

Algebra liniowa, Zestaw 1 - liczby zespolone

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y spełniające nierówność:

- a) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$, b) $(2 + 3i)x + (4 - 5i)y = 6 - 2i$,
 c) $(4 - 3i)2x + (1 + i)3y = 7 - 12i$, d) $(3 - i)x^2 - (3 + 2i)x - (1 - i)y = 13 - 10i$,
 e) $(1 + i)x^2 + (1 - i)y^2 = 25 + 7i$, f) $\frac{2 + 3i}{3 - i}x + \left(\frac{4 - i}{3 - i}\right)^2 y = 1 + i$.

Zadanie 2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać układ równań:

- a) $\begin{cases} (1 + i)z + (2 - i)w = 2 - 2i \\ (1 - i)z - (3 + i)w = -3 + 3i \end{cases}$, b) $\begin{cases} (3 - i)z + (4 + 2i)w = 2 + 6i \\ (4 + 2i)z - (2 + 3i)w = 5 + 4i \end{cases}$,
 c) $\begin{cases} z + iw = 1 \\ iz + w = 1 + i \end{cases}$, d) $\begin{cases} \frac{z}{2 - i} + \frac{w}{1 + i} = 2 \\ \frac{5z}{(2 - i)^2} + \frac{2w}{(1 + i)^2} = -3 + 3i \end{cases}$,
 e) $\begin{cases} z + iw + 2t = 3 + 2i \\ w - t = -i \\ z + it = 2i \end{cases}$.

Zadanie 3 (*). Rozwiązać równania:

- a) $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$;
 b) $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3$.

Zadanie 4. Wyznaczyć

- a) $\sqrt{-4}$, $\sqrt{2i}$, $\sqrt{-8i}$, $\sqrt[3]{-8i}$;
 b) $\sqrt{3 - 4i}$, $\sqrt{-15 + 8i}$, $\sqrt{-3 - 4i}$, $\sqrt{-11 + 60i}$, $\sqrt{-8 + 6i}$, $\sqrt{5 - 12i}$, $\sqrt{-2 + 3i}$.

Zadanie 5. Rozwiązać równania:

- a) $z^2 + 3z + 3 + i = 0$;
 b) $z^2 + (1 + 4i)z - (5 + i) = 0$;
 c) $z^2 + z(1 + i) + 2i = 0$;
 d) $(4 - 3i)z^2 - (2 + 11i)z - (5 + i) = 0$;
 e) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$;
 f) (*) $z^4 + (15 + 7i)z^2 + 8 = 15i$;
 g) (*) $z^4 - (18 + 4i)z^2 + 77 - 36i = 0$;
 h) $(1 + i)z^2 - (3 + 7i)z + 10i = 0$;
 i) $(1 + 2i)z^2 - (17i)z - 2 + 6 = 0$;
 j) $(1 - i)z^2 - (7 + 3i)z + 10i = 0$;
 k) $(1 + i)z^2 - (3 + 3i)z + (4 + 2i) = 0$;
 l) $z^2 + (1 + 3i)z + 4i + 4 = 0$;
 m) (*) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 - 3\left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 3 + i = 0$;
 n) (*) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$;
 o) $\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{1}{z} + 1 = 0$.

Zadanie 6 ().** Dla ustalonej liczby zespolonej z podać warunek na wszystkie liczby zespolone w takie, że:

- a) $z \cdot w$ jest liczbą rzeczywistą;
 b) $z \cdot w$ jest liczbą czysto urojoną.

Zadanie 7 (*)**. Dla jakich par liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzą równości:

- a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$;

- b) $|z_1| - |z_2| = |z_1 - z_2|$;
 c) $\arg(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}(\arg z_1 + \arg z_2)$;
 d) $\arg(z_1 + z_2) = \arg z_1$?

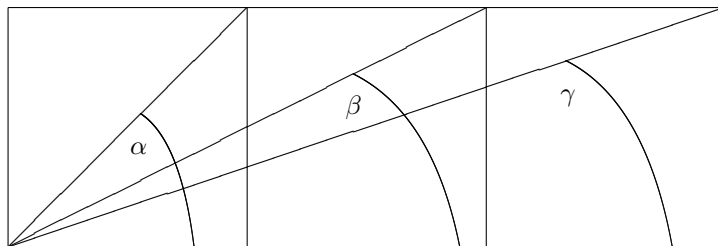
Zadanie 8. Na płaszczyźnie zespolonej zaznaczyć zbiory:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z - 2i + 1| < 2\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1 - i| = 3\}$;
 b) $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-3}{z+i}\right| \geq 1\right\}$, $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1+i}{z+1-i}\right| < 2\right\}$;
 c) $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \leq \pi\}$, $\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{2}\right\}$, $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg \frac{z-i}{z+i} = \frac{\pi}{2}\right\}$, $\left\{z \in \mathbb{C} : \arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{3}\right\}$;
 d) $\{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Im}(z + i))^2 = 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(iz) \leq 1\}$;
 e) $\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z - i + 2) < 3 \wedge \arg z = \frac{\pi}{6}\right\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z - 3 + i) \geq -2 \wedge |z + 2 - 3i| > 4\}$.

Zadanie 9. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:

- a) $1, -1, i, -i$;
 b) $1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$;
 c) (*) $1 - i\sqrt{3}, -\sqrt{3} + i, \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{3}$;
 d) (***) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \sqrt{5} + 1 + i(\sqrt{10} - 2\sqrt{5}), \sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2}$;
 e) (*) $\cos \alpha - i \sin \alpha, \sin \alpha + i \cos \alpha, \sin \alpha - i \cos \alpha, 1 + i \operatorname{tg} \alpha, 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Zadanie 10 (***). Wykazać, że dla kątów α, β, γ (rysunek)



zachodzi $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 11. Obliczyć:

- (a) $\frac{(1-i)^{24}}{(\sqrt{3}-i)^{22}}, \frac{(1-i\sqrt{3})^{42}}{(-1+i)^{31}}, \frac{(-1+i\sqrt{3})^{36}}{(1+i)^{32}}, \frac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}, \frac{(-1+i)^{44}}{(-\sqrt{3}+i)^{28}}, \frac{(-1-i)^{20}}{(1-i\sqrt{3})^{12}}, \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}, (1+i\sqrt{3})^{2003}$;
 (b) (*) $\frac{(1+i\sqrt{3})^{76}+1}{(1-i)^{37}}, \frac{(1-i\sqrt{3})^{32}+5}{(1+i)^{17}}, \left(1+\cos \frac{\pi}{3}+i \sin \pi/3\right)^6, \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right)^6$.

