

5. WPROWADZENIE DO MORFOLOGII MATEMATYCZNEJ

5.1. PODSTAWOWE POJĘCIA

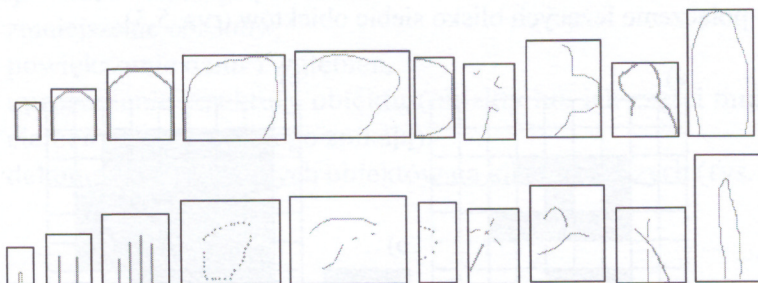
Przekształcenia morfologiczne są jednymi z najczęstszych operacji wykonywanych na obrazach binarnych. Ich nazwa wywodzi się stąd, że wpływają one na kształt obiektów binarnych widocznych w obrazie [4]. Należą one do grupy przekształceń kontekstowych, a więc takich, w których wartość danego piksela zależy także od wartości jego sąsiadów. Z przekształceniami morfologicznymi związane są pojęcia elementu strukturalnego i punktu reprezentatywnego.

Element strukturalny to pewien podzbiór pikseli sztucznie wytworzonego wycinka obrazu z wyróżnionym jednym punktem zwanym centralnym lub reprezentatywnym [5]. Stanowi on wzorec (maskę), który przyłożony do obrazu, tak aby punkt centralny pokrywał się z badanym pikselem, określa fragmenty sąsiedztwa uwzględniane przy wyznaczaniu warunku związanego z daną operacją morfologiczną [1]. Element strukturalny może mieć dowolny kształt i rozmiar, od prostego filtra 3×3 po bardziej skomplikowane struktury rys. 5.1.



Rys. 5.1. Przykładowe elementy strukturalne; piksele wchodzące w skład elementu strukturalnego zaznaczono kolorem szarym, punkt centralny znakiem +

W szczególnym przypadku może on korespondować z kształtem badanego obiektu binarnego (rys. 5.2) [2, 4].



Rys. 5.2. Baza elementów strukturalnych wykorzystywanych w pracy [2] do rozpoznawania liter Polskiego Alfabetu Palcowego; punkt centralny zlokalizowany był w środku elementu strukturalnego

5.2. DYLATACJA

Dylatacja binarnego obrazu X za pomocą elementu strukturalnego B może być zdefiniowana następująco:

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b \quad (5.1)$$

gdzie:

$\oplus$ – operator dylatacji,

$\bigcup$ – suma zbiorów,

X_b – translacja zbioru X o wektor b (przesunięcie każdego elementu $x \in X$ o wektor b).

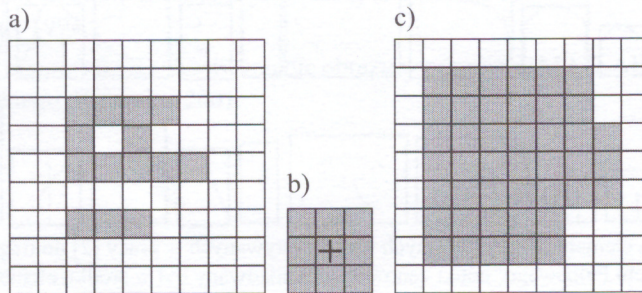
Element strukturalny przesuwany jest nad obrazem binarnym. Jeżeli którykolwiek z punktów przykrytych przez element strukturalny ma wartość 1, to punktowi leżącemu pod punktem centralnym także nadawana jest wartość 1. Operację dylatacji można także wykonywać dla obrazów z poziomami szarości. Pikselowi znajdującemu się pod punktem centralnym nadaje się wtedy maksymalną wartość pikseli przykrytych przez element strukturalny.

