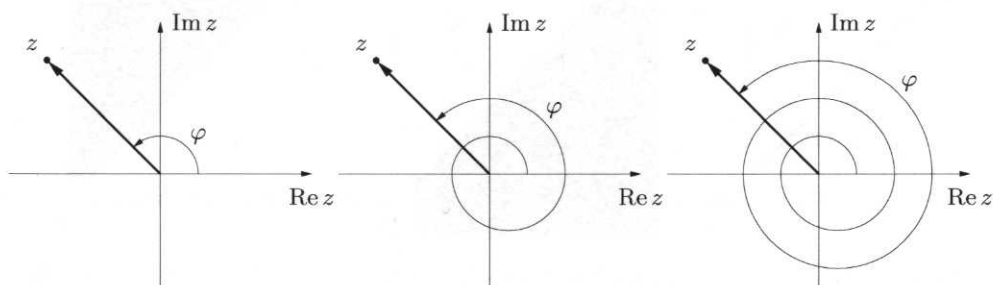
Argumentem liczby zespolonej $z = x + iy \neq 0$ ($x, y \in \mathbb{R}$) nazywamy każdą liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą układ równań:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Przyjmujemy, że argumentem liczby zespolonej $z = 0$ jest dowolna liczba $\varphi \in \mathbb{R}$. Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument φ tej liczby spełniający nierówność $0 \leq \varphi < 2\pi$. Przyjmujemy, że argumentem głównym liczby $z = 0$ jest 0. Argument główny liczby zespolonej z oznaczamy przez $\arg z$. Każdy argument φ liczby zespolonej $z \neq 0$ ma postać

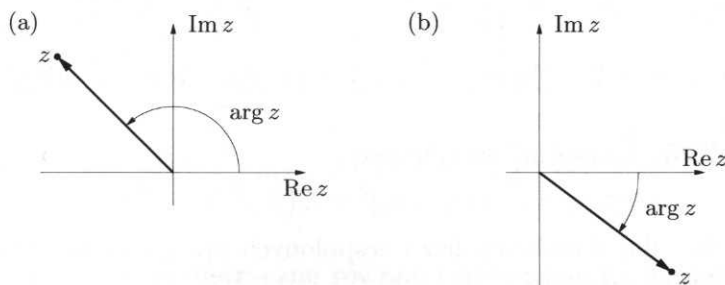
$$\varphi = \arg z + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Uwaga. Argumenty liczby zespolonej są miarami kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej i wektor wodzący tej liczby (rys. 1.8). Argument główny liczby zespolonej jest najmniejszą nieujemną miarą kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej i wektor wodzący tej liczby (rys. 1.9 (a)).



Rys. 1.8. Argumenty liczby zespolonej

Czasem wygodnie jest przyjąć, że argument główny liczby zespolonej jest liczbą z przedziału $(-\pi, \pi]$ (rys. 1.9 (b)).



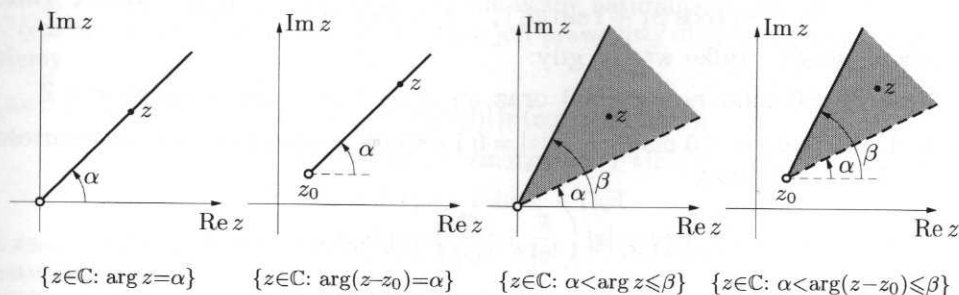
Rys. 1.9. Argument główny liczby zespolonej

Ćwiczenie 1.27. Znaleźć argumenty główne liczb zespolonych:

- (a) $z = 2$; (b) $z = i$; (c) $z = -\pi$;
 (d) $z = 3 - 3i$; (e) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; (f) $z = -3 + 4i$.

W ćwiczeniu (f) wykorzystać kalkulator lub komputer.

Interpretacje geometryczne równań i nierówności z argumentem



Ćwiczenie 1.28. Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

- (a) $\arg z = \frac{\pi}{4}$; (b) $\arg(z+i) = \pi$; (c) $\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{2}$; (d) $|\pi - \arg(z+1)| \geq \frac{3\pi}{4}$.

Ćwiczenie* 1.29. Niech $z \neq 0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Pokazać, że

(1) $\arg(\bar{z}) = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$;

(2) $\arg(-z) = \begin{cases} \arg z + \pi, & \text{gdy } 0 \leq \arg z < \pi, \\ \arg z - \pi, & \text{gdy } \pi \leq \arg z < 2\pi; \end{cases}$

(3) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi - \arg z$, gdy $\arg z \neq 0$.

Korzystając z powyższych wzorów narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

(a) $\arg(-z) = \frac{2\pi}{3}$; (b) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5\pi}{6}$; (c) $\arg(\bar{z}) = \frac{3\pi}{4}$;

(d) $\frac{\pi}{6} \leq \arg\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{\pi}{2}$; (e) $\frac{\pi}{4} < \arg(\bar{z}) \leq \frac{3\pi}{4}$; (f) $\frac{\pi}{6} \leq \arg(2+i-z) \leq \pi$;

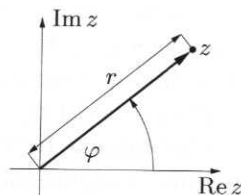
(g) $\arg(-\bar{z}) \geq \frac{\pi}{2}$; (h) $\arg\left(\frac{1}{z+i}\right) < \pi$; (i) $\pi < \arg[(1+i)z] < \frac{3\pi}{2}$.

FAKT 1.30. (postać trygonometryczna liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r \geq 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Liczba r jest wówczas modulem liczby z , a φ jednym z jej argumentów (rys. 1.10). Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy *postacią trygonometryczną*.



Rys. 1.10. Interpretacja geometryczna postaci trygonometrycznej liczby zespolonej

Uwaga. Łatwo pokazać, że liczby zespolone w postaci trygonometrycznej

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

są równe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$r_1 = r_2 = 0 \text{ albo } r_1 = r_2 > 0 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. Dla liczby $z = 0$ mamy $r = |z| = 0$ i równość zachodzi dla dowolnej wartości $\varphi \in \mathbb{R}$. Dla $z \neq 0$ mamy

$$z = x + iy = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie r jest modulem, a φ argumentem liczby z . Gdyby równość $z = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ zachodziła dla innych liczb $r_1 \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, to mielibyśmy

$$|z| = \sqrt{(r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_1 \sin \varphi_1)^2} = r_1 = r.$$

Z układu równań $\cos \varphi_1 = \cos \varphi$, $\sin \varphi_1 = \sin \varphi$ wynika związek $\varphi_1 = \varphi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Zatem liczba φ_1 też jest argumentem liczby z .

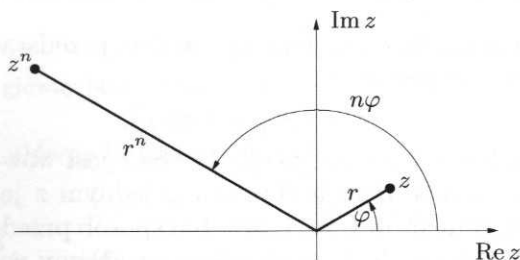
Ćwiczenie 1.31. Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej (w razie potrzeby wykorzystać kalkulator):

- (a) $z = -1$; (b) $z = 1 + i$; (c) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
 (d) $z = 3 + i$; (e) $z = 4 - i$; (f) $z = -2 + i$.

FAKT 1.32. (mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej) Niech $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ będą liczbami zespolonymi w postaci trygonometrycznej oraz niech n będzie liczbą naturalną. Wtedy:

- (1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$;
 (2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$, o ile $z_2 \neq 0$;
 (3) $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ (wzór de Moivre'a[†]).

Inaczej mówiąc, przy mnożeniu liczb zespolonych ich moduły mnożymy, a argumenty dodajemy. Podobnie, przy dzieleniu liczb zespolonych ich moduły dzielimy, a argumenty odejmujemy. Wzór de Moivre'a jest prawdziwy także, gdy n jest liczbą całkowitą.



Rys. 1.11. Ilustracja wzoru de Moivre'a

Dowód (3). Zastosujemy metodę indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ wzór jest prawdziwy. Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla liczby naturalnej n . Mamy zatem $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Pokażemy, że wzór ten jest prawdziwy dla liczby naturalnej $n+1$. Mamy

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z \left[\begin{smallmatrix} \text{zał.} \\ \text{ind.} \end{smallmatrix} \right] = [r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)] [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)] \\ &= r^{n+1} [\cos n\varphi \cos \varphi - \sin n\varphi \sin \varphi + i (\sin n\varphi \cos \varphi + \cos n\varphi \sin \varphi)] \\ &= r^{n+1} [\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi]. \end{aligned}$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej n .

Ćwiczenie 1.33. Korzystając z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{(a)} & (1-i)(\sqrt{3}+i); & \text{(b)} & (4+4i)(-3+3i); & \text{(c)} & (10-10\sqrt{3}i)(2-2i); \\ \text{(d)} & \frac{2+2i}{1-i}; & \text{(e)} & \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i); & \text{(f)} & \frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}; & \text{(g)} & \frac{3i}{1+i}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.34. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{(a)} & (1+i)^{10}; & \text{(b)} & (\sqrt{3}-i)^{60}; & \text{(c)} & (\sqrt{2}i-\sqrt{2})^{44}; \\ \text{(d)} & (\cos 11^\circ + i \sin 11^\circ)^9 (\cos 3^\circ + i \sin 3^\circ)^7; \\ \text{(e)} & \frac{(\cos 9^\circ + i \cos 9^\circ)^5}{(\sin 85^\circ + i \cos 85^\circ)^9} & \text{(f*)} & \left(\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}\right)^{18}. \end{aligned}$$

Wynik podać w postaci algebraicznej.

Ćwiczenie 1.35. Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić podane funkcje przez $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$:

$$\text{(a)} \cos 3\varphi; \quad \text{(b)} \sin 4\varphi; \quad \text{(c)} \cos 6\varphi.$$

Ćwiczenie 1.36. Niech $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r \geq 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Pokazać, że:

$$\begin{aligned} \text{(1)} & \bar{z} = r [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]; \\ \text{(2)} & \frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)], \text{ o ile } z \neq 0; \\ \text{(3)} & -z = r [\cos(\varphi + \pi) + i \sin(\varphi + \pi)]; \end{aligned}$$

Korzystając z powyższych wzorów i wzoru de Moivre'a znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

$$\begin{aligned} \text{(a)} & z^2 = (\bar{z})^2; & \text{(b)} & z^3 = -\bar{z}; & \text{(c)} & z^3 = -8i; \\ \text{(d)} & \bar{z} \cdot z^4 = \frac{1}{z}; & \text{(e)} & |z|^8 = z^4; & \text{(f)} & z^3 + (\bar{z})^3 = 0. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.37. Naszkicować zbiory liczb zespolonych z spełniających nierówność:

$$(a) \operatorname{Re} [(i-1)z^3] \geq 0; \quad (b) \operatorname{Im} z^4 > \operatorname{Re} [(\bar{z})^4].$$

Ćwiczenie 1.38. Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że:

- (1) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ dla $k = 0$ lub $k = -1$;
- (2) $\arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$;
- (3) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$ dla $k = 0$ lub $k = 1$, o ile $z_2 \neq 0$.

Liczbę k dobieramy (w zależności od z, z_1, z_2 oraz n) w ten sposób, aby argument główny należał do przedziału $[0, 2\pi)$ lub $(-\pi, \pi]$.

Korzystając z powyższych wzorów znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

$$(a) \arg[(1+i)z] = \frac{3\pi}{2}; \quad (b) \frac{\pi}{4} \leq \arg \frac{i}{z} \leq \frac{\pi}{2}; \quad (c) \arg(z^4) = \pi; \quad (d) \arg(z^3) < \frac{\pi}{2}.$$

Ćwiczenie 1.39. Obliczyć argumenty główne liczb zespolonych:

$$(a) \frac{(1-i\sqrt{3})^5 (2+2i)^3}{(1-i)^7}; \quad (b) \frac{(\sqrt{3}+i)^4 (1+i)^9}{(1+i\sqrt{3})^{10}}.$$

Ćwiczenie 1.40. Napisać wzory opisujące przekształcenia płaszczyzny zespolonej:

- (a) symetria względem osi rzeczywistej;
- (b) symetria względem osi urojonej;
- (c) obrót o kąt α wokół początku układu współrzędnych;
- (d) symetria względem punktu z_0 ;
- (e) translacja o wektor z_0 ;
- (f) jednokładność w skali k względem początku układu współrzędnych;
- (g*) symetria względem prostej $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.

Ćwiczenie* 1.41. Obliczyć $(5-i)^4(1+i)$ i następnie uzasadnić równość

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}.$$

Równość tę, zwaną wzorem Machina, dawniej stosowano do obliczeń przybliżonych liczby π . Korzystano przy tym z rozwinięcia funkcji $\arctg x$ w szereg potęgowy

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ćwiczenie* 1.42. Liczby zespolone stosuje się w elektrotechnice do opisu obwodów elektrycznych prądu zmiennego. Jednostkę urojoną oznacza się wtedy symbolem j w celu odróżnienia jej od natężenia prądu i płynącego w obwodzie. Niech ω będzie częstotliwością prądu, zaś t czasem. Zespolonym odpowiednikiem prądu $i = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ ($a, b \in \mathbb{R}$) jest liczba zespolona $a + jb$. Znaleźć i nazwać zespolone odpowiedniki następujących wielkości:

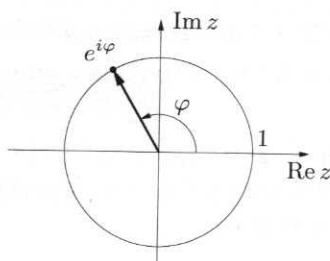
- (a) amplituda $\sqrt{a^2 + b^2}$ prądu i ; (b) faza φ prądu $i = r \sin(\omega t + \varphi)$;
 (c) prędkość zmian prądu di/dt ; (d) suma $i_1 + i_2$ prądów tej samej częstotliwości ω .

1.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej

Definicja 1.43. (symbol $e^{i\varphi}$)

Dla $\varphi \in \mathbb{R}$ liczbę zespoloną $\cos \varphi + i \sin \varphi$ oznaczamy krótko przez $e^{i\varphi}$;

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$



Rys. 1.12. Interpretacja geometryczna liczby $e^{i\varphi}$

Ćwiczenie 1.44. Obliczyć wartości podanych wyrażeń i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej:

- (a) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; (b) $e^{\pi i}$; (c) $e^{2\pi i}$;
 (d) $e^{-\frac{4}{3}\pi i}$; (e) e^i ; (f) e^{-2i} .

Ćwiczenie 1.45. Niech $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech k będzie dowolną liczbą całkowitą. Uzasadnić, że:

- (1) $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$; (2) $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$; (3) $(e^{i\varphi})^k = e^{ik\varphi}$;
 (4) $e^{i(\varphi + 2k\pi)} = e^{i\varphi}$; (5) $e^{i\varphi} \neq 0$; (6) $|e^{i\varphi}| = 1$;
 (7) $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1 = \varphi_2 + 2l\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$);
 (8) $\arg(e^{i\varphi}) = \varphi + 2l\pi$ dla pewnego $l \in \mathbb{Z}$.

FAKT 1.46. (wzory Eulera[§])

Niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Wówczas zachodzą wzory:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

[§]Leonard Euler (1707–1783), matematyk, fizyk i astronom szwajcarski.

Ćwiczenie 1.47. Korzystając ze wzorów Eulera wyrazić podane funkcje w zależności od sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x :

- (a) $\sin^2 x$; (b) $\cos^3 x$; (c) $\sin^4 x$; (d) $\cos^5 x$; (e) $\sin^6 x$; (f) $\cos^7 x$.

Uwaga. Otrzymane zależności wykorzystuje się do obliczania całek postaci:

$$\int \sin^n x \, dx, \quad \int \cos^n x \, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ćwiczenie 1.48. Korzystając ze wzorów Eulera przedstawić podane iloczyny w postaci sum sinusów i cosinusów:

- (a) $\sin \alpha \cos \beta$; (b) $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$; (c*) $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta$.

Ćwiczenie* 1.49. Obliczyć sumy:

- (a) $1 + \cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos 2nx$; (b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$.

FAKT 1.50. (postać wykładnicza liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci

$$z = re^{i\varphi},$$

gdzie $r \geq 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Liczba r jest wówczas modulem liczby z , a φ jej argumentem. Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy *postacią wykładniczą*.

Uwaga. Analogicznie jak w postaci trygonometrycznej, liczby zespolone $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ w postaci wykładniczej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{albo} \quad r_1 = r_2 > 0 \quad \text{oraz} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ćwiczenie 1.51. Podane liczby zespolone zapisać w postaci wykładniczej:

- (a) $z = -1$; (b) $z = 1 + i$; (c) $z = -i$; (d) $z = 1 - \sqrt{3}i$; (e) $z = -2 + 7i$.

W ćwiczeniu (e) wykorzystać kalkulator.

FAKT 1.52. (działania na liczbach zespolonych w postaci wykładniczej)

Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ będą liczbami zespolonymi w postaci wykładniczej. Ponadto niech k będzie liczbą całkowitą. Wtedy:

$$(1) \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad (2) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \text{ o ile } z_2 \neq 0; \quad (3) \quad z^k = r^k e^{ik\varphi};$$

$$(4) \quad \bar{z} = re^{-i\varphi}; \quad (5) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}, \text{ o ile } z \neq 0; \quad (6) \quad -z = re^{i(\varphi + \pi)}.$$

Ćwiczenie 1.53. Korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej znaleźć i narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających warunki:

$$(a) \quad z^2 = \bar{z}; \quad (b) \quad |z^4| = z; \quad (c) \quad z^3 \cdot (\bar{z})^2 = -1;$$

$$(d) \quad z^3 = (\bar{z})^3; \quad (e) \quad z^3 = (2 + 2i)^6; \quad (f) \quad z^5 = -4\bar{z}.$$

1.5. Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Definicja 1.54. (*pierwiastek z liczby zespolonej*)

Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną ω spełniającą równość $\omega^n = z$. Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Uwaga. Symbol $\sqrt[n]{}$ ma inne znaczenie w odniesieniu do liczb rzeczywistych, a inne do liczb zespolonych. Pierwiastek w dziedzinie rzeczywistej jest określony jednoznacznie i jest to funkcja $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla n nieparzystych oraz funkcja $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dla n parzystych. Pierwiastkowanie w dziedzinie zespolonej jest natomiast szukaniem rozwiązań równania $\omega^n = z$, zatem $\sqrt[n]{z}$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań tego równania. Symbolu pierwiastka w dziedzinie zespolonej **nie wolno używać** do obliczeń, gdyż jest on niejednoznaczny, a podstawowe wzory dla pierwiastków, prawdziwe w dziedzinie rzeczywistej, tutaj nie mają sensu. Poniższe zestawienie ilustruje omawiane różnice:

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{4} = \{-2, 2\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{i, -i\}$
$\sqrt{x^4} = x^2$	$\sqrt{z^4} = \{z^2, -z^2\}$
$\sqrt{x^2} = x $	$\sqrt{z^2} = \{z, -z\}$

Ćwiczenie 1.55. Wybierając dogodną postać liczb zespolonych obliczyć z definicji pierwiastki:

(a) $\sqrt{-7 + 24i}$; (b) $\sqrt[4]{-1}$; (c) $\sqrt[3]{-2 - 2i}$; (d) $\sqrt[3]{1 + 5i}$.

W ćwiczeniu (d) wykorzystać kalkulator.

FAKT 1.56. (*wzór na pierwiastki z liczby zespolonej*)

Każda liczba zespolona $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r > 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$, ma dokładnie n pierwiastków stopnia n :

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dowód. Szukamy wszystkich rozwiązań równania $\omega^n = z$. Niech $\omega = \varrho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, gdzie $\varrho > 0$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, będzie rozwiązaniem tego równania. Wtedy, po zastosowaniu wzoru de Moivre'a, otrzymamy

$$\omega^n = \varrho^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Stąd wynika, że $\varrho^n = r$ oraz $n\alpha = \varphi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Zatem $\varrho = \sqrt[n]{r}$ oraz $\alpha =$

$(\varphi + 2k\pi)/n$. Niech $\omega_k = \sqrt[n]{r} (\cos((\varphi + 2k\pi)/n) + i \sin((\varphi + 2k\pi)/n))$ będzie pierwiastkiem odpowiadającym wartości k . Z uwagi na okresowość funkcji trygonometrycznych pierwiastki ω_k oraz ω_{k+n} pokrywają się, więc istnieje tylko n parami różnych pierwiastków $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ liczby z .

Uwaga. Zbiór pierwiastków nie zależy od wyboru argumentu liczby zespolonej. Jeżeli φ jest jej argumentem głównym, to pierwiastek

$$\omega_0 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)$$

ma najmniejszy nieujemny argument. Ponadto dla $k = 0, 1, \dots, n-2$ prawdziwa jest zależność:

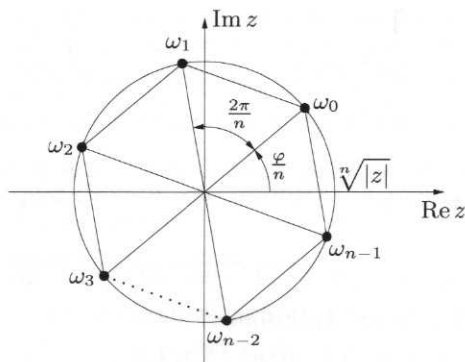
$$\omega_{k+1} = \omega_k \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = \omega_0 \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^{k+1}.$$

Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków

Zbiór pierwiastków stopnia $n \geq 3$ z liczby zespolonej

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r = |z|$ oraz $\varphi = \arg z$, pokrywa się ze zbiorem wierzchołków n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{r}$ i środka w początku układu współrzędnych.



Rys. 1.13. Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków z liczby zespolonej

Jeden z wierzchołków tego wielokąta jest w punkcie

$$\omega_0 = \sqrt[n]{r} (\cos(\varphi/n) + i \sin(\varphi/n)),$$

a kąty między promieniami wodzącymi sąsiednich wierzchołków są równe $2\pi/n$ (rys. 1.13).

Ćwiczenie 1.57. Obliczyć i narysować pierwiastki z liczb zespolonych:

- (a) $\sqrt[3]{8i}$; (b) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$; (c) $\sqrt[6]{-27}$; (d) $\sqrt[8]{1}$; (e) $\sqrt[5]{3 + 7i}$.

W ćwiczeniu (e) wykorzystać kalkulator.

Ćwiczenie 1.58. Rozwiązać równania kwadratowe lub wielokwadratowe:

- (a) $z^2 + 3z + 3 - i = 0$; (b) $z^2 + (2i - 1)z + 1 + 5i = 0$;
(c) $z^4 - 4i\sqrt{3}z^2 - 16 = 0$; (d*) $z^6 + (2 - 6i)z^3 + 16 - 16i = 0$.

Ćwiczenie 1.59. Znaleźć wszystkie rozwiązania równań:

- (a) $z^6 = (1 + 2i)^{12}$; (b) $z^3 = (1 - i)^3$;
(c) $(z - i)^4 = (iz + 3)^4$; (d*) $(z + 1)^6 + z^6 = 0$.

Ćwiczenie* 1.60. Znaleźć wszystkie liczby zespolone u i v , które spełniają równość:

- (a) $(u + v)^3 = u^3 + v^3$; (b) $(u + v)^4 = u^4 + v^4$; (c) $(u + v)^5 = u^5 + v^5$.

2. Wielomiany

W tym rozdziale wprowadzamy wielomiany rzeczywiste i zespolone. Następnie definiujemy pierwiastki wielomianów oraz formułujemy zasadnicze twierdzenie algebry. Na końcu rozdziału wprowadzamy ułamki proste i podajemy twierdzenie o rozkładzie funkcji wymiernych właściwych na takie ułamki.

2.1. Podstawowe definicje i własności

Definicja 2.1. (*wielomian rzeczywisty*)

Wielomianem rzeczywistym stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{R}$ dla $0 \leq k \leq n$ oraz $a_n \neq 0$. Liczby a_k ($0 \leq k \leq n$) nazywamy współczynnikami wielomianu W .

Przykład 2.2. Funkcje $P(x) = -x^3 + 0.75x - 15$, $Q(x) = 0.2x^9 - 0.34x^7$ oraz $R(x) \equiv \sqrt{3}$ są wielomianami rzeczywistymi odpowiednio stopnia 3, 9 oraz 0.

Definicja 2.3. (*wielomian zespolony*)

Wielomianem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ określoną wzorem:

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0,$$

gdzie $c_k \in \mathbb{C}$ dla $0 \leq k \leq n$ oraz $c_n \neq 0$. Liczby c_k , gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy współczynnikami wielomianu W .

Uwaga. Każdy wielomian rzeczywisty można traktować jako wielomian zespolony rozszerzając jego dziedzinę z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$. Tak będziemy postępować przy omawianiu pierwiastków zespolonych wielomianów rzeczywistych. Wielomian zespolony lub rzeczywisty będziemy nazywali krótko wielomianem.

Przykład 2.4. Funkcje $W(z) \equiv 1 - 2i$, $V(z) = z^2 + 1$ oraz $U(z) = iz^{15} + (2 - 3i)z^6 + 4 - i$ są wielomianami zespolonymi odpowiednio stopnia 0, 2 oraz 15.

Definicja 2.5. (*suma, różnica i iloczyn wielomianów*)

Niech P i Q będą wielomianami. Sumę, różnicę i iloczyn wielomianów P i Q określamy w sposób naturalny, tj. przyjmujemy:

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x), \quad (P - Q)(x) = P(x) - Q(x), \\ (P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x).$$

Uwaga. Oczywiście suma, różnica oraz iloczyn wielomianów nadal są wielomianami.

Ćwiczenie 2.6. Obliczyć sumy i różnice wielomianów:

- (a) $P(x) = 1 - x^2$, $Q(x) = -1 + 5x + x^2$;
- (b) $P(x) = 2x^5 - 5x^2 + x$, $Q(x) = 2x^2 - 2x + 3$;
- (c) $W(z) = (1 + i)z^2 - 2z$, $V(z) = iz^3 - z^2 - 1 + 5i$.

Ćwiczenie 2.7. Obliczyć iloczyny wielomianów:

- (a) $P(x) = 4 - x^2$, $Q(x) = 1 + 2x^3$;
- (b) $P(x) = 1 - x$, $Q(x) = x^5 + x^3 + x + 1$;
- (c) $W(z) = z^2 + i$, $V(z) = (1 - i)z^3 + iz + 3 - 2i$.

Definicja 2.8. (*podzielność wielomianów*)

Mówimy, że wielomian S jest *ilorazem*, a wielomian R *resztą* z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q , jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ($x \in \mathbb{C}$) spełniony jest warunek

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$$

oraz stopień reszty R jest mniejszy od stopnia dzielnika Q . Jeżeli $R(x) \equiv 0$, to mówimy, że wielomian P jest podzielny przez wielomian Q .

Ćwiczenie 2.9. Obliczyć ilorazy i reszty powstałe z dzielenia wielomianów:

- (a) $P(x) = 8x^4 + 3x^2 + 5x - 6$, $Q(x) = x + 1$;
- (b) $P(x) = x^3 + 27$, $Q(x) = x^2 - 3x + 9$;
- (c) $P(z) = iz^3 + 2z - 1 + 3i$, $Q(z) = z - 2i$;
- (d) $P(z) = z^4 + 1$, $Q(z) = z^2 - i$.

2.2. Pierwiastki wielomianów

Definicja 2.10. (*pierwiastek wielomianu*)

Liczbę rzeczywistą (zespoloną) x_0 nazywamy *pierwiastkiem rzeczywistym* (zespolonym) wielomianu W , jeżeli $W(x_0) = 0$.

Ćwiczenie 2.11. Sprawdzić, że podane liczby są pierwiastkami wskazanych wielomianów:

- (a) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -i, x_4 = i, W(x) = x^4 - 1$;
- (b) $x_1 = -2, x_2 = 1 - i, x_3 = 1 + i, W(x) = x^3 - 2x + 4$;
- (c) $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 - 3i, W(z) = z^2 + 2iz + 2 - 4i$;
- (d) $z_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}, W(z) = z^3 + 6z + 2$;
- (e) $z_1 = 2\sqrt{2}, W(z) = z^3 - 9z + 2\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 2.12. Nie wykonując dzielenia wyznaczyć reszty z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q , jeżeli:

- (a) $P(x) = x^4 - 1, Q(x) = x - 2$;
- (b) $P(x) = x^{100} + 4x^2 + 1, Q(x) = x^2 - 1$;
- (c) $P(x) = x^{99} + 5x, Q(x) = x^2 + 1$;
- (d) $P(x) = x^{20} + 2x^{19} - 4x^{18}, Q(x) = x^4 - 16$;
- (e*) $P(x) = x^{2002} + x^{2001} + 2000, Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

TWIERDZENIE 2.13. (Bézout*)

Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian P taki, że

$$W(x) = (x - x_0)P(x).$$

Dowód. Niech $W(x_0) = 0$. Dzieląc wielomian W przez dwumian $x - x_0$ otrzymamy $W(x) = (x - x_0)P(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$). Ponieważ $W(x_0) = 0$, zatem $c = 0$ i ostatecznie $W(x) = (x - x_0)P(x)$. Z drugiej strony niech $W(x) = (x - x_0)P(x)$ dla pewnego wielomianu P . Wówczas $W(x_0) = 0$, więc liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W .

Uwaga. Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x - x_0$ jest równa $W(x_0)$. Twierdzenie Bézout stosujemy do wyznaczania pierwiastków wielomianów. Jeżeli znany jest jeden z pierwiastków wielomianu W stopnia $n > 1$, np. x_0 , to pozostałe są pierwiastkami wielomianu $W(x)/(x - x_0)$ stopnia $n - 1$.

Ćwiczenie* 2.14. Korzystając z twierdzenia Bézout uzasadnić, że:

- (a) każdy wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków;
- (b) dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są ich stopnie oraz współczynniki przy jednakowych potęgach zmiennej.

Ćwiczenie 2.15. Znajdąc jeden z pierwiastków podanych wielomianów znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

*Étienne Bézout (1730–1783), matematyk francuski.

- (a) $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $x_1 = -1$;
 (b) $W(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, $x_1 = 2$;
 (c) $W(z) = z^3 + 5iz^2 - 7z - 3i$, $z_1 = -3i$.

Ćwiczenie* 2.16. Znaleźć wszystkie wielomiany W , które dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełniają warunek $xW(x-1) = (x-26)W(x)$.

Definicja 2.17. (*pierwiastek wielokrotny wielomianu*)

Liczbę x_0 nazywamy *pierwiastkiem k -krotnym* wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian P taki, że

$$W(x) = (x - x_0)^k P(x) \text{ oraz } P(x_0) \neq 0.$$

Uwaga. Jeżeli x_1 jest k_1 -krotnym pierwiastkiem, x_2 jest k_2 -krotnym pierwiastkiem, ..., x_m jest k_m -krotnym pierwiastkiem wielomianu, to on jest podzielny przez iloczyn $(x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}$.

Ćwiczenie 2.18. Znaleźć krotności pierwiastków wielomianów:

- (a) $x_0 = 2$, $W(x) = x^2 - 3x + 2$; (b) $x_0 = 0$, $W(x) = x^5 - 4x^3$;
 (c) $x_0 = \sqrt{2}$, $W(x) = x^4 - 4x^2 + 4$; (d) $z_0 = -i$, $W(z) = (z^2 + 1)^4$.

FAKT 2.19. (*o pierwiastkach wielokrotnych wielomianu*)

Liczba x_0 jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy

$$W(x_0) = W'(x_0) = \dots = W^{(k-1)}(x_0) = 0 \text{ oraz } W^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

TWIERDZENIE 2.20. (*o pierwiastkach całkowitych wielomianu*)

Jeżeli liczba całkowita $p \neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych, to jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Dowód. Niech $p \neq 0$ będzie całkowitym pierwiastkiem wielomianu W . To oznacza, że

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Stąd

$$a_0 = p(-a_n p^{n-1} - a_{n-1} p^{n-2} - \dots - a_1).$$

Ponieważ czynnik w nawiasie oraz a_0 są liczbami całkowitymi, więc p jest dzielnikiem a_0 .

Uwaga. Wielomian o współczynnikach całkowitych może nie mieć pierwiastków całkowitych. Przykładami takich wielomianów są: $x^3 - 2$, $x^2 + 1$. Liczby rzeczywiste, które są pierwiastkami wielomianów stopnia ≥ 1 o współczynnikach całkowitych, nazywamy *algebraicznymi*. Należą do nich wszystkie liczby

wymierne oraz niektóre niewymierne, np. $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{5}$. Pozostałe liczby niewymierne nazywamy *przestępnymi*. Przykładami takich liczb są: e , π , $2^{\sqrt{2}}$, $\log_2 3$.

Ćwiczenie 2.21. Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite wielomianów:

- (a) $W(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 8$; (b) $W(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$;
 (c) $W(x) = x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3$; (d) $W(x) = 4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - x - 2$.

Ćwiczenie 2.22. Nie wykonując obliczeń pokazać, że wielomian

$$x^{10} + 2x^9 - 6x^5 + 4x^2 + 3x - 3^{2016}$$

nie ma pierwiastków całkowitych.

TWIERDZENIE 2.23. (*o pierwiastkach wymiernych wielomianu*)

Jeżeli liczba wymierna p/q , gdzie p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych, to p jest dzielnikiem współczynnika a_0 , a q – współczynnika a_n .

Uwaga. Jeżeli $a_n = 1$, to wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu są całkowite.

Dowód. Mamy

$$W\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0,$$

gdzie p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi. Stąd

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Niech

$$k = a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}$$

oraz

$$l = a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_0 q^{n-1}.$$

Liczby k , l są całkowite i spełniają zależności $pk + a_0 q^n = 0$ oraz $a_n p^n + ql = 0$. Liczba p jest więc dzielnikiem liczby $a_0 q^n$, lecz nie jest dzielnikiem q^n . Stąd wynika, że p jest dzielnikiem liczby a_0 . Podobnie liczba l dzieli $a_n p^n$, ale nie dzieli p^n , więc dzieli a_n .

Ćwiczenie 2.24. Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów:

- (a) $W(x) = 4x^4 + x^2 - 3x + 1$; (b) $W(x) = 4x^3 - 18x^2 - 2x + 5$;
 (c) $W(x) = 24x^3 - 10x^2 - 3x + 1$; (d) $W(x) = x^3 + 1.25x^2 + 2.25x + 0.5$.