Zadanie 12. Rozwiązać równania:

- a) (*) $z^6 = \frac{(1+i)^3}{\sqrt{3}+i}, z^4 = 2 - i\sqrt{12}, z^8 = (1+i)^8, z^3 = 2z\bar{z}, z^6 = \frac{(1+i)^3}{\sqrt{3}+i}, z^6 = \frac{\sqrt{3}-i}{i-1}$;
 b) (***) $(z+i)^n - (z-i)^n = 0, \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}$.

Zadanie 13. Przedstawić za pomocą $\sin x$ oraz $\cos x$:

- a) $\sin 5x, \cos 5x$;
 b) $\sin 6x, \cos 6x$.

Zadanie 14 (*). Sprawdzić, że liczba $z_0 = 1 + i \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$w(z) = z^4 - z^3 - 3z^2 + 8z - 6.$$

Wyznaczyć pozostałe pierwiastki.

Zadanie 15 (*). Wyznaczyć (w postaci algebraicznej!) wszystkie pierwiastki wielomianu

$$w(z) = (z^3 - (i - \sqrt{3})^6)(z^2 - i\sqrt{3}z - i).$$

Algebra liniowa, Zestaw 2 - struktury: grupa, pierścień, ciało

Zadanie 1. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{R}$ z działaniem $x \circ y = x + y - 1$ jest grupą.

Zadanie 2. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ z działaniem $x \star y = x + y - xy$ jest grupą.

Zadanie 3. Sprawdzić, czy funkcja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x - 1$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest izomorfizmem grupy $(\mathbb{R}, +)$ w grupę $(\mathbb{R}, \circ)$, gdzie $a \circ b = a + b + 1$.

Zadanie 4. Sprawdzić, czy funkcja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 1 - x$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest izomorfizmem grupy $(\mathbb{R}, +)$ w grupę $(\mathbb{R}, \circ)$, gdzie $a \circ b = a + b - 1$.

Zadanie 5. Sprawdzić, czy funkcja $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $h(x) = 1 - x$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest izomorfizmem grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ w grupę $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \star)$, gdzie $a \star b = a + b - ab$.

Zadanie 6. Sprawdzić, czy funkcja $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $h(x) = x - 1$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest izomorfizmem grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ w grupę $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \star)$, gdzie $a \star b = a + b + ab$.

Zadanie 7. Sprawdzić, czy funkcja $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$, $h(x) = \operatorname{sgn} x$ jest epimorfizmem grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ w grupę $(\{-1, 1\}, \cdot)$.

Zadanie 8 ().** Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Udowodnić, że dla każdego ustalonego $g \in G$ funkcja $f_g : G \rightarrow G$ określona wzorem $f_g(x) = gxg^{-1}$ jest automorfizmem grupy G .

Zadanie 9 ().** Sprawdzić, czy układ $(\mathbb{R}, \circ, \star)$ z działaniami $a \circ b = a + b + 1$ oraz $a \star b = a + b + ab$ dla $a, b \in \mathbb{R}$, jest ciałem.

Zadanie 10 ().** Sprawdzić, czy układ $(\mathbb{R}, \circ, \star)$ z działaniami $a \circ b = a + b - 1$ oraz $a \star b = a + b - ab$ dla $a, b \in \mathbb{R}$, jest ciałem.

Zadanie 11. Sprawdzić, czy funkcja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 1 - x$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest izomorfizmem ciała $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ na ciało $(\mathbb{R}, \circ, \star)$, gdzie $a \circ b = a + b - 1$ oraz $a \star b = a + b - ab$.

Zadanie 12. Sprawdzić, czy funkcja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x - 1$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest izomorfizmem ciała $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ na ciało $(\mathbb{R}, \circ, \star)$, gdzie $a \circ b = a + b + 1$ oraz $a \star b = a + b + ab$.

Algebra liniowa, Zestaw 3 - przestrzenie liniowe i odwzorowania liniowe

Zadanie 1. Sprawdzić, które z następujących podzbiorów U przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{R}$ są jej podprzestrzeniami:

- (a) $U = \{[t, t+1, 0, 1] \in \mathbb{R}^4 : t \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^4$;
- (b) $U = \{[t, s, t+s, t-s] \in \mathbb{R}^4 : t, s \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^4$;
- (c) $U = \{[ts, t, s] \in \mathbb{R}^3 : t, s \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^3$;
- (d) $U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}, V = \mathbb{R}^3$;
- (e) $U = \{[x, y, z, t] \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0, y + t = 0\}, V = \mathbb{R}^4$;
- (f) $U = \{t[1, 0, 1, 0] + s[0, -1, 0, 1] \in \mathbb{R}^4 : t, s \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^4$;
- (g) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}, V = M_2(\mathbb{R})$;
- (h) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : ab = 0 \right\}, V = M_2(\mathbb{R})$;
- (i) (*) zbiór wszystkich funkcji parzystych w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
- (j) (*) zbiór wszystkich funkcji nieparzystych w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
- (k) (*) zbiór wszystkich funkcji (słabo) rosnących w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
- (l) (*) zbiór wszystkich funkcji (słabo) malejących w przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
- (m) (*) $U = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = f(1)\}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
- (n) (*) $U = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) = 0 \text{ dla każdego } x \in [0, 1]\}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

W przypadku, gdy U jest podprzestrzenią liniową, w podpunktach (a)–(i) wyznaczyć jej wymiar.