Dylatacja jest transformacją nieodwracalną i ma następujące własności:

- przemienność $X \oplus B = B \oplus X$,
- łączność $X \oplus (B \oplus D) = (X \oplus B) \oplus D$,
- $X_h \oplus B = (X \oplus B)_h$,
- $(0,0) \in B \Rightarrow X \oplus B \supseteq X$,
- $X \subseteq Y \Rightarrow X \oplus B \subseteq Y \oplus B$.

W wyniku dylatacji obrazu binarnego uzyskujemy:

- powiększenie obiektów,
- wypełnienie lub zmniejszenie dziur,
- wypełnienie lub zwężenie wgłębień,
- połączenie leżących blisko siebie obiektów (rys. 5.3).



Rys. 5.3. Efekt dylatacji obrazu binarnego: a) obraz wejściowy, b) zastosowany element strukturalny (punkt centralny zaznaczono znakiem +), c) wynik operacji

Siła efektu zależy od kształtu i rozmiaru zastosowanego elementu strukturalnego.

5.3. EROZJA

Erozja binarnego obrazu X za pomocą elementu strukturalnego B może być zdefiniowana następująco:

gdzie:

$\ominus$ – operator erozji,

$\bigcap$ – część wspólna,

X_{-b} – translacja zbioru X o wektor $-b$ (przesunięcie każdego elementu $x \in X$ o wektor $-b$).

Element strukturalny przesuwany jest nad obrazem binarnym. Jeżeli którykolwiek z punktów przykrytych przez element strukturalny ma wartość 1, to punktowi leżącemu pod punktem centralnym także nadawana jest wartość 1. Operację erozji można także wykonywać dla obrazów z poziomami szarości. Pikselowi znajdującemu się pod punktem centralnym nadaje się wtedy minimalną wartość pikseli przykrytych przez element strukturalny.

Erozja

– nie

– $(X \ominus B) \oplus B = X$

– $X \ominus B = (X \oplus B)_h$

– $(0,0) \in B \Rightarrow X \ominus B \subseteq X$

– $(X \subseteq Y) \Rightarrow (X \ominus B) \subseteq (Y \ominus B)$

– $X \subseteq Y \Rightarrow X \oplus B \subseteq Y \oplus B$

– $X \subseteq Y \Rightarrow X \ominus B \subseteq Y \ominus B$

gdzie: X^c je

Erozja

– z

– p

– u

e

– d

5.3. EROZJA

Erozja binarnego obrazu X za pomocą elementu strukturalnego B może być zdefiniowana następująco:

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \quad (5.2)$$

gdzie:

$\ominus$ – operator erozji,

$\bigcap$ – część wspólna zbiorów,

X_{-b} – translacja zbioru X o wektor $-b$.

Element strukturalny przesuwany jest nad obrazem binarnym. Jeżeli którykolwiek z punktów przykrytych przez element strukturalny ma wartość 0, to punktowi leżącemu pod punktem centralnym także nadawana jest wartość 0. Dla obrazów z poziomami szarości pikselowi znajdującemu się pod punktem centralnym nadaje się minimalną wartość pikseli przykrytych przez element strukturalny.

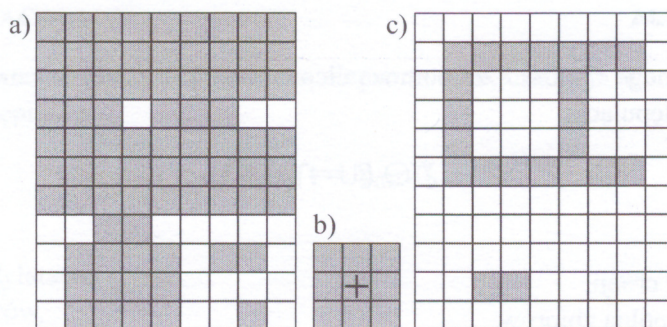
Erozja ma następujące właściwości:

- nieprzemienność $X \ominus B \neq B \ominus X$,
- $(X \ominus B) \ominus D = X \ominus (B \oplus D)$,
- $X_h \ominus B = (X \ominus B)_h$,
- $X \ominus B_h = (X \ominus B)_{-h}$,
- $(0,0) \in B \Rightarrow X \ominus B \subseteq X$,
- $X \subseteq Y \Rightarrow X \ominus B \subseteq Y \ominus B$,
- $(X \ominus B)^c = X^c \oplus (-B)$.

gdzie: X^c jest dopełnieniem zbioru X .