Ćwiczenie 2.25. (*pierwiastki zespolonego trójkianu kwadratowego*)

Pokazać, że wielomian zespolony $W(z) = az^2 + bz + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$, ma dwa pierwiastki zespolone:

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a},$$

gdzie $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Dla współczynników rzeczywistych a, b, c możliwe są trzy przypadki:

- (1) $\Delta > 0$ – wielomian W ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste;
- (2) $\Delta = 0$ – wielomian W ma jeden dwukrotny pierwiastek rzeczywisty

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a};$$

(3) $\Delta < 0$ – wielomian W nie ma pierwiastków rzeczywistych, ma natomiast dwa pierwiastki zespolone z_1, z_2 spełniające związek $z_1 = \bar{z}_2$. Korzystając z powyższych wzorów znaleźć pierwiastki trójkianów kwadratowych:

- (a) $W(x) = x^2 - 2x + 2$; (b) $W(z) = 2z^2 + (6 - 2i)z + 4 - 3i$;
- (c) $W(z) = z^2 + (2 - i)z + 3 - i$; (d) $W(z) = 6z^2 + (5i - 3)z - 1 - i$.

2.3. Zasadnicze twierdzenie algebry

TWIERDZENIE 2.26 (*zasadnicze twierdzenie algebry*)

Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Uwaga. W tabeli podajemy równania wielomianowe o współczynnikach z danej klasy liczbowej, które nie mają pierwiastków w tej klasie, ale mają je w następnej.

Klasa liczb	Oznaczenie	Równanie
liczby naturalne	$\mathbb{N}$	$x + 5 = 0$
liczby całkowite	$\mathbb{Z}$	$4x + 5 = 0$
liczby wymierne	$\mathbb{Q}$	$x^2 - 2 = 0$
liczby rzeczywiste	$\mathbb{R}$	$x^2 + 3 = 0$
liczby zespolone	$\mathbb{C}$	każde równanie ma pierwiastek zespolony

Notka historyczna. Zasadnicze twierdzenie algebry zostało sformułowane w XVIII wieku przez Maclaurina[†] i Eulera. Twierdzenie to próbowali udowodnić najwięksi matematycy tego okresu: d'Alembert[‡], Euler, Lagrange[§]. Kilka dowodów twierdzenia podał Gauss w XIX wieku. W znanych współcześnie dowodach wykorzystuje się metody analizy matematycznej lub zaawansowane metody algebry.

FAKT 2.27. (o przedstawianiu wielomianu w postaci iloczynu dwumianów)

(1) Każdy wielomian zespolony stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma n pierwiastków zespolonych (uwzględniając pierwiastki wielokrotne).

(2) Niech wielomian W stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma pierwiastki zespolone z_j o krotnościach odpowiednio k_j , gdzie $k_j \in \mathbb{N}$ dla $1 \leq j \leq m$ oraz $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Wtedy

$$W(z) = c_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m},$$

gdzie c_n jest współczynnikiem przy z^n w wielomianie W .

Dowód (1). Przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Wielomian zespolony stopnia 1 postaci $W(z) = c_1 z + c_0$, gdzie $c_1 \neq 0$, ma jeden pierwiastek $z_0 = -c_0/c_1$. Załóżmy, że każdy wielomian zespolony stopnia n ma n , niekoniecznie różnych, pierwiastków. Niech W będzie teraz wielomianem stopnia $n+1$. Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że wielomian W ma pierwiastek z_0 . Na mocy twierdzenia Bézouta istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)P(z)$. Oczywiście $W(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = z_0$ lub $P(z) = 0$. Stopień wielomianu P jest równy n , więc na mocy założenia indukcyjnego ma on n pierwiastków zespolonych z uwzględnieniem pierwiastków wielokrotnych. Są one jednocześnie pierwiastkami wielomianu W , a liczba z_0 jest $(n+1)$ -szym pierwiastkiem tego wielomianu. To kończy dowód indukcyjny.

(2). Niech liczby zespolone $z_1, z_2, \dots, z_n$ będą pierwiastkami wielomianu zespolonego

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 \text{ stopnia } n.$$

Na mocy twierdzenia Bézouta istnieją wielomiany P_k stopnia k dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ takie, że

$$\begin{aligned} W(z) &= (z - z_1) P_{n-1}(z) \\ &= (z - z_1)(z - z_2) P_{n-2}(z) = \dots = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) P_0(z). \end{aligned}$$

Oczywiście $P_0(z) \equiv c_n$. Zatem $W(z) = c_n (z - z_1) \dots (z - z_n)$. Grupujemy teraz pierwiastki jednakowe w m grup o liczebnościach równych krotności reprezentanta danej grupy i otrzymujemy żadaną postać wielomianu.

Ćwiczenie 2.28. Rozłóżć na iloczyny dwumianów:

(a) $W(z) = z^2 + i$; (b) $W(z) = z^3 + 1$; (c) $W(z) = z^6 + 3z^4 + 3z^2 + 1$;

(d) $W(z) = z^4 + 1$; (e) $W(z) = z^4 + iz^2 + 6$; (f) $W(z) = z^4 - (1 + i)^4$.

[†]Colin Maclaurin (1698-1746), matematyk szkocki.

[‡]Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), matematyk i fizyk francuski.

[§]Joseph Louis Lagrange (1736-1813), matematyk i fizyk francuski.

FAKT 2.29. (wzory Viète'a[¶])

Niech $W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$ będzie wielomianem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N}$. Wówczas liczby $z_1, z_2, \dots, z_n$ są pierwiastkami wielomianu W (z uwzględnieniem krotności) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1 + z_2 + \dots + z_n & = & -\frac{c_{n-1}}{c_n}, \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n & = & \frac{c_{n-2}}{c_n}, \\ z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n & = & -\frac{c_{n-3}}{c_n}, \\ \vdots & & \vdots \\ z_1 z_2 z_3 \dots z_{n-1} z_n & = & (-1)^n \frac{c_0}{c_n}. \end{array} \right.$$

Ćwiczenie* 2.30.

- (a) Obliczyć sumę kwadratów wszystkich elementów zbioru $\sqrt[7]{-3}$.
 (b) Znaleźć sumę odwrotności pierwiastków zespolonych wielomianu $x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 7$.
 (c) Znaleźć pierwiastki wielomianu $x^4 - x^3 - 7x^2 + 23x - 20$ wiedząc, że iloczyn dwóch z nich jest równy -5 .

Ćwiczenie 2.31. Niech W będzie wielomianem zespolonym o współczynnikach rzeczywistych. Sprawdzić, że $\overline{W(z)} = W(\bar{z})$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

FAKT 2.32. (o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego)

Niech W będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba zespolona z_0 jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0$ jest k -krotnym pierwiastkiem tego wielomianu.

Dowód. Z definicji pierwiastka k -krotnego wielomianu W istnieje wielomian P taki, że

$$W(z) = (z - z_0)^k P(z) \text{ oraz } P(z_0) \neq 0.$$

Ponieważ W jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, więc $\overline{W(z)} = W(\bar{z})$. Stąd

$$W(\bar{z}) = \overline{(z - z_0)^k P(z)} = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \overline{P(z)}.$$

Wstawiając w powyższej równości z w miejsce $\bar{z}$ otrzymujemy $W(z) = (z - \bar{z}_0)^k \overline{P(\bar{z})}$. Przyjmijmy, że $Q(z) = \overline{P(\bar{z})}$. Funkcja Q jest wielomianem zmiennej z , którego współczynniki są liczbami sprzężonymi do odpowiednich współczynników wielomianu P .

[¶]François Viète (1540–1603), matematyk francuski.

Ponadto $Q(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} \neq 0$ oraz $W(z) = (z - \bar{z}_0)^k Q(z)$, zatem liczba $\bar{z}_0$ jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu W .

Ćwiczenie 2.33. Znajdąc jeden z pierwiastków podanych wielomianów rzeczywistych znaleźć pozostałe pierwiastki tych wielomianów:

- (a) $W(x) = x^3 - (2 + \sqrt{3})x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x - 2\sqrt{3}$, $x_1 = 1 - i$;
- (b) $W(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$, $x_1 = 1 + 2i$;
- (c) $W(x) = x^4 + bx^2 + c$, $x_1 = 2 - i$ ($b, c \in \mathbb{R}$);
- (d) $W(x) = x^4 + 4x^3 + cx^2 + dx + 100$, $x_1 = -3 + i$ ($c, d \in \mathbb{R}$).

Ćwiczenie* 2.34. (a) Sprawdzić, że liczba $z_1 = i$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(z) = z^4 - (1 + i)z^3 + (3 + i)z^2 + (5 - 3i)z - 5i$ i następnie znaleźć pozostałe pierwiastki.

(b) Znaleźć pierwiastki wielomianu $(z + i)(z + 2i)(z + 3i)(z + 4i) - 120$.

TWIERDZENIE 2.35. (o rozkładzie wielomianu na czynniki rzeczywiste)

Niech W będzie wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$ o współczynnikach rzeczywistych. Ponadto niech x_j ($1 \leq j \leq r$) będą pierwiastkami rzeczywistymi tego wielomianu o krotności k_j oraz niech $z_j, \bar{z}_j$, gdzie $\text{Im } z_j > 0$ dla $1 \leq j \leq s$, będą pierwiastkami zespolonymi tego wielomianu o krotności l_j , przy czym $(k_1 + \dots + k_r) + 2(l_1 + \dots + l_s) = n$. Wtedy

$$W(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s},$$

gdzie $p_j = -2 \text{Re } z_j$ oraz $q_j = |z_j|^2$ dla $1 \leq j \leq s$, a a_n jest współczynnikiem wielomianu W przy x^n .

Inaczej mówiąc, każdy wielomian rzeczywisty można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego. Mówimy wówczas o rozkładzie wielomianu rzeczywistego na rzeczywiste czynniki nierozkładalne.

Dowód. Korzystając z **Faktu 2.27** (str. 34) przedstawimy najpierw wielomian W w postaci iloczynu dwumianów. Mamy zatem

$$W(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} (x - z_1)^{l_1} (x - \bar{z}_1)^{l_1} \dots (x - z_s)^{l_s} (x - \bar{z}_s)^{l_s}.$$

Łącząc parami pierwiastki sprzężone otrzymamy

$$\begin{aligned} (x - z_j)^{l_j} (x - \bar{z}_j)^{l_j} &= [(x - z_j)(x - \bar{z}_j)]^{l_j} = [x^2 - x(z_j + \bar{z}_j) + z_j \bar{z}_j]^{l_j} \\ &= [x^2 - 2x \text{Re } z_j + |z_j|^2]^{l_j} = [x^2 + p_jx + q_j]^{l_j} \end{aligned}$$

dla $1 \leq j \leq s$. Otrzymaliśmy w ten sposób żadaną postać wielomianu.

Ćwiczenie 2.36. Rozłożyć na nierozkładalne czynniki rzeczywiste wielomiany rzeczywiste o podanych stopniach i pierwiastkach:

- (a) $n = 4$, $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 2 - 3i$;
 (b) $n = 5$, $z_1 = 4$, $z_2 = 1 - 2i$ o krotności 2;
 (c) $n = 6$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = i$, $z_4 = 2i$;
 (d) $n = 7$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$ o krotności 2, $z_3 = 3$.

Ćwiczenie 2.37. Podane wielomiany przedstawić w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych nierozkładalnych:

- (a) $W(x) = x^3 - 8$; (b) $W(x) = x^4 + 16$; (c) $W(x) = x^4 - 3x^2 + 2$;
 (d) $W(x) = x^5 - 1$; (e) $W(x) = x^4 + x^2 + 1$; (f) $W(x) = x^6 + 27$.

Ćwiczenie 2.38. Pokazać, że każdy wielomian rzeczywisty stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty.

2.4. Ułamki proste

Definicja 2.39. (*funkcja wymierna, wymierna właściwa*)

Funkcję wymierną rzeczywistą (zespoloną) nazywamy iloraz dwóch wielomianów rzeczywistych (zespoleonych), przy czym dzielnik nie jest wielomianem zerowym. Funkcję wymierną nazywamy *właściwą*, jeżeli stopień wielomianu w liczniku ułamka określającego tę funkcję jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku.

Uwaga. Każda funkcja wymierna jest sumą wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej.

Ćwiczenie 2.40. Podane funkcje wymierne rozłożyć na sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

- (a) $\frac{x^4 + 4x + 1}{x^2 + 2}$; (b) $\frac{x^5 + x}{x^3 + 1}$; (c) $\frac{iz^4 + z^2 + 3 - i}{z^2 + z - 1}$.

Definicja 2.41. (*ułamki proste*)

• Zespoleonym *ułamkiem prostym* nazywamy zespoloną funkcję wymierną postaci:

$$\frac{A}{(z + a)^n}, \quad \text{gdzie } A, a \in \mathbb{C} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}.$$

• Rzeczywistym *ułamkiem prostym pierwszego rodzaju* nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci:

$$\frac{A}{(x + a)^n}, \quad \text{gdzie } A, a \in \mathbb{R} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}.$$

• Rzeczywistym ułamkiem prostym *drugiego rodzaju* nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci:

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}, \quad \text{gdzie } p, q, A, B, \in \mathbb{R} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}, \text{ przy czym } \Delta = p^2 - 4q < 0.$$

Przykład 2.42. Funkcje wymierne:

$$(a) \quad \frac{i}{z+4}, \quad \frac{1-3i}{(z-i)^5}, \quad \frac{1}{(z-1+2i)^9}$$

są zespolonymi ułamkami prostymi;

$$(b) \quad \frac{-1}{x+2}, \quad \frac{5}{(x-3)^4}, \quad \frac{2}{x^{99}}$$

są rzeczywistymi ułamkami prostymi pierwszego rodzaju;

$$(c) \quad \frac{2-x}{x^2+2x+5}, \quad \frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{x}{(x^2+4)^{20}}, \quad \frac{3x-5}{(x^2-4x+19)^{100}}$$

są rzeczywistymi ułamkami prostymi drugiego rodzaju.

TWIERDZENIE 2.43 (o rozkładzie funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste)

Każda funkcja wymierna właściwa rzeczywista (zespolona) jest sumą rzeczywistych (zespolonych) ułamków prostych. Przedstawienie to jest jednoznaczne. W szczególności:

(a) Zespolona funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(z)}{c_n (z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} \dots (z-z_m)^{k_m}}$$

jest sumą $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ zespolonych ułamków prostych, przy czym czynnikowi $(z-z_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych postaci:

$$\frac{A_{i1}}{z-z_i} + \frac{A_{i2}}{(z-z_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(z-z_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik_i} \in \mathbb{C}$ dla $1 \leq i \leq m$.

(b) Rzeczywista funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(x)}{a_n (x-x_1)^{k_1} (x-x_2)^{k_2} \dots (x-x_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} (x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}},$$

jest sumą $k_1 + k_2 + \dots + k_r$ rzeczywistych ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz $l_1 + l_2 + \dots + l_s$ rzeczywistych ułamków prostych drugiego rodzaju, przy czym

• czynnikowi $(x - x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych pierwszego rodzaju postaci:

$$\frac{A_{i1}}{x - x_i} + \frac{A_{i2}}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x - x_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik_i} \in \mathbb{R}$ dla $1 \leq i \leq r$,

• a czynnikowi $(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_j x + q_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \dots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}},$$

gdzie $B_{j1}, B_{j2}, \dots, B_{jl_j}, C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jl_j} \in \mathbb{R}$ dla $1 \leq j \leq s$.

Ćwiczenie 2.44. Napisać ogólny rozkład zespolonych funkcji wymiernych na zespolone ułamki proste (nie obliczać współczynników):

$$(a) \frac{4z + i}{z^2(z + i)^2}; \quad (b) \frac{1 + i + iz^2}{z^4 - 16}; \quad (c) \frac{z^3 + z^2}{(z + 1)^3 z}; \quad (d) \frac{1}{z(z^2 + 1)(z^2 + 2)^2}.$$

Ćwiczenie 2.45. Podane zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na sumę zespolonych ułamków prostych:

$$(a) \frac{2z}{z^2 + 9}; \quad (b) \frac{z + 4}{(z + i)^2}; \quad (c) \frac{1}{z^2 + 2iz - 4}; \quad (d) \frac{z^3 - 2z^2 - 4z - 8}{z^4 - 16}.$$

Ćwiczenie 2.46. Napisać ogólny rozkład rzeczywistych funkcji wymiernych na rzeczywiste ułamki proste pierwszego lub drugiego rodzaju (nie obliczać współczynników):

$$(a) \frac{3x^3 + 4x^2 + x + 1}{x(x + 1)^3}; \quad (b) \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 - x}; \quad (c) \frac{3x}{(x^2 + 1)^2(x^2 - 9)};$$

$$(d) \frac{x^5 + x^2 + 1}{(x^2 + 4)^3(x^2 + 1)}; \quad (e) \frac{3x + 4}{(x + 3)(x^2 + x + 1)}; \quad (f) \frac{x^7 + x^6 + x^5}{(x^2 + 3)^2(x^2 - 4)^2}.$$

Ćwiczenie 2.47. Podane rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na sumę rzeczywistych ułamków prostych pierwszego lub drugiego rodzaju:

$$(a) \frac{1}{x^2(x - 1)^2}; \quad (b) \frac{x^2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}; \quad (c) \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 - x};$$

$$(d) \frac{2x^2 - 6x - 9}{x^4 + 6x^3 + 9x^2}; \quad (e) \frac{10x + 3}{x^3 + 27}; \quad (f) \frac{x}{(x^2 + 1)^2}.$$

3. Macierze i wyznaczniki

W niniejszym rozdziale wprowadzamy macierze oraz definiujemy działania na nich. Następnie określamy wyznacznik i omawiamy jego własności. Na końcu rozdziału definiujemy macierz odwrotną i podajemy jej własności. Ponadto omawiamy metody odwracania macierzy.

3.1. Macierze – podstawowe określenia

Definicja 3.1. (macierz rzeczywista i zespolona)

Macierzą rzeczywistą (zespoloną) wymiaru $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) nazywamy prostokątną tablicę złożoną z mn liczb rzeczywistych (zespolonych) ustawionych w m wierszach i n kolumnach.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

j-ta kolumna

← i-ty wiersz

Uwaga. Macierze będziemy oznaczali dużymi literami alfabetu np. A, B, X itp. Element macierzy A stojący w i -tym wierszu oraz w j -tej kolumnie oznaczamy przez a_{ij} . Macierz A można także zapisywać w postaci $[a_{ij}]_{m \times n}$ lub $[a_{ij}]$, gdy znany jest jej wymiar. Macierze A lub B są równe, gdy mają te same wymiary $m \times n$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq n$. Rozważa się także macierze, których elementami są funkcje rzeczywiste lub zespolone.

Przykład 3.2. Podane poniżej macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2i \\ -1+3i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} e^x & \cos x \\ -\cos x & e^{-x} \end{bmatrix}.$$

mają odpowiednio wymiary 2×3 , 3×1 , 4×4 , 2×2 . Macierze A i C są rzeczywiste, macierz B jest zespolona, a D jest macierzą funkcyjną (rzeczywistą).

Ćwiczenie 3.3. (a) Zapisać w formie macierzy wyniki jednej kolejki rozgrywek ligowych w piłce nożnej.

(b) Zapisać w formie macierzy położenie:

(i) pionków w czasie gry w warcaby; (ii) figur w czasie gry w szachy.

(c) Na świecie 150 państw eksportuje i importuje towary do oraz z pozostałych państw. Zapisać w formie jednej macierzy wielkość importu i eksportu między nimi.

(d) Matryca w cyfrowym aparacie fotograficznym o rozdzielczości 12 Mpx składa się z 4000×3000 pikseli. Kolorowe zdjęcie zrobione tym aparatem zapisać jako macierz.

(e) Student z każdego przedmiotu musi napisać dwa sprawdziany. Czy w jednej macierzy można zapisać wyniki obu sprawdzianów uzyskane przez trzydziestu studentów z pięciu przedmiotów? Jak odnotować jednocześnie fakt, że student nie pisał sprawdzianu?

(f) W formie jednej macierzy zapisać odległości drogowe i kolejowe między miastami wojewódzkimi w Polsce.

(g) Jak w postaci macierzy zapisać układ kart na czterech rękach w brydżu? A jak zapisać przebieg rozgrywki, czyli układ kart każdej z 13 lew?

(h) Zapisać w formie macierzy współrzędne geograficzne, wysokość, prędkość i kierunek lotu 50 samolotów przelatujących w sąsiedztwie wieży kontroli lotów.

Definicja 3.4. (rodzaje macierzy)

Macierz zerowa. Macierz wymiaru $m \times n$, której wszystkie elementy są równe 0 nazywamy *macierzą zerową* wymiaru $m \times n$ i oznaczamy przez $\mathbb{O}_{m \times n}$ lub przez $\mathbb{O}$, gdy znamy jej wymiar.

$$\mathbb{O}_{m \times n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ kolumn}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}} \right\} m \text{ wierszy}$$

Macierz kwadratowa. Macierz, której liczba wierszy równa się liczbie kolumn nazywamy *macierzą kwadratową*. Liczbę wierszy (kolumn) nazywamy wtedy *stopniem macierzy kwadratowej*. Elementy macierzy, które mają ten

sam numer wiersza i kolumny, tworzą *główną przekątną* macierzy.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz trójkątna dolna. Macierz kwadratową stopnia $n \geq 2$, w której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są równe 0, nazywamy *macierzą trójkątną dolną*. Macierz trójkątną dolną oznaczamy zwykle przez L .

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \mathbf{a}_{n3} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz trójkątna górna. Podobnie określa się *macierz trójkątną górną*. Macierz trójkątną górną oznaczamy zwykle przez U .

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ 0 & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_{33} & \dots & \mathbf{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalna. Macierz kwadratową stopnia n , w której wszystkie elementy nie stojące na głównej przekątnej są równe 0, nazywamy *macierzą diagonalną*. Macierz taką oznaczamy symbolem $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$$D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

Macierz jednostkowa. Macierz diagonalną, w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1, nazywamy *macierzą jednostkową*. Macierz jednostkową stopnia n oznaczamy przez I_n lub przez I , gdy znany jest jej stopień.

$$I_n = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Macierz blokowa. Macierz, którą utworzono z macierzy A_{ij} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) ustawionych w m wierszach i n kolumnach, nazywamy *macierzą blokową*.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{array} \right]$$

Macierze $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ stojące w i -tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy. Podobnie, macierze $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{mj}$ stojące w j -tej kolumnie tej macierzy muszą mieć te same liczby kolumn.

Przykład 3.5. Macierze:

$$(a) \quad [0], \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

są macierzami zerowymi odpowiednio wymiarów 1×1 , 3×2 , 2×5 ;

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} -i & 1+i \\ 3 & 2-5i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

są macierzami kwadratowymi odpowiednio stopnia 2, 3 i 4. Macierze B i C są rzeczywiste, a macierz A jest zespolona;

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ -i & 2-i & 0 \\ 3 & -5 & 4i \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są macierzami trójkątnymi odpowiednio stopnia 2, 3 i 5. Macierze A i B są macierzami trójkątnymi dolnymi, a macierz C macierzą trójkątną górną.

$$(d) \quad A = \begin{bmatrix} 3-i & 0 \\ 0 & 2+5i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

są macierzami diagonalnymi odpowiednio stopnia 2, 3 i 4. Macierz B jest macierzą jednostkową;

$$(e) \quad A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 2 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{array}, B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

są macierzami blokowymi zbudowanymi odpowiednio z 6 i 9 bloków (macierzy).

3.2. Działania na macierzach

Definicja 3.6. (suma i różnica macierzy)

Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. Sumę (różnicę) macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy są określone wzorem:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

dla $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq n$. Piszemy wtedy $C = A \pm B$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.7. Obliczyć sumy i różnice par macierzy:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -2 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1-2i \\ 3+5i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3i \\ -2 \end{bmatrix}$.

Definicja 3.8. (iloczyn macierzy przez liczbę)

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Iloczynem macierzy A przez liczbę α nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$ wymiaru $m \times n$, której elementy są określone wzorem:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

dla $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq n$. Piszemy wtedy $B = \alpha A$.

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.9. Obliczyć iloczyny liczb i macierzy:

(a) $\alpha = (1-i)$, $A = \begin{bmatrix} i & 0 & 3+2i & 5 \\ 1+i & 2 & -3i & 1-i \end{bmatrix}$; (b) $\alpha = -\frac{3}{4}$, $A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -24 \\ -8 & 12 & -12 \\ 16 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Ćwiczenie 3.10. (własności działań na macierzach)

Niech A, B, C będą dowolnymi macierzami rzeczywistymi (zespolonymi) tego

samego wymiaru oraz niech α, β będą liczbami rzeczywistymi (zespólonymi). Uzasadnić, że:

- (1) $A + B = B + A$; (2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- (3) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$; (4) $A + (-A) = \mathbb{O}$;
- (5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; (6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- (7) $1 \cdot A = A$; (8) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Ćwiczenie 3.11. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

- (a) obliczyć $5(A + 2B) + 4(2A - B)$;
- (b) rozwiązać równanie $3(A + X) + 5(3X + B) = A - B$.

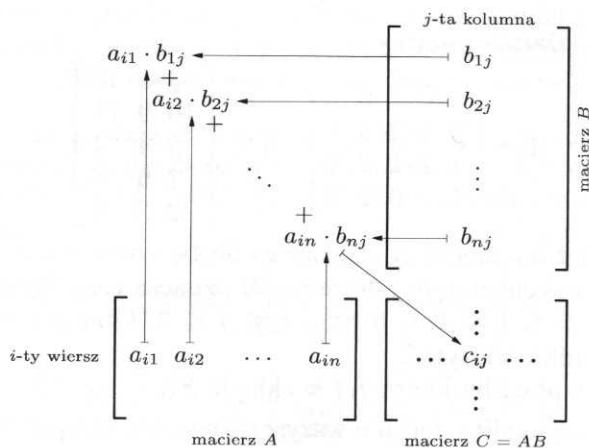
Definicja 3.12. (iloczyn macierzy)

Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$, a macierz $B = [b_{ij}]$ wymiar $n \times k$. Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy określone są wzorem:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

dla $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq k$. Piszemy wtedy $C = AB$.

Uwaga. Element c_{ij} iloczynu macierzy A i B otrzymujemy sumując iloczyny odpowiadających sobie elementów i -tego wiersza macierzy A i j -tej kolumny macierzy B . Iloczyn macierzy A i B można obliczyć tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A równa się liczbie wierszy macierzy B . Iloczyn $A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ złożony z n macierzy A oznaczamy przez A^n .



Rys. 3.1. Schemat Falka obliczania iloczynu macierzy

Ćwiczenie 3.13. Obliczyć iloczyny par macierzy:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix};$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} i & 1+2i \\ -3 & 2-3i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 5+i & 4-3i \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.14. Obliczyć iloczyny AB i BA dla: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ćwiczenie 3.15. Wykonując mnożenie odpowiednich macierzy wyrazić zmienne x, y, z, t w zależności od zmiennych p, q, r , jeżeli

$$\begin{cases} x = 2u + 3v, \\ y = u - 4v, \\ z = 3u + v, \\ t = u - v \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} u = p + q + 2r, \\ v = 3p - q - r. \end{cases}$$

Ćwiczenie 3.16. Układając i rozwiązując odpowiedni układ równań znaleźć rozwiązania równań macierzowych:

$$(a) X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad (b) X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix};$$

$$(d) X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X; \quad (e) X \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (f) \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.17. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 10 & 9 & 11 \\ 5 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

przy czym element a_{ik} macierzy A oznacza liczbę sztuk towaru T_k , który chce kupić klient K_i , zaś element b_{kj} macierzy B oznacza cenę towaru T_k w sklepie S_j , gdzie $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq k \leq 5$ oraz $1 \leq j \leq 3$. Obliczyć iloczyn AB , a z otrzymanego wyniku odczytać:

- kwotę, jaką zapłaciłby klient K_3 w sklepie S_2 ;
- kwotę, jaką zapłaciliby łącznie wszyscy klienci w sklepie S_1 ;
- numer sklepu, w którym klient K_4 zapłaciłby najmniej;
- numer sklepu, w którym klient K_2 zapłaciłby najwięcej.

Ćwiczenie* 3.18. Niech L będzie przekształceniem płaszczyzny postaci

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy) \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

Przekształceniu L przyporządkowujemy macierz

$$A_L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

(a) Uzasadnić, że składaniu przekształceń K i L tej postaci odpowiada mnożenie macierzy (tzn. $A_{L \circ K} = A_L A_K$).

(b) Podać macierz symetrii S względem osi Ox .

(c) Wyznaczyć macierz obrotu O o kąt $\pi/6$ wokół początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

(d) Napisać macierze złożień $S \circ O$ oraz $O \circ S$.

Ćwiczenie* 3.19. Uzasadnić, że iloczyn macierzy:

(a) diagonalnych jest macierzą diagonalną;

(b) trójkątnych górnych (dolnych) jest macierzą trójkątną górną (dolną).

FAKT 3.20. (*własności iloczynu macierzy*)

Niech A, B, C będą macierzami rzeczywistymi (zespólonymi) oraz niech α, β będą liczbami rzeczywistymi (zespólonymi). Wtedy prawdziwe są równości (pod warunkiem, że występujące w nich działania są wykonalne):

$$(1) A(B + C) = AB + AC; \quad (2) (A + B)C = AC + BC;$$

$$(3) (AB)C = A(BC); \quad (4) A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB);$$

$$(5) AI = A; \quad (6) IA = A.$$

Uwaga. Własności w punktach (1) i (2) nazywamy rozdzielnością mnożenia względem dodawania, a własność w punkcie (3) łącznością mnożenia. Mnożenie macierzy kwadratowych nie jest przemienne, bowiem na ogół $AB \neq BA$.

Dowód (3). Niech $[Y]_{ij}$ oznacza element i -tego wiersza i j -tej kolumny macierzy Y . Wystarczy udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych i, j , gdzie $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l$, zachodzi równość $[(AB)C]_{ij} = [A(BC)]_{ij}$. Z definicji mnożenia macierzy wynikają równości

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^k [AB]_{i\alpha} [C]_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^k \left(\sum_{\beta=1}^n [A]_{i\beta} [B]_{\beta\alpha} \right) [C]_{\alpha j} \\ &= \sum_{\beta=1}^n [A]_{i\beta} \left(\sum_{\alpha=1}^k [B]_{\beta\alpha} [C]_{\alpha j} \right) = \sum_{\beta=1}^n [A]_{i\beta} [BC]_{\beta j} = [A(BC)]_{ij}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3.21. Podać przykłady macierzy A, B , które spełniają relacje:

- (a) $AB \neq BA$; (b) $A^2 = \mathbb{O}$ i $A \neq \mathbb{O}$;
 (c) $AB = \mathbb{O}$ i $A \neq \mathbb{O}$ i $B \neq \mathbb{O}$; (d) $A^3 = \mathbb{O}$ i $A^2 \neq \mathbb{O}$.

Ćwiczenie 3.22. Niech macierze kwadratowe A, B mają ten sam stopień oraz niech będą przemienne, tzn. spełniają równość $AB = BA$. Uzasadnić tożsamości:

- (a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; (b) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$;
 (c) $(AB)^2 = A^2B^2$; (d) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

Ćwiczenie 3.23. Rozwiązać równanie macierzowe

$$X \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 15 & -12 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.24. W zbiorze macierzy zespolonych znaleźć wszystkie rozwiązania równania macierzowego

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pokazać, że w tym samym zbiorze równanie $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nie ma rozwiązań.

Ćwiczenie 3.25. Dla macierzy A obliczyć A^2, A^3, A^4 :

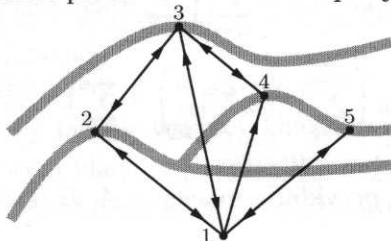
(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ćwiczenie 3.26. Dla macierzy A wyprowadzić wzory ogólne na macierze A^n ($n \in \mathbb{N}$):

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Udowodnić otrzymane wzory za pomocą indukcji matematycznej.

Ćwiczenie* 3.27. Rysunek przedstawia schemat połączeń pięciu stacji kolejki linowej w górach.



Elementy a_{ij} macierzy połączeń A są określone wzorem

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy stacje } i \text{ oraz } j \text{ mają bezpośrednie połączenie,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

- Napisać macierz A .
- Uzasadnić, że element c_{ij} macierzy A^n jest równy liczbie różnych tras łączących stację i ze stacją j złożonych z n odcinków.
- Wyznaczyć najmniejszą liczbę n , dla której możliwe jest dotarcie z dowolnej stacji początkowej do dowolnej stacji końcowej w n odcinkach.
- Mieszkasz w schronisku przy stacji 2 i masz karnet na cztery przejazdy. Ile różnych wycieczek możesz zrobić?

Ćwiczenie* 3.28. Zawodnicy z_1 i z_2 strzelają do celu. Zawodnik z_1 trafia z prawdopodobieństwem p_1 , zaś z_2 z prawdopodobieństwem p_2 . Strzał próbny wykonuje zawodnik wybrany losowo. Przy czym prawdopodobieństwo wybrania zawodnika z_1 wynosi p , a zawodnika drugiego $1 - p$. Pierwszy oraz kolejne strzały zawodnicy wykonują są według następującej zasady: po każdym strzale celnym strzela z_1 , a po chybnym z_2 .

- Niech p_{ij} oznacza prawdopodobieństwo tego, że po strzale zawodnika Z_i będzie strzelał zawodnik Z_j . Napisać macierz $P = [p_{ij}]$.
- Niech $p_{ij}(n)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że n -ty strzał po zawodniku Z_i wykona zawodnik Z_j . Napisać macierz $P(2) = [p_{ij}(2)]$.
- Uzasadnić, że $P(n) = [p_{ij}(n)] = P^n$ dla $n \geq 1$.
- Niech $p_i(n)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że n -ty strzał wykona zawodnik Z_i . Uzasadnić, że $[p_1(n) \ p_2(n)] = [p \ 1 - p] P^n$.
- Obliczyć $p_1(2)$ dla $p = 1/3$, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 3/4$.

Definicja 3.29. (macierz transponowana)

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$. Macierzą transponowaną do macierzy A nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times m$, której elementy są określone wzorem:

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m).$$

Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy przez A^T .

Uwaga. Przy transponowaniu, kolejne wiersze macierzy wyjściowej stają się kolejnymi kolumnami macierzy transponowanej. Ilustrujemy to na przykładzie macierzy wymiaru 3×5 .