Zadanie 2 ().** Zbadać, które z następujących podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nad $\mathbb{R}$ są jej podprzestrzeniami:

- (a) $U = \{(a_1, a_2, \dots) : a_{i+1} = a_i + a_{i-1} \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$;
- (b) $U = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1}) \text{ dla każdego } i = 2, 3, \dots\}$;
- (c) zbiór wszystkich ciągów $(a_1, a_2, \dots)$, których prawie wszystkie wyrazy (wszystkie poza skończoną liczbą) są równe 0;
- (d) zbiór wszystkich ciągów ograniczonych.

Zadanie 3. Sprawdzić, czy dany wektor v jest kombinacją liniową wektorów $u_1, \dots, u_n$ w przestrzeni V , jeśli

- (a) $V = \mathbb{R}^3, n = 3, u_1 = [1, 0, 2], u_2 = [2, 1, 1], u_3 = [1, 2, 0], v = [-1, -1, -1]$;
- (b) $V = \mathbb{R}[x], n = 4, u_1(x) = 1, u_2(x) = x - 1, u_3(x) = (x - 1)^2, u_4(x) = (x - 1)^3, v(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Zadanie 4 (*). Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których wektor v jest kombinacją liniową wektorów $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$:

- (a) $u_1 = [2, 3, 5], u_2 = [3, 7, 8], u_3 = [1, -6, 1], v = [7, -2, a]$;
- (b) $u_1 = [3, 2, 5], u_2 = [2, 4, 7], u_3 = [5, 6, a], v = [1, 3, 5]$.

Zadanie 5. Sprawdzić, czy

- (a) $[9, 6, 5, -1], [9, 6, 5, 0] \in \text{lin}([1, 1, 1, -1], [2, 1, 1, 1], [5, 3, 2, 0])$;
- (b) (*) $\text{lin}([1, 1, 2, 1], [0, 2, 2, 1], [3, 0, 1, 1]) \subset \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

Zadanie 6. Z podanego zbioru generującego podprzestrzeń U przestrzeni liniowej V wyznaczyć minimalny zbiór rozpinający U :

- (a) $V = \mathbb{R}^3, U = \text{lin}([1, 5, 7], [2, 1, 2], [-5, 2, 1])$;
- (b) $V = \mathbb{R}^4, U = \text{lin}([4, 2, 3, 2], [2, 1, 2, 2], [1, 3, 0, 4], [2, 1, 4, 1])$;
- (c) $V = M_2(\mathbb{R}), U = \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

Zadanie 7. Przedstawić wektor $v \in V$ w postaci sumy wektora z podprzestrzeni U_1 i wektora z podprzestrzeni U_2 :

- (a) $V = \mathbb{R}^3, U_1 = \text{lin}([1, 0, -1], [0, 1, 1]), U_2 = \text{lin}([1, 1, 0]), v = [1, 1, 1]$;
- (b) $V = \mathbb{R}^3, U_1 = \text{lin}([2, 0, 1], [0, 1, 2]), U_2 = \text{lin}([1, 1, 1], [3, 1, 2]), v = [1, 2, 3]$;

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \text{lin}([1, 1, 1])$, $U_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.

Czy wyznaczone przedstawienie jest jednoznaczne?

Zadanie 8. Sprawdzić, czy $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, gdy

(a) $U_1 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ oraz $U_2 = \text{lin}([1, 1, 1])$;

(b) $U_1 = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, -x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ oraz $U_2 = \text{lin}([0, 2, -1], [0, 0, 1])$.

Zadanie 9.

(a) (*) Pokazać, że $\mathbb{R}^4 = U_1 + U_2$, lecz $\mathbb{R}^4 \neq U_1 \oplus U_2$, gdzie $U_1 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0\}$ oraz $U_2 = \text{lin}([1, 1, 1, 1], [2, 0, -1, 3])$.

(b) (**) Do równania definiującego U_1 dołożyć jeszcze jedno tak, aby nowa podprzestrzeń U'_1 spełniała warunek $\mathbb{R}^4 = U'_1 \oplus U_2$.

Zadanie 10 (*)**. Sprawdzić, czy $M_{n \times n}(\mathbb{K}) = \mathbf{S}_n \oplus \mathbf{A}_n$?

Zadanie 11. Sprawdzić, czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne w podanych przestrzeniach liniowych V nad ciałem $\mathbb{R}$:

(i) $u_1 = [1, 2, 3]$, $u_2 = [3, 6, 7]$, $V = \mathbb{R}^3$;

(ii) $u_1 = [4, -2, 6]$, $u_2 = [6, -3, 9]$, $V = \mathbb{R}^3$;

(iii) $u_1 = [2, -3, 1]$, $u_2 = [3, -1, 5]$, $u_3 = [1, -4, 3]$, $V = \mathbb{R}^3$;

(ii) $u_1 = [2, -3, 1]$, $u_2 = [3, -1, 5]$, $u_3 = [1, -4, 3]$, $u_4 = [1, 1, 3]$, $V = \mathbb{R}^3$,

(iii) $u_1 = [1, 2, 3, 1]$, $u_2 = [4, 1, 5, 4]$, $u_3 = [2, 1, 3, 4]$, $u_4 = [6, 3, 10, 5]$, $V = \mathbb{R}^4$;

(iv) $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $u_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $V = M_2(\mathbb{R})$,

(v) $u_1(x) = 2x + 1$, $u_2(x) = x^2$, $u_3(x) = (x + 1)^2$, $V = \mathbb{R}[x]_2$.

Zadanie 12 (*)**. Sprawdzić, czy dane układy wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ są liniowo niezależne:

(a) $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = \sin x$, $u_3(x) = \sin 2x$;

(b) $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = \sin^2 x$, $u_3(x) = \cos 2x$.