Erozja obrazu binarnego powoduje:

- zmniejszenie obiektów,
- powiększenie dziur i wgłębień,
- uproszczenie struktury obiektu (obiekty lub ich części mniejsze od elementu strukturalnego znikają),
- dekompozycję złożonych obiektów na kilka prostszych (rys. 5.4).



Rys. 5.4. Efekt erozji obrazu binarnego: a) obraz wejściowy, b) zastosowany element strukturalny (punkt centralny zaznaczono znakiem +), c) wynik operacji

Erozja może być wykorzystana do znalezienia brzegu wewnętrznego obiektu binarnego poprzez odjęcie obrazu zerodowanego od obrazu oryginalnego (rys. 5.5).



Rys. 5.5. Wyznaczanie brzegu wewnętrznego obiektu binarnego: a) obraz wejściowy, b) obraz zerodowany, c) brzeg wewnętrzny

5.4. OTWARCIE I ZAMKNIĘCIE

Otwarcie i zamknięcie powstają w wyniku złożenia operacji dylatacji i erozji. Otwarcie zdefiniowane jest następująco:

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B \quad (5.3)$$

gdzie $\circ$ oznacza operator otwarcia. Operacja zamknięcia określona jest jako:

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B \quad (5.4)$$

gdzie $\bullet$ jest operatorem zamknięcia.

Przekształcenia te mają następujące własności:

- otwarcie nie jest rozszerzające $X \circ B \subseteq X$,
- zamknięcie jest rozszerzające $X \subseteq X \bullet B$,
- $(X \bullet B)^c = X^c \circ (-B)$,
- $X \circ B = (X \circ B) \circ B$,
- $X \bullet B = (X \bullet B) \bullet B$.

Oper
(mniejszyci
powoduje:
– wy
– roz

Rys. 5.6. Efel

Efektem za
– łącz
– wy
– wy

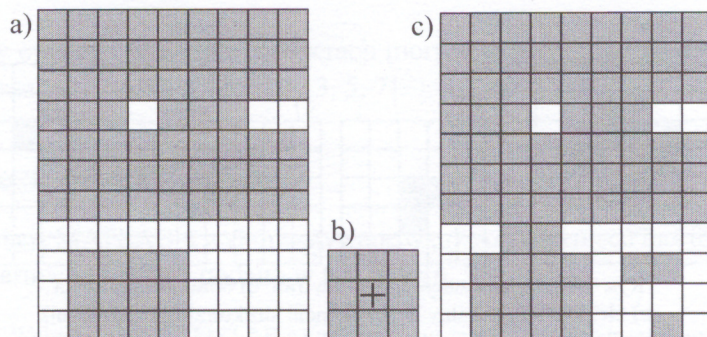
Rys. 5.7.

5.5. TRA

Transformac
tu struktural
zdefiniowar

Operacje te używane są do eliminacji określonych szczegółów w obrazie (mniejszych niż element strukturalny) z zachowaniem kształtu obiektów. Otwarcie powoduje:

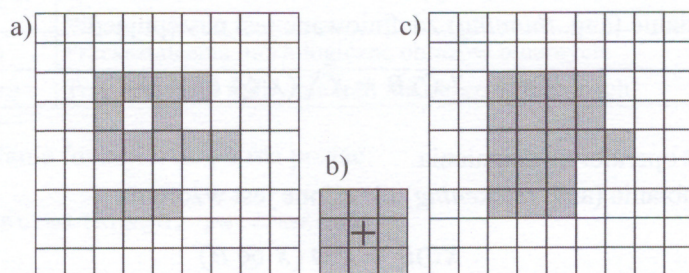
- wygładzenie linii obiektów poprzez eliminowanie wąskich „przylądków”,
- rozdzielenie obiektów połączonych ze sobą wąskimi przesmykami (rys. 5.6).