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15}} \\ \boxed{a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24} \ a_{25}} \\ \boxed{a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34} \ a_{35}} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{31}} \\ \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{32}} \\ \boxed{a_{13}} & \boxed{a_{23}} & \boxed{a_{33}} \\ \boxed{a_{14}} & \boxed{a_{24}} & \boxed{a_{34}} \\ \boxed{a_{15}} & \boxed{a_{25}} & \boxed{a_{35}} \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.30. Napisać macierze transponowane do macierzy:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}; \quad (b) B = \begin{bmatrix} 1-2i \\ -3 \\ 2+i \end{bmatrix}; \quad (c) C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

FAKT 3.31. (*własności transpozycji macierzy*)

Niech A, B będą macierzami rzeczywistymi (zespółonymi) oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą (zespółoną). Wtedy prawdziwe są równości (pod warunkiem, że występujące w nich działania są wykonalne):

$$(1) (A+B)^T = A^T + B^T; \quad (2) (A^T)^T = A; \quad (3) (\alpha A)^T = \alpha A^T; \\ (4) (AB)^T = B^T A^T; \quad (5) (A^r)^T = (A^T)^r \quad (r \in \mathbb{N}).$$

Dowód (4). Stosując oznaczenia jak w poprzednim dowodzie wystarczy uzasadnić, że dla dowolnych liczb naturalnych i, j , gdzie $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$, zachodzi równość

$$[(AB)^T]_{ij} = [B^T A^T]_{ij}.$$

Z definicji mnożenia macierzy wynika, że

$$[(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{\alpha=1}^n [A]_{j\alpha} [B]_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^n [A^T]_{\alpha j} [B^T]_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n [B^T]_{i\alpha} [A^T]_{\alpha j} = [B^T A^T]_{ij}.$$

Definicja 3.32. (*macierz symetryczna i antysymetryczna*)

Macierz kwadratową A nazywamy *symetryczną*, jeżeli $A^T = A$. Macierz kwadratowa A nazywamy *antysymetryczną*, jeżeli $A^T = -A$.

Uwaga. Macierz jest symetryczna, gdy jej elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej są równe. Macierz jest antysymetryczna, gdy jej elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej różnią się tylko znakiem, a elementami głównej przekątnej są tylko 0.

Ćwiczenie 3.33. Wskazać, które z macierzy są symetryczne, a które antysymetryczne:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & i & 4 \\ i & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3i \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.34.

(a) Niech A będzie macierzą kwadratową. Pokazać, że macierz $A + A^T$ jest symetryczna, a $A - A^T$ antysymetryczna.

(b) Niech A będzie macierzą dowolnego wymiaru. Pokazać, że macierze AA^T i $A^T A$ są symetryczne.

(c) Uzasadnić, że każdą macierz kwadratową można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Ćwiczenie* 3.35. Macierze kwadratowe A i B tego samego stopnia są symetryczne. Pokazać, że ich iloczyn jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA$.

3.3. Definicja indukcyjna wyznacznika**Definicja 3.36.** (*wyznacznik*)

Wyznacznikiem nazywamy funkcję, która każdej macierzy kwadratowej rzeczywistej (zespólonej) $A = [a_{ij}]$ przypisuje liczbę rzeczywistą (zspoloną) $\det A$. Funkcja ta jest określona wzorem indukcyjnym:

(1) jeżeli macierz A ma stopień $n = 1$, to $\det A = a_{11}$;

(2) jeżeli macierz A ma stopień $n \geq 2$, to

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n - 1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny.

Uwaga. Wyznacznik macierzy A oznaczamy także przez $\det [a_{ij}]$ lub $|A|$, a w formie rozwiniętej przez

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.37. Korzystając z definicji obliczyć wyznaczniki:

$$(a) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Uwaga. Z definicji wynika, że wyznacznik drugiego stopnia wyraża się wzorem

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc,$$

a trzeciego stopnia wzorem

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= aei - afg + bfg - bdi + cdh - ceg. \end{aligned}$$

Ostatni wzór można zapisać w formie tzw. reguły Sarrusa*

$$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & a & b & \\ & \searrow & \swarrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\ d & e & f & d & e & & \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ g & h & i & g & h & & \\ - & - & - & + & + & + & \end{array} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

! Reguła ta nie przenosi się na wyznaczniki wyższych stopni.

Ćwiczenie 3.38. Korzystając z powyższych wzorów obliczyć wyznaczniki:

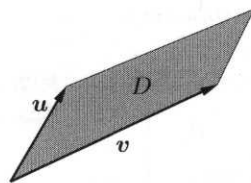
$$(a) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1+i & 5i \\ -4 & 3-2i \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} i & 1 & 1-i \\ 0 & -2 & 4+3i \\ 2i & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Interpretacja geometryczna wyznacznika 2-go stopnia

Wyznacznik

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

jest równy (z dokładnością do znaku) polu równoległoboku D rozpiętego na wektorach $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$ (rys. 3.2);

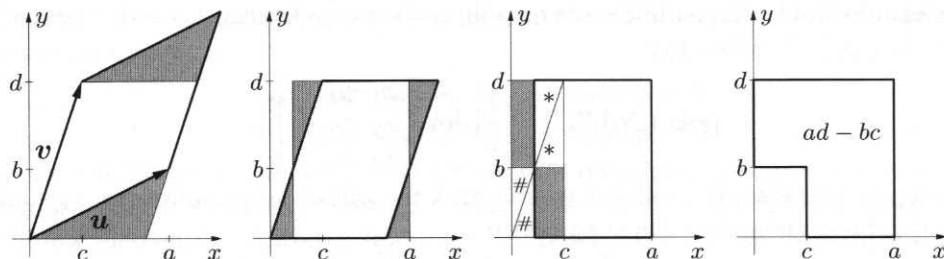


Rys. 3.2. Interpretacja geometryczna wyznacznika stopnia drugiego

$$|\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}| = \text{pole}(D).$$

Dowód. Przedstawiono na rysunkach. Dowód ten pochodzi od Davida Gau (zobacz R.B.Nelsen, *Proofs without words*, MAA, Washington 1993).

*Pierre Frédéric Sarrus (1798–1861), matematyk francuski.



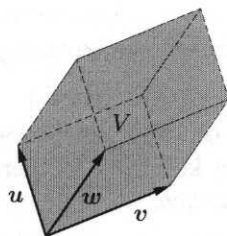
Interpretacja geometryczna wyznacznika 3-go stopnia

Wyznacznik

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

jest równy (z dokładnością do znaku) objętości równoległościanu V rozpiętego na wektorach $u = (a, b, c)$, $v = (d, e, f)$, $w = (g, h, i)$ (rys. 3.3);

$$|\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}| = \text{objętość}(V).$$



Rys. 3.3. Interpretacja geometryczna wyznacznika stopnia trzeciego

Dowód. Powyższy wzór wynika z interpretacji geometrycznej iloczynu mieszanego wektorów i **Faktu 5.36** (str. 102).

Uwaga*. Prawdziwe są analogiczne interpretacje geometryczne dla wyznaczników wyższych stopni.

Ćwiczenie 3.39. Obliczyć pole:

(a) równoległoboku rozpiętego na wektorach $u = (-1, 3)$, $v = (2, 5)$;

(b) trójkąta o wierzchołkach $A = (1, -1)$, $B = (3, 4)$, $C = (-2, 5)$.

Wsk. Pole trójkąta rozpiętego na dwóch wektorach jest równe $1/2$ pola równoległoboku rozpiętego na tych wektorach.

Ćwiczenie 3.40. Obliczyć objętość:

(a) równoległościanu rozpiętego na wektorach $u = (1, 1, 1)$, $v = (-1, 0, 5)$, $w = (1, -2, -3)$;

(b) czworościanu o wierzchołkach $A = (0, 1, 2)$, $B = (1, -2, 3)$, $C = (0, -1, 5)$, $D = (-1, -3, 0)$.

Wsk. Objętość czworościanu rozpiętego na trzech wektorach jest równa $1/6$ objętości równoległościanu rozpiętego na tych wektorach.

Ćwiczenie 3.41. Uzasadnić wzór na pole trójkąta o wierzchołkach $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$:

$$\text{pole}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right|.$$

Następnie pokazać, że poniższy wyznacznik nie zależy od parametru p i podać interpretację geometryczną tego faktu.

$$\det \begin{bmatrix} x_1 + p & (x_1 + p)^2 & 1 \\ x_2 + p & (x_2 + p)^2 & 1 \\ x_3 + p & (x_3 + p)^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja 3.42. (*dopełnienie algebraiczne, macierz dopełnień algebraicznych*)

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$. *Dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę:

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny macierzy A . Macierz $[D_{ij}]$ nazywamy *macierzą dopełnień algebraicznych*.

Ćwiczenie 3.43. W podanych macierzach obliczyć dopełnienia algebraiczne zaznaczonych elementów:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1+i & -3i \\ \boxed{4} & 2-5i \end{bmatrix}; (b) B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 1 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}; (c) C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & \boxed{5} & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

TWIERDZENIE 3.44 (*rozwinęcia Laplace'a[†] wyznacznika*)

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$ i niech liczby naturalne i oraz j ($1 \leq i, j \leq n$) będą ustalone. Wtedy wyznacznik macierzy A można obliczyć ze wzorów:

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in},$$

$$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}.$$

Inaczej mówiąc, wyznacznik macierzy jest równy sumie iloczynów elementów i -tego wiersza i ich dopełnień algebraicznych. Wzór ten nazywamy *rozwinęciem Laplace'a* wyznacznika względem i -tego wiersza; Podobnie, wyznacznik macierzy jest równy sumie iloczynów elementów j -tej kolumny i ich dopełnień algebraicznych. Wzór ten nazywamy *rozwinęciem Laplace'a* wyznacznika względem j -tej kolumny.

[†]Pierre Simon de Laplace (1749–1827), matematyk, fizyk i astronom francuski.

Uwaga*. Dla ustalonych liczb naturalnych r, s ($1 \leq r, s \leq n$, $r \neq s$) prawdziwe są wzory:

$$a_{s1}D_{r1} + a_{s2}D_{r2} + \dots + a_{sn}D_{rn} = 0,$$

$$a_{1s}D_{1r} + a_{2s}D_{2r} + \dots + a_{ns}D_{nr} = 0.$$

Inaczej mówiąc, suma iloczynów elementów dowolnego wiersza i dopełnień algebraicznych elementów innego wiersza jest równa 0. Podobnie, suma iloczynów elementów dowolnej kolumny i odpowiadających im dopełnień algebraicznych innej kolumny jest równa 0.

Ćwiczenie 3.45. Korzystając z rozwinięcia Laplace'a obliczyć wyznaczniki. Wyznaczniki rozwinąć względem wiersza lub kolumny, które zawierają najwięcej zer.

$$(a) \begin{vmatrix} i & 0 & -3 \\ 2 & -1+i & 5 \\ 1+i & 3i & -2 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.46. (wyznacznik macierzy trójkątnej)

Pokazać, że wyznacznik macierzy trójkątnej dolnej lub górnej jest równy iloczynowi elementów stojących na jego głównej przekątnej:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Korzystając z tego wzoru obliczyć wyznaczniki macierzy trójkątnych:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} -1-i & 1+i & 2 & 4-3i \\ 0 & 2i & 3-i & -2+i \\ 0 & 0 & -3 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.47. Obliczyć wyznaczniki:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (c^*) \begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Ćwiczenie* 3.48. Znaleźć wzory na wyznaczniki podanych macierzy stopnia n , a następnie udowodnić je korzystając z indukcji matematycznej:

$$(a) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

3.4. Definicja permutacyjna wyznacznika*

Definicja 3.49. (*permutacja*)

Permutacją n -elementową ($n \in \mathbb{N}$) nazywamy każde różnowartościowe odwzorowanie p zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ na siebie. Permutację taką zapisujemy w postaci

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad \text{lub krótko} \quad p = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_i \ \dots \ p_n),$$

gdzie p_i oznacza wartość permutacji p dla argumentu i . Zbiór wszystkich permutacji n -elementowych oznaczamy przez P_n .

Uwaga. Istnieje $n!$ różnych permutacji n -elementowych.

Ćwiczenie 3.50. Napisać wszystkie permutacje 2-, 3- i 4-elementowe.

Definicja 3.51. (*inwersja, znak permutacji*)

Niech $p = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_i \ \dots \ p_j \ \dots \ p_n)$ będzie permutacją n -elementową. Para $\{p_i, p_j\}$ elementów tej permutacji tworzy *inwersję*, gdy $p_i > p_j$ oraz $i < j$. *Znak permutacji* p jest określony wzorem $\text{sgn}(p) = (-1)^k$, gdzie k oznacza liczbę par elementów tej permutacji, które tworzą inwersje.

Ćwiczenie 3.52. Wypisać wszystkie pary elementów podanych permutacji, które tworzą inwersje oraz określić znaki tych permutacji:

$$(a) \ p = (1 \ 2 \ 3); \quad (b) \ p = (6 \ 1 \ 5 \ 2 \ 4 \ 3); \quad (c) \ p = (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 8 \ 6 \ 4 \ 2 \ 9).$$

Definicja 3.53. (*permutacyjne określenie wyznacznika*)

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n . Wyznacznikiem macierzy A nazywamy liczbę $\det A$ określoną wzorem:

$$\det A = \sum_{p \in P_n} \text{sgn}(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n},$$

gdzie $p = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)$, a sumowanie obejmuje wszystkie (tj. $n!$) permutacje n -elementowe.

Uwaga. Definicja permutacyjna wyznacznika jest równoważna definicji indukcyjnej.

Ćwiczenie 3.54. Korzystając z definicji permutacyjnej obliczyć wyznaczniki macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.55. Korzystając z definicji permutacyjnej napisać wzory ogólne na wyznaczniki macierzy stopnia $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$.

3.5. Własności wyznaczników

FAKT 3.56. (*własności wyznaczników*)

(1) Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej kolumnę złożoną (wiersz złożony) z zer jest równy 0:

$$\det \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots \end{bmatrix} = 0.$$

(2) Wyznacznik macierzy kwadratowej zmienia znak, jeżeli przestawimy między sobą dwie kolumny (dwa wiersze):

$$\det \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{a_{1i}} & \dots & \mathbf{a_{1j}} & \dots \\ \dots & \mathbf{a_{2i}} & \dots & \mathbf{a_{2j}} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{a_{ni}} & \dots & \mathbf{a_{nj}} & \dots \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{a_{1j}} & \dots & \mathbf{a_{1i}} & \dots \\ \dots & \mathbf{a_{2j}} & \dots & \mathbf{a_{2i}} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{a_{nj}} & \dots & \mathbf{a_{ni}} & \dots \end{bmatrix}.$$

(3) Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej jednakowe dwie kolumny (dwa wiersze) jest równy 0:

$$\det \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{\alpha} & \dots & \mathbf{\alpha} & \dots \\ \dots & \mathbf{\beta} & \dots & \mathbf{\beta} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & \mathbf{\omega} & \dots & \mathbf{\omega} & \dots \end{bmatrix} = 0.$$

(4) Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) macierzy kwadratowej zawierają wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy:

$$\det \begin{bmatrix} \cdots & ca_{1j} & \cdots \\ \cdots & ca_{2j} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & ca_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = c \det \begin{bmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{bmatrix}.$$

W konsekwencji mamy $\det(cA) = c^n \det A$.

(5) Wyznacznik macierzy kwadratowej, której elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) są sumami dwóch składników, jest równy sumie wyznaczników macierzy, w których elementy tej kolumny (tego wiersza) są zastąpione tymi składnikami:

$$\det \begin{bmatrix} \cdots & a_{1j} + a'_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} + a'_{2j} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a_{nj} + a'_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \cdots & a'_{1j} & \cdots \\ \cdots & a'_{2j} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a'_{nj} & \cdots \end{bmatrix}.$$

(6) Wyznacznik macierzy nie zmienia się, jeżeli do elementów dowolnej kolumny (wiersza) dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny (innego wiersza) tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę:

$$\det \begin{bmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cdots & a_{1i} + ca_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2i} + ca_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a_{ni} + ca_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{bmatrix}.$$

Ogólnie: wyznacznik macierzy nie zmienia się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy sumę odpowiadających im elementów innych wierszy (kolumn) tej macierzy pomnożonych przez dowolne liczby;

(7) Wyznaczniki macierzy kwadratowej i jej transpozycji są równe:

$$\det A = \det(A^T).$$

(8) Niech $A_1, A_2, \dots, A_r$ będą macierzami kwadratowymi, niekoniecznie tych samych stopni. Wtedy

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ ? & A_2 & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & ? & \cdots & A_r \end{bmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_r,$$

gdzie symbole $\mathbf{O}$ oznaczają macierze zerowe, a symbole $?$ dowolne macierze odpowiednich wymiarów.

Uwaga. Korzystając z powyższych własności wyznaczników można istotnie uprościć ich obliczanie. Pozwalają one tak przekształcić wyznacznik, aby w jego wybranym wierszu lub kolumnie pozostawić co najwyżej jeden element niezerowy. Do oznaczania operacji na macierzach będziemy stosowali symbole:

1. $k_i \longleftrightarrow k_j$ – zamiana i -tej oraz j -tej kolumny;
2. ck_j – pomnożenie j -tej kolumny przez liczbę c ($c \neq 0$);
3. $k_i + ck_j$ – dodanie do elementów i -tej kolumny odpowiadających im elementów j -tej kolumny pomnożonych przez liczbę c .

Analogiczne operacje na wierszach będziemy oznaczali odpowiednio $w_i \longleftrightarrow w_j$; cw_j ; $w_i + cw_j$. Podane wyżej działania na kolumnach i wierszach macierzy nazywamy *operacjami elementarnymi*.

Dowód. Dowody własności (1) – (6) przeprowadzimy dla kolumn. Symbolem $[k_1 k_2 \dots k_n]$ oznaczamy macierz $A = [a_{ij}]$ stopnia n o kolumnach $k_1, k_2, \dots, k_n$.

(1) Załóżmy, że kolumna k_j jest zerowa. Stosując rozwinięcie Laplace'a względem tej kolumny otrzymujemy

$$\det[k_1 \dots 0 \dots k_n] = 0 \cdot D_{1j} + 0 \cdot D_{2j} + \dots + 0 \cdot D_{nj} = 0.$$

(2) Stosujemy indukcję matematyczną ze względu na n . Dla $n = 2$ mamy

$$\det[k_1 k_2] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\det[k_2 k_1].$$

Założmy teraz, że dla dowolnej macierzy stopnia n przy przestawieniu kolumn wyznacznik zmienia znak. Niech A będzie macierzą stopnia $n+1$. Rozwijamy wyznacznik tej macierzy względem kolumny, która nie ulega przestawieniu, np. kolumny k_{n+1} otrzymując

$\det[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_{n+1}] = a_{1n+1}D_{1n+1} + a_{2n+1}D_{2n+1} + \dots + a_{n+1n+1}D_{n+1n+1}$. Oznaczmy przez D'_{ln+1} , gdzie $1 \leq l \leq n+1$, dopełnienia algebraiczne elementów ostatniej kolumny macierzy A po przestawieniu kolumn k_i i k_j . Z założenia indukcyjnego wynika, że $D'_{ln+1} = -D_{ln+1}$, zatem

$$\begin{aligned} \det A &= -(a_{1n+1}D'_{1n+1} + a_{2n+1}D'_{2n+1} + \dots + a_{n+1n+1}D'_{n+1n+1}) \\ &= -\det[k_1 \dots k_j \dots k_i \dots k_n k_{n+1}]. \end{aligned}$$

(3) Niech $k_i = k_j$. Korzystając z własności (2) otrzymamy

$$\det[k_1 \dots k_j \dots k_j \dots k_n k_{n+1}] = -\det[k_1 \dots k_j \dots k_j \dots k_n k_{n+1}].$$

Stąd

$$2 \det[k_1 \dots k_j \dots k_j \dots k_n k_{n+1}] = 0, \text{ czyli } \det[k_1 \dots k_j \dots k_j \dots k_n k_{n+1}] = 0.$$

(4) Zastosujemy rozwinięcie Laplace'a wyznacznika względem j -tej kolumny. Mamy

$$\begin{aligned} \det[k_1 \dots ck_j \dots k_n] &= ca_{1j}D_{1j} + ca_{2j}D_{2j} + \dots + ca_{nj}D_{nj} \\ &= c(a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \dots + a_{nj}D_{nj}) = c \det[k_1 \dots k_j \dots k_n]. \end{aligned}$$

(5) Rozwijamy wyznacznik względem j -tej kolumny otrzymując

$$\begin{aligned}\det [k_1 \dots k_j + k'_j \dots k_n] &= \\ &= (a_{1j} + a'_{1j}) D_{1j} + (a_{2j} + a'_{2j}) D_{2j} + \dots + (a_{nj} + a'_{nj}) D_{nj} \\ &= (a_{1j} D_{1j} + a_{2j} D_{2j} + \dots + a_{nj} D_{nj}) + (a'_{1j} D_{1j} + a'_{2j} D_{2j} + \dots + a'_{nj} D_{nj}) \\ &= \det [k_1 \dots k_j \dots k_n] + \det [k_1 \dots k'_j \dots k_n].\end{aligned}$$

(6) Wykorzystujemy własności (5), (4) oraz (3) zaznaczając ten fakt nad równością. Mamy

$$\begin{aligned}\det [k_1 \dots k_i + ck_j \dots k_j \dots k_n] &= \\ &\stackrel{(5)}{=} \det [k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] + \det [k_1 \dots ck_j \dots k_j \dots k_n] \\ &\stackrel{(4)}{=} \det [k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] + c \det [k_1 \dots k_j \dots k_j \dots k_n] \\ &\stackrel{(3)}{=} \det [k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] + c \cdot 0 \\ &= \det [k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n].\end{aligned}$$

(7) Zastosujemy dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ równość macierzy $A = A^T$ implikuje równość ich wyznaczników. Załóżmy teraz, że równość $\det B = \det B^T$ zachodzi dla każdej macierzy B stopnia $n - 1$. Udowodnimy, że $\det A = \det A^T$ dla macierzy $A = [a_{ij}]$ stopnia n . Zauważmy najpierw, że $(A_{ij})^T = (A^T)_{ji}$, gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n - 1$ powstałą przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny macierzy A , a $(A^T)_{ji}$ oznacza również macierz stopnia $n - 1$ powstałą przez skreślenie j -tego wiersza i i -tej kolumny macierzy A^T . Z założenia indukcyjnego zachodzi zatem równość $\det (A^T)_{ji} = \det (A_{ij})^T = \det A_{ij}$. Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika macierzy A^T względem ostatniego wiersza daje równość

$$\begin{aligned}\det A^T &= \\ &= a_{1n}(-1)^{n+1} \det (A^T)_{n1} + a_{2n}(-1)^{n+2} \det (A^T)_{n2} + \dots + a_{nn}(-1)^{n+n} \det (A^T)_{nn} \\ &= a_{1n}(-1)^{1+n} \det A_{1n} + a_{2n}(-1)^{2+n} \det A_{2n} + \dots + a_{nn}(-1)^{n+n} \det A_{nn} = \det A.\end{aligned}$$

(8) Wzór wystarczy udowodnić dla $r = 2$. W przypadku $r > 2$ stosuje się indukcję matematyczną. Niech zatem A, B, C będą macierzami o wymiarach odpowiednio $n \times n$, $k \times k$, $k \times n$ oraz niech $\mathbb{O}$ będzie macierzą zerową wymiaru $n \times k$. Uzasadnimy, że

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline C & B \end{array} \right] = \det A \cdot \det B.$$

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej ze względu na k przy ustalonym n . Znak ? wpisany w bloku macierzy oznacza, że elementy tam znajdujące się są nieistotne w rozważaniach. Niech $B = [b_{ij}]$ będzie macierzą stopnia k . Dla $k = 1$ mamy

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline C & b_{11} \end{array} \right] = (-1)^{(n+1)+(n+1)} b_{11} \cdot \det A = b_{11} \cdot \det A = \det A \cdot \det B.$$

Założmy teraz, że wzór z tezy zachodzi dla dowolnej macierzy B stopnia $k - 1$. Po-

każemy, że zachodzi on także dla dowolnej macierzy B stopnia k . Przy obliczaniu wyznacznika zastosujemy rozwinięcie Laplace'a względem ostatniej kolumny. Mamy

$$\begin{aligned} \det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline C & B \end{array} \right] &= (-1)^{(n+1)+(n+k)} \cdot b_{1k} \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline ? & B_{1k} \end{array} \right] + (-1)^{(n+2)+(n+k)} \cdot b_{2k} \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline ? & B_{2k} \end{array} \right] \\ &\quad + \dots + (-1)^{(n+k)+(n+k)} \cdot b_{kk} \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline ? & B_{kk} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{zał.} \\ \text{ind.} \end{array} \right] \\ &= (-1)^{1+k} b_{1k} \det A \cdot \det B_{1k} + (-1)^{2+k} b_{2k} \det A \cdot \det B_{2k} \\ &\quad + \dots + (-1)^{k+k} b_{kk} \det A \cdot \det B_{kk} \\ &= \det A \left[(-1)^{1+k} b_{1k} \det B_{1k} + (-1)^{2+k} b_{2k} \det B_{2k} + \dots + (-1)^{k+k} b_{kk} \det B_{kk} \right] \\ &= \det A \cdot \det B. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3.57. Wykorzystując własności wyznaczników obliczyć:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & b & c & d \\ c & c & c & d \\ d & d & d & d \end{vmatrix}; \\ \text{(d)} \quad & \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5554 & 1 & 3 \\ 5 & 3335 & 2 & 6 \\ 2 & 4443 & 5 & 1 \\ 3 & 2224 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(f)} \quad \begin{vmatrix} 301 & 0 & 2005 & 3 \\ 201 & 5 & 9001 & 4 \\ 403 & 1 & 1999 & 0 \\ 702 & 2 & 5002 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3.58. Wykorzystując własności wyznaczników zapisać część rzeczywistą wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 5+i & 6-7i & 1 \\ 3+3i & 7+2i & 4 \\ 2-i & 1+i & 5 \end{vmatrix}$$

w postaci sumy wyznaczników o elementach rzeczywistych.

Ćwiczenie* 3.59. Z liczb $1, 2, \dots, n^2$ utworzono wszystkie możliwe wyznaczniki stopnia n (wykorzystując w każdym z nich wszystkie liczby). Obliczyć ich sumę.

Ćwiczenie* 3.60.

$$\text{(a) Obliczyć resztę z dzielenia wyznacznika } \begin{vmatrix} 102 & 203 & 304 \\ 17 & 23 & 37 \\ 39 & 82 & 100 \end{vmatrix} \text{ przez } 3.$$

(b) Pokazać, że wyznacznik stopnia $n \geq 2$ złożony z liczb nieparzystych jest podzielny przez 2^{n-1} .

Ćwiczenie 3.61. Pokazać, że wzór

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$$

nie jest prawdziwy dla wszystkich macierzy kwadratowych A, B, C, D stopnia drugiego.

Algorytm Gaussa obliczania wyznacznika

W kolejnych krokach algorytmu Gaussa będziemy zmniejszać stopień wyznacznika o jeden. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$. Załóżmy, że $a_{11} \neq 0$. Stopień wyznacznika macierzy A obniżymy stosując schemat:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} & \xrightarrow{w_1 : a_{11}} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} w_2 - a_{21}w_1 \\ w_3 - a_{31}w_1 \\ \vdots \\ w_n - a_{n1}w_1 \\ w_1 \cdot a_{11} \end{matrix} \\ & = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie $[a'_{ij}]$ jest macierzą stopnia $n-1$. W miejscu $\bullet$ wykorzystaliśmy rozwinięcie Laplace'a względem pierwszej kolumny. Powtarzając powyższy schemat nie więcej niż $n-1$ razy obliczymy wyznacznik macierzy A .

Uwaga. Jeżeli $a_{11} = 0$ i w pierwszej kolumnie wyznacznika istnieje element niezerowy, to przedstawiając odpowiednie wiersze (pamiętając o zmianie znaku wyznacznika) otrzymamy sytuację jak powyżej. Jeżeli natomiast wszystkie elementy pierwszej kolumny są zerami, to wyznacznik jest równy zero.

Ćwiczenie 3.62. Obliczyć wyznaczniki stosując algorytm Gaussa:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}; & \text{(b)} \quad & \begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}; & \text{(c)} \quad & \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \\ \text{(d)} \quad & \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 4 & 9 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \end{vmatrix}; & \text{(e)} \quad & \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; & \text{(f*)} \quad & \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

TWIERDZENIE 3.63. (Cauchy'ego[†] o wyznaczniku iloczynu macierzy)

Niech A i B będą macierzami kwadratowymi tego samego stopnia. Wtedy

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Uwaga. Powyższa równość jest prawdziwa dla dowolnej liczby macierzy. W szczególności mamy $\det(A^n) = (\det A)^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Dowód. Z własności (8) wyznaczników (**Fakt 3.56**, str. 57) wynika, że

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline -I & B \end{array} \right] = \det A \cdot \det B,$$

gdzie $\mathbb{O}$, I są macierzami odpowiednio zerową i jednostkową stopnia n . Pokażemy niżej, że stosując odpowiednie operacje elementarne na n początkowych wierszach macierzy blokowej $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline -I & B \end{array} \right]$ można otrzymać macierz $\left[\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & AB \\ \hline -I & B \end{array} \right]$. Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline -I & B \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & & & -I & & & B \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 + a_{11}w_{n+1} \\ w_2 + a_{21}w_{n+1} \\ \vdots \\ w_n + a_{n1}w_{n+1} \end{array} \rightarrow \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \dots & a_{21}b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n1}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \dots & a_{n1}b_{1n} \\ \hline & & & & -I & & & B \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 + a_{12}w_{n+2} \\ w_2 + a_{22}w_{n+2} \\ \vdots \\ w_n + a_{n2}w_{n+2} \end{array} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & a_{1n} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & \dots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & \dots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} & \dots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} \\ \hline & & & & -I & & & B \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 + a_{13}w_{n+3} \\ w_2 + a_{23}w_{n+3} \\ \vdots \\ w_n + a_{n3}w_{n+3} \end{array} \\ &\rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ \hline & & & & -I & & & B \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & AB \\ \hline -I & B \end{array} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad \text{dla } 1 \leq i, j \leq n.$$

Ponieważ operacje elementarne nie zmieniają wyznacznika, więc

[†]Augustin Louis Cauchy (1789–1857), matematyk francuski.

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbb{O} \\ \hline -I & B \end{array} \right] = \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & AB \\ \hline -I & B \end{array} \right].$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że

$$\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & AB \\ \hline -I & B \end{array} \right] = \det(AB).$$

Zastosujemy rozwinięcie Laplace'a do wyznacznika po lewej stronie równości. Stosując n -krotnie to rozwinięcie do pierwszych kolumn kolejno otrzymywanych wyznaczników dostaniemy

$$\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & AB \\ \hline -I & B \end{array} \right] = (-1)^{2(n^2+n)} \det(AB) = \det(AB).$$

Ćwiczenie 3.64.

(a) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Obliczyć $\det(A^7)$.

(b) Obliczyć wyznacznik macierzy X , która spełnia równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 36 \\ 5 & 12 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Niech A i B będą macierzami kwadratowymi stopnia 3 spełniającymi warunki $\det A = 2$, $\det B = 3$. Obliczyć $\det \left[\left(\frac{1}{2} A \right)^3 \right]$ oraz $\det [A^4(-B)]$.

(d) Wiadomo, że $\det(2A) = 16$ oraz $\det(3A) = 54$. Obliczyć $\det(5A)$.

(e) Obliczyć $\det(AB)$, jeżeli $\det(A^2B) = 12$ oraz $\det(AB^3) = 54$.

Ćwiczenie 3.65. Uzasadnić, że nie istnieje macierz A spełniająca jednocześnie warunki:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

FAKT 3.66. (wyznacznik Vandermonde'a[§])

Niech $n \geq 2$ oraz niech $z_1, z_2, \dots, z_n$ będą liczbami zespolonymi. Wtedy

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (z_l - z_k).$$

[§]Alexandre Téophile Vandermonde (1735-1796), matematyk francuski.

Uwaga. Jeżeli liczby $z_1, z_2, \dots, z_n$ są parami różne, to $V(z_1, z_2, \dots, z_n) \neq 0$.

Dowód. Przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Dla $n = 2$ mamy

$$V(z_1, z_2) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{vmatrix} = z_2 - z_1,$$

więc wzór jest prawdziwy. Założmy teraz, że wzór jest prawdziwy dla liczby naturalnej $n \geq 2$. Mamy zatem

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (z_l - z_k).$$

Uzasadnimy, że

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}) = \prod_{1 \leq k < l \leq n+1} (z_l - z_k).$$

Mamy

$$\begin{aligned} V(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) &= \begin{vmatrix} 1 & z_1 - z_{n+1} & z_1^2 - z_{n+1}z_1 & \dots & z_1^n - z_{n+1}z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 - z_{n+1} & z_2^2 - z_{n+1}z_2 & \dots & z_2^n - z_{n+1}z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n - z_{n+1} & z_n^2 - z_{n+1}z_n & \dots & z_n^n - z_{n+1}z_n^{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+2} (z_1 - z_{n+1}) (z_2 - z_{n+1}) \dots (z_n - z_{n+1}) V(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (-1)^{2n+2} \prod_{k=1}^n (z_{n+1} - z_k) \cdot \prod_{1 \leq k < l \leq n} (z_l - z_k) \\ &= \prod_{1 \leq k < l \leq n+1} (z_l - z_k). \end{aligned}$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$.

Ćwiczenie 3.67. Obliczyć wyznaczniki Vandermonde'a:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

3.6. Macierz odwrotna

Definicja 3.68. (macierz odwrotna)

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n . Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz oznaczoną przez A^{-1} , która spełnia warunek:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n .

Uwaga. Jeżeli macierz A ma macierz odwrotną, to nazywamy ją *odwracalną*. Oczywiście wówczas $\det A \neq 0$. Macierz odwrotna jest określona jednoznacznie.

Ćwiczenie 3.69. Układając odpowiednie równania zbadać, czy podane macierze są odwracalne oraz wyznaczyć istniejące macierze odwrotne:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (b) B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (c) C = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix};$$

$$(d) D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (e) E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}; \quad (f) F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.70. Obliczyć macierz A^2 i na tej podstawie wyznaczyć A^{-1} , jeżeli

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie* 3.71.

(a) Niech macierz A spełnia warunek $A^3 + 3A^2 + 2A + 4I = \mathbb{O}$. Uzasadnić, że macierz ta jest odwracalna i następnie wyrazić A^{-1} w zależności od A .

(b) Niech A będzie macierzą taką, że $A^n = \mathbb{O}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}.$$

Ćwiczenie 3.72. Niech $d_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Pokazać, że

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (d_1)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (d_2)^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (d_n)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie* 3.73. Pokazać, że macierz odwrotna jest określona jednoznacznie.

Ćwiczenie* 3.74. Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n . Uzasadnić, że jeżeli istnieje macierz B taka, że $AB = I_n$, gdzie I_n oznacza macierz jednostkową stopnia n , to również $BA = I_n$.

Definicja 3.75. (macierz osobliwa i nieosobliwa)

Macierz kwadratową A nazywamy *macierzą osobliwą*, gdy $\det A = 0$. W przeciwnym przypadku mówimy, że macierz A jest *nieosobliwa*.

TWIERDZENIE 3.76. (o postaci macierzy odwrotnej)

Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Wówczas macierz A^{-1} odwrotna do A wyraża się wzorem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

gdzie D_{ij} oznaczają dopełnienia algebraiczne elementów a_{ij} macierzy A .