Zadanie 13 (*). Sprawdzić, czy wektory $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2}$, $u_3 = \sqrt{3}$ są liniowo niezależne w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$?

Zadanie 14 ()**. Załóżmy, że w przestrzeni $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ liniowo niezależne są wektory $u_1, \dots, u_4$. Czy liniowo niezależne są wektory $v_1 = 3u_1 + 2u_2 + u_3 + u_4$, $v_2 = 2u_1 + 5u_2 + 3u_3 + 2u_4$, $v_3 = 3u_1 + 4u_2 + 3u_3 + 4u_4$?

Zadanie 15. Sprawdzić, czy wektory $u_1, \dots, u_n$ stanowią bazę przestrzeni liniowej $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ i jeśli tak, to znaleźć współrzędne wektora v w tej bazie:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $u_1 = [1, 0, 1]$, $u_2 = [1, 1, 0]$, $u_3 = [1, 1, 1]$, $v = [1, 2, 3]$;

(b) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $u_1 = [1, i]$, $u_2 = [i, 1]$, $v = [1 + i, 2i]$;

(d) $V = \mathbb{R}[x]_3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x - 1$, $u_3(x) = (x - 1)^2$, $u_4(x) = (x - 1)^3$, $v(x) = -1 + x + 2x^2 + x^3$;

(e) $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $u_1 = 1 + i$, $u_2 = 3i$, $v = -2 + i$.

Zadanie 16. Wyznaczyć bazę i wymiar podanych podprzestrzeni:

(a) $\text{lin}([5, 2, -3], [4, 1, -2], [1, 1, -1])$ w $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$;

(b) $\text{lin}([2, -1, 3, 5], [4, -3, 1, 3], [3, -2, 3, 4])$ w $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$.

(c) $U = \{[u, 2t, u - 2t + s, u - s] \in \mathbb{R}^4 : u, t, s \in \mathbb{R}\}$ w $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$;

(d) $U = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$ w $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$;

(e) $U = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_3 = 0\}$ w $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$;

(f) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ -b & 2a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}) : a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ w $(M_2(\mathbb{Q}), +, \mathbb{Q}, \cdot)$;

- (g) $U = \{z \in \mathbb{C} : z + 2\bar{z} = 0\}$ w $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$;
 (h) $U = \{[u, 2s - t, t + u, u + s - t] \in \mathbb{R}^4 : u, s, t \in \mathbb{R}\}$ w $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$;
 (i) $U = \text{lin}([1, 1, 0], [2, 1, 1], [0, 1, 2], [1, 1, 0])$ w $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$;
 (j) $U = \text{lin}((x - 1)^2, (x + 1)^2, 2x)$ w $(\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, \cdot)$.

Zadanie 17 (*). Załóżmy, że wektory u_1, u_2, u_3 stanowią bazę przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{R}$. Sprawdzić, czy podane układy wektorów stanowią bazę przestrzeni V :

- 1) $(u_1 + u_2 + u_3, u_1 + 2u_2 + u_3, u_1 + u_2 + 2u_3)$,
 2) $(u_1 + 2u_2 + 3u_3, 2u_1 + 2u_2 + u_3, 2u_1 + 3u_2 + u_3)$.

Zadanie 18 (*). Znaleźć taką bazę przestrzeni $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$, w której wektor $e_1 = (1, 0, 0)$ ma współrzędne $(1, 2, 1)$ oraz znaleźć taką bazę tej przestrzeni w której wektor e_1 ma współrzędne $(1, 1, 1)$ zaś wektor $e_1 + e_2 = [1, 1, 0]$ ma współrzędne $(1, 0, 0)$.

Zadanie 19 (*). Podany układ u wektorów uzupełnić do bazy b wektorami bazy kanonicznej:

- (a) $u = \{[1, 2, 1, 1], [1, 1, 2, 1]\}$ w $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$;
 (b) $u = \{[1, i, 1], [i, 1, 1]\}$ w $(\mathbb{C}^3, +, \mathbb{C}, \cdot)$.

Zadanie 20 ()**. Wykazać, że jeśli $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ jest przestrzenią liniową skończonego wymiaru, to dla każdej podprzestrzeni U przestrzeni V istnieje taka podprzestrzeń W przestrzeni V , że $V = U \oplus W$. Podprzestrzeń W nazywamy *podprzestrzenią dopełniającą przestrzeni U* . Kiedy taka podprzestrzeń dopełniająca jest wyznaczona jednoznacznie? Dla danej podprzestrzeni U przestrzeni $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ wyznaczyć podprzestrzeń dopełniającą:

- (a) $V = \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, $U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_3 = 0\}$;
 (b) $V = \mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$, $U = \text{lin}([1, 2, 2, 0], [1, 1, 2, 1], [0, 0, 1, 0])$.

Zadanie 21 ()**. Niech $f(x) \in \mathbb{R}[x]_n$. Kiedy układ wektorów $(f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x))$ jest bazą przestrzeni $(\mathbb{R}[x]_n, +, \mathbb{R}, \cdot)$?

Zadanie 22. Sprawdzić, czy podane przekształcenia są odwzorowaniami liniowymi:

- (a) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L([x, y, z]) = [x + z, 2x + z, 3x - y + z]$;
 (b) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L([x, y, z]) = [x, y + 1, z + 2]$;
 (c) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L([x, y, z]) = [x - y + z, x, y]$;
 (d) $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L([x, y, z, t]) = [x - y + 2t, 2x + 3y + 5z - t, x + z - t]$;
 (e) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L([x, y, z]) = [x + z, 2zy, 3x - y + z]$.

W przypadku, gdy L jest przekształceniem liniowym, zbadać, czy jest to monomorfizm liniowy lub epimorfizm liniowy i wyznaczyć $\ker L$ oraz $\text{im } L$.

Zadanie 23 ()**. Wykazać, że funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ dla $z \in \mathbb{C}$ jest automorfizmem liniowym przestrzeni $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$, ale nie jest endomorfizmem liniowym przestrzeni $(\mathbb{C}, +, \mathbb{C}, \cdot)$.