Rys. 5.6. Efekt otwarcia obrazu binarnego: a) obraz wejściowy, b) zastosowany element strukturalny (punkt centralny zaznaczono znakiem +), c) wynik operacji

Efekt zamknięcia jest:

- łączenie położonych blisko siebie obiektów,
- wypełnienie małych dziur,
- wygładzenie linii obiektów poprzez wypełnienie wąskich wgłębień (rys. 5.7).



Rys. 5.7. Efekt zamknięcia obrazu binarnego: a) obraz wejściowy, b) zastosowany element strukturalny (punkt centralny zaznaczono znakiem +), c) wynik operacji

5.5. TRANSFORMACJA TRAFI – NIE TRAFI

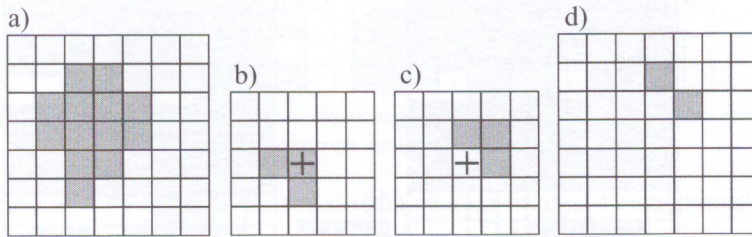
Transformacja trafi – nie trafi (ang. *hit-or-miss*) obrazu binarnego X za pomocą elementu strukturalnego $B = (B_1, B_2)$, złożonego z dwóch rozłącznych części $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ zdefiniowana jest następująco:

$$X \otimes B = \{x: (B_1 + x) \subset X \text{ i } (B_2 + x) \subset X^c\} \quad (5.5)$$

lub

$$X \otimes B = (X \ominus B_1) \cap (X^c \ominus B_2) \quad (5.6)$$

Element strukturalny złożony z dwóch rozłącznych części B_1 i B_2 z wyróżnionym punktem centralnym przesuwany jest nad obrazem binarnym.



Rys. 5.8. Transformacja trafi – nie trafi: a) obraz wejściowy X , b) element strukturalny B_1 , c) element strukturalny B_2 , d) wynik

Jeżeli część B_1 całkowicie zawiera się w obiekcie zaś B_2 w tle, pikselowi przykrytemu przez punkt centralny nadawana jest wartość 1 (rys. 5.8).

5.6. INNE PRZEKSZTAŁCENIA MORFOLOGICZNE

Do innych często używanych przekształceń morfologicznych zaliczamy także: ścienianie, pogrubianie, szkieletyzację.

Ścienianie (ang. *thinning*) zdefiniowane jest następująco:

$$X \oslash B = X \setminus (X \otimes B) \quad (5.7)$$

gdzie $\oslash$ jest operatorem ścieniania.

Pogrubianie (ang. *thickening*) określone jest wzorem:

$$X \odot B = X \cup (X \otimes B) \quad (5.8)$$

gdzie $\odot$ oznacza operator pogrubiania.

Szkieletyzacja ma na celu wskazanie tych punktów, które znajdują się w równych odległościach od co najmniej dwóch punktów brzegowych danej figury. Można ją uzyskać poprzez wykonanie ścieniania za pomocą stosowanych naprzemiennie elementów strukturalnych pokazanych na rys. 5.9 [7].

Rys. 5.9. El

Szczegółów
do obrazów

5.7. FUN

Wybrane fu
obrazów bi

Tab. 5.

Nazwa fu
stre.
imdila
imeroc
imope
imclo:
bwmorj
bwhitm

Wyw

SE =

gdzie shap
wych paran



Rys. 5.9. Elementy strukturalne stosowane w szkieletyzacji; piksele wchodzące w skład elementu strukturalnego zaznaczono kolorem szarym, punkt centralny znakiem +, × oznacza wartość bez znaczenia

Szczegółowy opis tych jak i innych operacji morfologicznych, także w odniesieniu do obrazów szarych można znaleźć w [3, 5, 7].