Uwaga. W szczególności, jeśli macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa, to

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że macierz A jest odwracalna i niech B będzie macierzą odwrotną do A . Wówczas z równości $AB = I$ wynika, że $\det(AB) = 1$. Korzystając teraz z twierdzenia Cauchy'ego otrzymamy $\det A \cdot \det B = 1$, czyli $\det A \neq 0$, co świadczy o nieosobliwości macierzy A .

Z drugiej strony niech $\det A \neq 0$. Definiujemy macierz $C = [c_{ij}]$ zależnością

$$c_{ij} = \frac{D_{ji}}{\det A},$$

gdzie D_{ji} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ji} macierzy A . Wykażemy, że C jest macierzą odwrotną do A , tzn., że $AC = CA = I$. Niech $\delta_{ij} = 1$ dla $i = j$ oraz $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Oczywiście $I = [\delta_{ij}]$. Wystarczy sprawdzić, że

$$[AC]_{ij} = [CA]_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{dla } 1 \leq i, j \leq n.$$

Zauważmy najpierw, że dla $1 \leq i \leq n$ sumy $\sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}$, $\sum_{k=1}^n a_{ki} D_{ki}$ są rozwinięciami

Laplace'a wyznacznika macierzy A , zaś dla $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, sumy $\sum_{k=1}^n a_{ik} D_{jk}$,

$\sum_{k=1}^n a_{kj} D_{ki}$ są równe 0, bo są one rozwinięciami Laplace'a wyznaczników o dwóch jednakowych wierszach lub kolumnach. Stąd i z definicji mnożenia macierzy otrzymujemy wzory

$$[AC]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{jk} = \frac{\delta_{ij} \det A}{\det A} = \delta_{ij},$$

$$[CA]_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ik} a_{kj} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n a_{kj} D_{ki} = \frac{\delta_{ij} \det A}{\det A} = \delta_{ij}.$$

Wzór na macierz odwrotną pojawił się w sposób naturalny, jako fragment powyższego dowodu. Wystarczy zauważyć, że $A^{-1} = C$.

Ćwiczenie 3.77. Korzystając z powyższego wzoru znaleźć macierze odwrotne do macierzy:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; & \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}; & \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 & \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; & \text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; & \text{(f*)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3.78. Wykorzystując operację odwracania macierzy oraz jej własności rozwiązać równania macierzowe:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; & \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \\
 & \text{(c)} X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}; & \text{(d*)} 2 \cdot X + X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -4 \\ 15 & 0 & 18 \end{bmatrix}; \\
 & \text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; & \text{(f*)} \left(3 \cdot X + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}; \\
 & \text{(g)} 2 \cdot X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}^{-1}; & \text{(h)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

FAKT 3.79. (własności macierzy odwrotnych)

Niech macierze A i B tego samego stopnia będą odwracalne oraz niech $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy macierze A^{-1} , A^T , AB , αA , A^n także są odwracalne i prawdziwe są równości:

$$\begin{aligned}
 & \text{(1)} \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}; & \text{(2)} (A^{-1})^{-1} = A; & \text{(3)} (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T; \\
 & \text{(4)} (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; & \text{(5)} (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} (A^{-1}); & \text{(6)} (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n.
 \end{aligned}$$

Dowód (4). Załóżmy, że macierze A , B są odwracalne. Są więc one nieosobliwe. Stąd i z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$, więc macierz AB jest nieosobliwa i ma macierz odwrotną. Dla dowodu wzoru wystarczy sprawdzić, że

macierzą odwrotną jest macierz $B^{-1}A^{-1}$. Mamy

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I.$$

Równości te wynikają z łączności mnożenia macierzy i z definicji macierzy odwrotnej. Mamy bowiem

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

oraz

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Ćwiczenie 3.80.

(a) Niech macierze kwadratowe A , B i C tego samego stopnia będą nieosobliwe. Wyprowadzić wzór na macierz odwrotną do ABC .

(b) Macierze A i B tego samego stopnia są odwracalne i przemienne. Pokazać, że macierze A^{-1} i B^{-1} także są przemienne.

(c) Macierze A i B są nieosobliwe oraz spełniają równości $A^2 = B^2$, $A^3 = B^3$. Pokazać, że $A = B$.

(d) Wiadomo, że $\det(-2A) = 32$ oraz $\det(A^{-1}) = 1/2$. Obliczyć $\det(4A^{-1})$.

(e*) Jak zmieni się macierz odwrotna do macierzy nieosobliwej, jeśli jej pierwszy wiersz pomnożymy przez 2?

(f*) Jak zmieni się macierz odwrotna do macierzy nieosobliwej, gdy przestawimy w niej dwie kolumny?

(g*) Macierze rzeczywiste A , B spełniają warunek $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$. Pokazać, że $\det A = \det B$.

Ćwiczenie 3.81. Znaleźć macierz, jeżeli macierz odwrotna do niej ma postać:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}; \quad (b) \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.82. Niech $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Obliczyć:

$$(a) \det(A^3); (b) \det(A^T); (c) \det(2A).$$

Ćwiczenie* 3.83. Pokazać, że macierz odwrotna do macierzy nieosobliwej:

(a) trójkątnej górnej (dolnej) jest macierzą trójkątną górną (dolną);

(b) symetrycznej (antysymetrycznej) jest macierzą symetryczną (antysymetryczną).

$$(c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.7. Algorytm Gaussa – Jordana

Niech A będzie macierzą nieosobliwą stopnia $n \geq 2$. Macierz tę można przekształcić do macierzy jednostkowej I_n wykonując operacje elementarne na jej **wierszach**. Macierz jednostkową uzyskamy w dwóch krokach:

I krok. Otrzymanie macierzy trójkątnej górnej z jedynekami na głównej przekątnej:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Operacje elementarne wykonujemy tak, aby kolejne kolumny macierzy A uzyskały powyższą postać. Przekształcenia zaczynamy od pierwszej kolumny. Jeżeli $a_{11} \neq 0$, to wiersze $w_1, w_2, \dots, w_n$ macierzy A przekształcamy kolejno na wiersze $w'_1, w'_2, \dots, w'_n$ według wzorów:

$$\begin{cases} w'_1 = \frac{w_1}{a_{11}}, \\ w'_2 = w_2 - a_{21}w'_1, \\ \vdots \\ w'_n = w_n - a_{n1}w'_1. \end{cases}$$

Jeżeli zaś $a_{11} = 0$, to wiersze macierzy A przestawiamy tak, aby w jej lewym górnym rogu znalazł się element niezerowy[¶] i dalej wykonujemy wymienione wcześniej operacje. Kolejne kolumny z jedynekami na przekątnej i zerami poniżej uzyskamy stosując przedstawione powyższe postępowanie do macierzy coraz to niższych stopni, aż do osiągnięcia stopnia 1.

II krok. Otrzymanie macierzy jednostkowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[¶]Taki element w pierwszej kolumnie istnieje, bo macierz jest nieosobliwa.

Wiersze $w'_n, w'_{n-1}, \dots, w'_1$ otrzymanej macierzy trójkątnej przekształcamy kolejno na wiersze $w''_n, w''_{n-1}, \dots, w''_1$ macierzy jednostkowej w następujący sposób:

$$\begin{cases} w''_n &= w'_n, \\ w''_{n-1} &= w'_{n-1} - b_{n-1n}w''_n, \\ w''_{n-2} &= w'_{n-2} - b_{n-2n-1}w''_{n-1} - b_{n-2n}w''_n, \\ \vdots & \vdots \\ w''_1 &= w'_1 - b_{12}w''_2 - b_{13}w''_3 - \dots - b_{1n}w''_n. \end{cases}$$

Diagram poniżej przedstawia schemat działania algorytmu Gaussa – Jordana.



Uwaga. Algorytm Gaussa – Jordana jest wygodnym narzędziem do odwracania macierzy, określania rzędów oraz do rozwiązywania układów równań liniowych. Macierzy osobliwej nie można sprowadzić do macierzy jednostkowej stosując operacje elementarne.

Ćwiczenie 3.85. Korzystając z algorytmu Gaussa – Jordana przekształć podane macierze do postaci jednostkowej (zapisać operacje elementarne jakie wykonano na macierzach):

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 4 \\ 2 & 9 & -5 & 10 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.86. Stosując algorytm Gaussa – Jordana: znaleźć macierze odwrotne do macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.

W kolejnym rozdziale omawiamy układy równań liniowych. Podajemy warunki istnienia rozwiązań takich układów. Następnie przedstawiamy metody ich rozwiązywania. Na końcu rozdziału wprowadzamy wektory i wartości własne macierzy.

4.1. Podstawowe określenia

Definicja 4.1. (*układ równań liniowych, rozwiązanie układu równań*)

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ dla $1 \leq i \leq m$ oraz $1 \leq j \leq n$. Rozwiązaniem tego układu nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających wszystkie równania. Przy czym układ równań, który ma tylko jedno rozwiązanie, nazywamy *układem oznaczonym*, a gdy ma więcej niż jedno rozwiązanie – *nieoznaczonym*. Zaś układ równań, który nie ma rozwiązania, nazywamy *sprzecznym*.

Uwaga. Układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$AX = B,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy *macierzą główną* układu równań liniowych, macierz X – *kolumną niewiadomych*, a B – *kolumną wyrazów wolnych*. Rozważa się także układy równań liniowych, w których macierze A , X oraz B są zespolone.

W przypadku „małej liczby” niewiadomych będziemy je zwykle oznaczać literami x, y, z, t, u .

Ćwiczenie 4.2. Podane układy równań zapisać w postaci macierzowej:

$$(a) \begin{cases} x - y = 0, \\ y + z = 2, \\ z = 5; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1, \\ 3y - 2z = 0, \\ x + t = 3, \\ x + z - 3u = 5; \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + 2y = 3y + z = 3 - 2z + t = u - 5. \end{cases}$$

Ćwiczenie 4.3. Korzystając z metody eliminacji niewiadomych rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} x + y = -1, \\ y + z = 3, \\ x + z = 4; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} -x - y + 3z = 0, \\ -x + 3y - z = 8, \\ 3x - y - z = 4; \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + z = 3, \\ x + y + z - 2t = -1, \\ x - 2y + z + t = 2, \\ 2x + y - z + t = 5. \end{cases}$$

Definicja 4.4. (układ jednorodny i niejednorodny)

Układ równań liniowych postaci $AX = \mathbb{O}$, gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$, a $\mathbb{O}$ macierzą zerową wymiaru $m \times 1$, nazywamy *jednorodnym*. Układ równań liniowych postaci $AX = B$, w którym B jest macierzą niezerową, nazywamy *niejednorodnym*.

Uwaga. Jednym z rozwiązań układu jednorodnego $AX = \mathbb{O}$ jest ciąg $(0, 0, \dots, 0)$. Rozwiązanie to nazywamy *rozwiązaniem trywialnym*.

4.2. Układy Cramera

Definicja 4.5. (układ Cramera*)

Układem Cramera nazywamy układ równań liniowych $AX = B$, w którym A jest macierzą nieosobliwą.

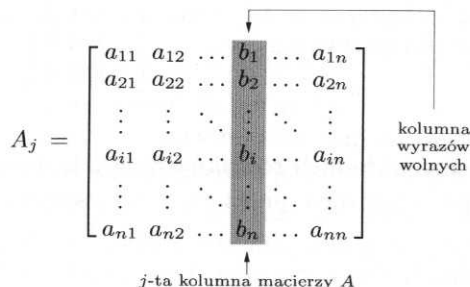
TWIERDZENIE 4.6. (wzór Cramera)

Układ Cramera $AX = B$ ma jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest określone wzorem:

$$X = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{bmatrix},$$

gdzie n oznacza stopień macierzy A , natomiast A_j ($1 \leq j \leq n$) oznacza macierz A , w której j -tą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych B (rys. 4.1).

*Gabriel Cramer (1704–1752), matematyk szwajcarski.

Rys. 4.1. Schemat tworzenia macierzy A_j we wzorach Cramera

Uwaga. Równość określającą rozwiązanie układu równań liniowych nazywamy wzorem Cramera. Równość ta po rozpisaniu przyjmuje postać:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

zwaną wzorami Cramera.

Dowód. Opracowany na podstawie noty Kong-Ming Chong'a umieszczonej w *American Mathematical Monthly*.

Niech $AX = B$ będzie układem Cramera, gdzie A jest macierzą nieosobliwą stopnia n . Ponadto niech $k_1, k_2, \dots, k_n$ oraz $e_1, e_2, \dots, e_n$ oznaczają kolumny odpowiednio macierzy A oraz I . Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\det [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_{i-1} \ B \ k_{i+1} \ \dots \ k_n]}{\det A} &= \det (A^{-1} [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_{i-1} \ B \ k_{i+1} \ \dots \ k_n]) \\ &= \det [A^{-1} k_1 \ A^{-1} k_2 \ \dots \ A^{-1} k_{i-1} \ A^{-1} B \ A^{-1} k_{i+1} \ \dots \ A^{-1} k_n] \\ &= \det [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{i-1} \ X \ e_{i+1} \ \dots \ e_n] = x_i, \end{aligned}$$

gdzie x_i oznacza element i -tego wiersza macierzy X .

Ćwiczenie 4.7. Korzystając ze wzorów Cramera rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} x + 5y = 2, \\ -3x + 6y = 15; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - y - z = 1, \\ 3x + 4y - 2z = -1, \\ 3x - 2y - 2z = 1; \end{cases} \quad (c) \begin{cases} y - 3z + 4t = 0, \\ x - 2z = 0, \\ 3x + 2y - 5t = 2, \\ 4x - 5z = 0. \end{cases}$$

Ćwiczenie 4.8. (metoda macierzy odwrotnej)

Pokazać, że rozwiązanie układu Cramera $AX = B$ jest określone wzorem $X = A^{-1}B$. Korzystając z powyższego wzoru rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} x - 7y = 2, \\ 2x + 3y = 5; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 4y = 2, \\ x + 5y = 6, \\ 2x + 10y + 6z = 12; \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y + z + t = 10, \\ x - y - z + t = 0, \\ x + 2y - t = 1, \\ 2y + z + t = 13. \end{cases}$$

Ćwiczenie 4.9. Rozwiązać układ równań $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Ćwiczenie 4.10.

(a) Korzystając z twierdzeń o układach równań liniowych pokazać, że istnieje tylko jedna płaszczyzna przechodząca przez trzy niewspółliniowe punkty w przestrzeni.

(b*) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnić, że jeżeli liczby $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ spełniają nierówności $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$, to dla dowolnych liczb rzeczywistych $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ istnieje tylko jeden wielomian W , stopnia nie większego niż n , spełniający warunki $W(x_i) = y_i$ dla $1 \leq i \leq n+1$.

Ćwiczenie 4.11.

(a) Znaleźć wielomian W najniższego stopnia, który dla $k = 0, 1, 2, 3$ spełnia warunek $W(k) = k!$.

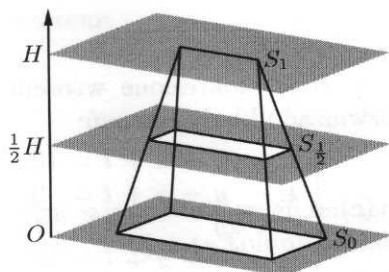
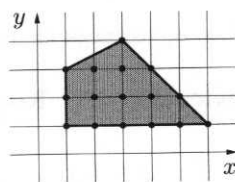
(b) Znaleźć wielomian W , który spełnia równanie różniczkowe $W''(x) + 2W'(x) - 3W(x) = -3x^2 + 13x - 1$.

(c) Znaleźć współczynniki rzeczywiste A, B, C, D wielomianu trygonometrycznego postaci $T(x) = A \sin x + B \cos x + C \sin 2x + D \cos 2x$, który spełnia równanie różniczkowe $T'''(x) + T(x) = \sin x - \cos x + 8 \sin 2x + \cos 2x$.

(d) Płaszczyzna o równaniu $z = Ax + By + C$ przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 0, 5)$, $P_2 = (1, 2, 1)$, $P_3 = (2, 3, 0)$. Układając odpowiedni układ równań wyznaczyć A, B, C .

Ćwiczenie* 4.12.

(a) Przypuśćmy, że wzór wyrażający pole S wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych (o współrzędnych całkowitych) ma postać $S = \alpha W + \beta B + \gamma$, gdzie W oznacza liczbę punktów kratowych wewnątrz wielokąta, B liczbę takich punktów na jego brzegu, natomiast α, β i γ są nieznanymi współczynnikami. Znaleźć te współczynniki.



(b) Prysmatoidem nazywamy bryłę wypukłą, której wszystkie wierzchołki leżą w dwóch płaszczyznach równoległych. Przypuśćmy, że wzór na objętość V takiej bryły ma postać

$$V = H (a S_0 + b S_{1/2} + c S_1),$$

gdzie H oznacza odległość płaszczyzn równoległych, a S_x pole przekroju bryły płaszczyzną równoległą do tych płaszczyzn położoną na wysokości xH . Znaleźć współczynniki a, b, c .

(c) Dla ustalonej liczby naturalnej k wyprowadzić wzór na sumę

$$S_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k \quad (n \in \mathbb{N})$$

zakładając, że ma on postać $S_n = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0$, gdzie $a_{k+1}, a_k, \dots, a_1, a_0$ są odpowiednio dobranymi liczbami rzeczywistymi. Obliczenia przeprowadzić dla: i) $k = 2$; ii) $k = 3$; iii) $k = 4$.

(d) Wiadomo, że $\cos^4 x \equiv A + B \cos 2x + C \cos 4x$ na $\mathbb{R}$, gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ są nieznanymi współczynnikami. Układając odpowiedni układ równań wyznaczyć A, B, C .

4.3. Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera–Capellego

Definicja 4.13. (*minor macierzy*)

Minorem stopnia k ($k \in \mathbb{N}$) macierzy nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy stojących na przecięciu dowolnie wybranych k kolumn i k wierszy.

Uwaga. Macierz o m wierszach i n kolumnach ma $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$ minorów stopnia k , gdzie $1 \leq k \leq \min(m, n)$.

Przykład 4.14. Niżej, w macierzy wymiaru 3×4 , zaznaczono ramkami elementy tworzące przykładowe minory stopnia 2 i 3:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{3} & 4 \\ 0 & 2 & \boxed{4} & 6 \\ \boxed{1} & 3 & \boxed{5} & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 3 & \boxed{4} \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 4 & \boxed{6} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & 5 & \boxed{7} \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 4.15. W podanych macierzach obliczyć wszystkie minory wskazanych stopni:

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 2; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad k = 3.$$

Definicja 4.16. (*rząd macierzy*)

Rzędem macierzy nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy 0. Rząd macierzy A oznaczamy przez $\text{rz}(A)$ lub $\text{rank}(A)$.

Ćwiczenie 4.17. Korzystając z definicji znaleźć rzędy macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

FAKT 4.18. (*własności rzędu macierzy*)

- (1) Rząd macierzy nieosobliwej jest równy jej stopniowi.
- (2) Operacje elementarne na wierszach (kolumnach) macierzy nie zmieniają jej rzędu.
- (3) Rząd macierzy i jej transpozycji są jednakowe.

Definicja 4.19. (*macierz schodkowa*)

Macierz nazywamy *schodkową*, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Przyjmujemy, że macierz o jednym niezerowym wierszu, a także dowolna macierz zerowa, są macierzami schodkowymi.

Uwaga. Do sprowadzania dowolnej macierzy do postaci schodkowej wykorzystuje się operacje elementarne nie zmieniające rzędu macierzy (np. postępując według algorytmu Gaussa).

Przykład 4.20. Wszystkie podane niżej macierze są schodkowe:

$$\begin{aligned}
 [0 \mid \boxed{3} \ 8] &- 1 \text{ schodek}; & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{6} & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &- 1 \text{ schodek}; \\
 \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix} &- 4 \text{ schodki}; & \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix} &- 3 \text{ schodki}; & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &- 3 \text{ schodki}.
 \end{aligned}$$

FAKT 4.21. (*o rzędzie macierzy schodkowej*)

Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej schodków.

Ćwiczenie 4.22. Sprowadzić macierze do postaci schodkowej i następnie odczytać ich rzędy:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; & \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}; & \quad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4.23. Zbadać rzędy macierzy w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & p & -1 & 2 \\ 2 & -1 & p & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}; & \quad \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ p & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

TWIERDZENIE 4.24 (Kroneckera[†] – Capellego[‡])

Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej $[A|B]$ tego układu;

$$\text{rz } A = \text{rz } [A|B].$$

FAKT 4.25. (o liczbie rozwiązań układu równań liniowych)

Niech $AX = B$ będzie układem równań liniowych z n niewiadomymi. Wówczas:

- (1) jeżeli $\text{rz } A \neq \text{rz } [A|B]$, to układ nie ma rozwiązań (układ sprzeczny);
- (2) jeżeli $\text{rz } A = \text{rz } [A|B] = n$, to układ ma tylko jedno rozwiązanie (układ oznaczony);
- (3) jeżeli $\text{rz } A = \text{rz } [A|B] = r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (układ nieoznaczony) zależnych od $n - r$ parametrów.

Uwaga. Układy równań nieliniowych mogą mieć inne liczby rozwiązań niż 0, 1 i ∞ . Np. układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x - y = 0 \end{cases}$$

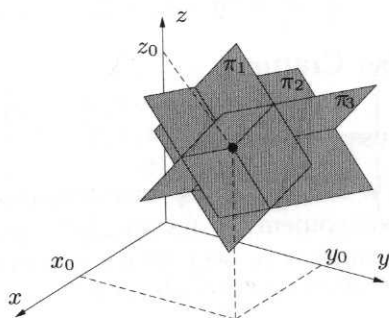
ma dwa rozwiązania: $(1, 1)$ oraz $(-1, -1)$.

Interpretacja geometryczna układu trzech równań z trzema niewiadomymi.

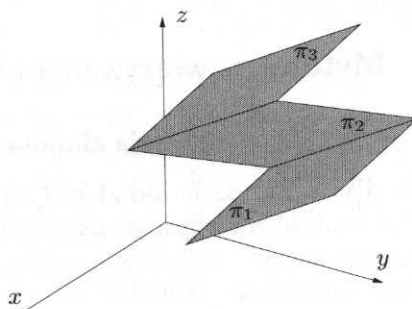
W interpretacji każde z równań układu (*) przedstawia płaszczyznę w przestrzeni.

$$(*) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \leftarrow \text{równanie płaszczyzny } \pi_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \leftarrow \text{równanie płaszczyzny } \pi_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \leftarrow \text{równanie płaszczyzny } \pi_3. \end{cases}$$

Podane niżej rysunki nie wyczerpują wszystkich możliwości.



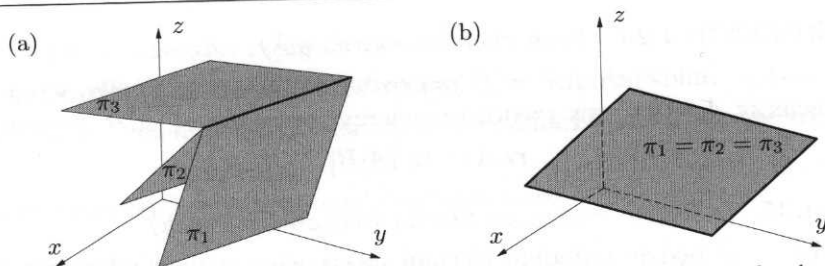
Rys. 4.2. Układ równań ma tylko jedno rozwiązanie



Rys. 4.3. Układ równań nie ma rozwiązań

[†]Leopold Kronecker (1823-1891), matematyk niemiecki.

[‡]Alfredo Capelli (1855-1910), matematyk włoski.



Rys. 4.4. Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od:
(a) jednego parametru, (b) dwóch parametrów

Ćwiczenie 4.26. W podanych układach równań określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz liczby parametrów:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} x - y + 2z - 3t = 2, \\ 2x + y - z + 4t = 1, \\ 4x - y + 3z - 2t = 5; \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} 4x - y + z = 3, \\ 2x + 3y - z = 5, \\ 2x - 4y + 2z = 2; \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad & \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ 3x + 6y + 7z = 5, \\ 2x + 4y + 5z = 2, \\ x + 2y + 4z = -5; \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = -7, \\ 3x + y + 4z = 5, \\ 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + 5y + z = 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4.27. Określić liczbę rozwiązań w podanych układach równań w zależności od parametru p :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} (p-2)x + (2p-1)y = 2-p, \\ 2x + (3+p)y = 2p; \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} x + py - z = 1, \\ 2x - y + pz = 0, \\ x + 10y - 6z = p; \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad & \begin{cases} x - y + 2z = 4, \\ 3x + y - z = 2, \\ 7x + 5y - 7z = -2, \\ 6x - 2y + 5z = p; \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x - 3y + z = 1, \\ 8x - 5y + z = p, \\ x + y - z = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

4.4. Metody rozwiązywania układów Cramera

Metoda eliminacji Gaussa – Jordana

Niech $AX = B$ będzie układem Cramera, w którym A jest macierzą stopnia n . Aby znaleźć rozwiązanie tego układu postępujemy w następujący sposób. Budujemy macierz rozszerzoną układu dopisując z prawej strony macierzy A macierz kolumnową B .

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right].$$

Na **wierszach** otrzymanej w ten sposób macierzy blokowej $[A|B]$ wykonujemy operacje elementarne. Przy pomocy tych operacji wykorzystując algorytm Gaussa – Jordana sprowadzamy macierz blokową $[A|B]$ do postaci $[I|X]$

$$[I|X] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{array} \right].$$

Macierz jednokolumnowa X jest wtedy rozwiązaniem układu wyjściowego. Diagram tej metody przedstawiono poniżej.

$$[A|B] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|X]$$

Dowód. Algorytm Gaussa – Jordana jest efektywną metodą przekształcania macierzy A do macierzy jednostkowej I . W każdym kroku operacje elementarne na wierszach macierzy rozszerzonej układu przekształcają układ na układ równoważny. Końcowa postać macierzy rozszerzonej jest jawnym wskazaniem rozwiązania. Ujmując rzecz inaczej zauważmy, że każdą z wykonywanych tu operacji można utożsamić z lewostronnym mnożeniem obu bloków macierzy rozszerzonej przez pewną macierz nieosobliwą (patrz dowód **Faktu 3.79** (str. 68)). Oznaczmy przez $E_1, E_2, \dots, E_N$ macierze odpowiadające kolejnym operacjom, zaś przez E iloczyn $E_N \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1$ tych macierzy. Z równości $EA = I$ wynika $E = A^{-1}$, zatem kolejne etapy rozwiązywania naszego układu równań możemy zapisać ogólnie w postaci

$$\begin{aligned} [A|B] &\longrightarrow [E_1 A | E_1 B] \longrightarrow [E_2 E_1 A | E_2 E_1 B] \longrightarrow \dots \\ &\longrightarrow [E_N E_{N-1} \dots E_1 A | E_N E_{N-1} \dots E_1 B] = [A^{-1} A | A^{-1} B] = [I|X]. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4.28. Korzystając z metody Gaussa – Jordana rozwiązać układy Cramera:

$$(a) \begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 5x + 4y = 3; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y - 2z = 5, \\ 2y + 3z = 6, \\ -x + y - 5z = -3; \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1, \\ 2x - y + 5z = 1, \\ 3x - 4y + 8z = 3; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + z = 5, \\ y + z + t = 5, \\ z + t = 3, \\ x + t = 6; \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x + 4y + 2z - t = 3, \\ 2x + 9y + 6z - 2t - 3u = 5, \\ x + 2y - z - t + 5u = 5, \\ -2x - 7y + z + 3t - 4u = -5, \\ -x - 5y - z + 3t + 6u = 4. \end{cases}$$

Metoda kolumn jednostkowych dla układów Cramera

Praktyczną wersją **metody eliminacji Gaussa – Jordana** dla układów Cramera jest **metoda kolumn jednostkowych**. Polega ona na przekształcaniu macierzy rozszerzonej układu w celu doprowadzenia wszystkich kolumn macierzy tego układu do postaci jednostkowej (tzn. z jedną jedynką i resztą zer).

Przy tym jedynki z różnych kolumn muszą znaleźć się w różnych wierszach. Końcowa postać $[I'|X']$ macierzy rozszerzonej będzie różnić się od postaci $[I|X]$ jedynie kolejnością wierszy. Dla układu Cramera z n niewiadomymi metoda ta wymaga n kroków, gdyż w każdym kroku przekształca się **ostatecznie** całą kolumnę. Kolejność przekształcanych kolumn oraz położenie końcowych „jedynek” jest dowolna, przy czym wygodnie jest do przekształcenia wybierać kolumnę składającą się z jedynki, „małych” liczb całkowitych i „dużej” liczby zer. W porównaniu z klasycznym algorytmem Gaussa – Jordana metoda ta nie wymaga przestawiania wierszy ani budowania macierzy trójkątnej. Wymaga jednak wykonania większej liczby mnożeń.

Ćwiczenie 4.29. Metodą kolumn jednostkowych rozwiązać układy Cramera:

$$(a) \begin{cases} 3x + y - z = 0, \\ 5x + 3y - 2z = -3, \\ 7x + 2y + 2z = 5; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4x - y + t = -2, \\ 2x + y + 3z = 1, \\ 3x + 6z - t = 1, \\ x + 2y + 12z + 2t = 15. \end{cases}$$

4.5. Metody rozwiązywania dowolnych układów równań

Definicja 4.30. (*równoważność układów równań liniowych*)

Niech A, A', B, B' będą macierzami o wymiarach odpowiednio $m \times n, k \times n, m \times 1, k \times 1$. Ponadto niech

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

będą macierzami niewiadomych, przy czym $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ jest pewną permutacją ciągu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Mówimy, że układy równań liniowych $AX = B$ i $A'X' = B'$ są równoważne, jeżeli zbiory ich rozwiązań są identyczne.

Przykład 4.31. Podane układy równań są równoważne:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

FAKT 4.32. (*o równoważnym przekształcaniu układów równań*)

Operacje elementarne na **wierszach**, skreślenie **wiersza** złożonego z samych zer skreślenie jednego z **wierszy** równych lub proporcjonalnych macierzy rozszerzonej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go na układ

równoważny. Dodatkowo otrzymuje się układ równoważny, jeżeli w macierzy A zamienimy miejscami dwie kolumny **przy jednoczesnej zamianie niewiadomych**

$$\begin{array}{c}
 \text{niewiadome} \\
 x_1 \quad x_j \quad x_l \quad x_n \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{k_j \longleftrightarrow k_l} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A'
 \end{array}$$

Uwaga. Operację skreślenia i -tego wiersza oznaczamy przez $\backslash w_i$, operację skreślenia wiersza i -tego, który jest proporcjonalny do wiersza k -tego, oznaczamy przez $\backslash w_i \sim w_k$, a operację zamiany j -tej kolumny z l -tą oznaczamy przez $k_j \longleftrightarrow k_l$.

Metoda eliminacji Gaussa – Jordana

Niech $AX = B$ będzie układem równań liniowych, gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$. Wówczas układ ten rozwiązujemy następująco:

1. budujemy macierz rozszerzoną układu postaci:

$$\begin{array}{c}
 \text{niewiadome} \\
 x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\
 [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]
 \end{array}$$

2. na macierzy rozszerzonej dokonujemy równoważnych przekształceń układu sprowadzając ją do postaci:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} \text{niewiadome} & \text{parametry} \end{array} \\
 x'_1 \quad x'_2 \quad \dots \quad x'_r \quad x'_{r+1} \quad x'_n \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 [A'|B'] = \left[\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_{1r+1} & \dots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_{2r+1} & \dots & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_{rr+1} & \dots & s_{rn} & z_r \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array} \right]
 \end{array}$$

przy czym ostatni wiersz może nie pojawić się wcale albo wystąpi ze współczynnikiem $z_{r+1} \neq 0$. Wówczas,

- (a) jeżeli $z_{r+1} \neq 0$, to układ $AX = B$ jest *sprzeczny*;
 (b) jeżeli ostatni wiersz macierzy $[A' | B']$ nie pojawi się i $n = r$, to układ $AX = B$ jest równoważny układowi Cramera (*układ oznaczony*) i jego jedyne rozwiązanie ma postać $x_1 = z_1, x_2 = z_2, \dots, x_n = z_n$ lub $x'_1 = z_1, x'_2 = z_2, \dots, x'_n = z_n$, o ile przy przekształcaniu macierzy wystąpiła operacja zamiany kolumn.
 (c) jeżeli ostatni wiersz macierzy $[A' | B']$ nie pojawi się i $n > r$, to układ $AX = B$ ma nieskończenie wiele rozwiązań (*układ nieoznaczony*), przy czym r spośród niewiadomych oznaczanych symbolami $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$ zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych oznaczonych symbolami $x'_{r+1}, x'_{r+2}, \dots, x'_n$ w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1r+1} & s_{1r+2} & \dots & s_{1n} \\ s_{2r+1} & s_{2r+2} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{rr+1} & s_{rr+2} & \dots & s_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

W szczególnym przypadku $r = 0$ wszystkie niewiadome są parametrami i mogą przyjmować dowolne wartości.

Uwaga. Liczba r jest wyznaczona jednoznacznie. Jest to rząd macierzy A . Niewiadome $x'_1, x'_2, \dots, x'_r$ nazywamy niewiadomymi zależnymi, a niewiadome $x'_{r+1}, x'_{r+2}, \dots, x'_n$ parametrami. Podział niewiadomych na zależne i parametry nie jest jednoznaczny, ale nie jest też dowolny. Przy przekształcaniu macierzy rozszerzonej układu do postaci końcowej możemy wykorzystać algorytm sprowadzania macierzy nieosobliwej do postaci jednostkowej. W przeciwnieństwie do układu Cramera mogą pojawić się tu trzy nowe sytuacje:

1. wiersz złożony z samych zer – wtedy go skreślamy;
2. dwa wiersze równe lub proporcjonalne – wtedy skreślamy jeden z nich;
3. brak elementu niezerowego w kolejnej kolumnie powodujący niemożność ustawienia kolejnej jedynki na przekątnej – wtedy całą kolumnę **wraz z jej niewiadomą** przestawiamy na miejsce przedostatnie przed kolumnę wyrazów wolnych (niewiadoma ta staje się parametrem).