Zadanie 24 (*)**. Sprawdzić, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, odwzorowanie $\int_a^b \cdot : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, które funkcji $f \in \mathcal{C}([a, b])$ przyporządkowuje *całkę oznaczoną funkcji f na przedziale $[a, b]$* jest przekształceniem liniowym. Czy jest to monomorfizm liniowy?

Zadanie 25 (*)**. Niech $(U, +, \mathbb{K}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową i niech U_1, U_2 będą takimi jej podprzestrzeniami, że $U = U_1 \oplus U_2$.

- (a) Pokazać, że istnieje dokładnie jedno takie odwzorowanie liniowe $L : U \rightarrow U$, że $L|_{U_1} = \text{id}_{U_1}$ oraz $L|_{U_2} = -\text{id}_{U_2}$. (wtedy L jest *symetrią względem U_1 wzdłuż U_2*).
 (b) Pokazać, że jeśli $L_{U_1} = \text{id}_{U_1}$ oraz $L_{U_2} = \Theta$ (tzn. L_{U_2} jest zerowym odwzorowaniem liniowym), to L jest *rzutem przestrzeni U na podprzestrzeń U_1 wzdłuż U_2* .

W obu przypadkach wyznaczyć jądro i obraz wyznaczonych przekształceń liniowych.

Zadanie 26 (*). Dane jest przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L([x, y]) = [2x + 3y, x - y, 3y]$. Wyznaczyć:

- (a) obrazy podprzestrzeni: $\mathbb{R}^2$, $\text{lin}([1, 0])$, $\text{lin}([1, 1])$, $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$;

- (b) przeciwobrazy podprzestrzeni: $\text{lin}([2, 1, 3])$, $\text{lin}([2, 1, 0])$, $\text{lin}([3, -1, 3], [0, 1, 0])$, $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, $\mathbb{R}^3$, $\{[0, 0, 0]\}$.

Zadanie 27 ().** Niech (u_1, u_2, u_3) będzie bazą przestrzeni liniowej $(U, +, \mathbb{K}, \cdot)$ i niech (v_1, v_2, v_3) będzie bazą przestrzeni liniowej $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$. Wiadomo, że przekształcenie liniowe $f : U \rightarrow V$ spełnia warunki

$$f(u_1) = v_1 + 2v_2 + 3v_3, \quad f(u_2) = 4v_1 + 5v_2 + 6v_3, \quad f(u_3) = 7v_1 + 8v_2 + 9v_3.$$

Wyznaczyć $\dim \ker f$ oraz $\dim \text{im } f$.

Zadanie 28. Sprawdzić, czy istnieje endomorfizm liniowy $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ spełniający warunki:

- (a) $f([1, 1, 0]) = [1, 0, 0]$, $f([0, 1, 1]) = [0, 1, 0]$, $f([1, 0, 1]) = [0, 0, 1]$, $f([1, 1, 1]) = [1, 1, 1]$;
 (b) $f([1, 1, 0]) = [1, 2, 3]$, $f([0, 1, 1]) = [3, 2, 1]$, $f([1, 2, 1]) = [4, 4, 4]$;
 (c) $f([1, 1, 0]) = [1, 2, 0]$, $f([0, 1, 1]) = [3, 0, 1]$.

W przypadku pozytywnej odpowiedzi przeanalizować liczbę istniejących odwzorowań liniowych spełniających podane warunki i podać wzór przynajmniej jednego takiego przekształcenia liniowego.

Zadanie 29 (**).** Skonstruować endomorfizm liniowy $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ spełniający warunki:

$$f([1, 1, 2]) = [2, 1, 1], \quad f([2, 1, 1]) = [1, 1, 2], \quad f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^3}.$$

Wyznaczyć wzór analityczny takiego odwzorowania.

Zadanie 30 (*). Znaleźć wzór analityczny następujących odwzorowań liniowych:

- (a) symetrii przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ względem $\text{lin}([1, 2])$ wzdłuż $\text{lin}([0, 1])$;
 (b) symetrii przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ względem $\text{lin}([1, 1, 0], [0, 1, 2])$ wzdłuż $\text{lin}([1, 1, 1])$;
 (c) rzutu przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ na przestrzeń $\text{lin}([2, 3])$ wzdłuż $\text{lin}([-1, 1])$;
 (d) rzutu przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ na przestrzeń $\text{lin}([1, 0, 1])$ wzdłuż $\text{lin}([1, 1, 1], [-1, 1, 2])$.

Zadanie 31. Skonstruować endomorfizm liniowy $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ przestrzeni liniowej $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ spełniający warunki $\ker f = \text{lin}([1, 1, 0], [1, 1, 1])$, $\text{im } f = \text{lin}([1, 1, 1])$. Czy istnieje tylko jeden taki endomorfizm?

Algebra liniowa, Zestaw 4 - macierze i układy równań

Zadanie 1. Dla zadanych macierzy wykonać działania:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a) $(AC)^T$ b) $((A^T B))^T$ c) BA^T d) BB^T .

Zadanie 2 (*). Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ wyznaczyć wszystkie takie macierze B , że $AB = BA$.

Zadanie 3. Wyznaczyć takie macierze $\mathbf{0} \neq A, B \in M_2(\mathbb{R})$, że $AB = \mathbf{0}$. Czy musi wtedy zajść również $BA = \mathbf{0}$.

Zadanie 4 (*). Wyznaczyć (dowód indukcyjny!)

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ b) $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n$ c) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^n$.