5.7. FUNKCJE MATLAB-A

Wybrane funkcje MATLAB-a wykorzystywane w przekształceniach morfologicznych obrazów binarnych i szarych podano w tab. 5.1. [6, 7]

Tab. 5.1. Wybrane funkcje MATLAB-a wykorzystywane w operacjach morfologicznych

Nazwa funkcji	Opis
strel	Tworzy element strukturalny wykorzystywany w przekształceniach morfologicznych.
imdilate	Dylatacja obrazów binarnych lub z poziomami szarości.
imerode	Erozja obrazów binarnych lub z poziomami szarości.
imopen	Otwarcie morfologiczne obrazów binarnych lub z poziomami szarości.
imclose	Zamknięcie morfologiczne obrazów binarnych lub z poziomami szarości.
bwmorph	Przekształcenia morfologiczne obrazów binarnych.
bwhitmiss	Transformacja trafi – nie trafi dla obrazów binarnych.

Wywołanie funkcji strel ma postać:

```
SE = strel(shape, parameters)
```

gdzie shape określa kształt elementu (tab. 5.2), zaś parameters zestaw dodatkowych parametrów, których liczba i znaczenie zależy od wartości shape.

Tab. 5.2. Wybrane kształty elementów strukturalnych tworzonych za pomocą funkcji

Wartość shape	Opis
arbitrary	Element strukturalny określony za pomocą macierzy złożonej z zer i jedynek, podanej jako drugi parametr.
diamond	Element strukturalny w kształcie rombu. Drugi parametr funkcji <code>strel</code> określa rozmiar rombu (odległość od punktu centralnego do punktu brzegowego wzdłuż osi x).
disk	Element strukturalny w kształcie koła o promieniu określonym przez drugi parametr funkcji <code>strel</code> .
line	Element strukturalny w kształcie linii o długości i kącie nachylenia określonych przez następne parametry funkcji <code>strel</code> .
octagon	Element strukturalny w kształcie ośmiokąta. Drugi parametr funkcji <code>strel</code> określa odległość od środka ośmiokąta do jego boków liczoną wzdłuż osi poziomej oraz pionowej. Musi to być wartość będąca wielokrotnością 3.
pair	Prostokątny element strukturalny zawierający tylko dwa punkty o wartości 1, pierwszy zlokalizowany w środku i drugi przesunięty o wektor podany jako dodatkowy parametr funkcji <code>strel</code> .
periodicline	Element strukturalny w kształcie linii przerywanej. Dodatkowe parametry funkcji <code>strel</code> określają długość przerw oraz nachylenie linii.
rectangle	Prostokątny element strukturalny o rozmiarze określonym przez dwuelementowy wektor będący następnym parametrem funkcji <code>strel</code> .
square	Kwadratowy element strukturalny o rozmiarze określonym przez drugi parametr funkcji <code>strel</code> .

We wszystkich przypadkach omawianych w tab. 5.2 punkt centralny zlokalizowany jest w środku elementu strukturalnego. Pakiet MATLAB zawiera dodatkowe funkcje pozwalające na modyfikację utworzonego elementu strukturalnego, w tym `translate` umożliwiającą przesunięcie punktu centralnego. Wyczerpującą informację można znaleźć w dokumentacji dostarczanej wraz z produktem.

Wywołania funkcji `imdilate`, `imerode`, `imopen`, `imclose`, mają postać:

```
IM2 = nazwa_funkcji(IM, SE)
```

lub

```
IM2 = nazwa_funkcji(IM, NHOOD)
```

gdzie:

`nazwa_funkcji` – nazwa odpowiedniej funkcji,

`IM` – obraz wejściowy,

`SE` – element strukturalny utworzony za pomocą funkcji `strel`,

`IM2` – wynik przekształcenia morfologicznego,

`NHOOD` – macierz jedynek i zer definiująca element strukturalny.

Omawiane f
w dokumen

Wyw

BW2

lub

BW2

gdzie:

BW – wejści

operatio

n – liczba p

BW2 – wyni

W przekształ
turalny w p

Wyw

BW2

lub

BW2

gdzie:

BW1 – wejści

SE1 – część

SE2 – część

INTERVAL

przy czym 1

BW2 – wyni

Omawiane funkcje mają dodatkowe parametry opcjonalne, które opisano szczegółowo w dokumentacji MATLAB-a.