Ćwiczenie 4.33. Metodą eliminacji Gaussa – Jordana rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} x + 6y - z = 0, \\ -x - 4y + 5z = 6, \\ 3x + 17y = 2, \\ 2x + 13y + 5z = 8; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1, \\ 3x + 6y + 7z + t = 5, \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y - 2z + 2t = -2, \\ 5x - 3y - z + t = 3, \\ 2x + y - z + t = 1, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = -4; \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t - u = 6, \\ 3x + 6y + 5z - 2t - 9u = 1, \\ 2x + 4y + 2z - 8u = -5, \\ 2x + 4y + 7z - 5t + u = 17, \\ x + 2y + 6z - 5t - 10u = 12. \end{cases}$$

Metoda kolumn jednostkowych

Praktyczną wersją **metody eliminacji Gaussa – Jordana** dla dowolnych układów równań liniowych jest **metoda kolumn jednostkowych**. Jest rozszerzeniem metody opisanej dla układów Cramera na przypadek ogólny. Polega na równoważnym przekształcaniu macierzy rozszerzonej układu, w celu doprowadzenia możliwie największej liczby kolumn do postaci jednostkowej. Jedyńki z różnych kolumn jednostkowych powinny się przy tym znaleźć w różnych wierszach. Przekształcanie poszczególnych kolumn wykonujemy tak samo, jak dla układów Cramera. Przy wyborze kolumn oraz miejsc na jedynki mamy pełną dowolność. Jednoznacznie określona jest tylko liczba tych kolumn, ale pojawia się ona w naturalny sposób na końcu postępowania. Do przekształceń najwygodniej jest brać kolumny zawierające „małe” liczby całkowite i „dużo” zer. W przypadku dowolnych układów równań w trakcie postępowania mogą pojawić się wiersze zerowe – wtedy je skreślamy, wiersze proporcjonalne – wtedy skreślamy jeden z nich. Może się także zdarzyć, że w macierzy rozszerzonej układu pojawi się wiersz zerowy z elementem niezerowym w kolumnie wyrazów wolnych. Taki układ równań jest oczywiście sprzeczny. Jeśli tak się nie zdarzy, to postępowanie kończy się wtedy, gdy liczba wyróżnionych kolumn jest równa liczbie wierszy, które pozostały w macierzy. Rozwiązanie układu odczytujemy z końcowej postaci macierzy, wyróżnione „jedyńki” wskazują niewiadome zależne. Stosując metodę kolumn jednostkowych unikamy operacji przestawiania wierszy i kolumn.

Ćwiczenie 4.34. Odczytać rozwiązania podanych układów równań liniowych z niewiadomymi x, y, z, s, t zapisanych w postaci macierzy rozszerzonych:

$$(a) \left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]; \quad (b) \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Ćwiczenie 4.35. Metodą kolumn jednostkowych rozwiązać układy:

$$(a) \begin{cases} 5x - 3y - z + t = 1, \\ x - y - 2z + 2t = -2, \\ 2x + y - z + t = 2; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 6x + 3y + z + 2t = 5, \\ 5x + 7y + 2z + 7t = 9, \\ 7x - y - 3t = 1, \\ 4x + 11y + 3z + 12t = 13. \end{cases}$$

Ćwiczenie 4.36. Podać przykład układu:

- (a) pięciu równań liniowych z trzema niewiadomymi, który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;
- (b) czterech równań liniowych z pięcioma niewiadomymi, który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów;
- (c) dwóch równań liniowych z czterema niewiadomymi, który jest sprzeczny;
- (d) trzech równań liniowych z niewiadomymi x, y, z , który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru, przy czym jednym z jego rozwiązań jest $x = 1, y = 0, z = 3$;
- (e*) trzech równań liniowych z niewiadomymi x, y, z, t , który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów, a wśród jego rozwiązań są: $x = 1, y = 0, z = 1, t = 1$ oraz $x = 3, y = 1, z = 4, t = 2$.

Ćwiczenie 4.37. Rozwiązując odpowiednie układy równań liniowych:

- (a) znaleźć równanie paraboli postaci $y = ax^2 + bx + c$, która przechodzi przez punkty $A_1 = (1, 2)$, $A_2 = (2, 3)$, $A_3 = (3, 5)$;
- (b) wyznaczyć liczby a, b, c , dla których w przedziale $[0, 2\pi]$ zachodzi tożsamość

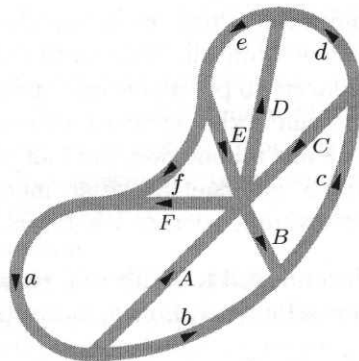
$$a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x \equiv 0;$$

- (c*) wyznaczyć liczby $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, dla których na $\mathbb{R}$ zachodzi tożsamość

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} + \alpha_4 e^{4x} = 0.$$

Ćwiczenie* 4.38. Ruch pojazdów na drogach osiedla odbywa się jednokierunkowo, zgodnie ze schematem zamieszczonym poniżej. Odcinki dróg osiedlowych oznaczone są literami $a, b, \dots, f$ i $A, B, \dots, F$. Nocą osiedle jest patrolowane przez radiowozy policyjne. Pewnej nocy zaobserwowano, że wzdłuż odcinków B, C, D, E, F radiowóz przejechał odpowiednio:

- (a) 2, 3, 2, 5, 1, 5; (b) 3, 2, 5, 6, 4, 11 razy.



Ile razy radiowóz przejechał wzdłuż pozostałych odcinków? Odpowiedzieć na to samo pytanie przy założeniu, że na odcinkach C i F jest przeciwny kierunek ruchu.

Ćwiczenie 4.39. W czasie egzaminu z algebry liniowej studenci rozwiązywali cztery pięciozadaniowe zestawy A, B, C i D . Liczby zadań z pięciu działów algebry (liczb zespolonych, wielomianów, macierzy i wyznaczników, układów równań liniowych oraz geometrii analitycznej) w poszczególnych zestawach

wynosiły: 2, 1, 1, 0, 1 w zestawie A; 1, 0, 1, 1, 2 w zestawie B; 0, 1, 2, 1, 1 w zestawie C; 1, 1, 0, 1, 2 w zestawie D. Egzamin zdawało 50 studentów. Egzaminator sprawdził odpowiednio 47, 51, 77 zadań z działów pierwszego, trzeciego i piątego. Ile zestawów każdej grupy było na sali?

4.6. Wartości i wektory własne macierzy

Definicja 4.40. (*wielomian i równanie charakterystyczne macierzy*)

Niech A będzie macierzą kwadratową rzeczywistą (zespoloną). *Wielomianem charakterystycznym* macierzy A nazywamy wielomian rzeczywisty (zespólony) określony wzorem:

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Równaniem charakterystycznym tej macierzy nazywamy równanie postaci:

$$w_A(\lambda) = 0.$$

Uwaga. Wielomian charakterystyczny macierzy wymiaru $n \times n$ ma stopień n .

Ćwiczenie 4.41. Obliczyć wielomiany charakterystyczne macierzy rzeczywistych i zespolonych:

$$(a) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ -2 & -i \end{bmatrix}; \quad (c) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 4.42. Dany jest wielomian charakterystyczny $w_A(\lambda)$ macierzy A stopnia n . Napisać wielomiany charakterystyczne macierzy:

(a) $2A$; (b) A^T ; (c) $P^{-1}AP$, gdzie $\det P \neq 0$; (d) A^{-1} , gdzie $\det A \neq 0$.

Definicja 4.43. (*wartość własna i wektor własny macierzy*)

Niech A będzie macierzą rzeczywistą (zespoloną) stopnia n . *Wartością własną macierzy* A nazywamy każdy rzeczywisty (zespólony) pierwiastek wielomianu charakterystycznego tej macierzy, tj. liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) spełniającą równanie:

$$w_A(\lambda) = 0.$$

Niezerowy wektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) nazywamy *wektorem własnym macierzy* A odpowiadającym wartości własnej $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) tej macierzy, jeżeli spełnia warunek:

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 4.44. Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne macierzy rzeczywistych:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; & \text{(b)} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; & \text{(c)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{(d)} \quad A &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & \text{(e)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; & \text{(f)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4.45. Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im wektory własne macierzy zespolonych:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; & \text{(b)} \quad A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; & \text{(c)} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{(d)} \quad A &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}; & \text{(e)} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}; & \text{(f)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4.46. Uzasadnić, że jeżeli liczba λ jest wartością własną macierzy A , to

- (a) liczba λ^k jest wartością własną macierzy A^k ($k = 2, 3, 4, \dots$);
- (b) liczba $1/\lambda$, o ile $\lambda \neq 0$, jest wartością własną macierzy A^{-1} .

FAKT 4.47. (wartości własne a wyznacznik)

Niech A będzie macierzą zespoloną stopnia n o wartościach własnych $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ i wielomianie charakterystycznym $w_A(\lambda)$. Wówczas:

- (1) $\det A = w_A(0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$;
- (2) A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy 0 nie jest jej wartością własną.

Dowód (1). Z definicji $w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, zatem dla $\lambda = 0$ mamy $w_A(0) = \det A$. Stopień wielomianu w_A jest równy n , a liczby $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ są jego pierwiastkami, współczynnik przy λ^n wynosi $(-1)^n$. Ze wzorów Viete'a iloczyn $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ jest równy wyrazowi wolnemu tego wielomianu, czyli $w_A(0)$.

(2). Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$, a to z kolei na podstawie (1) zachodzi, gdy $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \neq 0$. Czyli żadna z wartości własnych macierzy A nie może być zerem.

Ćwiczenie 4.48. Niech A będzie macierzą zespoloną stopnia n o wartościach własnych $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Uzasadnić, że $\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, gdzie $\text{tr } A$ oznacza sumę wszystkich elementów głównej przekątnej macierzy A (tzw. ślad macierzy).

Ćwiczenie* 4.49. Pokazać, że jeżeli A jest macierzą kwadratową stopnia n , to jej wielomian charakterystyczny ma postać

$$w_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n p_n),$$

gdzie p_k jest sumą wszystkich minorów głównych stopnia k macierzy A , tj. minorów, które na swojej głównej przekątnej mają wyłącznie elementy głównej przekątnej macierzy A . W szczególności $p_1 = \text{tr } A$ oraz $p_n = \det A$.

TWIERDZENIE 4.50 (Cayley'a[§] – Hamiltona[¶])

Każda macierz kwadratowa spełnia swoje równanie charakterystyczne.

Dowód. Niech A będzie macierzą stopnia n , zaś $w_A(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n$ jej wielomianem charakterystycznym. Rozważmy macierz $B = A - \lambda I$ oraz macierz B^D jej dopełnień algebraicznych. Wówczas $B(B^D)^T = \det B \cdot I$, ale $\det B = w_A(\lambda)$, zatem

$$B(B^D)^T = a_0 I + \lambda a_1 I + \dots + \lambda^n a_n I.$$

Zauważmy, że każdy element macierzy B^D jest pewnym wielomianem stopnia $n-1$ zmiennej λ . Zatem istnieją, macierze $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ złożone z odpowiednich współczynników tych wielomianów takie, że $(B^D)^T = B_0 + \lambda B_1 I + \dots + \lambda^{n-1} B_{n-1}$. Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} B(B^D)^T &= (A - \lambda I)(B_0 + \lambda B_1 + \dots + \lambda^{n-1} B_{n-1}) \\ &= AB_0 + \lambda(AB_1 - B_0) + \dots + \lambda^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) - \lambda^n B_{n-1}. \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach λ w obu znalezionych postaciach macierzy $B(B^D)^T$ otrzymujemy ciąg równości

$$\begin{aligned} AB_0 &= a_0 I, \quad AB_1 - B_0 = a_1 I, \quad AB_2 - B_1 = a_2 I, \dots, \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I, \quad -B_{n-1} = a_n I. \end{aligned}$$

Wstawiając macierz A do jej wielomianu charakterystycznego i wykorzystując powyższe równości mamy

$$\begin{aligned} a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n &= \\ &= AB_0 + A(AB_1 - B_0) + A^2(AB_2 - B_1) + \dots + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) - A^n B_{n-1} \\ &= AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \dots + A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = \mathbb{O}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie* 4.51. Sprawdzić tezę powyższego twierdzenia dla macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie* 4.52. Wskazać błąd w poniższym „dowodzie” twierdzenia Cayley'a – Hamiltona. Niech $w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Wtedy podstawiając w miejsce λ macierz A otrzymamy $w_A(A) = \det(A - A \cdot I) = \det \mathbb{O} = 0$.

[§] Arthur Cayley (1821-1895), matematyk angielski.

[¶] William Rowan Hamilton (1805-1865), irlandzki matematyk i astronom.

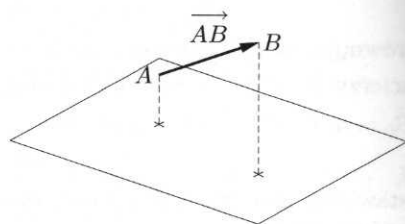
5. Geometria analityczna w przestrzeni

Przedostatni rozdział poświęcony jest geometrii analitycznej w przestrzeni. Na początku wprowadzimy wektory oraz działania na nich. Następnie omawiamy wraz z zastosowaniem trzy iloczyny związane z wektorami: skalarny, wektorowy, mieszany. W kolejnym paragrafie podajemy równania płaszczyzn i prostych w przestrzeni. Rozdział kończymy omówieniem wzajemnych relacji położenia punktów, prostych i płaszczyzn w przestrzeni.

5.1. Wektory

Definicja 5.1. (*wektor zaczepiony*)

Wektorem zaczepionym nazywamy dowolny odcinek w przestrzeni z wyróżnionym początkiem (miejscem zaczepienia) oraz końcem. Jeżeli punkt A jest początkiem, a B końcem odcinka, to wektor oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$ (rys. 5.1.). Na rysunku koniec wektora zaznaczamy grotem.



Rys. 5.1. Wektor zaczepiony

Jeżeli nie będzie konieczne nazywanie początku i końca wektora, to będziemy go oznaczali np. symbolem v . Wektor, którego początkiem i końcem jest ten sam punkt, nazywamy wektorem zerowym i oznaczamy symbolem 0 .

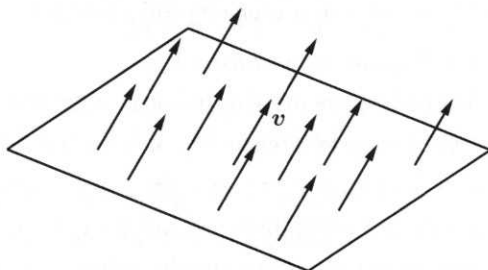
Uwaga. Z wektorem związane są pojęcia: kierunek, zwrot, długość. Mówimy, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają ten sam kierunek (są równoległe), gdy odcinki AB i CD są równoległe. Fakt, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równoległe zapisujemy symbolicznie $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Podobnie, piszemy $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$, gdy wektory u i v są równoległe. Z kolei mówimy, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają ten sam zwrot, gdy mają ten sam kierunek, a ich groty skierowane są w tę samą stronę. Gdy wektory mają ten sam kierunek, ale ich groty zwrócone są w różne strony, to mówimy, że mają przeciwne zwroty.

Definicja 5.2. (*długość wektora*)

Długością wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy długość odcinka AB . Wielkość tę oznaczamy symbolem $|\overrightarrow{AB}|$, a dla wektora $\mathbf{v}$ symbolem $|\mathbf{v}|$. *Wersorem* nazywamy wektor o długości 1.

Definicja 5.3. (*wektor swobodny*)

Ustalmy wektor zaczepiony $\mathbf{v}$ i rozważmy zbiór wszystkich wektorów, które mają ten sam zwrot oraz długość. Zbiór ten nazywamy wektorem swobodnym i oznaczamy symbolem $\{\mathbf{v}\}$ lub krótko $\mathbf{v}$. Innymi słowy: wektorem swobodnym nazywamy zbiór wszystkich wektorów, które można otrzymać z ustalonego wektora przez przesunięcia równoległe (rys. 5.2.).

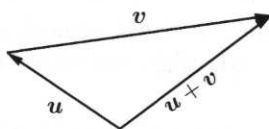


Rys. 5.2. Wektor swobodny

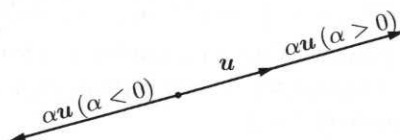
W dalszej części książki będziemy zajmowali się wyłącznie wektorami swobodnymi.

Definicja 5.4. (*działania na wektorach*)

Sumą wektorów $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nazywamy wektor otrzymany z połączenia początku pierwszego wektora z końcem drugiego, przy założeniu, że do końca wektora $\mathbf{u}$ doczepimy początek wektora $\mathbf{v}$ (rys. 5.3.). Sumę wektorów $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ oznaczamy przez $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.



Rys. 5.3. Suma wektorów



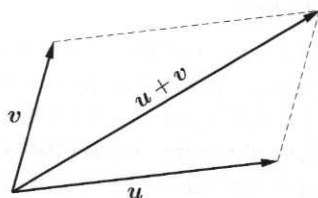
Rys. 5.4. Iloczyn wektora przez liczbę

Z kolei iloczynem wektora $\mathbf{u}$ przez liczbę rzeczywistą α nazywamy wektor otrzymany z wektora $\mathbf{u}$ przez jego skalowanie α -krotne. Przy czym, gdy $\alpha > 0$, to nie zmieniamy zwrotu wektora, a gdy $\alpha < 0$, to zmieniamy zwrot na przeciwny (rys. 5.4.). Iloczyn wektora $\mathbf{u}$ przez liczbę rzeczywistą α oznaczamy symbolem $\alpha\mathbf{u}$. Ponadto przyjmujemy, że $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Wektor $(-1) \cdot \mathbf{u}$ nazywamy

wektorem przeciwnym do wektora u i oznaczamy przez $-u$.

Różnicę wektorów u, v określamy wzorem $u - v = u + (-v)$.

Uwaga. W interpretacji geometrycznej suma wektorów jest przekątną równoległoboku rozpiętego na tych wektorach.



Rys. 5.5. Interpretacja geometryczna sumy wektorów

FAKT 5.5. (*własności działań na wektorach*)

Niech u, v, w będą wektorami swobodnymi oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy:

- (1) dodawanie wektorów jest przemienne, tj. $u + v = v + u$;
- (2) dodawanie wektorów jest łączne, tj. $u + (v + w) = (v + u) + w$;
- (3) wektor 0 jest elementem neutralnym dodawania, tj. $u + 0 = u$;
- (4) wektor $-u$ jest elementem przeciwnym do wektora u , tj. $u + (-u) = 0$;
- (5) $1 \cdot u = u$;
- (6) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;
- (7) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
- (8) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

Ćwiczenie 5.6.

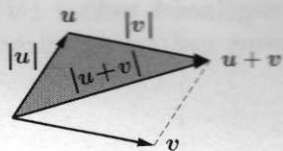
- (a) Wektory a, b są przekątnymi równoległoboku. Wyrazić boki tego równoległoboku za pomocą wektorów a i b .
- (b) Korzystając z rachunku wektorowego uzasadnić, że ze środkowych trójkąta można zbudować trójkąt.
- (c*) Wektory a, b, c, d, e, f tworzą krawędzie pewnego czworoscianu. Uzasadnić, że niezależnie od zwrotów tych wektorów $a + b + c + d + e + f \neq 0$.
- (d) Korzystając z rachunku wektorowego uzasadnić, że środki dowolnej łamanej zamkniętej w przestrzeni złożonej z czterech odcinków są wierzchołkami równoległoboku.
- (e*) Korzystając z rachunku wektorowego uzasadnić, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2:1 licząc od wierzchołków.

FAKT 5.7. (*własności długości wektora*)

Niech u, v będą wektorami swobodnymi oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy:

- (1) $|u| \geq 0$, przy czym $|u| = 0 \iff u = 0$;
- (2) $|\alpha u| = |\alpha| \cdot |u|$;
- (3) $|u + v| \leq |u| + |v|$;
- (4) $||u| - |v|| \leq |u - v|$.

Uwaga. Nierówność (3) jest prawdziwa dla dowolnej liczby składników. Nierówność tę ze względu na jej interpretację geometryczną nazywamy nierównością trójkąta (rys. 5.6). Równość w tej nierówności jest możliwa tylko wtedy, gdy $u = 0$ lub $v = 0$ albo, gdy $v = \beta u$ dla pewnego $\beta > 0$.



Rys. 5.6. Ilustracja nierówności trójkąta

Dowód (3). Wykorzystamy interpretację geometryczną wektorów. Pierwsza z rozważanych nierówności jest relacją między długościami boków trójkąta o wierzchołkach w początku układu współrzędnych oraz punktów znajdujących się na końcach wektorów u i $u + v$ (rys. 5.6).

Dowód (4). Z udowodnionej powyżej nierówności wynika, że

$$|u| = |u - v + v| \leq |u - v| + |v|$$

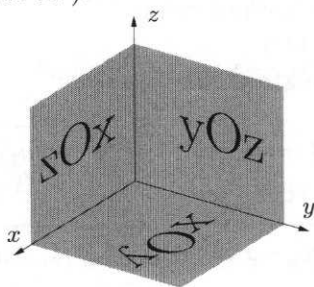
oraz

$$|v| = |v - u + u| \leq |v - u| + |u| = |u - v| + |u|.$$

Zatem $-|u - v| \leq |u| - |v| \leq |u - v|$, więc $||u| - |v|| \leq |u - v|$.

Definicja 5.8. (układ współrzędnych w przestrzeni)

Układem współrzędnych w przestrzeni nazywamy trzy ustalone półproste x , y , z wychodzące z jednego punktu O , które są parami prostopadłe. Taki układ współrzędnych oznaczamy przez $Oxyz$. Przedłużenia półprostych Ox , Oy , Oz do prostych nazywamy osiami, a płaszczyzny xOy , yOz , xOz płaszczyznami układu współrzędnych (rys. 5.7).



Rys. 5.7. Układ współrzędnych w przestrzeni

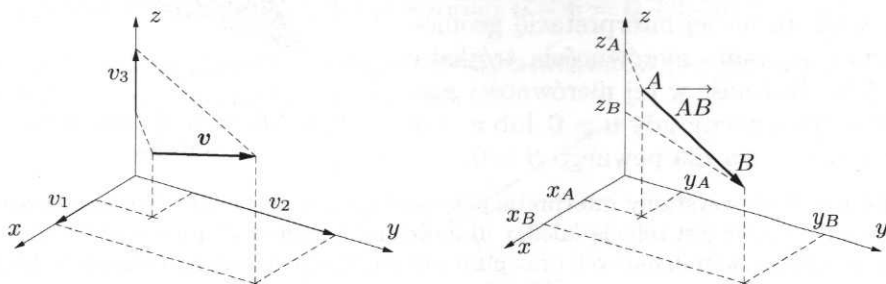
Definicja 5.9. (współrzędne wektora w przestrzeni)

Niech v będzie wektorem w przestrzeni. Współzrędnymi wektora v nazywamy długości odcinków skierowanych v_1 , v_2 , v_3 , które są jego rzutami prostokątnymi na odpowiednie osie Ox , Oy , Oz , co zapisujemy $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Podobnie, jeżeli wektor ma początek $A = (x_A, y_A, z_A)$ i koniec $B = (x_B, y_B, z_B)$, to liczby $x_B - x_A$, $y_B - y_A$, $z_B - z_A$ nazywamy jego współzrędnymi. Piszemy wtedy

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

W szczególności wektor $\overrightarrow{OP}$ o początku $O = (0, 0, 0)$ i końcu w punkcie P nazywamy *wektorem wodzącym* punktu P i oznaczamy zwykle przez $\mathbf{r}_P$.



Rys. 5.8. Ilustracja współrzędnych wektora

Uwaga. Korzystając ze współrzędnych wektorów, wprowadzone poprzednio działania, można wyrazić wzorami:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \quad a\mathbf{u} = (au_1, au_2, au_3),$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ oraz $a \in \mathbb{R}$. Tak więc, dowolny wektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ można przedstawić w postaci

$$\mathbf{w} = w_1 \hat{\mathbf{i}} + w_2 \hat{\mathbf{j}} + w_3 \hat{\mathbf{k}},$$

gdzie wektory $\hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{j}} = (0, 1, 0)$, $\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$ nazywamy *wersorami* odpowiednio na osiach Ox , Oy , Oz .

Z kolei wzory na długość wektora mają postać:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

lub

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2},$$

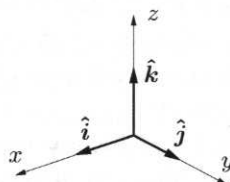
gdzie $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ oraz $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$.

Ćwiczenie 5.10. Obliczyć długości wektorów:

- (a) $\mathbf{u} = (-3, 0, 4)$; (b) $\mathbf{v} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{31})$;
 (c) $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A = (2, 1, -3)$, $B = (-1, 1, 4)$.

FAKT 5.11. (punkt podziału odcinka)

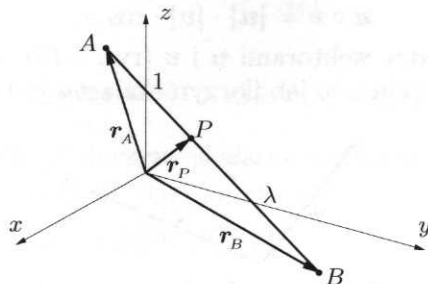
Niech $\mathbf{r}_A$ oraz $\mathbf{r}_B$ będą wektorami wodzącymi odpowiednio punktów A i B . Punkt P podziału odcinka AB w stosunku $1 : \lambda$ ($\lambda > 0$), ma wektor wodzący (rys. 5.9)



$$\mathbf{r}_P = \frac{\lambda \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{1 + \lambda}.$$

W szczególności środek S odcinka AB ma wektor wodzący

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B).$$



Rys. 5.9. Podział odcinka AB w stosunku $1 : \lambda$

Uwaga. Jeżeli $\mathbf{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$, $\mathbf{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$, to współrzędne wektora $\mathbf{r}_P = (x, y, z)$ wyrażają się wzorami:

$$x = \frac{\lambda x_A + x_B}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{\lambda y_A + y_B}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{\lambda z_A + z_B}{1 + \lambda}.$$

Dowód. Położenie punktu P określa zależność $\overrightarrow{PB} = \lambda \overrightarrow{AP}$. Ponieważ $\overrightarrow{AP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A$, $\overrightarrow{PB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_P$, więc $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_P = \lambda(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)$. Stąd $\mathbf{r}_P(1 + \lambda) = \lambda \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B$, czyli

$$\mathbf{r}_P = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \mathbf{r}_A + \frac{1}{1 + \lambda} \mathbf{r}_B.$$

Ćwiczenie 5.12.

(a) Niech $A = (-1, 2, 5)$, $B = (1, 6, -3)$. Obliczyć współrzędne środka odcinka AB .

(b) Punkt $P = (0, 0, 0)$ dzieli odcinek AB w stosunku $1 : 3$. Znaleźć współrzędne punktu B , jeżeli $A = (-1, 2, 3)$.

(c) Znane są współrzędne wierzchołków $A = (1, -1, 0)$, $B = (5, 7, 3)$ trójkąta ABC oraz punktu $S = (2, 4, 0)$ przecięcia jego środkowych. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka C .

(d*) Odległości wierzchołków A, B, C kwadratu $ABCD$ od pewnej płaszczyzny wynoszą odpowiednio 1, 3, 7. Obliczyć odległość czwartego wierzchołka od tej płaszczyzny.

(e) Uzasadnić, że sfera o środku (a, b, c) i promieniu r ma równanie $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

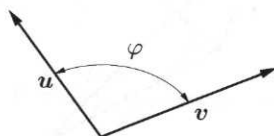
5.2. Iloczyn skalarny

Definicja 5.13. (iloczyn skalarny)

Niech u, v będą wektorami niezerowymi. Iloczyn skalarny wektorów u i v określamy wzorem:

$$u \circ v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \varphi,$$

gdzie φ jest kątem między wektorami u i v (rys. 5.10). Jeżeli wektor u lub v jest zerowy, to przyjmujemy, że ich iloczyn skalarny jest równy 0.



Rys. 5.10. Ilustracja do definicji iloczynu skalarnego

FAKT 5.14. (wzór do obliczania iloczynu skalarnego)

Niech $u = (u_1, u_2, u_3)$ oraz $v = (v_1, v_2, v_3)$ będą dowolnymi wektorami. Wtedy:

$$u \circ v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Uwaga. Niektórzy autorzy przyjmują powyższy fakt jako określenie iloczynu skalarnego. Wtedy wzór z naszej definicji wymaga uzasadnienia.

Dowód. Jeżeli $v = 0$, to wzór zachodzi. Załóżmy więc, że $v \neq 0$. Niech P oznacza rzut prostokątny na prostą o wektorze kierunkowym v . Z własności rzutów wynika, że

$$P(u) = P(u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j} + u_3 \hat{k}) = u_1 P(\hat{i}) + u_2 P(\hat{j}) + u_3 P(\hat{k}).$$

Ale długość rzutu prostokątnego wektora na prostą jest równa długości tego wektora pomnożonej przez kosinus kąta ostrego między wektorem a prostą, zatem uwzględniając zwrot tego rzutu mamy

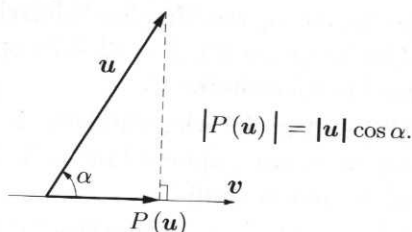
$$P(u) = \frac{v}{|v|} |u| \cos \angle(u, v),$$

gdzie $\angle(u, v)$ oznacza kąt skierowany między wektorami u i v . Dla kolejnych wersorów otrzymujemy zależności

$$P(\hat{i}) = \frac{v}{|v|} |\hat{i}| \cos \angle(\hat{i}, v) = \frac{v}{|v|} \cdot \frac{v_1}{|v|},$$

$$P(\hat{j}) = \frac{v}{|v|} |\hat{j}| \cos \angle(\hat{j}, v) = \frac{v}{|v|} \cdot \frac{v_2}{|v|},$$

$$P(\hat{k}) = \frac{v}{|v|} |\hat{k}| \cos \angle(\hat{k}, v) = \frac{v}{|v|} \cdot \frac{v_3}{|v|}.$$



Stąd

$$\frac{v}{|v|} |u| \cos \angle(u, v) = \frac{v}{|v|} \left(\frac{u_1 v_1}{|v|} + \frac{u_2 v_2}{|v|} + \frac{u_3 v_3}{|v|} \right),$$

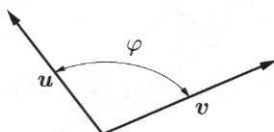
5.2. Iloczyn skalarny

Definicja 5.13. (*iloczyn skalarny*)

Niech $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ będą wektorami niezerowymi. *Iloczyn skalarny* wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ określamy wzorem:

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi,$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ (rys. 5.10). Jeżeli wektor $\mathbf{u}$ lub $\mathbf{v}$ jest zerowy, to przyjmujemy, że ich iloczyn skalarny jest równy 0.



Rys. 5.10. Ilustracja do definicji iloczynu skalarnego

FAKT 5.14. (*wzór do obliczania iloczynu skalarnego*)

Niech $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ oraz $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ będą dowolnymi wektorami. Wtedy:

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Uwaga. Niektórzy autorzy przyjmują powyższy fakt jako określenie iloczynu skalarnego. Wtedy wzór z naszej definicji wymaga uzasadnienia.

Dowód. Jeżeli $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, to wzór zachodzi. Załóżmy więc, że $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Niech P oznacza rzut prostokątny na prostą o wektorze kierunkowym $\mathbf{v}$. Z własności rzutów wynika, że

$$P(\mathbf{u}) = P(u_1 \hat{\mathbf{i}} + u_2 \hat{\mathbf{j}} + u_3 \hat{\mathbf{k}}) = u_1 P(\hat{\mathbf{i}}) + u_2 P(\hat{\mathbf{j}}) + u_3 P(\hat{\mathbf{k}}).$$

Ale długość rzutu prostokątnego wektora na prostą jest równa długości tego wektora pomnożonej przez kosinus kąta ostrego między wektorem a prostą, zatem uwzględniając zwrot tego rzutu mamy

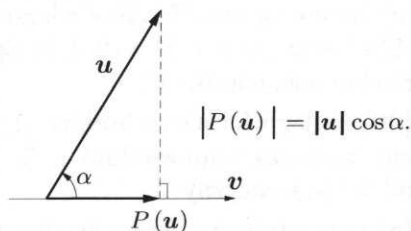
$$P(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} |\mathbf{u}| \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

gdzie $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ oznacza kąt skierowany między wektorami $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Dla kolejnych wersorów otrzymujemy zależności

$$P(\hat{\mathbf{i}}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} |\hat{\mathbf{i}}| \cos \angle(\hat{\mathbf{i}}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \frac{v_1}{|\mathbf{v}|},$$

$$P(\hat{\mathbf{j}}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} |\hat{\mathbf{j}}| \cos \angle(\hat{\mathbf{j}}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \frac{v_2}{|\mathbf{v}|},$$

$$P(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} |\hat{\mathbf{k}}| \cos \angle(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \frac{v_3}{|\mathbf{v}|}.$$



Stąd

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} |\mathbf{u}| \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \left(\frac{u_1 v_1}{|\mathbf{v}|} + \frac{u_2 v_2}{|\mathbf{v}|} + \frac{u_3 v_3}{|\mathbf{v}|} \right),$$

zatem

$$\frac{v}{|v|} \left(|u| \cos \angle(u, v) - \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|v|} \right) = 0.$$

Ale $v \neq 0$, więc

$$|u| \cos \angle(u, v) - \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|v|} = 0.$$

Ostatecznie mamy

$$u \circ v = |u||v| \cos \angle(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Ćwiczenie 5.15. Obliczyć iloczyny skalarne wektorów:

(a) $u = (-1, 2, -3)$, $v = (2, 0, -1)$;

(b) $u = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$, $v = (\sqrt{8}, -\sqrt{27}, 0)$.

Ćwiczenie 5.16. Obliczyć kąt między wektorami:

(a) $u = (3, -1, 2)$, $v = (4, 2, -5)$; (b) $u = (3, -1, 2)$, $v = (1, 2, 3)$.

FAKT 5.17. (własności iloczynu skalarnego)

Niech u, v, w będą dowolnymi wektorami oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy:

(1) $u \circ v = v \circ u$;

(2) $(\alpha u) \circ v = \alpha(u \circ v)$;

(3) $u \circ u = |u|^2$;

(4) $(u+v) \circ w = u \circ w + v \circ w$;

(5) $|u \circ v| \leq |u| \cdot |v|$;

(6) wektory u i v są prostopadłe $\iff u \circ v = 0$.

Uwaga. Równość w nierówności (5) jest możliwa tylko wtedy, gdy wektory u i v są równoległe.

Ćwiczenie 5.18.

(a) Obliczyć iloczyn skalarny wektorów a i b , jeżeli $a = 3p - 2q$, $b = p - 5q$, przy czym p i q są wersorami prostopadłymi.

(b) Obliczyć długość wektora $a = 5p - 4q$, jeżeli p i q są wersorami prostopadłymi.

(c*) Jakie warunki muszą spełniać wektory p, q, r , aby istniał prostopadłościan, którego przekątnymi ścian wychodzącymi z jednego wierzchołka będą te wektory?

(d*) Czy istnieje czworościan, którego podstawą jest trójkąt prostokątny i którego wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku nie należącym do podstawy są proste?

Ćwiczenie 5.19. Korzystając z rachunku wektorowego obliczyć:

(a) kąt między przekątnymi sąsiadujących ścian sześcianu;

(b*) kąt nachylenia krawędzi bocznej czworościanu foremego do płaszczyzny podstawy.