Zadanie 5. Rozwiązać równania macierzowe

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$

Zadanie 6. Wyznaczyć rzędy podanych macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Zadanie 7 (*). Wyznaczyć rzędy podanych macierzy w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$:

1) $\begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{bmatrix}.$

Zadanie 8. Dla podanych macierzy obliczyć ich wyznaczniki i w przypadku macierzy nieosobliwych (podpunkty a)– f)) wyznaczyć macierze odwrotne:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{bmatrix}$

g)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ h)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$

Zadanie 9. Wykazać, że dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ zachodzi

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \mathbf{0}.$$

Zadanie 10. Wykazać, że dla macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ zachodzą następujące implikacje:

- (a) jeśli $A^2 - A + I = \mathbf{0}$, to macierz A jest nieosobliwa oraz $A^{-1} = I - A$,
 (b) jeśli $A^3 + A^2 - 3A + 2I = \mathbf{0}$, to macierz A jest nieosobliwa oraz $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A - A^2)$,
 (c) (*) jeśli $A^k = \mathbf{0}$ dla pewnego $k \geq 1$, to $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$.

Zadanie 11. Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$, jeśli

- a) $A^2 = A^T$ b) $A^T - A^{-1} = 0$ c) $A^2 + A^{-1} = 0$.

Zadanie 12. Rozwiązać podane układy równań metodą eliminacji:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 4 \end{cases} \\ \text{c)} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases} & \text{d)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases} \\ \text{e)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -1 \end{cases} & \end{array}$$

Zadanie 13 (*). Wskazać wszystkie możliwe zestawy niewiadomych, które mogą być parametrami określającymi rozwiązanie podanych układów równań liniowych:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \\ \text{c)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases} & \end{array}$$

Zadanie 14. Rozwiązać podane układy równań:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases} & \text{c)} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \end{array}$$

Zadanie 15 (*). Dla jakich parametrów $k, l \in \mathbb{R}$ układy równań

$$\text{a)} \quad \begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + lx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2lx_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{b)} \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 = 0 \\ lx_1 + x_2 = 0 \\ kx_1 + lx_2 = 0 \end{cases}$$

mają niezerowe rozwiązanie.

Zadanie 16 (*). Dla jakich parametrów $k, l \in \mathbb{R}$ zbiór rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = k \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + lx_3 = -1 \end{cases}$$

jest:

- (i) pusty,
 (ii) jednoelementowy,
 (iii) nieskończony?

Zadanie 17 (*). W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 6x_3 = a \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases} & \text{c)} \quad & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = ax_1 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = ax_2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = ax_3 \end{cases} \\
 \text{d)} \quad & \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = a \\ x_1 - x_2 + ax_3 = 1 \end{cases} & \text{e)} \quad & \begin{cases} a^2x_1 + 2x_2 + ax_3 = 2a \\ x_1 + (a-1)x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = a \end{cases} \\
 \text{f)} \quad & \begin{cases} 2x_1 + ax_2 + 2x_3 + 2x_5 = -2 \\ 2x_1 + ax_2 + 2x_3 + ax_5 = 0 \\ -2x_1 - ax_2 - 3x_3 + ax_4 - 2x_5 = 3 \\ -4x_1 - (a+1)x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Zadanie 18. Dla podanych układów bazowych v_1, v_2 wyznaczyć macierz przejścia od układu v_1 do układu v_2 :

- $v_1 = ([1, 0], [0, 1])$ $v_2 = ([-2, 1], [1, 1])$
- $v_1 = ([1, -1], [1, 2])$ $v_2 = ([-2, 1], [1, 1])$
- $v_1 = ([1, 0, -1], [1, 1, 1], [1, 1, 0])$ $v_2 = ([2, 1, 1], [1, -1, 1], [0, 0, 1])$
- $v_1 = ([1, 1, -1], [0, 1, 1], [1, 2, -1])$ $v_2 = ([0, 0, 1], [1, 0, 0], [0, 1, 0])$.

Jaka będzie macierz przejścia od układu v_2 do układu v_1 ?

Zadanie 19 (*). Dla wektora $v \in \mathbb{K}^n$ i dla bazy v przestrzeni $\mathbb{K}^n$ przez v_v oznaczmy wektor współrzędnych wektora v w bazie v . Przez e oznaczmy bazę kanoniczną przestrzeni $\mathbb{K}^n$. Dla danych w zadaniu 18 baz wyznaczyć:

- $v_{v_1} = v_e$ wiedząc, że $v_{v_2} = (4, -2)$,
- v_{v_2} oraz v_e wiedząc, że $v_{v_1} = (1, -3)$,
- v_{v_1} oraz v_{v_2} wiedząc, że $v_e = (1, -1, -2)$,
- v_{v_2} oraz v_e wiedząc, że $v_{v_1} = (-1, 0, 1)$.

Zadanie 20. Wyznaczyć macierz odwzorowania $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ w podanych bazach v_1 przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz v_2 przestrzeni $\mathbb{R}^k$:

- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y \\ x - y \end{pmatrix}$, $v_1 = ([-1, 1], [0, 2])$, $v_2 = ([1, -1, 1], [1, 0, 2], [1, 2, 0])$,
- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 3x - y \end{pmatrix}$, $v_1 = v_2 = ([1, -3], [1, 1])$,
- $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + z \\ -x + 2y - z \\ x - 2y + 4z \end{pmatrix}$, $v_1 = ([-1, 1, 0], [0, 2, 1], [1, 1, -1])$, $v_2 = ([1, 0, 1], [0, 0, -1], [1, 1, 0])$.

Algebra liniowa, Zestaw 5 - odwzorowania dwuliniowe i formy kwadratowe, diagonalizacja

Uwaga. Zadania 1–2 należy rozwiązać na dwa sposoby:

- (i) korzystając z definicji macierzy formy dwuliniowej/kwadratowej,
- (ii) wykorzystując macierz przejścia między bazami.