Wywołanie funkcji `bwmorph` ma postać:

`BW2 = bwmorph(BW, operation)`

lub

`BW2 = bwmorph(BW, operation, n)`

gdzie:

`BW` – wejściowy obraz binarny,

`operation` – przekształcenie morfologiczne, które ma być wykonane (tab. 5.3),

`n` – liczba powtórzeń przekształcenia,

`BW2` – wynik przekształcenia.

Tab. 5.3. Wybrane przekształcenia morfologiczne obrazów binarnych realizowane za pomocą funkcji `bwmorph`

Nazwa przekształcenia	Opis
<code>close</code>	zamknięcie
<code>dilate</code>	dylatacja
<code>erode</code>	erozja
<code>open</code>	otwarcie
<code>skel</code>	szkieletyzacja
<code>thicken</code>	pogrubianie
<code>thin</code>	ścienianie

W przekształceniach wymienionych w tab. 5.3 wykorzystywany jest element strukturalny w postaci macierzy 3×3 wypełnionej jedynkami.

Wywołanie funkcji `bwhitmiss` ma postać:

`BW2 = bwhitmiss(BW1, SE1, SE2)`

lub

`BW2 = bwhitmiss(BW1, INTERVAL)`

gdzie:

`BW1` – wejściowy obraz binarny,

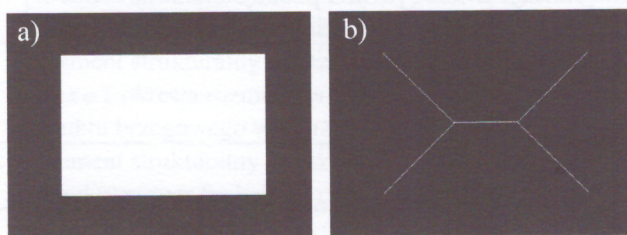
`SE1` – część B_1 elementu strukturalnego,

`SE2` – część B_2 elementu strukturalnego,

`INTERVAL` – element strukturalny w postaci macierzy złożonej z wartości -1, 0 i 1 przy czym 1 odpowiada B_1 , -1 - B_2 ,

`BW2` – wynik transformacji trafi – nie trafi.

Przykład szkieletyzacji binarnego obrazu za pomocą funkcji `bwmorph` pokazano na rys. 5.10.



Rys. 5.10. Szkieletyzacja binarnego obrazu za pomocą funkcji `bwmorph`:
a) binarny obraz wejściowy, b) obraz po szkieletyzacji

LITERATURA

- [1] Bradski G., Kaebler A.: Learning OpenCV, Computer Vision with the OpenCV Library, O'Reilly Media, Inc. 2008.
- [2] Marnik J.: Rozpoznawanie znaków Polskiego Alfabetu Palcowego z wykorzystaniem morfologii matematycznej i sieci neuronowych. Rozprawa doktorska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH, Kraków 2002.
- [3] Sankowski D., Mosorov V., Strzecha K.: Przetwarzanie i analiza obrazów w systemach przemysłowych. Wybrane zastosowania, PWN, Warszawa 2011.
- [4] Szeliski R.: Computer Vision: Algorithms and Applications, Springer, London 2010.
- [5] Tadeusiewicz R., Korohoda P.: Komputerowa analiza i przetwarzanie obrazów, Wydawnictwo Fundacji Postępu Telekomunikacji, Kraków 1997.
- [6] Thomson C. M., Shure L.: Image processing toolbox for use with MATLAB, The MathWorks Inc. 1993.
- [7] Wróbel Z., Koprowski R.: Przetwarzanie obrazu w programie MATLAB, Wyd. Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2001.

6. PODS

6.1. Mom

Gdy badany
bryły przed:
ich identyfik
o pojęcie mo
Niech
rowy rzędu p

gdzie x, y są
nych, przyjm
sumowaniem

gdzie i, j są w
Na obr
obszaru (obie

6.1.1. Mom

Momenty cer
położenia obi

gdzie $\bar{i} = M_1$

W ider
względem po
między innyn