Ćwiczenie 5.20.

(a) Znaleźć wektor w , który jest prostopadły do wektorów $u = (1, -2, 0)$, $v = (0, 3, -2)$.

(b) Znaleźć wektor c , który z wektorami $a = (1, 0, 0)$, $b = (1, \sqrt{3}, 0)$ tworzy kąt $\pi/3$.

Ćwiczenie 5.21.

(a) Uzasadnić, że rzut prostokątny wektora u na wektor v wyraża się wzorem:

$$w = \frac{u \circ v}{|v|^2} \cdot v.$$

(b*) Uzasadnić, że rzut prostokątny wektora u na płaszczyznę rozpiętą przez dwa prostopadłe wektory v_1, v_2 wyraża się wzorem:

$$w = \frac{u \circ v_1}{|v_1|^2} \cdot v_1 + \frac{u \circ v_2}{|v_2|^2} \cdot v_2.$$

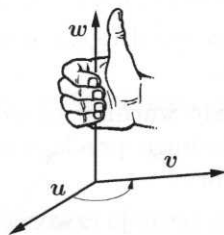
Ćwiczenie 5.22. Dane są punkty $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 5, 0)$, $C = (0, 0, 2)$. Znaleźć wszystkie punkty S takie, że kąty ASB , BSC , CSA są proste.

Ćwiczenie* 5.23. Punkty P_1, P_2 na powierzchni Ziemi mają długości geograficzne odpowiednio φ_1, φ_2 ($-\pi < \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi$) oraz szerokości ψ_1, ψ_2 ($-\pi/2 \leq \psi_1, \psi_2 \leq \pi/2$). Wyznaczyć najmniejszą odległość tych punktów mierzoną po powierzchni Ziemi. Przyjąć, że nasza planeta jest kulą o promieniu 6 400 km.

5.3. Iloczyn wektorowy

Definicja 5.24. (*orientacja trójki wektorów*)

Niech u, v, w będą niewspółpłaszczyznowymi wektorami w przestrzeni. Mówimy, że uporządkowana trójka wektorów u, v, w tworzy układ prawoskrętny, jeżeli prawą rękę umieścimy tak, aby kciuk wskazywał zwrot wektora w , to zgięte palce wskażą kierunek obrotu od wektora u do v (rys. 5.11.).



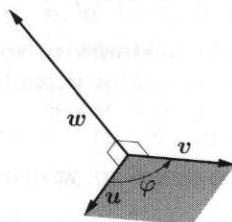
Rys. 5.11. Prawoskrętna orientacja trójki wektorów

Uwaga. Układ współrzędnych jest układem prawoskrętnym, jeżeli wersory osi tworzą układ wektorów prawoskrętny. W przeciwnym przypadku mówimy, że układ współrzędnych jest lewoskrętny. W dalszej części podręcznika zakładamy, że układ współrzędnych jest prawoskrętny.

Definicja 5.25. (*iloczyn wektorowy*)

Niech $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ będą niewspółliniowymi wektorami w przestrzeni. *Iloczynem wektorowym* uporządkowanej pary wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ nazywamy wektor $\mathbf{w}$, który spełnia warunki:

1. jest prostopadły do wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ (rys. 5.12);
2. jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$;
3. orientacja uporządkowanej trójki wektorów $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jest prawoskrętna.



Rys. 5.12. Iloczyn wektorowy wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$

Iloczyn wektorowy pary wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ oznaczamy przez $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Jeżeli jeden z wektorów $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jest zerowy lub jeżeli wektory te są współliniowe, to przyjmujemy, że $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

FAKT 5.26. (*wzór do obliczania iloczynu wektorowego*)

Niech $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ oraz $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ będą dowolnymi wektorami. Wtedy

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Uwaga. Przy obliczaniu wyznacznika wersory $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ należy traktować formalnie jak liczby. Niektórzy autorzy przyjmują powyższy fakt jako określenie iloczynu wektorowego. Wtedy warunki wymienione w naszej definicji wymagają uzasadnienia.

Dowód. Zapiszemy wektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ występujący w wyznaczniku tezy jako $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Wektor $\mathbf{w}$ jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Mamy bowiem

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{w} = u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Podobnie $\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = 0$, czyli $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ oraz $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$. Dalej

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}|^2 &= (u_2v_3 - v_2u_3)^2 + (u_1v_3 - v_1u_3)^2 + (u_1v_2 - v_1u_2)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \circ \mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2(1 - \cos^2 \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Ponadto

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = |\mathbf{w}|^2.$$

W określeniu iloczynu wektorowego wektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ są niewspółliniowe, zatem

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0.$$

Stąd $|\mathbf{w}|^2 > 0$, więc orientacja układu wektorów $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych. Uzasadniliśmy, że wektor $\mathbf{w}$ ma ten sam kierunek, zwrot oraz tę samą długość, co wektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, zatem $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Ćwiczenie 5.27. Korzystając z powyższego wzoru obliczyć iloczyny wektorowe par wektorów:

(a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 5)$, $\mathbf{v} = (2, 0, -3)$; (b) $\mathbf{u} = (-1, -3, 4)$, $\mathbf{v} = (5, 6, -2)$.

Ćwiczenie 5.28. Obliczyć:

(a) pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\mathbf{u} = (0, 3, -2)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 5)$;

(b) pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$, $C = (0, 4, 0)$;

(c) wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C , jeżeli $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 2)$, $C = (3, 4, 5)$;

(d) pole powierzchni równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 0)$.

Ćwiczenie 5.29. (własności iloczynu wektorowego)

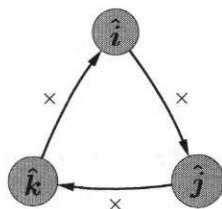
Niech $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ będą dowolnymi wektorami w przestrzeni oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Uzasadnić, że:

(1) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$; (2) $(\alpha \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$;

(3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$; (4) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$;

(5) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

Uwaga. Równość w nierówności (5) jest możliwa tylko wtedy, gdy wektory $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ są prostopadłe. Iloczyn wektorowy wektorów zapisanych jako sumy wersorów $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ pomnożonych przez liczby można obliczyć stosując powyższe własności oraz wykorzystując podany diagram. Gdy orientacja czynników iloczynu wektorowego jest niezgodna ze strzałkami, wówczas znak wyniku należy zmienić na przeciwny.



Ćwiczenie 5.30. Obliczyć iloczyny wektorowe wektorów:

(a) $\mathbf{u} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\mathbf{v} = -4\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$; (b) $\mathbf{u} = 4\hat{i} - 3\hat{k}$, $\mathbf{v} = -2\hat{j} + 5\hat{k}$.

Ćwiczenie 5.31. Niech $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ będą dowolnymi wektorami. Pokazać tożsamość

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \times (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = -2(\mathbf{p} \times \mathbf{q}).$$

Następnie uzasadnić, że pole równoległoboku S o przekątnych $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ wyraża się wzorem $\text{pole}(S) = (1/2)|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|$.

Ćwiczenie* 5.32. Niech $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ będą dowolnymi wektorami w przestrzeni. Uzasadnić podane tożsamości i związki:

(a) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \circ \mathbf{v})^2$;

(b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \circ \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$;

(c) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}$;

(d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \circ (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \circ \mathbf{w})(\mathbf{v} \circ \mathbf{z}) - (\mathbf{u} \circ \mathbf{z})(\mathbf{v} \circ \mathbf{w})$;

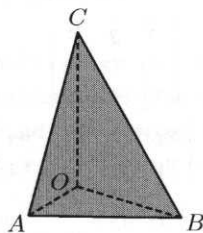
(e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{O}$;

(f) jeżeli $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{O}$, to $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$;

(g) jeżeli $\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{O}$, to wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ są współpłaszczyznowe.

Ćwiczenie* 5.33. W wierzchołku O czworościanu $ABCO$ wszystkie kąty płaskie są proste. Udowodnić „przestrzenną wersję twierdzenia Pitagorasa”:

$$(\text{pole}(\triangle ABO))^2 + (\text{pole}(\triangle BCO))^2 + (\text{pole}(\triangle ACO))^2 = (\text{pole}(\triangle ABC))^2.$$



5.4. Iloczyn mieszany

Definicja 5.34. (*iloczyn mieszany*)

Niech $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ będą dowolnymi wektorami w przestrzeni. *Iloczyn mieszany* uporządkowanej trójki wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ określamy wzorem:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \circ \mathbf{w}.$$

Ćwiczenie 5.35. Obliczyć iloczyny mieszane uporządkowanych trójek wektorów:

(a) $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$;

(b) $\mathbf{u} = (-2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 3, -1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, -2)$.

Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego wektorów

Iloczyn mieszany wektorów $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jest równy (z dokładnością do znaku) objętości równoległościanu V rozpiętego na wektorach $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (rys. 5.13);

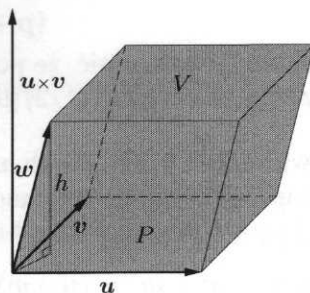
$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| = \text{objętość}(V).$$

Dowód. Przyjmijmy, że podstawa równoległościanu V jest równoległobokiem rozpiętym na wektorach $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Objętość tego równoległościanu jest równa iloczynowi pola $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ jego podstawy P oraz wysokości

$$h = |\mathbf{w}| |\cos \angle(\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w})|.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \text{objętość}(V) &= \text{pole}(P) \cdot h \\ &= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| |\mathbf{w}| |\cos \angle(\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w})| \\ &= |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \circ \mathbf{w}|. \end{aligned}$$



Rys. 5.13.

FAKT 5.36. (wzór do obliczania iloczynu mieszanego)

Niech $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ będą dowolnymi wektorami. Wtedy

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \circ \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \circ (w_1, w_2, w_3) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \circ (w_1, w_2, w_3) \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5.37. Obliczyć iloczyny mieszane trójek wektorów:

- (a) $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (1, -2, -3)$, $\mathbf{w} = (1, 5, 0)$;
 (b) $\mathbf{u} = (1, 4, -1)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 0, -3)$.

Ćwiczenie 5.38. Obliczyć objętości:

- (a) równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 3, -2)$, $\mathbf{c} = (-1, 5, 0)$;
 (b) czworościanu o wierzchołkach $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $R = (-1, 1, 0)$, $S = (0, 0, 1)$.

Ćwiczenie 5.39. Obliczyć wysokość czworościanu $ABCD$ o wierzchołkach $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 2, 3)$, $D = (3, 4, 5)$ opuszczoną z wierzchołka D .

Ćwiczenie* 5.40. Udowodnić, że objętość czworościanu V o wierzchołkach $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $A_3 = (x_3, y_3, z_3)$, $A_4 = (x_4, y_4, z_4)$, wyraża się wzorem:

$$\text{objętość}(V) = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \right|.$$

Ćwiczenie* 5.41. Uzasadnić, że objętość równoległościanu V o przekątnych ścian p, q, r wychodzących z jednego wierzchołka wyraża się wzorem:

$$\text{objętość } (V) = \frac{1}{2} \left| (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \right|.$$

Ćwiczenie 5.42. *(własności iloczynu mieszanego)*

Niech $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{r}$ będą dowolnymi wektorami w przestrzeni oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Uzasadnić, że:

$$(1) \ (u, v, w) = (v, w, u); \quad (2) \ (u, v, w) = -(v, u, w);$$

$$(3) \ (u + r, v, w) = (u, v, w) + (r, v, w); \quad (4) \ (\alpha u, v, w) = \alpha (u, v, w);$$

(5) wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ leżą w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0;$$

$$(6) \quad |(u, v, w)| \leq |u| \cdot |v| \cdot |w|.$$

Uwaga. Równość w ostatniej nierówności jest możliwa tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z wektorów u, v, w jest zerowy albo, gdy te wektory są parami prostopadłe.

Ćwiczenie 5.43.

(a) Zbadać, czy wektory $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 4)$, $\mathbf{c} = (0, -2, 6)$ są współpłaszczyznowe.

(b) Zbadać, czy punkty $A = (1, 0, 2)$, $B = (5, 1, 5)$, $C = (3, -1, 2)$, $D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie.

Zastosowania iloczynów wektorów

Iloczyn skalarny

- Obliczenie cosinusa kąta między wektorami: $\cos \sphericalangle(a, b) = \frac{a \circ b}{|a| |b|}$.

- Sprawdzenie prostopadłości wektorów: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = 0$.

Iloczyn wektorowy

- Utworzenie wektora c prostopadłego do wektorów a, b : $c = a \times b$.
- Weryfikacja równoległości wektorów: $a \parallel b \iff a \times b = 0$.

Iloczyn mieszany

- Obliczenie pola równoległoboku D rozpiętego na wektorach a, b :

$$\text{pole}(D) = |a \times b|.$$
- Obliczenie objętości równoległościanu V rozpiętego na wektorach a, b, c :

$$\text{objętość}(V) = |(a, b, c)|.$$
- Sprawdzenie współpłaszczyznowości wektorów:

wektory a, b, c są współpłaszczyznowe $\iff (a, b, c) = 0$.

Uwaga. Dwa początkowe wzory są prawdziwe także dla wektorów na płaszczyźnie. Równoległość wektorów a, b o niezerowych współrzędnych można sprawdzić następująco: wektory $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

5.5. Równania płaszczyzny

FAKT 5.44. (równanie normalne płaszczyzny)

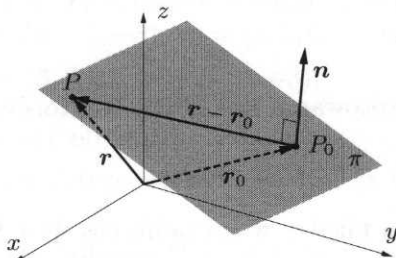
Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym r_0 i prostopadłej do wektora niezerowego $n = (A, B, C)$ (rys. 5.14) ma postać:

$$\pi : (r - r_0) \circ n = 0,$$

gdzie $r = (x, y, z)$ oznacza wektor wodzący punktu P płaszczyzny. Wektor n nazywamy *wektorem normalnym* tej płaszczyzny. W formie rozwiniętej równanie płaszczyzny π przyjmuje postać:

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Powyższe zależności nazywamy równaniami *normalnymi* płaszczyzny.



Rys. 5.14. Płaszczyzna wyznaczona przez punkt i wektor normalny

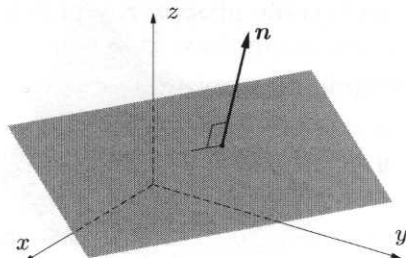
Ćwiczenie 5.45.

(a) Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0 = (-1, 2, 0)$ i prostopadłej do wektora $\mathbf{n} = (2, -3, 1)$.

(b) Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez środek odcinka AB , gdzie $A = (3, 2, -1)$, $B = (5, 0, 7)$ i prostopadłej do tego odcinka.

FAKT 5.46. (równanie ogólne płaszczyzny)

Równanie postaci: $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, gdzie $|A| + |B| + |C| > 0$, przedstawia płaszczyznę. Płaszczyzna ta ma wektor normalny $\mathbf{n} = (A, B, C)$ (rys. 5.15).



Rys. 5.15. Płaszczyzna o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$

Ćwiczenie 5.47.

(a) Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (3, -2, 5)$ i równoległej do płaszczyzny yOz .

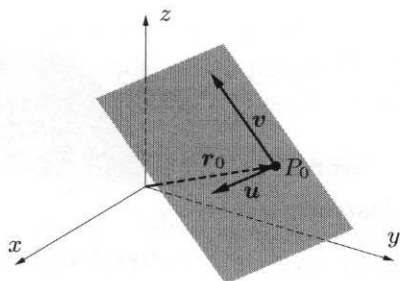
(b) Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $Q = (1, 3, -2)$ i oś Oy .

(c) Dla jakich wartości parametrów p, q płaszczyzna $\pi_1 : x - y + 3z - 4 = 0$ jest równoległa do płaszczyzny $\pi_2 : px + (1 - q)y - 6z = 0$?

FAKT 5.48. (równanie parametryczne płaszczyzny)

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_0$ i rozpiętej na niewspółliniowych wektorach $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (rys. 5.16) ma postać:

$$\pi : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$



Rys. 5.16. Płaszczyzna rozpięta przez dwa wektory

W formie rozwiniętej równanie tej płaszczyzny przyjmuje postać:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1, \\ y = y_0 + su_2 + tv_2, \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Powyższe zależności nazywamy równaniami *parametrycznymi* płaszczyzny.

Uwaga. Wektor normalny tej płaszczyzny ma postać $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Ćwiczenie 5.49.

(a) Napisać równanie parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez początek układu współrzędnych i równoległej do wektorów $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, -1, 2)$.

(b) Wyznaczyć punkt przecięcia płaszczyzny π oraz osi Ox dla

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 2s - t, \\ y = 2 + 3s + 2t, \\ z = -3 - s + t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

(c) Płaszczyznę $\pi : x - 2y + z - 3 = 0$ zapisać w postaci parametrycznej.

(d) Płaszczyznę

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - s + t, \\ y = 3 + 2s - t, \\ z = s + 3t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

zapisać w postaci normalnej.

(e) Uzasadnić, że podane równania parametryczne opisują tę samą płaszczyznę:

$$\begin{cases} x = 1 + s - 2t, \\ y = 2 - 2s + t, \\ z = -1 + 3s - t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 - s + 3t, \\ y = -s - 3t, \\ z = 2 + 2s + 4t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

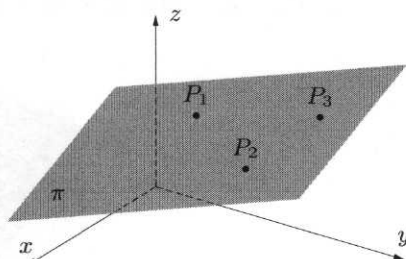
Ćwiczenie 5.50. (równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty)

Pokazać, że równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ ($1 \leq i \leq 3$) (rys. 5.17) ma postać:

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Korzystając z powyższego wzoru:

(a) napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty $P = (0, 1, 2)$, $Q = (-1, 4, 5)$, $R = (2, -2, 3)$;



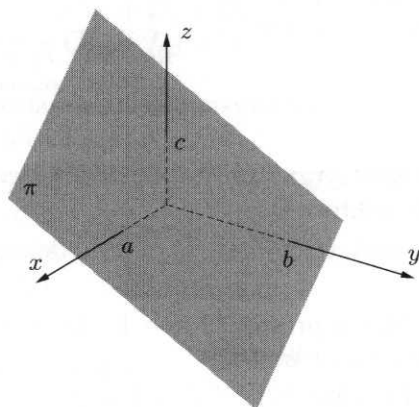
Rys. 5.17. Płaszczyzna przechodzącej przez trzy punkty

(b) zbadać, czy punkty $P_1 = (1, 2, -3)$, $P_2 = (2, 3, 4)$, $P_3 = (0, 5, 4)$, $P_4 = (5, 3, 1)$ należą do jednej płaszczyzny.

Ćwiczenie 5.51. (równanie odcinkowe płaszczyzny)

Pokazać, że równanie płaszczyzny π odcinającej na osiach Ox , Oy , Oz układu współrzędnych odpowiednio odcinki (zorientowane) a , b , c ($abc \neq 0$) (rys. 5.18) ma postać:

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



Rys. 5.18. Płaszczyzna odcinająca na osiach układu współrzędnych odcinki a , b , c

- (a) Płaszczyznę $\pi : 2x - 6y + 3z - 12 = 0$ zapisać w postaci odcinkowej.
 (b) Znaleźć równanie płaszczyzny, która przechodzi przez punkt $P = (-1, 2, 3)$ i odcina na osiach układu odcinki jednakowej długości. Ile rozwiązań ma to zadanie?
 (c) Obliczyć objętość czworościanu ograniczonego płaszczyzną $\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0$ oraz płaszczyznami układu współrzędnych.

5.6. Równania prostej

FAKT 5.52. (równanie parametryczne prostej)

Równanie prostej l przechodzącej przez punkt P_0 o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_0$ i wyznaczonej przez niezerowy wektor $\mathbf{v}$ (rys. 5.19) ma postać:

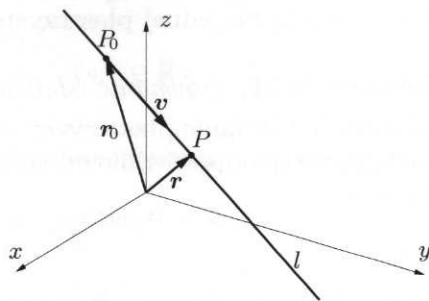
$$l : \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Powyższe równanie nazywamy *równaniem parametrycznym prostej* w formie wektorowej, a wektor $\mathbf{v}$ jej *wektorem kierunkowym*. Jeżeli $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, to po rozpisaniu na współrzędne równanie parametryczne

prostej przyjmuje postać:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + tv_1, \\ y = y_0 + tv_2, \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Uwaga. Powyższe równania będą przedstawiały półproste lub odcinek, gdy parametr t będzie przebiegał odpowiednio przedziały $(-\infty, \beta]$, $[\alpha, \infty)$ lub $[\alpha, \beta]$.



Rys. 5.19. Prosta wyznaczona przez punkt i wektor

Ćwiczenie 5.53.

- Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_0 = (-1, 0, 3)$ i równoległej do wektora $v = (2, -1, 5)$.
- Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, 2, 1)$.
- Wskazać wektor kierunkowy prostej $l: x = 1 + 3t, y = -2 + 4t, z = 3 - 6t$ ($t \in \mathbb{R}$). Podać trzy punkty na prostej l .
- Znaleźć punkty przecięcia prostej $l: x = 1 + 2t, y = -2 + 4t, z = 5 + t$ ($t \in \mathbb{R}$), z płaszczyznami układu współrzędnych.
- Czy proste $l_1: x = 1 + 2t, y = -2 - t, z = 3t$, $l_2: x = -1 + s, y = -11 + 2s, z = -1 + s$ ($t, s \in \mathbb{R}$) mają wspólny punkt?

Ćwiczenie* 5.54. Dane są trzy parami skośne proste:

$l_1: (x, y, z) = (1 + t, t, t)$, $l_2: (x, y, z) = (s, 1 + s, -s)$, $l_3: (x, y, z) = (u, -u, u)$, gdzie $t, s, u \in \mathbb{R}$. Znaleźć równanie prostej, która ma punkty wspólne z każdą z nich. Pokazać, że takich prostych jest nieskończenie wiele.

Ćwiczenie 5.55.

- Z punktu $S = (-30, 50, 0)$ w kierunku wyznaczonym przez wektor $k = (3, 4, 12)$ wystrzelono rakietę z szybkością $v = 1.3$. Po jakim czasie rakietą będzie w odległości $d = 150$ od punktu obserwacyjnego $O = (0, 0, 0)$?

Uwaga. Współrzędne punktów podane są w km, a szybkość w km/s.

- Samolot zwiadowczy i rakietą poruszają się po prostych ze stałymi prędkościami. W chwili $t_1 = 0$ samolot był w punkcie $S_1 = (1, 2, 3)$, a w chwili $t_2 = 3$ w punkcie $S_2 = (-1, 5, 3)$. Z kolei rakietę, wystrzeloną w chwili $t'_1 = 1$ z punktu $R_1 = (0, 0, 0)$, zaobserwowano w punkcie $R_2 = (5, 3, 2)$ w chwili $t'_2 = 4$. Czy samolot zostanie trafiony przez raketę?

- Okrąg jest wspólną częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ oraz płaszczyzny $2x + 3y + z = 14$. Znaleźć środek okręgu.

Definicja 5.56. (*równanie krawędziowe prostej*)

Prostą l , która jest częścią wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

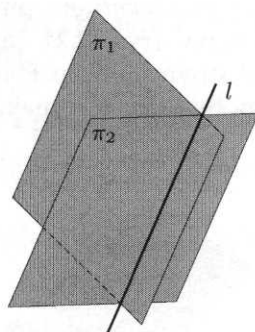
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

(rys. 5.20), będziemy zapisywać w postaci:

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Ten sposób przedstawiania prostej nazywamy *równaniem krawędziowym*.

Uwaga. Wektor kierunkowy prostej ma postać $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, gdzie $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ są wektorami normalnymi odpowiednio płaszczyzn π_1, π_2 .



Rys. 5.20. Prosta jako część wspólna dwóch płaszczyzn

Ćwiczenie 5.57. (a) Prostą $l : \begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ zapisać w postaci parametrycznej.

(b) Prostą $l : x = 1 + t, y = -3t, z = -2 + 5t \ (t \in \mathbb{R})$ zapisać w postaci krawędziowej.

(c) Znaleźć punkt przecięcia prostej $l : \begin{cases} x + y + z + 4 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ z płaszczyzną xOz .

(d) Dla jakiej wartości parametru m prosta $l : x = 1 + 2t, y = -2, z = 3t \ (t \in \mathbb{R})$ przecina prostą $k : \begin{cases} x - 2y + z + m = 0, \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$?

(e) Dla jakiej wartości parametru p prosta $l : \begin{cases} x + py - z + 1 = 0, \\ 2x - py + z = 0 \end{cases}$ jest równoległa do płaszczyzny $\pi : 3x + py + 2z - 1 = 0$?

(f) Uzasadnić, że prosta $l : \begin{cases} x - y = 0, \\ y + z = 1 \end{cases}$ jest zawarta w płaszczyźnie $\pi : 3x - y + 2z - 2 = 0$.

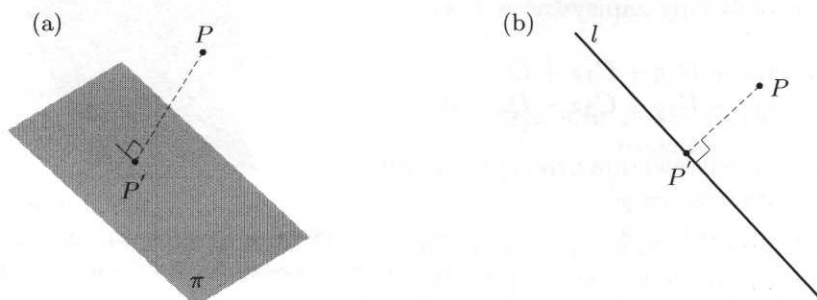
(g) Pokazać, że podane równania krawędziowe wyznaczają tę samą prostą

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + 3y - z - 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y + 2z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 7z + 1 = 0. \end{cases}$$

5.7. Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn

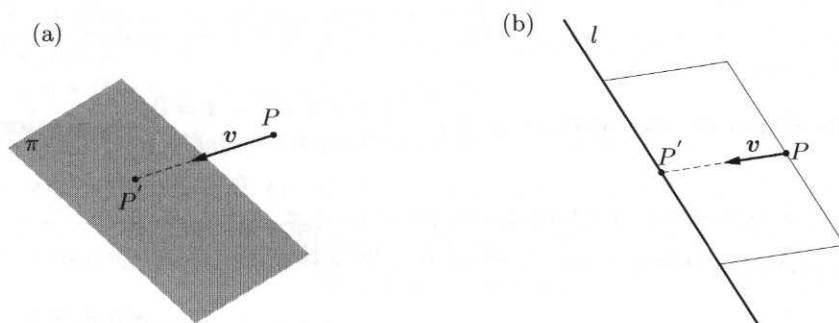
Definicja 5.58. (rzut punktu na płaszczyznę i prostą)

Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π nazywamy punkt P' tej płaszczyzny (rys. 5.21 (a)) spełniający warunek: $PP' \perp \pi$. Z kolei rzutem prostokątnym punktu P na prostą l nazywamy punkt P' tej prostej (rys. 5.21 (b)) spełniający warunek: $PP' \perp l$.



Rys. 5.21. Rzut prostokątny punktu na (a) płaszczyznę, (b) prostą

Uwaga. W podobny sposób definiuje się rzut ukośny punktu na płaszczyznę w kierunku ustalonego wektora (rys. 5.22 (a)). Zakładamy przy tym, że wektor nie jest prostopadły do wektora normalnego płaszczyzny.



Rys. 5.22. Rzut ukośny punktu na (a) płaszczyznę, (b) prostą

Rozważa się także rzut punktu na prostą w kierunku wektora (rys. 5.22 (b)). W tym przypadku zakładamy, że wektor należy do płaszczyzny przechodzącej przez prostą i punkt. Rzut ukośny jest wykorzystywany m.in. w grafice komputerowej do wyznaczania cienia na płaszczyźnie, jaki tworzy obiekt oświetlony promieniami równoległymi.

Ćwiczenie 5.59.

(a) Znaleźć rzut prostokątny punktu $P = (3, -2, 1)$ na płaszczyznę $\pi : 2x - y + 3z = 0$.

(b) Znaleźć rzut prostokątny punktu $P = (2, -1, 4)$ na prostą $l : x = t$,

$$y = -t, z = -3t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(c) Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\mathbf{v} = (-1, 3, 0)$ punktu $P = (1, 2, -2)$ na płaszczyznę $\pi: x + y - 4z - 6 = 0$.

(d) Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\mathbf{v} = (2, -3, 1)$ punktu $P = (3, 1, 0)$ na prostą $l: (x, y, z) = (-3 - s, 5 - s, 2 + 2s) \quad (s \in \mathbb{R})$.

Definicja 5.60. (*symetria względem punktu, prostej i płaszczyzny*)

Niech A, l, π oznaczają odpowiednio ustalony punkt, prostą oraz płaszczyznę w przestrzeni.

- Mówimy, że punkt P' jest symetryczny do P względem punktu A , gdy

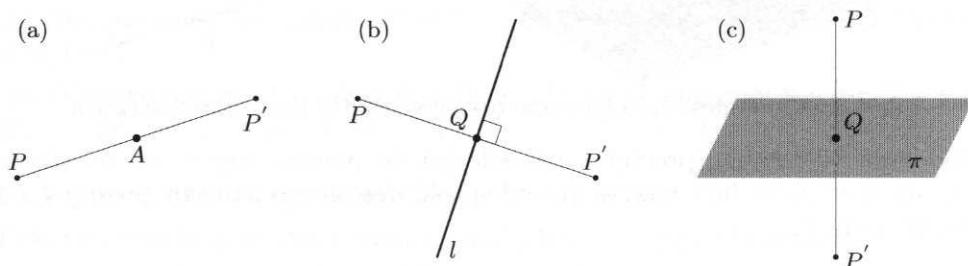
$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP'}.$$

- Mówimy, że punkt P' jest symetryczny do P względem prostej l , gdy dla pewnego punktu $Q \in l$ mamy

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \text{ oraz } PQ \perp l.$$

- Podobnie mówimy, że punkt P' jest symetryczny do P względem płaszczyzny π , gdy dla pewnego punktu $Q \in \pi$ mamy

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \text{ oraz } PQ \perp \pi.$$



Rys. 5.23. Symetria względem: (a) punktu, (b) prostej, (c) płaszczyzny

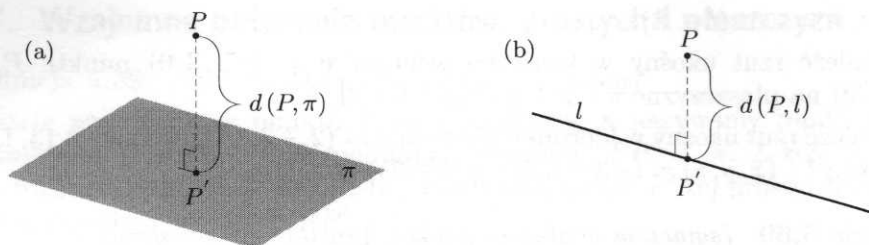
Uwaga. Symetrię względem płaszczyzny wykorzystuje się w grafice komputerowej do tworzenia realistycznych obrazów (odbicia w zwierciadle).

Ćwiczenie 5.61. Znaleźć punkt P' symetryczny do $P = (0, 3, -4)$ względem:

- (a) punktu $S = (1, -2, 5)$; (b) płaszczyzny $\pi: x + 2y - 2z + 4 = 0$;
 (c) prostej $l: x = -3 - t, y = -1 - t, z = 2 + t \quad (t \in \mathbb{R})$.

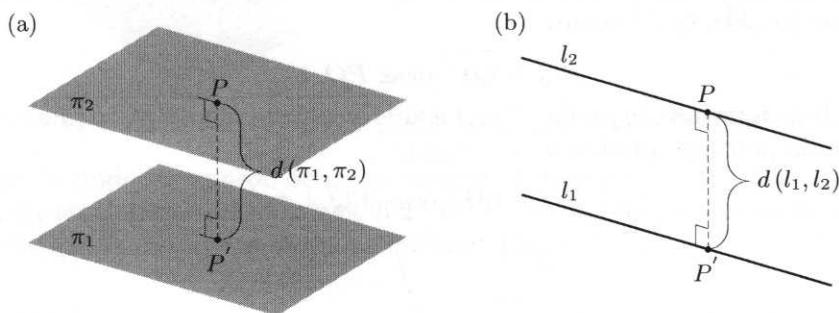
Definicja 5.62. (*odległości*)

Odległością punktu P od płaszczyzny π (prostej l) nazywamy długość odcinka PP' , gdzie P' jest rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π (rys. 5.23 (a)) (prostą l , rys. 5.24 (b)). Odległość tę oznaczamy symbolem $d(P, \pi)$ ($d(P, l)$).



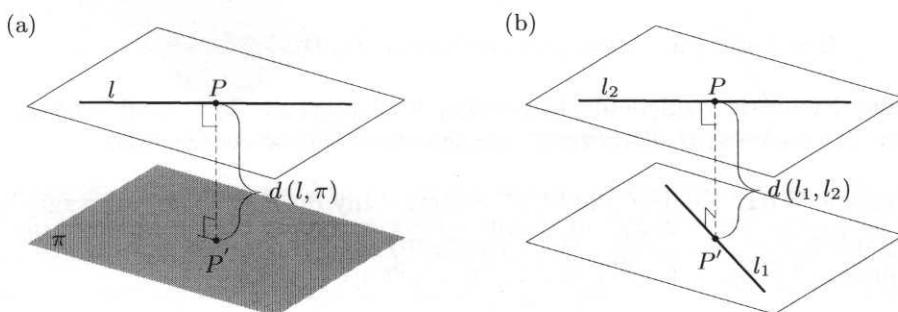
Rys. 5.24. Odległość punktu od: (a) płaszczyzny, (b) prostej

Odległością płaszczyzn równoległych π_1, π_2 (rys. 5.25 (a)) (prostych równoległych l_1, l_2 , rys. 5.25 (b)) nazywamy odległość dowolnego punktu jednej z nich od drugiej. Odległość tę oznaczamy symbolem $d(\pi_1, \pi_2)$ ($d(l_1, l_2)$).



Rys. 5.25. Odległość: (a) płaszczyzn równoległych, (b) prostych równoległych

Podobnie odległością prostej l , równoległej do płaszczyzny π , od tej płaszczyzny (rys. 5.26 (a)) nazywamy odległość dowolnego punktu prostej l od płaszczyzny π .