Zadanie 1. Dla podanych odwzorowań dwuliniowych wyznaczyć ich macierze w zadanych bazach oraz rzędy tych odwzorowań:

- (a) $\Lambda \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $\Lambda([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = ([-2, 1], [1, 1])$,
- (b) $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $\Lambda([x_1, x_2], [y_1, y_2, y_3]) = 9x_1y_1 + x_1y_2 + 7x_1y_3 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3$, $\mathbf{v}_1 = ([1, -4], [3, -5])$, $\mathbf{v}_2 = ([-1, 1, 1], [-1, 2, 0], [1, 1, -2])$,
- (c) $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $\Lambda([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + -3x_2y_3 + 3x_3y_1 - 5x_3y_2$, $\mathbf{v}_1 = ([1, -1, -4], [3, -1, 0], [2, 0, -1])$, $\mathbf{v}_2 = ([-1, 2, 0], [-1, 1, 1], [1, 5, -1])$.

Zadanie 2. Wyznaczyć postać funkcjonału liniowego znając jego macierz w podanych bazach:

- (a) $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $\mathbf{M}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}(\varphi) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{v}_1 = ([0, 0, 1], [1, 1, -1], [0, 1, -4])$, $\mathbf{v}_2 = ([1, -2], [-3, 0])$,
- (b) $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $\mathbf{M}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}(\varphi) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = ([0, 1, -2], [-2, 0, 1], [0, 0, -3])$.

Zadanie 3. Dla podanych form kwadratowych:

- (i) wyznaczyć dwuliniową formę biegunową i jej macierz w podanych bazach,
- (ii) sprawdzić określoność formy kwadratowej,

- (a) $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $q([x_1, x_2]) = -3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$, $\mathbf{v} = ([-1, 1], [3, -2])$,
- (b) $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $q([x_1, x_2, x_3]) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_2x_3 + 4x_3^2$, $\mathbf{v} = ([1, 1, -1], [-1, 0, 1], [2, 1, 1])$,
- (c) $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $q([x_1, x_2, x_3]) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$, $\mathbf{v} = ([1, 0, -1], [-1, 1, 1], [0, 1, -1])$,
- (d) $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $q([x_1, x_2, x_3]) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 7x_3^2$, $\mathbf{v} = ([1, 0, -1], [-1, 1, 1], [0, 1, -1])$,
- (e) $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $q([x_1, x_2, x_3]) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$, $\mathbf{v} = ([-1, 1, -1], [-1, 0, 0], [0, 1, -1])$,
- (f) $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $q([x_1, x_2, x_3]) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 10x_2x_3 + 9x_3^2$, $\mathbf{v} = ([0, 0, -1], [-1, 2, 1], [0, 1, -1])$.

Zadanie 4. Wyznaczyć postać formy kwadratowej q znając jej macierz w zadanej bazie:

- (a) $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{v}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = ([2, 1], [-1, 0])$,
- (b) $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{M}_{\mathbf{v}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = ([2, -3, 1], [1, 0, 1], [1, 1, 1])$.

Zadanie 5. Dla podanych odwzorowań

- (a) $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L([x_1, x_2]) = [4x_1 + x_2, 12x_1 + 5x_2]$,
- (b) $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L([x_1, x_2]) = [7x_1 - 8x_2, 3x_1 - 4x_2]$,
- (c) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L([x_1, x_2, x_3]) = [4x_1 - 2x_2 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3, 6x_1 - 6x_2 + 4x_3]$,
- (d) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L([x_1, x_2, x_3]) = [4x_1 - 4x_2 + 8x_3, 4x_1 - 4x_2 + 8x_3, x_1 - x_2 + 2x_3]$,
- (e) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L([x_1, x_2, x_3]) = [6x_1 - 4x_2 + x_3, 5x_1 - 3x_2 + x_3, -4x_1 + 4x_2]$,
- (f) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L([x_1, x_2, x_3]) = [3x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, 4x_1 + 8x_2 - 2x_3]$,

wyznaczyć wartości własne i wektory własne:

- (i) z definicji,
- (ii) z macierzy odwzorowania w bazach kanonicznych.

Następnie,

- (x1) wskazać te przekształcenia L , których macierz jest diagonalizowalna,
- (x2) w przypadku diagonalizowalności, wskazać bazę rozpatrywanej przestrzeni liniowej, w której macierz odwzorowania L jest macierzą diagonalną,
- (x3) w tych przypadkach wyznaczyć postać odwzorowania L^{19} oraz obliczyć $L^{19}(e_i)$, gdzie e_i są wektorami bazy kanonicznej dziedziny odwzorowania L .

Algebra liniowa, Zestaw 6 - geometria analityczna

Zadanie 1. Obliczyć:

- (i) $[\sqrt{2}, 1, -2] \circ [-\sqrt{2}, -4, 1]$,
- (ii) $(2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) \circ (-\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k})$,
- (iii) $[0, 2, -3] \times [2, -1, 1]$,
- (iv) $(\vec{i} - 2\vec{j} + 3) \times (2\vec{i} - 3\vec{k})$.

Zadanie 2. Wyznaczyć:

- (i) wektory jednostkowe o kierunku wektorów $[3, -\sqrt{2}, 1]$ oraz $[0, -\sqrt{2}, 1]$,
- (ii) wektor dwusiecznej kąta między wektorami $[2, -3, 1]$ i $[0, 2, -3]$,
- (iii) wektor jednostkowy prostopadły do wektorów $[0, 2, -1]$ oraz $[-2, 1, 0]$.

Zadanie 3. Obliczyć kąty:

- (i) między wektorami $[1, \sqrt{2}, 3]$ oraz $[0, -\sqrt{2}, 1]$,
- (ii) między wektorem $[4, -12, 3]$ i płaszczyzną XOZ ,
- (iii) przekątnymi ścian sześcianu o krawędzi długości $a = 4$.

Zadanie 4. Obliczyć "składową skalarną" rzutu wektora $[2, -3, 1]$ na kierunek:

- (i) wektora $[-1, 1, 1]$,
- (ii) na kierunek dwusiecznej między wektorami $[-1, 0, 2]$ oraz $[2, -1, 0]$,
- (iii) na kierunek prostopadły do wektorów $[-2, 1, -1]$ oraz $[1, -2, 2]$.