Rys. 5.26. Odległość: (a) prostej od równoległej płaszczyzny, (b) prostych skośnych

Z kolei odległością prostych skośnych l_1, l_2 (rys. 5.26 (b)) nazywamy odległość płaszczyzn równoległych zawierających te proste. Odległość tę oznaczamy symbolem $d(l_1, l_2)$.

FAKT 5.63. (odległość punktu od płaszczyzny)

Odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Dowód. Prosta l prostopadła do płaszczyzny π i przechodząca przez punkt P ma równanie parametryczne

$$l: x = x_0 + At, y = y_0 + Bt, z = z_0 + Ct \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Punkt $P' = (x', y', z')$ (rys. 5.26 (a)) przecięcia tej prostej z płaszczyzną π wyznaczamy z warunku

$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0.$$

Stąd $t(A^2 + B^2 + C^2) = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)$. Zatem szukana odległość wynosi

$$\begin{aligned} d = |PP'| &= \sqrt{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2} = \sqrt{(At)^2 + (Bt)^2 + (Ct)^2} \\ &= |t|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|t|(A^2 + B^2 + C^2)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5.64.

(a) Obliczyć odległość punktu $P = (5, -1, 6)$ od płaszczyzny $\pi: 3x - 4y + 12z - 12 = 0$.

(b) Obliczyć odległość punktu $P = (3, 6, -1)$ od płaszczyzny $\pi: x = 1 + s + 2t, y = 2s - t, z = t \quad (s, t \in \mathbb{R})$.

Ćwiczenie 5.65. (odległość płaszczyzn równoległych)

Pokazać, że odległość płaszczyzn równoległych π_1 i π_2 o równaniach

$$\pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0, \quad \pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

wyraża się wzorem:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Korzystając z powyższego wzoru obliczyć odległość płaszczyzn równoległych:

(a) $\pi_1: 3x + y - z - 2 = 0, \quad \pi_2: 3x + y - z + 3 = 0;$

(b) $\pi_1: x - y + 2z - 5 = 0, \quad \pi_2: -2x + 2y - 4z - 8 = 0.$

Ćwiczenie 5.66.

(a) Obliczyć odległość punktu $P = (3, 4, 2)$ od prostej $l: x = -2 + t, y = 1 + t, z = 3 - 3t \quad (t \in \mathbb{R})$.

(b) Obliczyć odległość prostych równoległych: $l_1: x = 1 + 3t, y = 1 + t, z = -3 - t, l_2: x = -1 - 3s, y = 2 - s, z = 3 + s \quad (t, s \in \mathbb{R})$.

(c) Obliczyć odległość prostych skośnych $l_1 : x = -1 + t, y = -1 + 2t, z = 2t$, $l_2 : x = s, y = -1 + 2s, z = 2 - 2s$ ($t, s \in \mathbb{R}$).

(d) Sprawdzić, że prosta $l : x = 1 + 2t, y = -2 - t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$) jest równoległa do płaszczyzny $\pi : 2y + 2z - 5 = 0$ i następnie obliczyć ich odległość.

(e*) Napisać równanie powierzchni walcowej o promieniu 1, której osią jest prosta $x = t, y = t, z = t$ ($t \in \mathbb{R}$).

(f*) Znaleźć równanie powierzchni stożkowej, która zawiera wszystkie osie układu współrzędnych.

Ćwiczenie* 5.67.

(a) Pokazać, że odległość punktu P_1 o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_1$ od prostej l o równaniu $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ ($t \in \mathbb{R}$) wyraża się wzorem:

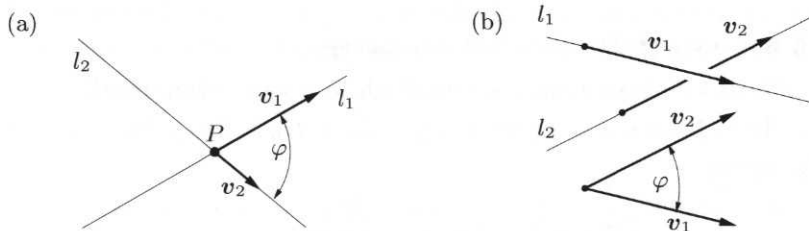
$$d(P_1, l) = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}.$$

(b) Pokazać, że odległość prostych skośnych k_1 i k_2 o równaniach parametrycznych $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{v}_1$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{v}_2$ ($t, s \in \mathbb{R}$) wyraża się wzorem:

$$d(k_1, k_2) = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}.$$

Definicja 5.68. (kąty między prostymi i płaszczyznami)

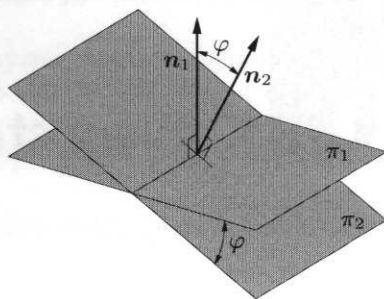
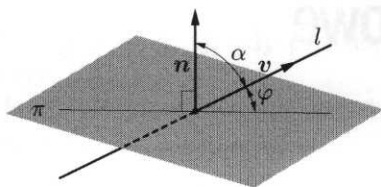
Kątem między prostymi nazywamy **kąt ostry** utworzony przez odpowiednio zwrócone wektory kierunkowe tych prostych (rys. 5.27). Przyjmujemy, że kąt między prostymi równoległymi jest równy 0.



Rys. 5.27. Kąt między prostymi: (a) przecinającymi się, (b) skośnymi

Kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny π nazywamy kąt $\varphi = \pi/2 - \alpha$, gdzie α jest **kątem ostrym** między odpowiednio zwróconym wektorem normalnym $\mathbf{n}$ płaszczyzny π i wektorem kierunkowym $\mathbf{v}$ prostej l (rys. 5.28). Jeżeli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to przyjmujemy, że kąt jej nachylenia do tej płaszczyzny jest równy 0.

Kątem między płaszczyznami nazywamy **kąt ostry** między odpowiednio zwróconymi wektorami normalnymi tych płaszczyzn (rys. 5.29). Przyjmujemy, że kąt między płaszczyznami równoległymi jest równy 0.



Rys. 5.28. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny Rys. 5.29. Kąt między płaszczyznami

Uwaga. Zawsze jeden z kątów między parami wektorów u , v lub $-u$, v jest ostry. Cosinus tego kąta można obliczyć ze wzoru

$$\cos \varphi = \frac{|u \circ v|}{|u| |v|}.$$

Ćwiczenie 5.69. Obliczyć kąty nachylenia podanych prostych do wskazanych płaszczyzn:

(a) $l : x = 1 + 2t, y = t, z = -2 - 2t \ (t \in \mathbb{R}), \pi : 2x + y + z = 0;$

(b) $l : \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \end{cases} \pi - \text{płaszczyzna } yOz.$

Ćwiczenie 5.70. Obliczyć kąty między prostymi:

(a) $l_1 : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : \begin{cases} x = 1 - 3s, \\ y = 2 + s, \\ z = -3 \end{cases} \ (s \in \mathbb{R});$

(b) $l_1 : \begin{cases} 3x - y - 2z = 0, \\ x + y - 2z = 0, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0; \end{cases}$

(c) $l_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = -t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : \begin{cases} x = y, \\ y = z. \end{cases}$

Ćwiczenie 5.71. Obliczyć kąty między płaszczyznami:

(a) $\pi_1 : x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0, \quad \pi_2 : x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0;$

(b) $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + s + t, \\ y = 2 + s - t, \\ z = 3 - s + t, \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 3s - t, \\ z = 2 + s + t \end{cases} \ (s, t \in \mathbb{R});$

(c) $\pi_1 : x = 2y, \quad \pi_2 : \begin{cases} x = s + t, \\ y = s - t, \\ z = s \end{cases} \ (s, t \in \mathbb{R}).$

Odpowiedzi i wskazówki

1. Liczby zespolone

1.1. Podstawowe definicje i własności (str. 9)

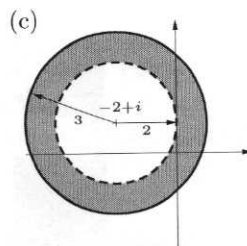
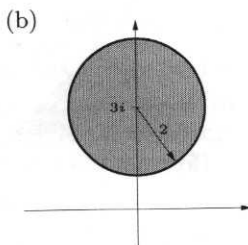
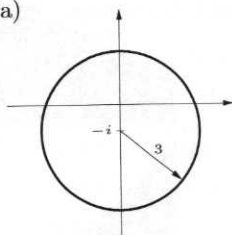
- 1.3. (a) $(3, -3)$, $(3 + \sqrt{2}, -7)$; (b) $(4, 3)$, $(3\sqrt{2} - 12, -9 - 4\sqrt{2})$; (c) -1 .
1.7. (a) $(7, -6)$; (b) $(-11/25, -2/25)$; (c) $(-3, 0)$.

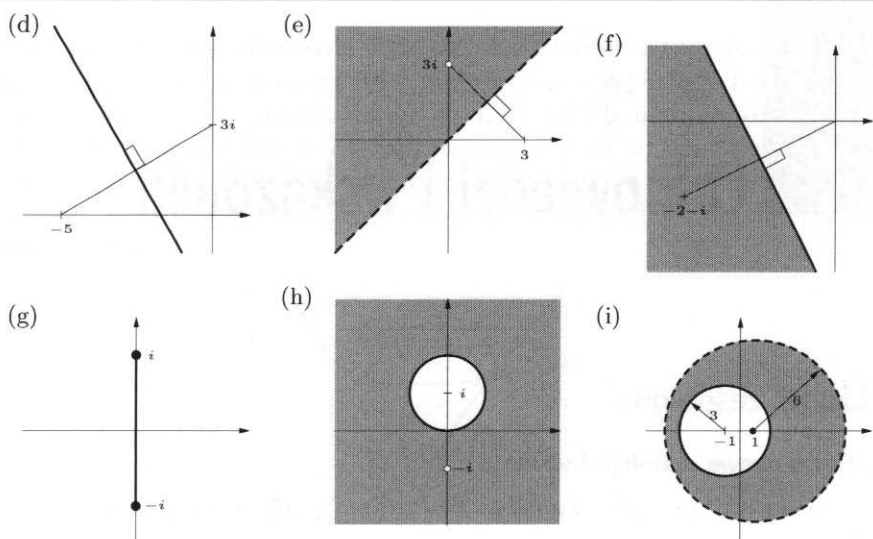
1.2. Postać algebraiczna liczby zespolonej (str. 11)

- 1.11. (a) $2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})i$; (b) $-3 + 5i$; (c) $-11 - 2i$; (d) $3/5 + 14i/5$.
1.13. (a) $\sqrt{2}(1 - i)$, $-\sqrt{2}(1 - i)$; (b) $2 + 3y + iy$, $y \in \mathbb{R}$; (c) $x + i$, $x \in \mathbb{R}$; (d) $-19/29 - 25i/29$; (e) $3 - i$, $3 + i$; (f) 0 , $5/2 + 5i/4$.
1.16. (a) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z$;
(b) $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im} z$;
(c) $\overline{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$;
(d) $\operatorname{Im}(\bar{z}) = \operatorname{Im}(x - iy) = -y = -\operatorname{Im} z$.
1.17. (a) $1/6 - 25i/6$; (b) $x - i$, $x \in \mathbb{R}$; (c) $\sqrt{2} + i$, $-\sqrt{2} + i$; (d) $\emptyset$.
1.19. Wsk. Założyć, że $i > 0$ i uzyskać sprzeczność. Postępując analogicznie otrzymać sprzeczność z warunku $i < 0$.

1.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej (str. 14)

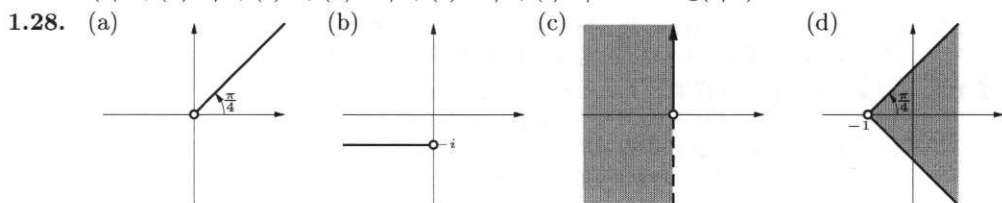
- 1.21. (a) 1; (b) $\sqrt{10}$; (c) 1; (d) 13.
1.23. (a) $5\sqrt{5}$; (b) $\sqrt{17/13}$; (c) 9; (d) $\sqrt{6}/3$.
1.24. (a)



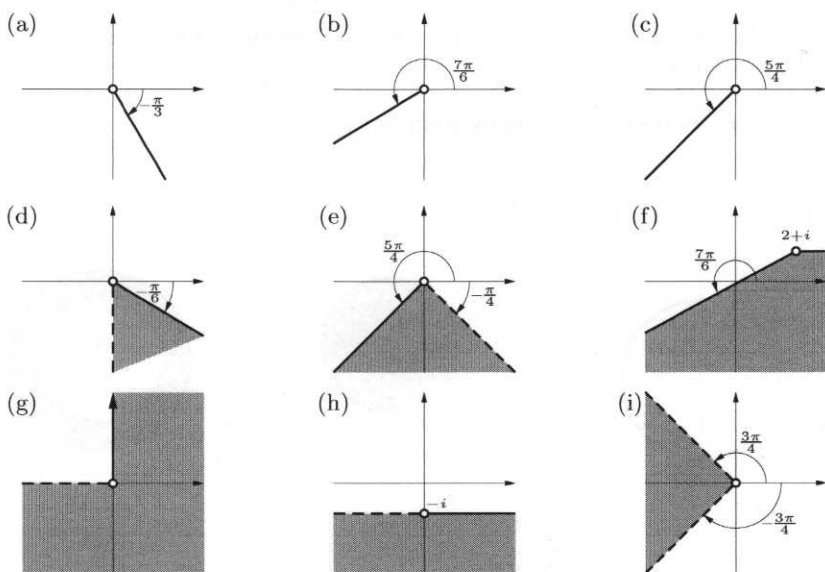


1.25. Suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości wszystkich jego boków. Wzór podany w zadaniu jest nazywany równością równoległoboku.

1.27. (a) 0; (b) $\pi/2$; (c) π ; (d) $7\pi/4$; (e) $4\pi/3$; (f) $\pi/2 + \arctan(3/4)$.



1.29*.

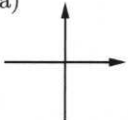
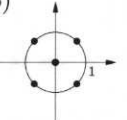
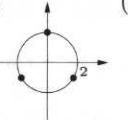
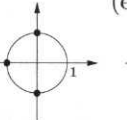
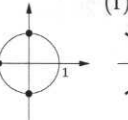
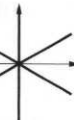


- 1.31. (a) $1(\cos \pi + i \sin \pi)$; (b) $\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$; (c) $1(\cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3))$;
 (d) $\sqrt{10}(\cos \arctan(1/3) + i \sin \arctan(1/3))$;
 (e) $\sqrt{17}(\cos(2\pi - \arctan(1/4)) + i \sin(2\pi - \arctan(1/4)))$;
 (f) $\sqrt{5}(\cos(\pi - \arctan(1/2)) + i \sin(\pi - \arctan(1/2)))$.

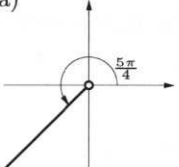
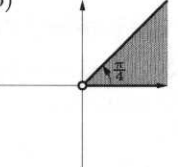
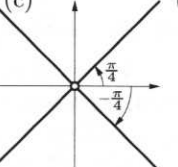
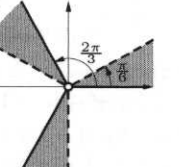
- 1.33. (a) $2\sqrt{2}(\cos(-\pi/12) + i \sin(-\pi/12))$; (b) -24 ;
 (c) $40\sqrt{2}(\cos(-7\pi/12) + i \sin(-7\pi/12))$; (d) $2i = 2(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$;
 (e) $\sqrt{2}(\cos(19\pi/12) + i \sin(19\pi/12))$; (f) $-i = 1(\cos(3\pi/2) + i \sin(3\pi/2))$;
 (g) $(3/2)(1+i) = (3\sqrt{2}/2)(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$.

- 1.34. (a) $32i$; (b) 2^{60} ; (c) -2^{44} ; (d) $-1/2 + \sqrt{3}i/2$; (e) 1 ; (f) i .

- 1.35. (a) $\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$; (b) $4 \sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$;
 (c) $\cos^6 \varphi - 15 \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + 15 \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi - \sin^6 \varphi$.

- 1.36. (a)  (b)  (c)  (d)  (e)  (f) 

- 1.37. (a) suma trzech obszarów kątowych:
 $3\pi/12 \leq \arg z \leq 7\pi/12$, $11\pi/12 \leq \arg z \leq 15\pi/12$, $19\pi/12 \leq \arg z \leq 23\pi/12$;
 (b) suma czterech obszarów kątowych: $\pi/16 < \arg z < 5\pi/16$,
 $9\pi/16 < \arg z < 13\pi/16$, $17\pi/16 < \arg z < 21\pi/16$, $25\pi/16 < \arg z < 29\pi/16$.

- 1.38. (a)  (b)  (c)  (d) 

- 1.39. (a) $5\pi/6$; (b) $19\pi/12$.

- 1.40. (a) $\bar{z}$; (b) $-\bar{z}$; (c) $z(\cos \alpha + i \sin \alpha)$; (d) $2z_0 - z$; (e) $z + z_0$; (f) kz ; (g*) $i\bar{z}$.

- 1.42. (a) moduł liczby zespolonej z ; (b) argument liczby zespolonej z ;
 (c) liczba zespolona $\omega^j z$;
 (d) suma $u_3 + v_3$ liczb zespolonych odpowiadających prądom i_1, i_2 .

1.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej (str. 23)

- 1.44. (a) i ; (b) -1 ; (c) 1 ; (d) $-1/2 + i\sqrt{3}/2$; (e) $\cos 1 + i \sin 1$; (f) $\cos 2 - i \sin 2$.
 1.47. (a) $(1 - \cos 2x)/2$; (b) $(3 \cos x + \cos 3x)/4$; (c) $(\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)/8$;
 (d) $(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)/16$; (e) $(-\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + 10)/32$;
 (f) $(\cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x)/64$.
 1.48. (a) $(1/2)[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$;
 (b) $(1/4)[\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) - \sin(\alpha - \beta - \gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)]$;
 (c*) $(1/8)[\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \cos(\alpha - \beta + \gamma + \delta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma + \delta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma - \delta) + \cos(\alpha - \beta - \gamma + \delta) + \cos(\alpha - \beta + \gamma - \delta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma - \delta) + \cos(\alpha - \beta - \gamma - \delta)]$.

- 1.49. (a) $\frac{\sin[(n+1)x] \cos(nx)}{\sin x}$ dla $x \neq k\pi$ oraz $n+1$ dla $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);
 (b) $\frac{\sin[(n+1)x/2] \sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$ dla $x \neq 2k\pi$ oraz 0 dla $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- 1.51. (a) $e^{i\pi}$; (b) $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$; (c) $e^{i3\pi/2}$; (d) $2e^{i5\pi/3}$; (e) $\sqrt{53}e^{i((\pi/2)+\arctg(2/7))}$.
- 1.53. (a) $0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1/2 - i\sqrt{3}/2$; (b) $0, 1$; (c) -1 ;
 (d) suma sześciu półprostych postaci $\varphi = k\pi/3$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$);
 (e) $8i, 4\sqrt{3} - 4i, -4\sqrt{3} - 4i$; (f) $0, \sqrt{2}e^{i((\pi/6)+(k\pi/3))}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$).

1.5. Pierwiastkowanie liczb zespolonych (str. 25)

- 1.55. (a) $\{3 + 4i, -3 - 4i\}$, (b) $\{(1+i)/\sqrt{2}, (1-i)/\sqrt{2}, (-1+i)/\sqrt{2}, (-1-i)/\sqrt{2}\}$;
 (c) $\{1-i, -1/2 + \sqrt{3}/2 + i(1/2 + \sqrt{3}/2), -1/2 - \sqrt{3}/2 + i(1/2 - \sqrt{3}/2)\}$;
 (d) $\left\{ \sqrt[6]{26} \left(\cos((\arctg 5)/3) + i \sin((\arctg 5)/3) \right), \right.$
 $\left. \sqrt[6]{26} \left(\cos(2\pi + (\arctg 5)/3) + i \sin(2\pi + (\arctg 5)/3) \right), \right.$
 $\left. \sqrt[6]{26} \left(\cos(4\pi + (\arctg 5)/3) + i \sin(4\pi + (\arctg 5)/3) \right) \right\}$.
- 1.57. (a) $\{\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$;
 (b) $\{(\sqrt{3} + i)/2, (-1 + i\sqrt{3})/2, (-\sqrt{3} - i)/2, (1 - i\sqrt{3})/2\}$;
 (c) $\{3/2 + i\sqrt{3}/2, \sqrt{3}i, -3/2 + i\sqrt{3}/2, -3/2 - i\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}i, 3/2 - i\sqrt{3}/2\}$;
 (d) $\{1, (1+i)/\sqrt{2}, i, (-1+i)/\sqrt{2}, -1, (-1-i)/\sqrt{2}, -i, (1-i)/\sqrt{2}\}$;
 (e) $\{\sqrt[10]{58} [\cos((\arctg(7/3)+2k\pi)/5) + i \sin((\arctg(7/3)+2k\pi)/5)] : k = 0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 1.58. (a) $u_3 = -2 - i, v_3 = -1 + i$; (b) $u_3 = 2 - 3i, v_3 = -1 + i$;
 (c) $u_3 = -v_3 = 1 + i\sqrt{3}, w_3 = -z_4 = \sqrt{3} + i$;
 (d*) $u_3 = \sqrt{3} + i, v_3 = -\sqrt{3} + i, w_3 = 2i, z_4 = 1 - i,$
 $z_5 = (-1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}))/2, z_6 = (-1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}))/2$.
- 1.59. (a) $u_3 = -3 + 4i, v_3 = -3/2 - 2\sqrt{3} + 2i - 3\sqrt{3}i/2, w_3 = 3/2 - 2\sqrt{3} - 2i - 3\sqrt{3}i/2,$
 $z_4 = -u_3, z_5 = -v_3, z_6 = -w_3$;
 (b) $u_3 = 1 - i, v_3 = [(\sqrt{3} - 1) + (1 + \sqrt{3})i]/2, w_3 = -[(1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i]/2$;
 (c) $u_3 = 1 + 2i, v_3 = 2i, w_3 = -1 + 2i$;
 (d*) $u_3 = -1/2 + i/2, v_3 = -1/2 - i/2, w_3 = -1/2 - (2 + \sqrt{3})i/2,$
 $z_4 = -1/2 + (2 + \sqrt{3})i/2, z_5 = -1/2 - (2 - \sqrt{3})i/2, z_6 = -1/2 + (2 - \sqrt{3})i/2$.
- 1.60*. (a) $v = -u, u \in \mathbb{C}$ lub $u = 0, v \in \mathbb{C}$ lub $v = 0, u \in \mathbb{C}$;
 (b) $u = 0, v \in \mathbb{C}$ lub $v = 0, u \in \mathbb{C}$ lub $v = u/4(i\sqrt{7} - 3), u \in \mathbb{C}$ lub $v = -u/4(i\sqrt{7} + 3), u \in \mathbb{C}$;
 (c) $v = -u, u \in \mathbb{C}$ lub $u = 0, v \in \mathbb{C}$ lub $v = 0, u \in \mathbb{C}$ lub $v = u/2(i\sqrt{3} - 1), u \in \mathbb{C}$
 lub $v = -u/2(i\sqrt{3} + 1), u \in \mathbb{C}$.

2. Wielomiany

2.1. Podstawowe definicje i własności (str. 28)

- 2.6. (a) suma $5x$, różnica $-2x^2 - 5x + 2$; (b) suma $2x^5 - 3x^2 - x + 3$, różnica $2x^5 - 7x^2 + 3x - 3$; (c) suma $iz^3 + iz^2 - 2z - 1 + 5i$, różnica $-iz^3 + (2 + i)z^2 - 2z + 1 - 5i$.
- 2.7. (a) $-2x^5 + 8x^3 - x^2 + 4$; (b) $-x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1$; (c) $(1 - i)z^5 + (1 + 2i)z^3 + (3 - 2i)z^2 - z + 3i + 2$.
- 2.9. (a) iloraz $8x^3 - 8x^2 + 11x - 6$, reszta 0; (b) iloraz $x + 3$, reszta 0; (c) iloraz $iz^2 - 2z + 2 - 4i$, reszta $7 + 7i$; (d) iloraz $z^2 + i$, reszta 0.

2.2. Podstawowe definicje i własności (str. 29)

- 2.12. (a) 15; (b) 6; (c) $4x$; (d) $2^{17}(x^3 - 2x^2 + 8)$; (e*) $1000x^3 + 1001x^2 - 1999x + 1000$.
- 2.15. (a) $v_1 = 2$, $w_1 = 3$; (b) $v_1 = w_1 = x_4 = -1$; (c) $v_3 = w_3 = i$.
- 2.16.* $W(x) = ax(x-1)(x-2)\dots(x-25)$ ($a \in \mathbb{R}$).
- 2.18. (a) 1; (b) 3; (c) 2; (d) 4.
- 2.21. (a) -1, (b) $\{1, -3\}$; (c) brak; (d) $\{-1, 2\}$.
- 2.22. Wsk. Pokazać, że dla argumentów nieparzystych wartość wielomianu jest liczbą nieparzystą.
- 2.24. (a) $1/2$; (b) $1/2$; (c) $1/2, -1/3, 1/4$; (d) $-1/4$.
- 2.25. (a) $u_1 = 1 - i$, $v_1 = 1 + i$; (b) $u_3 = v_3 = (i - 3)/2$; (c) $u_3 = -1 - i$, $v_3 = -1 + 2i$; (d) $u_3 = (1 - i)/2$, $v_3 = -i/3$.

2.3. Podstawowe definicje i własności (str. 33)

- 2.28. (a) $(z - (1 - i)/\sqrt{2})(z + (1 - i)/\sqrt{2})$; (b) $(z + 1)(z - (1 + i\sqrt{3})/2)(z - (1 - i\sqrt{3})/2)$; (c) $(z + i)^3(z - i)^3$; (d) $(z - (1 + i)/\sqrt{2})(z - (1 - i)/\sqrt{2})(z + (1 + i)/\sqrt{2})(z + (1 - i)/\sqrt{2})$; (e) $(z - \sqrt{3}/2(1 - i))(z + \sqrt{3}/2(1 - i))(z - 1 - i)(z + 1 + i)$; (f) $(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 + i)(z + 1 - i)$.
- 2.30.* (a) 0; (b) $5/7$; (c) $-1 \pm \sqrt{6}$, $(3 \pm i\sqrt{7})/2$.
- 2.33. (a) $1 + i$, $\sqrt{3}$; (b) $1 - 2i$, -2 , 1 ; (c) $2 + i$, $-2 + i$, $-2 - i$; (d) $-3 - i$, $1 + 3i$, $1 - 3i$.
- 2.34*. (a) $v_3 = -1$, $w_3 = 1 + 2i$, $z_4 = 1 - 2i$; (b) $u_3 = i$, $v_3 = -6i$; $w_3 = -(1/2)\sqrt{39} - (5/2)i$; $z_4 = (1/2)\sqrt{39} - (5/2)i$.
- 2.36. (a) $a(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 4x + 13)$ ($a \neq 0$); (b) $a(x - 4)(x^2 - 2x + 5)^2$ ($a \neq 0$); (c) $a(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)$ ($a \neq 0$); (d) $ax(x^2 - 4x + 5)^2(x^2 - 6x + 10)$ ($a \neq 0$).
- 2.37. (a) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$; (b) $(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$; (c) $(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; (d) $(x - 1)(x^2 - 2x \cos(2\pi/5) + 1)(x^2 - 2x \cos(4\pi/5) + 1)$,
gdzie $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$ oraz $\cos(4\pi/5) = -(1 + \sqrt{5})/4$;
(e) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$; (f) $(x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3)(x^2 + 3x + 3)$.

2.4. Podstawowe definicje i własności (str. 37)

- 2.40. (a) $x^2 - 2 + \frac{4x+5}{x^2+2}$; (b) $x^2 + \frac{x-x^2}{x^3+1}$; (c) $iz^2 - iz + 1 + 2i + \frac{(-1-3i)z+4+i}{z^2+z-1}$.
- 2.44. (a) $\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+i} + \frac{D}{(z+i)^2}$; (b) $\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z-2i} + \frac{D}{z+2i}$;
 (c) $\frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{(z+1)^2} + \frac{D}{(z+1)^3}$;
 (d) $\frac{A}{z} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i} + \frac{D}{z+\sqrt{2}i} + \frac{E}{(z+\sqrt{2}i)^2} + \frac{F}{z-\sqrt{2}i} + \frac{G}{(z-\sqrt{2}i)^2}$.
- 2.45. (a) $\frac{1}{z+3i} + \frac{1}{z-3i}$; (b) $\frac{1}{z+i} + \frac{4-i}{(z+i)^2}$; (c) $\frac{1}{2\sqrt{3}(z-\sqrt{3}+i)} - \frac{1}{2\sqrt{3}(z+\sqrt{3}+i)}$;
 (d) $\frac{1}{2(z+2)} - \frac{1}{2(z-2)} + \frac{1}{2(z-2i)} + \frac{1}{2(z+2i)}$.
- 2.46. (a) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$; (b) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)}$;
 (c) $\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$;
 (d) $\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+4)^3}$; (e) $\frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$;
 (f) $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+3} + \frac{Gx+H}{(x^2+3)^2}$.
- 2.47. (a) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$; (b) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}$; (c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$;
 (d) $\frac{3}{(x+3)^2} - \frac{1}{x^2}$; (e) $-\frac{1}{x+3} + \frac{x+4}{x^2-3x+9}$; (f) to jest ułamek prosty.

3. Macierze i wyznaczniki**3.2. Działania na macierzach (str. 44)**

- 3.7. (a) $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 9 & 11 & 9 \end{bmatrix}$; (b) $A+B = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1+5i \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 1-5i \\ 5+5i \end{bmatrix}$.
- 3.9. (a) $\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 5-i & 5-5i \\ 2 & 2-2i & -3-3i & -2i \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 18 \\ 6 & -9 & 9 \\ -12 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.
- 3.11. (a) $\begin{bmatrix} 7 & 29 & 6 \\ 6 & 51 & -13 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2/9 & -7/18 & -1/3 \\ -1/3 & -1 & 1/9 \end{bmatrix}$.
- 3.13. (a) $\begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -11 \\ -3 & 5 \\ -13 & 23 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 3+10i & 11+5i \\ 16-13i & -1-15i \end{bmatrix}$.
- 3.14. $AB = [10]$, $BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.
- 3.15. $x = 11p - q + r$, $y = -11p + 5q + 6r$, $z = 6p + 2q + 5r$, $t = -2p + 2q + 3r$.

3.16. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} a & b \\ (1-a)/4 & (2-b)/4 \\ (3+a)/2 & (b-2)/2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 2a \end{bmatrix}$ ($a, c \in \mathbb{R}$);
 (e) $\begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -5/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; (f) nie ma takiej macierzy.

3.17. $AB = \begin{bmatrix} 52 & 47 & 57 \\ 70 & 62 & 75 \\ 99 & 93 & 107 \\ 67 & 61 & 74 \end{bmatrix}$; (a) 93; (b) 288; (c) 2; (d) 3.

3.18. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$.

3.21. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; (b), (c) $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.23. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

3.24. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

3.25. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;
 (b) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.26. (a) $A^n = 3^{n-1}A$; (b) $A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$; (c) $A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{dla } n = 2k - 1, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{dla } n = 2k. \end{cases}$

3.27.* (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $n = 4$; (d) 11.

3.28.* (a) $P = \begin{bmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ p_2 & 1-p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}$, gdzie $q_1 = 1-p_1$, $q_2 = 1-p_2$;
 (b) $P^2 = \begin{bmatrix} p_1^2 + p_2q_1 & p_1q_1 + q_1q_2 \\ p_1p_2 + p_2q_2 & p_2q_1 + q_2^2 \end{bmatrix}$; (e) $\frac{7}{12}$.

3.30. (a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$; (b) $B^T = [1 - 2i \quad -3 \quad 2 + i]$; (c) $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3.33. (a), (b) symetryczne; (c) antysymetryczna; (d) nie jest symetryczna ani antysymetryczna.

- 3.34. (a) Z własności transpozycji macierzy wynikają równości $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$. Zatem macierz $A + A^T$ jest symetryczna. Podobnie $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$, więc macierz $A - A^T$ jest antysymetryczna.
 (b) Mamy $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$ oraz $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, więc macierze AA^T i $A^T A$ są symetryczne.
 (c) Macierz $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ jest symetryczna, zaś macierz $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ antysymetryczna. Ponadto $A = B + C$. Gdyby istniały macierze B_1 symetryczna i C_1 antysymetryczna takie, że $A = B_1 + C_1$, to mielibyśmy

$$\begin{aligned} B + C = B_1 + C_1 &\implies B - B_1 = C_1 - C \implies (B - B_1)^T = (C_1 - C)^T \\ &\implies B - B_1 = -(C_1 - C) = C_1 - C \implies 2(C_1 - C) = \mathbf{0} \\ &\implies C_1 - C = \mathbf{0} \implies B_1 - B = \mathbf{0} \implies B_1 = B \text{ i } C_1 = C. \end{aligned}$$

Przedstawienie jest zatem jednoznaczne.

3.3. Definicja indukcyjna wyznacznika (str. 51)

- 3.37. (a) 27; (b) -14; (c) 0; (d) -120.
 3.38. (a) -29; (b) $5 + 21i$; (c) 15; (d) $-2 + 2i$.
 3.39. (a) 11; (b) $27/2$.
 3.40. (a) 14, (b) $23/6$.
 3.41. Fakt, że wyznacznik nie zależy od parametru p można interpretować następująco. Dwa trójkąty mają wierzchołki na paraboli $y = x^2$. Jeżeli rzuty wierzchołków obu trójkątów na oś Ox są przystające (jako zbiory 3-elementowe), to ich pola są jednakowe.
 3.43. (a) $3i$; (b) 10; (c) 59.
 3.45. (a) $11 - 16i$; (b) 201; (c) 130.
 3.46. Dowód przeprowadzimy dla macierzy trójkątnej górnej stopnia $n \geq 2$ metodą indukcji matematycznej. Przy przekształcaniu wyznaczników będziemy stosować rozwinięcia Laplace'a względem pierwszych kolumn. Dla $n = 2$ mamy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + 0 \cdot (-1)^{2+1}a_{12} = a_{11} \cdot a_{22}.$$

Założmy teraz, że wzór zachodzi dla macierzy trójkątnych górnych stopnia $n-1$. Uzasadnimy jego prawdziwość dla macierzy trójkątnej górnej $[a_{ij}]$ stopnia n . Mamy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{zał.} \\ \text{ind.} \end{matrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

(a) 6; (b) $-30 - 30i$.

- 3.47. (a) -30; (b) -24; (c*) $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} n!$.
 3.48. (a) $(-1)^{n(n-1)/2} a_{1n} a_{2n-1} \dots a_{n1}$; (b) $n + 1$.

3.4. Inne definicje wyznacznika* (str. 56)

- 3.50. Permutacje 2-elementowe: $(1\ 2)$, $(2\ 1)$;
 3-elementowe $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$, $(2\ 1\ 3)$, $(2\ 3\ 1)$, $(3\ 1\ 2)$, $(3\ 2\ 1)$,
 4-elementowe $(1\ 2\ 3\ 4)$, $(1\ 2\ 4\ 3)$, $(1\ 3\ 2\ 4)$, $(1\ 3\ 4\ 2)$, $(1\ 4\ 2\ 3)$, $(1\ 4\ 3\ 2)$,
 $(2\ 1\ 3\ 4)$, $(2\ 1\ 4\ 3)$, $(2\ 3\ 1\ 4)$, $(2\ 3\ 4\ 1)$, $(2\ 4\ 1\ 3)$, $(2\ 4\ 3\ 1)$, $(3\ 1\ 2\ 4)$,
 $(3\ 1\ 4\ 2)$, $(3\ 2\ 1\ 4)$, $(3\ 2\ 4\ 1)$, $(3\ 4\ 1\ 2)$, $(3\ 4\ 2\ 1)$, $(4\ 1\ 2\ 3)$, $(4\ 1\ 3\ 2)$,
 $(4\ 2\ 1\ 3)$, $(4\ 2\ 3\ 1)$, $(4\ 3\ 1\ 2)$, $(4\ 3\ 2\ 1)$.
- 3.52. (a) brak inwersji, $\text{sgn } p = 1$;
 (b) 9 inwersji, $\text{sgn } p = -1$, $\{6, 1\}$, $\{6, 5\}$, $\{6, 2\}$, $\{6, 4\}$, $\{6, 3\}$, $\{5, 2\}$, $\{5, 4\}$, $\{5, 3\}$,
 $\{4, 3\}$;
 (c) 12 inwersji, $\text{sgn } p = 1$, $\{3, 2\}$, $\{5, 4\}$, $\{5, 2\}$, $\{7, 6\}$, $\{7, 4\}$, $\{7, 2\}$, $\{8, 6\}$, $\{8, 4\}$,
 $\{8, 2\}$, $\{6, 4\}$, $\{6, 2\}$, $\{4, 2\}$.
- 3.54. (a) -720 ; (b) -30 ; (c) 13 .
- 3.55. $|a_{11}| = a_{11}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,
 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

3.5. Własności wyznaczników (str. 57)

- 3.57. (a) 6; (b) $11 \cdot 3^3$; (c) $(a-b)(b-c)(c-d)d$; (d) $7 \cdot 3^4$; (e) $-15\,486$; (f) $4\,478\,916$.
- 3.58. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -7 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.
- 3.59.* 1 dla $n = 1$ oraz 0 dla $n \geq 2$.
- 3.60.* (a) Wsk. Rozważyć wyznacznik złożony z reszt z dzielenia wyrażeń danego wyznacznika przez 3.
 (b) Wsk. Od wiersza drugiego, trzeciego i kolejnych, odjąć wiersz pierwszy.
- 3.61. Wzór nie zachodzi np. dla macierzy: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- 3.62. (a) -81 ; (b) 156 ; (c) -65 ; (d) -90 ; (e) 0. (f*) 446 .
- 3.64. (a) 2^{14} ; (b) -36 ; (c) $1/64$, -48 ; (d) 250 ; (e) 6.
- 3.67.* (a) 70 ; (b) $10iz^3 - 20iz^2 + 10iz - 20i$; (c) $2!3! \dots (n-1)!$.

3.6. Macierz odwrotna (str. 65)

- 3.69. (a), (e) macierze odwrotne nie istnieją; (b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$;
 (d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (f) $F^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/3 \end{bmatrix}$.
- 3.70. (a) $A^{-1} = (1/10)A$; (b) $A^{-1} = (1/4)A$.
- 3.71.* (a) $-(1/4)A^2 - (3/4)A - (1/2)I$.

3.77. (a) $\begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 3/4 & -(1+i)/4 \\ (i-1)/4 & 1/2 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$; (e) $(1/4)A$; (f*) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n \\ 0 & 0 & \dots & 1/(n-1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.78. (a) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$; (d*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; (f*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 10 & 0 & 6 \\ 14 & -2 & 12 \end{bmatrix}$; (h) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$.

3.80. (a) $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$;

(b) Mamy $AB = BA$. Stąd $(AB)^{-1} = (BA)^{-1}$ i dalej $B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$;

(d) 128; (e*) pierwsza kolumna macierzy odwrotnej zmniejszy się 2-krotnie;

(f*) w macierzy odwrotnej zamieniają się odpowiednie kolumny, a ponadto zmieni się znak przed macierzą.

3.81. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1/5 \\ -1 & 1/5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

3.82. (a) $1/8$; (b) $1/2$; (c) 4.

3.84. (a) $\begin{bmatrix} 2/11 & -5/11 \\ 1/11 & 3/11 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$; (c) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; (d) $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

3.7. Algorytm Gaussa – Jordana (str. 71)

3.85. (a) $w_3 + w_4$, $w_2 - 2w_3 - 5w_4$, $w_1 - 4w_2 + 3w_3$;

(b) $w_3 - 2w_1$, $w_4 + w_2$, $w_4 - 2w_3$, $w_3 + w_4$, $w_2 + 3w_3 - 4w_4$, $w_1 - 2w_2 - 3w_3 - w_4$;

(c) $w_1 : 2$, $w_2 - 2w_1$, $w_3 + w_1$, $w_4 - 3w_1$, $w_2 : 3$, $w_4 + 2w_2$, $w_3 \longleftrightarrow w_4$, $w_3 : 2$, $w_4 : 5$, $w_3 - 2w_4$, $w_2 + w_3 - 2w_4$, $w_1 - 3w_2 + w_3 - 2w_4$.

3.86. (a) $\begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 11 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Układy równań liniowych

4.1. Podstawowe określenia (str. 73)

4.2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$;

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- 4.3. (a) $x = 0, y = -1, z = 4$; (b) $x = 4, y = 5, z = 3$; (c) $x = 1, y = 2, z = 2, t = 3$.

4.2. Układy Cramera (str. 74)

- 4.7. (a) $x = -3, y = 1$; (b) $x = -1, y = -1/3, z = -5/3$;

(c) $x = 0, y = 8/13, z = 0, t = -2/13$.

- 4.8. Mnożymy lewostronnie równość $AX = B$ przez macierz A^{-1} . Korzystając teraz z łączności mnożenia macierzy mamy $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = IX = X = A^{-1}B$.

(a) $x = 41/17, y = 1/17$; (b) $x = -14, y = 4, z = 0$; (c) $x = 0, y = 3, z = 2, t = 5$.

- 4.9. $[xyz] = [4 \ -1 \ -1]$.

- 4.10. (b*) Wsk. Wykorzystać wyznacznik Vandermonde'a;

- 4.11. (a) $W(x) = 1 + (1/6)x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3$; (b) $W(x) = x^2 - 3x - 1$;

(c) $A = 1, B = 0, C = 0, D = 1$; (d) $z = 2x - 3y + 5$.

- 4.12.* (a) $\alpha = 1, \beta = 1/2, \gamma = -1$;

(b) i) $(1/3)n^3 + (1/2)n^2 + (1/6)n$, ii) $(1/4)n^4 + (1/2)n^3 + (1/4)n^2$,

iii) $(1/5)n^5 + (1/2)n^4 + (1/3)n^3 - (1/30)n$.

(c) $a = 1/6, b = 2/3, c = 1/6$; (d) $\cos^4 x = 3/8 + (1/4)\cos 2x + (1/16)\cos 4x$.

Uwaga. Wyznaczenie współczynników α, β, γ w ćwiczeniu (a), współczynników $a_0, a_1, \dots, a_{k+1}$ w ćwiczeniu (b) ani współczynników a, b, c w ćwiczeniu (c) nie oznacza jeszcze, że udowodniono te wzory (dlaczego?).

4.3. Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera–Capellego (str. 77)

- 4.15. (a) 3, 3, -3; (b) 0, 0, 0, 0.

- 4.17. (a) 2; (b) 2; (c) 3.

- 4.22. (a) 2; (b) 3; (c) 2.

- 4.23. (a) $p \neq 3$, rz $A = 3, p = 3$, rz $A = 2$; (b) $p \neq 0$, rz $A = 3, p = 0$ rz $A = 2$.

- 4.26. (a) nieskończenie wiele rozwiązań, 2 parametry; (b) układ jest sprzeczny;

(c) nieskończenie wiele rozwiązań, 1 parametr; (d) jedno rozwiązanie.

- 4.27. (a) dla $p \neq -1$ i $p \neq 4$ układ ma jedno rozwiązanie, dla $p = -1$ nieskończenie wiele rozwiązań, dla $p = 4$ jest sprzeczny;

(b) dla $p \neq -5$ i $p \neq 3$ układ ma jedno rozwiązanie, dla $p = -5$ jest sprzeczny, dla $p = 3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań;

(c) dla $p \neq 14$ układ jest sprzeczny, dla $p = 14$ ma nieskończenie wiele rozwiązań;

(d) dla $p \neq 9$ układ jest sprzeczny, dla $p = 9$ ma jedno rozwiązanie.

4.4. Metody rozwiązywania układów Cramera (str. 80)

- 4.28. (a) $x = 15/11$, $y = -21/22$; (b) $x = 17/5$, $y = 12/5$, $z = 2/5$;
 (c) $x = 5$, $y = -1$, $z = -2$;
 (d) $x = 3$, $y = 2$, $z = 0$, $t = 3$; (e) $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, $t = 0$, $u = 1$.
 4.29. (a) $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$; (b) $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$, $t = 2$.

4.5. Metody rozwiązywania dowolnych układów (str. 82)

- 4.33. (a) $x = -5$, $y = z = 1$; (b) $x = 11 - 5t - 2y$, $z = -4 + 2t$ ($y, t \in \mathbb{R}$);
 (c) układ jest sprzeczny; (d) $x = -4 - 2y - t$, $z = 7/2 + t$, $u = 1/2$ ($y, t \in \mathbb{R}$).
 4.34. (a) $y = -2 - x + z$, $s = 5 + 2x - z$, $t = -2 - 3x - 2z$ ($x, z \in \mathbb{R}$);
 (b) $x = 2 + 7y$, $z = 1 - 8y$, $s = 3 - 6y$, $t = 3 + 5y$ ($y \in \mathbb{R}$).
 4.35. (a) $x = 1$, $y = 1$, $z = 1 + t$ ($t \in \mathbb{R}$);
 (b) $y = 7x - 3t - 1$, $z = 8 - 27x + 7t$ ($x, t \in \mathbb{R}$).
 4.36. (a)
$$\begin{cases} x & = 0, \\ y + z & = 0, \\ 2y + 2z & = 0, \\ -y - z & = 0, \\ 3x & = 0; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x & = 1, \\ y & = 1, \\ z + 2t - u & = -1, \\ -2z - 4t - 2u & = 2; \end{cases}$$

 (c)
$$\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ 3x + 3y + 3z + 3t = 2; \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x & = 1, \\ y + z & = 3, \\ -y - z & = -3; \end{cases} \quad (e^*) \begin{cases} x + y - z & = 0, \\ x - y - t & = 0, \\ 2x - z - t & = 0. \end{cases}$$

 4.37. (a) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$; (b) $a = b = c = 0$; (c*) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.
 4.38.* Odcinki a , b , c , d , e , A były patrolowane odpowiednio (a) 4, 3, 5, 8, 10, 1 razy;
 (b) 7, 7, 10, 12, 17, 0 razy. Po zmianie kierunku ruchu (a) sytuacja jest niemożliwa,
 (b) 15, 11, 14, 12, 17, 4 razy.
 4.39. Zestawów A , B , C , D było odpowiednio 10, 15, 13, 12.
- 4.6. Wartości własne i wektory własne** (str. 87)
- 4.41. (a) $\lambda^2 - \lambda - 7$; (b) $\lambda^2 + 3 - 2i$; (c) $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$.
 4.42. (a) $2^n w_A \left(\frac{\lambda}{2}\right)$; (b); (c) $w_A(\lambda)$; (d) $\frac{(-\lambda)^n}{\det A} w_A \left(\frac{1}{\lambda}\right)$.
 4.44. (a) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (x, -x)$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), $\lambda_2 = 5$, $v_2 = (3x, x)$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);
 (b) brak rzeczywistych wartości własnych; (c) $\lambda_1 = 1$, $v = (x, y)$ $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 (d) $\lambda_1 = 4$, $v_1 = (x, 0, 0)$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), $\lambda_2 = -1$, $v_2 = (2x, -5x, 0)$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$),
 $\lambda_3 = 1$, $v_3 = (-8x, 3x, 6x)$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);
 (e) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = (-2x - 3y, x, y)$ ($x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), $\lambda_2 = 6$, $v_2 = (x, x, x)$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$);
 (f) $\lambda = 0$, $v = (-3x + 4z, x, y, z)$, ($x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).
 4.45. (a) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (x, 0)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $\lambda_2 = -3$, $v_1 = (x, -2x)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$);
 (b) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (x, x)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $\lambda_2 = -1$, $v_1 = (x, -x)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$);
 (c) dla $\lambda_1 = (3 - i\sqrt{11})/2$ $v_1 = ((1 - i\sqrt{11})x, 2x)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, $v_2 = \bar{v}_1$;
 (d) $\lambda_1 = i$, $v_1 = ((2i - 1)x, 2x)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $\lambda_2 = 1 - i$, $v_2 = (0, x)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$);
 (e) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (0, 2x, x)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $\lambda_2 = i$, $v_2 = ((1 + i)x, (1 + i)x, -x)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$),
 $\lambda_3 = -i$, $v_3 = ((i - 1)x, (i - 1)x, x)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$);
 (f) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (x, 0, 0, 0)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $\lambda_2 = 2$, $v_2 = (7x, 2x, x, 0)$ ($x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

5. Geometria analityczna w przestrzeni

5.1. Wektory (str. 90)

- 5.6. (a) $(1/2)(a+b)$, $(1/2)(a-b)$.
5.10. (a) 5; (b) 6; (c) $\sqrt{58}$.
5.12. (a) (0, 4, 1); (b) (3, -6, -9); (c) (0, 6, -3); (d*) 5, przy założeniu, że wszystkie wierzchołki kwadratu leżą po jednej stronie płaszczyzny.

5.2. Iloczyn skalarny (str. 96)

- 5.15. (a) 1; (b) -5.
5.16. (a) $\pi/2$; (b) $\pi/3$.
5.18. (a) 13; (b) $\sqrt{41}$;
(c*) wektory p, q, r są niewspółpłaszczyznowe oraz spełniają warunki: $|p| = |q-r|$,
 $|q| = |p-r|$, $|r| = |p-q|$;
(d*) nie istnieje.
5.19. (a) $\pi/3$; (b*) $\arccos(\sqrt{3}/3)$.
5.20. (a) $w_1 = (4/\sqrt{29}, 2/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29})$, $w_2 = -w_1$;
(b) $c_1 = (1/2, 1/(2\sqrt{3}), \sqrt{2/3})$, $c_2 = (1/2, 1/(2\sqrt{3}), -\sqrt{2/3})$.
5.22. $S = (0, 0, 0)$, $S = (600/361, 360/361, 900/361)$.
5.23*. Wsk. Najkrótsza droga jest łukiem koła wielkiego Ziemi. Zatem $d = R \arccos \alpha$, gdzie α jest kątem między wektorami $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, zaś O oznacza środek Ziemi.

5.2. Iloczyn wektorowy (str. 98)

- 5.27. (a) $(-6, 7, -4)$; (b) $(-18, 18, 9)$.
5.28. Wsk. W przestrzeni pole równoległoboku S rozpiętego na wektorach u, v wyraża się wzorem $\text{pole}(S) = |u \times v|$. Zaś pole trójkąta rozpiętego na tych wektorach jest połową pola równoległoboku.
(a) $\sqrt{374}$; (b) $5\sqrt{6}/2$; (c) $\sqrt{2}$; (d) $4(\sqrt{14} + \sqrt{11})$.
5.30. (a) $(11, -11, 11)$; (b) $(-6, -20, -8)$.
5.33.* Wsk. Wykorzystać iloczyn wektorowy.

5.4. Iloczyn mieszany (str. 101)

- 5.35. (a) 2; (b) 10.
5.37. (a) -10; (b) 30.
5.38. (a) 14; (b) 5/6. Wsk. Objętość czworościanu rozpiętego na trzech wektorach jest równa 1/6 objętości równoległościanu rozpiętego na tych wektorach.
5.39. $2/\sqrt{13}$.
5.43. (a) nie; (b) tak.

5.5. Równania płaszczyzn (str. 104)

- 5.45. (a) $2x - 3y + z + 8 = 0$; (b) $x - y + 4z - 15 = 0$.
 5.47. (a) $x - 3 = 0$; (b) $2x + z = 0$; (c) $p = -2, q = -1$.
 5.49. (a) $(x, y, z) = s(1, 2, 3) + t(0, -1, 2)$ ($s, t \in \mathbb{R}$); (b) $P = (-28/5, 0, 0)$;
 (c) $(x, y, z) = (0, 0, 3) + s(1, 0, -1) + t(0, 1, 2)$ ($s, t \in \mathbb{R}$); (d) $\pi: 7x + 4y - z - 19 = 0$.

5.50. Równanie zapisane w tezie ma postać $x D_{11} + y D_{12} + z D_{13} + D_{14} = 0$, gdzie D_{1j} dla $j = 1, 2, 3, 4$ oznaczają dopełnienia algebraiczne kolejnych elementów pierwszego wiersza wyznacznika. Jest to postać ogólna równania płaszczyzny. Współrzędne punktów P_1, P_2, P_3 spełniają to równanie, bo w odpowiednich wyznacznikach pojawiają się dwa identyczne wiersze. Do takiej postaci równania płaszczyzny prowadzi też następujące rozumowanie. Niech $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1 P_2}, \mathbf{v} = \overrightarrow{P_1 P_3}$. Dla wektora normalnego $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ płaszczyzny π oraz wektorów wodzących $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r} = (x, y, z)$ odpowiednio punktów P_1 i P z płaszczyzny otrzymujemy ciąg równoważności

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \perp \mathbf{n} &\iff (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \circ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \iff (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \\
 &\iff \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,
 \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z własności wyznaczników.

- (a) $12x + 7y - 3z - 1 = 0$; (b) nie.
 5.51. Ponieważ punkty $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ spełniają równanie ogólne płaszczyzny $x/a + y/b + z/c - 1 = 0$, więc jest to równanie szukanej płaszczyzny.
 (a) $x/6 + y/(-2) + z/4 = 1$; (b) $x + y + z - 4 = 0$; (c) 6

5.6. Równania prostych (str. 107)

- 5.53. (a) $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + t(2, -1, 5)$ ($t \in \mathbb{R}$);
 (b) $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 0, -1)$ ($t \in \mathbb{R}$);
 (c) $\mathbf{v} = (3, 4, -6)$, np. $(1, -2, 3), (4, 2, -3), (-2, -6, 9)$;
 (d) $l \cap xOy = \{(-9, -22, 0)\}, l \cap xOz = \{(2, 0, 11/2)\}, l \cap yOz = \{(0, -4, 9/2)\}$;
 (e) tak, $(3, -3, 3)$.
 5.54. $(x, y, z) = (-v, v, v)$, gdzie $v \in \mathbb{R}$. Prostych jest nieskończenie wiele, bo tyle można wybrać płaszczyzn zawierających jedną z prostych.
 Wsk. Rozważyć płaszczyznę zawierającą jedną z tych prostych. Wtedy pozostałe proste mają punkty wspólne z tą płaszczyzną. Następnie przez te punkty poprowadzić prostą.
 5.55. (a) 10 s.; (b) nie; (c) $(2, 3, 1)$.
 5.57. (a) $x = 2t, y = 5 - 5t, z = 1 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$); (b) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ 5x - z = 7 \end{cases}$;
 (c) $(-3/2, 0, -5/2)$; (d) -15; (e) $-1/2$.

5.7. Wzajemne położenie punktów, prostych i płaszczyzn (str. 110)

- 5.59. (a) $(10/7, -17/14, -19/14)$; (b) $(-9/11, 9/11, 27/11)$; (c) $(7/2, -11/2, -2)$;
 (d) $(-1, 7, -2)$.
 5.61. (a) $P' = (2, -7, 14)$; (b) $P' = (-4, -5, 4)$; (c) $P' = (-4, -3, 6)$.
 5.64. (a) $79/13$; (b) $\sqrt{3/10}$.

- 5.65. Niech $P_1 = (u_1, u_2, u_3)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny π_1 . Współrzędne tego punktu spełniają równanie $Au_1 + Bu_2 + Cu_3 + D_1 = 0$. Odległość między płaszczyznami jest równa odległości punktu P_1 od płaszczyzny π_2 . Zatem

$$d = \frac{|Au_1 + Bu_2 + Cu_3 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-D_1 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- (a) $5/\sqrt{11}$; (b) $3\sqrt{6}/2$.
 5.66. (a) $2\sqrt{6}$; (b) $\sqrt{30}$; (c) $2/\sqrt{5}$; (d) $9\sqrt{2}/4$;
 (e*) $x^2 + y^2 + x^2 - xy - yz - xz = 3/2$; (f*) $xy + yz + zx = 0$.
 5.69. (a) $\arcsin 1/\sqrt{6}$; (b) $\arcsin 1/\sqrt{35}$.
 5.70. (a) $\arccos 7/\sqrt{60}$; (b) $\arccos 19/(13\sqrt{3})$; (c) $\arccos \sqrt{2}/3$.
 5.71. (a) $\pi/3$; (b) $\arccos 1/\sqrt{7}$; (c) $\arccos 1/\sqrt{30}$.

6. Krzywe stożkowe

6.1. Podstawowe definicje i własności (str. 116)

- 6.3. Wsk. Wykorzystać jednokładność w przestrzeni względem wierzchołka stożka.
 6.4. (a) okrąg; (b) okrąg, elipsę lub dwie proste równoległe.
 6.5. (a) brzeg oświetlonego fragmentu biurka może być każdą z krzywych stożkowych;
 (b) brzeg cienia piłki może być okręgiem lub elipsą.

6.2. Okrąg (str. 118)

- 6.8. (a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 53$; (b) $P_0 = (1, -3)$, $r = \sqrt{10}$;
 (c) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$; (d) $(x-8/3)^2 + y^2 = 85/9$;
 (e) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4^2$; (f) $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$, gdzie $r = 13 - 4\sqrt{5}$ lub $r = 13 + 4\sqrt{5}$.
 6.10. (a) $-3x + 4y = 25$; (b) $y = 5\sqrt{5/19}(x-12)$ lub $y = -5\sqrt{5/19}(x-12)$;
 (c) $y = x + 5\sqrt{2}$ lub $y = x - 5\sqrt{2}$; (d) $y = 2x + 5\sqrt{5}$ lub $y = 2x - 5\sqrt{5}$.

6.3. Elipsa (str. 120)

- 6.12. Wsk. Rozważyć przypadek, gdy punkt P jest końcem:
 (a) dużej osi elipsy; (b) małej osi elipsy.
 6.13. Wsk. Wykorzystać fakt, że proste styczne poprowadzone do sfery z punktu położonego poza nią mają jednakowe długości.
 6.15. (a) $x^2/25 + y^2/9 = 1$; (b) $F_1 = (4, -1)$, $F_2 = (10, -1)$; (c) $2a = 4$, $2b = 2S = (2, 0)$;
 (d) $C = 1/97(135 + 132\sqrt{3}, 40 - 198\sqrt{3})$ lub $C = 1/97(135 - 132\sqrt{3}, 40 + 198\sqrt{3})$;
 (e) Wsk. Przy rzutowaniu odcinki równoległe do wspólnej krawędzi płaszczyzn nie zmieniają długości, a odcinki prostopadłe są skracane w stałym stosunku;
 (f) $y - 1 = -(4/9)(x - 1)$.
 6.17. (a) $2x - 5y = \sqrt{2}$; (b) $y = (1/4)(x - 5)$, $y = -(1/4)(x - 5)$; (d) Wsk. Styczna elipsy w punkcie C powinna być równoległa do odcinka AB . $C = (-2, -\sqrt{3})$; (e*) $\sqrt{22}$;
 (f*) Wsk. Wyrazić współrzędne punktów A , B i następnie C w zależności od kąta nachylenia odcinka AB .

6.4. Hiperbola (str. 123)

6.19. Wsk. Rozważyć przypadek, gdy punkt P jest wierzchołkiem hiperboli.

6.23. (a) $x^2/4 - y^2/21 = 1$; (b) $F_1 = (-4\sqrt{10}, 0)$, $F_2 = (4\sqrt{10}, 0)$; (c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$;

(d) Wsk. $y = b\sqrt{x^2 - a^2}$ lub $y = -b\sqrt{x^2 - a^2}$;

(e) $a = 4$, $F_1 = (-4, -4)$, $F_2 = (4, 4)$; (f) $\pi/3$.

6.25. (a) $4x - 3\sqrt{3}y = 6$; (b) $y = -x + 2\sqrt{5}$ lub $y = -x - 2\sqrt{5}$;

(c) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{2}/2$ lub $y = \sqrt{3}x - \sqrt{2}/2$.

6.5. Parabola (str. 128)

6.29. (a) $y^2 = -12x$; (b) $y^2 = x/2$; (c) $x = 11/4$, $F = (0, 13/4)$;

(d) $(3 + 2\sqrt{14}/3, 2 + \sqrt{14})$, $(3 - 2\sqrt{14}/3, 2 - \sqrt{14})$.

6.31. (a) $x + 2y = 2$; (b) $y = -2(x + 1)$; (c) $y = \sqrt{3/2}(x + 1)$ lub $y = -\sqrt{3/2}(x + 1)$;

(d) $(1/2, -1/4)$.

6.32. (a) $y = 3 + \sqrt{16 - (x + 2)^2}$, $x \in [-6, 2]$; (b) $y = -2\sqrt{9 - x^2}/3$, $x \in [-3, 3]$;

(c) $x = -\sqrt{y^2 + 64}/4$, $y \in \mathbb{R}$; (d) $x = 5 + \sqrt{25 - y}$, $y \in (-\infty, 25]$.

6.33. (a) dolna połowa paraboli; (b) górny półokrąg; (c) dolna półelipsa;

(d) góra gałęzi hiperboli; (e) dolne części obu gałęzi hiperboli;

(f) górna połowa paraboli.



Literatura

1. A.Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa 1976.
2. H.T.Burgess, *On the Matrix Equation $AX=B$* , American Mathematical Monthly, vol. 23 (1916), str. 152-155.
3. B.Gleichgewicht, *Algebra*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.
4. A.I.Kostrikin, Wstęp do algebry, cz. I. Podstawy algebry, PWN, Warszawa 2004.
5. A.Mostowski, M.Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1970.
6. T.Trajdos, *Matematyka, cz. III*, WNT, Warszawa, 1993.



Skorowidz

algorytm

Gausa, 62

Gausa – Jordana, 71

argument

główny liczby zespolonej, 17

iloczynu, 22

ilorazu, 22

liczby przeciwnej, 19

liczby zespolonej, 17

odwrotności, 19

potęgi, 22

sprężenia, 19

asymptoty hiperboli, 126

Bézout twierdzenie, 30

bezwyznacznikowy schemat

znajdowania macierzy odwrotnej, 70

Cauchy'ego twierdzenie, 63

Cayley'a – Hamiltona twierdzenie, 89

Cramera

układ, 74

wzór, 74

część

rzeczywista liczby zespolonej, 12

urojona liczby zespolonej, 12

de Moivre'a wzór, 20

dopełnienie algebraiczne, 54

długość wektora, 94

działania na liczbach zespolonych, 24

element neutralny

dodawania, 10

mnożenia, 10

elipsa, 117, 120, 132

Eulera wzory, 23

Falka schemat, 45

funkcja wymierna, 37

właściwa, 37

gałąź hiperboli, 124

Gausa

– Jordana metoda eliminacji, 80, 83

algorytm, 62

główna przekątna, 42

hiperbola, 117, 123, 135

równoosiowa, 126

iloczyn

liczb zespolonych, 9

macierzy, 45

przez liczbę, 44

mieszany, 101

skalaryny, 96

wektorowy, 99

wielomianów, 29

iloraz liczb zespolonych, 11

interpretacja geometryczna

iloczynu mieszanego, 102

wyznaczników

drugiego stopnia, 52

trzeciego stopnia, 53

zbioru pierwiastków, 26

inwersja permutacji, 56

jednostka urojona, 11

Jordana – Gausa algorytm, 71

kąt

między

plaszczynami, 114

prostymi, 114

nachylenia prostej do płaszczyny, 114

kierownica paraboli, 128

kolumna

niewiadomych, 73

wyrazów wolnych, 73

Kroneckera – Capellego twierdzenie, 79

krzywa stożkowa, 116

Laplace'a rozwinięcie, 54

- liczba
 - algebraiczna, 31
 - przestępna, 32
 - zespólona, 9
- macierz
 - antysymetryczna, 50
 - blokowa, 43
 - diagonalna, 42
 - dopełnień algebraicznych, 54
 - główna, 73
 - jednostkowa, 42
 - kwadratowa, 41
 - nieosobliwa, 66
 - odwrotna, 65
 - osobliwa, 66
 - rzeczywista, 40
 - schodkowa, 78
 - symetryczna, 50
 - trójkątna
 - dolna, 42
 - górną, 42
 - transponowana, 49
 - zerowa, 41
 - zespólona, 40
- metoda
 - eliminacji Gaussa – Jordana, 80, 83
 - kolumn jednostkowych, 81, 85
 - macierzy odwrotnej, 75
- mimośród
 - elipsy, 120
 - hiperboli, 124
- minor macierzy, 77
- moduł liczby zespolonej, 14
- odległość
 - płaszczyzn równoległych, 112, 113
 - prostych
 - równoległych, 112
 - skośnych, 112
 - punktu
 - od płaszczyzny, 111, 113
 - od prostej, 111
- ognisko
 - elipsy, 120
 - hiperboli, 124
 - paraboli, 128
- ogniskowa
 - elipsy, 120
 - hiperboli, 124
- okrąg, 117, 118, 130
- operacja elementarna, 59
- orientacja trójki wektorów, 98
- oś
 - mała, 120
 - obrotu, 116
 - rzeczywista, 12
 - rzeczywista hiperboli, 124
 - urojona, 12
 - urojona hiperboli, 126
 - wielka, 120
- para uporządkowana, 9
- parabola, 117, 128, 133
- parametr paraboli, 128
- permutacja, 56
- pierwiastek
 - trójmianu kwadratowego, 33
 - wielokrotny wielomianu, 31
 - wielomianu, 29
 - z liczby zespolonej, 25
 - zespólony wielomianu, 35
- podzielność wielomianów, 29
- postać
 - algebraiczna liczby zespolonej, 12
 - trygonometryczna liczby zespolonej, 19
 - wykładnicza liczby zespolonej, 24
- powłoka, 116
- promień okręgu, 118
- punkt podziału odcinka, 94
- reguła Sarrusa, 52
- rozwiązanie
 - trywialne, 74
 - układu równań, 73
- rozwinięcie Laplace'a, 54
- równanie
 - charakterystyczne macierzy, 87
 - elipsy, 121
 - hiperboli, 124
 - okręgu, 118
 - płaszczyzny
 - normalne, 104
 - odcinkowe, 107
 - ogólne, 105
 - parametryczne, 105
 - przechodzącej przez trzy punkty, 106
 - paraboli, 128
 - prostej
 - krawędziowe, 109
 - parametryczne, 107
 - stycznej
 - elipsy, 123
 - hiperboli, 127

- okręgu, 119
- paraboli, 129
- różnica
 - liczb zespolonych, 11
 - macierzy, 44
 - wielomianów, 29
- rząd macierzy, 77
- schodkowej, 78
- rzut prostokątny punktu na
 - płaszczyznę, 110
 - prostą, 110
- Sarrusa reguła, 52
- schemat Falka, 45
- sprężenie liczby zespolonej, 13
- stożek, 116
- stożkowe, 116
- suma
 - liczb zespolonych, 9
 - macierzy, 44
 - wektorów, 91
 - wielomianów, 29
- symbol $e^{i\varphi}$, 23
- symetria względem
 - płaszczyzny, 111
 - prostej, 111
 - punktu, 111
- śląd macierzy, 88
- środek
 - elipsy, 120
 - hiperboli, 124
 - okręgu, 118
- transpozycja macierzy, 49
- twierdzenie
 - Bézout, 30
 - Cauchy'ego, 63
 - Cayley'a – Hamiltona, 89
 - Kroneckera – Capellego, 79
 - o pierwiastkach
 - całkowitych wielomianu, 31
 - wymiernych wielomianu, 32
 - o postaci macierzy odwrotnej, 67
 - o rozkładzie
 - funkcji wymiernej, 38
 - wielomianu, 36
 - zasadnicze algebry, 33
- tworząca, 116
- układ
 - Cramera, 74
 - jednorodny, 74
 - lewoskrętny, 99
 - niejednorodny, 74
 - nieoznaczony, 73
 - oznaczony, 73
 - prawoskrętny, 99
 - równań liniowych, 73
 - sprzeczny, 73
 - współrzędnych w przestrzeni, 93
- ułamki proste, 37
- Vandermonde'a wyznacznik, 64
- Viète'a wzory, 35
- wartość własna macierzy, 87
- wektor
 - kierunkowy prostej, 107, 109
 - normalny płaszczyzny, 104
 - przeciwny, 92
 - swobodny, 91
 - własny macierzy, 87
 - wodzący punktu, 94
 - zaczepiony, 90
 - zerowy, 90
- wersor, 91, 94
- wielomian
 - charakterystyczny macierzy, 87
 - rzeczywisty, 28
 - zespolony, 28
- wierzchołek
 - elipsy, 120
 - hiperboli, 124
 - paraboli, 128
- własności
 - długości wektora, 92
 - iloczynu
 - macierzy, 47
 - mieszanego, 103
 - skalarnego, 97
 - wektorowego, 100
 - macierzy odwrotnych, 68
 - modułu liczby zespolonej, 15
 - rzędu macierzy, 78
 - sprężenia, 13
 - symbolu $e^{i\varphi}$, 23
 - transpozycji macierzy, 50
 - wyznaczników, 57
- wyznacznik, 51
- macierzy
 - trójkątnej, 55
 - Vandermonde'a, 64
- wzór
 - Cramera, 74
 - de Moivre'a, 20

- do obliczania iloczynu
 - mieszanego, 102
 - skalarnego, 96
 - wektorowego, 99
- na pierwiastki z liczby zespolonej, 25
- wzory
 - Eulera, 23
 - Viète'a, 35
- zasadnicze twierdzenie algebry, 33
- znak permutacji, 56