Zadanie 5. Obliczyć:

- (i) pole trójkąta rozpiętego na wektorach $[2, -1, 1]$ oraz $[1, 2, -3]$,
- (ii) pole równoległoboku $ABCD$ o wierzchołkach $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ oraz $C(2, 1, -3)$,
- (iii) objętość i pole powierzchni czworościanu o wierzchołkach $(-1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(-2, 1, 0)$ oraz $(3, 2, -1)$.

Zadanie 6. Obliczyć odległość punktu $(1, -1, 1)$ od:

- (i) prostej $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+3}{2}$,
- (ii) od prostej $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t$
- (iii) od płaszczyzny $3x - y + 5z = 4$,
- (iv) od płaszczyzny $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$.

Zadanie 7. Sprawdzić, czy:

- (i) wektory $[2, 1, 3]$, $[1, -1, 1]$, $[3, 3, 5]$ są współpłaszczyznowe,
- (ii) punkt $(1, 1, 1)$ leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty $(-1, 0, 2)$, $(1, 2, -3)$ oraz $(-2, 1, 0)$.

Zadanie 8. Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzn:

- (i) przechodzącej przez punkt $A(-1, 2, 1)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n}[1, -2, 3]$,
- (ii) przechodzącej przez punkty $(1, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$ oraz $(5, 6, 7)$,
- (iii) przechodzącej przez punkty $(1, 1, 2)$ oraz $(0, -2, 1)$ i prostopadłej do wektora $\vec{a} = [-2, 2, 1]$,
- (iv) przechodzącej przez punkt $(2, 0, -1)$ i równoległej do wektorów $[-1, 1, 2]$ oraz $[-2, 1, 0]$,
- (v) przechodzącej przez punkt $(-3, 2, -1)$ i równoległej do płaszczyzny $4x - 3y + z = 5$,
- (vi) przechodzącej przez punkt $(1, 2, -3)$ i prostopadłej do płaszczyzn $x - 2z = -4$ oraz $y + 3z = 2$.

Zadanie 9. Napisać równania prostych:

- (i) przechodzącej przez punkt $A(-1, 2, 1)$ i równoległej do wektora $\vec{u}[1, -2, 3]$,
- (ii) przechodzącej przez punkty $(1, 1, 1)$ oraz $(5, 6, 7)$,
- (iii) przechodzącej przez punkty $(1, 1, 2)$ oraz $(0, -2, 1)$ i prostopadłej do wektora $\vec{a} = [-2, 2, 1]$,
- (iv) przechodzącej przez punkt $(2, 0, -1)$ i prostopadłej do płaszczyzny $2x + y - z = 4$,
- (v) przechodzącej przez punkt $(-3, 2, -1)$ i prostopadłej do wektorów $\vec{a} = [-2, 0, 1]$ oraz $\vec{b} = [-1, 2, 3]$,
- (vi) leżącej jednocześnie w płaszczyznach $x - y + 3z = -4$ oraz $2x + y - z = 2$,
- (vii) dwusiecznej kąta między przecinającymi się prostymi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} s$ oraz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} t$.

Zadanie 10. Obliczyć odległości:

- (i) płaszczyzn $2x - y + z = 4$ oraz $-4x + 2y - 2z = 7$,
- (ii) prostej $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ oraz płaszczyzny $2x - 2y + 3z = 8$,
- (iii) prostych $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} s$ oraz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} t$,
- (iv) prostych $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} s$ oraz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} t$.

Zadanie 11. Obliczyć:

- (i) kąt przecięcia płaszczyzn $x - y + 3z = 4$ oraz $-x + 2y - z = 4$,
- (ii) kąt przecięcia prostej $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ oraz płaszczyzny $x - 2y + z = 3$,
- (iii) kąt przecięcia prostych $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} s$ oraz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} t$.

Zadanie 12. Wyznaczyć rzut prostokątny:

- (i) punktu $(4, 5, -6)$ na płaszczyznę $x - y + 3z = 4$,
- (ii) punktu $(1, 1, -1)$ na prostą $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{-2}$,
- (iii) prostej $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} r$ na płaszczyznę $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$.

Zadanie 13. Wyznaczyć punkt symetryczny:

- (i) do punktu $(4, 5, -6)$ względem płaszczyzny $2x - y + z = 6$,
- (ii) do punktu $(1, 1, -1)$ względem prostej $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{-2}$,
- (iii) do punktu $(2, 3, -1)$ względem punktu $(1, 1, -2)$.

Zadanie 14 (*). W chwili $t_0 = 0$ z punktu $(4, -3, 1)$ wystrzelono raketę z prędkością liniową $v = 5\text{km/h}$ w kierunku wektora $[2, -1, 2]$. Wyznaczyć położenie rakiety w momencie $t_1 = 4$ pomijając siły ciężkości.

Zadanie 15 ().** Na pochyłym terenie wytyczono trójkątny obszar, którego wierzchołki są wzniesione nad poziom morza na wysokości $h_1 = 200\text{m}$, $h_2 = 330\text{m}$ oraz $h_3 = 370\text{m}$. Obliczyć wysokość nad poziomem morza środka ciężkości tego obszaru.

Zadanie 16 ().** Wyznaczyć pole powierzchni dachu wiaty, której podłoże ma kształt trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 9m oraz 12m. Dach wiaty zamontowany jest na stalowych podporach o wysokościach 5m w wierzchołku kąta prostego, 4m na końcu przyprostokątnej dł. 9m oraz 6m na końcu przyprostokątnej dł. 12m.

Zadanie 17 ().** Radiostacja składa się z dwóch prostoliniowych anten zawieszonych na dwóch parach słupów umieszczonych w przeciwległych wierzchołkach prostokąta $ABCD$ o bokach $|AB| = 40\text{m}$ oraz $|AD| = 30\text{m}$. Wysokości słupów są równe odpowiednio, $h_A = 15\text{m}$, $h_B = 20\text{m}$, $h_C = 30\text{m}$ oraz $h_D = 25\text{m}$. Obliczyć odległość tych anten.